Teoría de Representación para PMV_f-álgebras Producto

LILIAN JOHANA CRUZ MERA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2020

TEORÍA DE REPRESENTACIÓN PARA PMV_f-ÁLGEBRAS PRODUCTO

LILIAN JOHANA CRUZ MERA

Trabajo de Investigación presentado como requisito para optar al título de
Doctora en Ciencias Matemáticas

Director
Dr. YURI ALEXANDER POVEDA
Universidad Tecnológica de Pereira

Co-director
Dr. GUILLERMO ORTIZ
Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2020

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LILIAN JOHANA CRUZ MERA

Teoría de Representación para PMV_f-álgebras Producto

PALABRAS CLAVE: MV-álgebras, MV-álgebras producto, f_u-anillo, ideal primo, espectro, co-extensividad, representación categórica.

SANTIAGO DE CALI

2020

Índice general

Resumen

En este trabajo de investigación, se establece de manera explícita la equivalencia categórica entre una subvariedad propia de la clase de PMV-álgebras que llamaremos PMV_f -álgebras (PMV-álgebras de funciones), y la categoría de los f_u-anillos semi-low. Esta representación categórica se realiza con el espectro primo de las MV-álgebras, a través de la equivalencia entre MV-álgebras y l_u-grupos establecida por Mundici, pero desde la perspectiva de Dubuc-Poveda, que extiende la construcción definida por Chang para cadenas. Como caso particular, se caracterizan los f_u-anillos asociados por esta equivalencia a las álgebras de Boole. Se estudian algunos anillos de funciones continuas a trozos de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ cuyos componentes están constituidos por un número finito de polinomios con coeficientes enteros. Estos casos de "curvas algebraicas" (curvas tratadas como ceros de los polinomios que la componen), corresponden a una subclase de PMV_f-álgebras relacionadas con las PMV_f-álgebras libres de la variedad generada por el intervalo $[0, 1]$, $\mathbb{HSP}[0, 1]$. Por último, dado que la categoría de f-anillos con unidad fuerte contiene una clase de anillos no unitarios, como por ejemplo algunos ideales principales en el anillo de funciones continuas con valores en un espacio topológico compacto, probamos así la co-extensividad de una categoría esencialmente diferente a la categoría de anillos conmutativos unitarios. Como consecuencia, obtenemos la co-extensividad de algunas subcategorías plenas de las MV-álgebras con producto, a través de la equivalencia entre las PMV_f-álgebras y los f_u-anillos.

INTRODUCCIÓN

Las álgebras multivaluadas llamadas MV-álgebras, fueron introducidas por Chang [6], para demostrar un teorema de completitud para la lógica fuzzy propuesto en 1930 por Łukasiewicz y Tarsky para sistemas con valores de verdad en el intervalo $[0,1]$. Chang estableció la equivalencia entre l-grupos abelianos totalmente ordenados con unidad fuerte y las MV-álgebras totalmente ordenadas. Más tarde esta relación fue afianzada por Mundici en [36], quien encontró que esta equivalencia se podía extender a todas las MV-álgebras y a todos los l-grupos con unidad fuerte. Este puente generó otro viraje importante que permite relacionar aspectos de la categoría de l_u-grupos conmutativos con la categoría de MV-álgebras.

Teoremas clásicos de la teoría de anillos conmutativos unitarios tienen su reflejo en las MV-álgebras, por eso no fue extraño que Dubuc y Poveda en [12] utilizaran con éxito técnicas que habían sido usadas para los anillos conmutativos en la teoría de representación. Pero una de las complejidades de hacer lo que se denominaría un álgebra conmutativa fuzzy, se relaciona con la ausencia de una operación producto en las MV-álgebras. Sin embargo, la MV-álgebra generadora, $[0,1]$, tiene de manera natural un producto el cual tiene propiedades naturales dentro de su estructura de MV-álgebra, lo que sirvió de inspiración para este trabajo. Además, la bibliografía sobre MV-álgebras con producto como las tratadas en [11] y en [35], han hecho desarrollos que no tienen el enfoque que se quiere realizar en este trabajo, relacionado con tener una teoría adecuada para demostrar teoremas de un álgebra conmutativa fuzzy.

Las MV-álgebras producto fueron estudiadas por Di Nola et al, en [11] como variedades del álgebra universal. En el 2000 Montagna en [33] encontró una nueva axiomatización para las PL-álgebras y dio una caracterización de diversas subclases de MV-álgebras producto. En 2001, Montagna y Panti en [35] establecieron diversas clases ecuacionales correspondientes a sub-variedades de las MV-álgebras producto y estudiaron sus respectivos espectros primos. En 2005, Montagna [34] estableció una equivalencia categórica entre la clase de PMV-álgebras conmutativas con unidad y una subclase de f-anillos conmutativos con unidad fuerte.

Los l_u-grupos correspondientes a las MV-álgebras libres, mediante la equivalencia realizada por Mundici en [36], y descrita por Dubuc y Poveda en [12] de manera general a como hizo Chang para MV-álgebras totalmente ordenadas, se encuentran inmersos en el anillo reticular de funciones continuas del intervalo [0,1] en los reales. Así, es posible considerar el sub-anillo generado por estos l_u-grupos, en este anillo retícular, y aplicar el funtor Γ entre estos nuevos l_u-grupos y MV-álgebras. El resultado es una clase de MV-álgebras que está cerrada por productos de manera natural, en el sentido que el producto correspondiente a la MV-álgebra [0,1], es el usual de los números reales.

Es así que en 2018, Estrada y Poveda en [16] introducen los *rigs débiles multivaluados* y dieron una axiomatización para esta variedad. En este contexto establecieron propiedades básicas acerca de ideales, homomorfismos, cocientes y radicales. Esta nueva clase contiene a la clase de MV-álgebras producto presentada en [11] y a la variedad definida en [34], y allanó el camino para introducir las estructuras estudiadas en este trabajo, que no se encuentran en la literatura especializada, y se denominan PMV_f-álgebras, cuya contraparte por la equivalencia encontrada, son los f_u-anillos semi-low, que tienen como ejemplo los números reales.

Para continuar con los delineamientos expuestos anteriormente, los resultados principales obtenidos en este trabajo son:

1. Se establece la equivalencia natural entre la categoría de PMV_f álgebras y la categoría de f-anillos semi low. Esta construcción permite encontrar representaciones explícitas de los anillos asociados a ejemplos notables en la clase de PMV_f-álgebras, a saber la MV -álgebra $[0, 1]$ con el producto

usual, la MV-álgebra de funciones de $[0,1]^n$ en $[0,1]$, con el producto usual de funciones, o la PMV_f -álgebra de las álgebras booleanas con el producto definido como el ínfimo. Para obtener la equivalencia categórica fue necesario establecer resultados originales, los cuales se encuentran sin referencia en este documento.

2. Se caracterizan las PMV_f-álgebras libres con un generador en la subvariedad $\mathbb{HSP}[0,1]$, que están relacionadas con las “curvas algebraicas” instanciadas en los f-anillos de funciones continuas que localmente son polinomios con coeficientes enteros.

3. Se prueba la co-extensividad de la categoría de los f_u-anillos y por la equivalencia, de la categoría de las PMV_f-álgebras. La co-extensividad permite decidir si una categoría algebraica posee propiedades geométricas. Así, esta investigación abrirá un camino hacia el estudio de la geometría algebraica difusa y a propiedades intrínsecas de las curvas en los f-anillos conmutativos unitarios, en las PMV_f-álgebras y en alguna subvariedad de las MV-álgebras.

Este documento se encuentra organizado de la siguiente manera:
En el Capítulo 1, se presentan algunos preliminares sobre las MV-álgebras y se define una MV-álgebra con producto, y en ese contexto las variedades: PMV_1, PMV_f, PMV-álgebras, MVW-rigs y las relaciones entre ellas. Se presentan algunas propiedades de los MVW-rigs con ejemplos de la independencia de sus axiomas.

En el capítulo 2, se presenta la equivalencia categórica entre las PMV_f-álgebras y la categoría de f_u-anillos conmutativos semi-low, que realiza la construcción explícita de las propiedades del producto de las PMV_f-álgebras, en las propiedades clásicas de ese producto en los f-anillos correspondientes, de manera análoga a la construcción de Chang. A partir de la equivalencia establecida por Mundici [36], pero usando la construcción de Dubuc y Poveda en [14], que no requiere las “good sequences”, utiliza únicamente el espectro primo de las MV-álgebras subyacentes y la equivalencia entre MV-álgebras y l_u-grupos totalmente ordenados, como en [6]. La representación categórica se basa en que cualquier PMV_f-álgebra es producto subdirecto de PMV_f-álgebras totalmente ordenadas, que en adelante llamaremos PMV_f-álgebras cadenas. Se presenta también de manera explícita los f-anillos semi-low, asociados por esta equivalencia, a las álgebras Booleanas. Los resultados del capítulo 1 y 2 pueden ser consultados en [10].

En el Capítulo 3, se construyen ejemplos en el anillo de funciones continuas de $[0,1]$ en $[0,1]$ constituidas a trozos por un número finito de polinomios con coeficientes enteros, para definir cómo pueden ser representadas como términos en los símbolos de operaciones de la estructura y establecer una relación con la conjetura de Pierce-Birkhoff para el caso de $[0,1]$. También se estudia la relación entre las funciones polinomiales a trozos de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, que corresponden a las álgebras libres de la subclase propia de la PMV_f-álgebras, $\mathbb{HSP}[0,1]$ (ver [41]).

En el Capítulo 4, se prueba la co-extensividad de la categoría de los f_u-anillos de manera análoga a la prueba que se realiza para la categoría de anillos conmutativos unitarios, pero sin utilizar los elementos idempotentes, puesto que estos anilllos no necesariamente son unitarios. Como Corolario se obtiene la co-extensividad de algunas sub-variedades de las MV-álgebras producto.

Se asume que el lector posee conocimientos básicos de álgebra universal (ver [39]) y de teoría de categorías (ver [29]).

Como resultado de este trabajo de investigación, se ha publicado un artículo en una revista internacional [10], y un segundo artículo ha sido sometido, [9]. Además, se ha presentado como ponencia en eventos especializados a nivel nacional e internacional.

Capítulo 1

MV-álgebras y PMV_f-álgebras

En este capítulo se introduce la variedad de PMV_f-álgebras. Para ello, se presentan definiciones y resultados del álgebra universal que es necesario mencionar, sean de conocimiento o no, por ser de utilidad en la resolución de los objetivos propuestos. Las MV-álgebras, se citarán de una manera breve sin entrar en detalles.

1.1. MV-álgebras

Algunas de las definiciones y propiedades de las MV-álgebras que se presentan a continuación, son relevantes para este trabajo. El lector que requiera mayor información puede consultar [7].

Definición 1.1.1 (MV-álgebra)**.** *Una MV-álgebra es una estrutcura del tipo (2,1,0),* $(A, \oplus, \neg, 0)$ *, tal que* $(A, \oplus, 0)$ *es un monoide conmutativo y la operación* $\neg$ *satisface:*

i) $\neg(\neg x) = x,$

ii) $x \oplus \neg 0 = \neg 0,$

iii) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$

La operación $\neg$ se llama **negación** y la operación $\oplus$ **suma**.

Otras operaciones que se obtienen a partir de la suma y la negación son:

iv) $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$,

v) $x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y)$,

vi) $x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = (x \odot \neg y) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y$,

vii) $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = x \odot (\neg x \oplus y) = x \ominus (x \ominus y)$.

Observación 1.1.1 (Orden)**.** *Toda MV-álgebra A está ordenada por la relación,*

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \ominus y = 0, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Toda MV-álgebra A, con el orden anteriormente definido, es un retículo distributivo.

Observación 1.1.2. *Todo elemento a de una MV-álgebra A, satisface $0 \leq a \leq \neg 0$. En adelante se denotará $\neg 0 = u$, y no 1 como suele aparecer en la literatura, para no entrar en confusión con la unidad multiplicativa en las definiciones posteriores.*

Ejemplo 1.1.2. *El intervalo $[0,1]$ de números reales con las operaciones*

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min\{1, x+y\} \\ \neg x &= 1 - x, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in [0,1]$, es la MV-álgebra estándar. Se sigue de la Definición 1.1.1 que:

$$\begin{aligned} x \odot y &= \max\{x+y-1, 0\} \\ x \ominus y &= \max\{x-y, 0\}. \end{aligned}$$

Definición 1.1.3. *Una función continua $f : [0,1]^n \to [0,1]$ es una función de McNaughton en n-variables si y sólo si existen polinomios lineales con coeficientes enteros P_i, tales que para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, $f(\mathbf{x}) = P_i(\mathbf{x})$ para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$.*

Ejemplo 1.1.4. *El conjunto de las funciones de McNaughton en n-variables con la suma y negación definidas puntualmente*

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \oplus g(\mathbf{x}) &&= \min\{1, f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\}, \\ (\neg f)(\mathbf{x}) &= \neg f(\mathbf{x}) &&= 1 - f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

es una MV-álgebra.

Definición 1.1.5. *Una MV-álgebra A con un subconjunto de elementos distinguido Y se dice* ***libre*** *sobre (el conjunto generador) Y, denotada $Free_Y$, si y sólo si para toda MV-álgebra B y toda función $f : Y \to B$, f puede ser extendida de una única manera a un homomorfismo de A en B.*

Teorema 1.1.6. *[7, 9.1.5] La MV-álgebra libre $Free_n$ con n generadores es isomorfa a la MV-álgebra de las funciones de McNaughton en n variables.*

Demostración. La prueba de este Teorema puede consultarse en [7, 13, 37]. □

Definición 1.1.7 (Homomorfismo)**.** *Dadas dos MV-álgebras A y B, una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de MV-álgebras si para todo x, y en A :*

i) $f(0) = 0$,

ii) $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$,

iii) $f(\neg x) = \neg f(x)$.

Definición 1.1.8 (Ideal de MV-álgebra)**.** *Un subconjunto no vacío I de una MV-álgebra A, es un ideal si y solo si:*

i) Si $a \leq b$ y $b \in I$, entonces $a \in I$.

ii) Si $a, b \in I$, entonces $a \oplus b \in I$.

Definición 1.1.9 (Ideal primo de una MV-álgebra)**.** *Un ideal P de una MV-álgebra A es primo, si para todo $a, b \in A$, $a \wedge b \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$.*

Notación 1. *$Id(A)$ y $Spec(A)$ representan el conjunto de ideales y el conjunto de ideales primos de la MV-álgebra A, respectivamente.*

Teorema 1.1.10 (Teorema de representación de Chang [6])**.** *Toda MV-álgebra no trivial es un producto subdirecto de MV-álgebras totalmente ordenadas o MV-álgebras cadena.*

1.2. MV-álgebras con producto

Las MV-álgebras producto fueron introducidas y estudiadas en [11] bajo el nombre de PMV-álgebras, y esencialmente consiste en dotar a una MV-álgebra con una operación producto que sea compatible con las demás operaciones, lo cual deriva en una equivalencia categórica con la clase de l-anillos con unidad fuerte. Existen subclases de particular importancia que fueron estudiadas a profundidad en [33–35].

A continuación se definen las MV-álgebras con producto, algunas subvariedades, y se introduce a la literatura las PMV_f-álgebras. También se muestra cómo están relacionadas estas subvariedades y algunas propiedades de los MVW-rigs. Estos resultados se encuentran en [10, 16].

Definición 1.2.1. *Una MV-álgebra con producto es una estructura* $(A, \oplus, \cdot, \neg, 0)$ *tal que* $(A, \oplus, \neg, 0)$ *es una MV-álgebra,* $(A, \cdot)$ *es un semigrupo, y unas relaciones de compatibilidad entre el producto y la suma.*

La operación "$\cdot$" se llama **producto**. Por notación $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-veces}$.

Una MV-álgebra producto se dice conmutativa si el producto es conmutativo. En este trabajo todas las MV-álgebras productos serán conmutativas, en caso contrario se hará la aclaración. El producto será representado por yuxtaposición, $a \cdot b := ab$.

Definición 1.2.2. *(MVW-rig [16, 3.3]) Un MVW-rig* $(A, \oplus, \cdot, \neg, 0)$ *es una MV-álgebra con producto, tal que:*

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$,

ii) $a(b \oplus c) \ominus (ab \oplus ac) = 0$,

iii) $(ab \ominus ac) \ominus a(b \ominus c) = 0$.

Observación 1.2.1. *Para todo* $a, b, c \in A$, *el axioma* $ii)$ *es equivalente a*

$$a(b \oplus c) \leq ab \oplus ac \tag{1.1}$$

y el axioma $iii)$ *es equivalente a*

$$ab \ominus ac \leq a(b \ominus c). \tag{1.2}$$

Definición 1.2.3. *Un MVW-rig A se dice unitario si existe un elemento* $s \in A$

tal que para todo a en A, $s \cdot a = a \cdot s = a$.

Definición 1.2.4 (PMV-álgebra [11])**.** *Una PMV-álgebra A es una MV-álgebra con producto tal que para todo $a, b, c \in A$*

i) $a \odot b = 0$ *implica* $ac \odot bc = 0$,

ii) $a \odot b = 0$ *implica* $c(a \oplus b) = ca \oplus cb$.

En [11, Teorema 3.1] se prueba que la clase PMV es ecuacionalmente definible.

Definición 1.2.5 (MVf-álgebra [11])**.** *Una MVf-álgebra es una PMV-álgebra tal que $a \wedge b = 0$ implica $ac \wedge b = ca \wedge b = 0$.*

La siguiente definición de PMV-álgebra es una nueva estructura introducida en este trabajo con la que se realiza todo el estudio posterior de la equivalencia categórica.

Definición 1.2.6 (PMV_f-álgebra [10])**.** *Una PMV_f-álgebra es un MVW-rig, tal que para todo $a, b, c \in A$, $ab \leq a \wedge b$, y $a(b \ominus c) = ab \ominus ac$.*

Definición 1.2.7 (PMV-Unitaria [35])**.** *Es una MV- álgebra A con producto tal que para todo $a, b, c \in A$, $au = a$, y $a(b \ominus c) = ab \ominus ac$. Estas álgebras se denotan PMV_1.*

Otras subvariedades de las MV-álgebras con producto son: las $P\text{Ł}'$, las cuales son PMV_1-álgebras sin divisores de cero [21, Definición 3.5], y la variedad generada por la PMV_1-álgebra estándar $[0,1]$, $\mathbb{HSP}([0,1])$ [33].

1.2.1. Ejemplos PMV_f-álgebras

Ejemplo 1.2.8. *La MV-álgebra $[0,1]$ con el producto usual de los números reales es una PVM_f-álgebra.*

Ejemplo 1.2.9. *La MV-álgebra $[0,u]$ con el producto usual de los números reales tal que $0 < u < 1$, es una PVM_f-álgebra no unitaria.*

Ejemplo 1.2.10. *Las funciones continuas de $[0,1]^n$ en $[0,1]$ con la suma truncada y la multiplicación usual de funciones es una PVM_f-álgebra.*

Ejemplo 1.2.11. *El conjunto de funciones continuas a trozos $f : [0,1]^n \to [0,1]$ cada una con finitos polinomios P_1, $P_2 \ldots, P_n \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, tal que para todo $\mathbf{z} \in [0,1]^n$,*

$f(\mathbf{z}) = P_i(\mathbf{z})$ *para algún* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *es una* PMV_f*-álgebra.*

Ejemplo 1.2.12. *Toda álgebra Booleana con la suma como el supremo y el producto como el ínfimo es una* PMV_f*-álgebra.*

Ejemplo 1.2.13. *Toda* MV*-álgebra con el ínfimo como producto no es necesariamente una* PMV_f*-álgebra (ver Ejemplo 1.2.22).*

Observación 1.2.2. *Dada una* PMV_f*-álgebra* A*, tal que* $u^2 = u$ *entonces* $\neg(au) = (\neg a)u$.

Esto se sigue de [7, Lema 1.1.3], pues si $a \odot \neg a = 0$ *implica* $au \odot (\neg a)u = 0$ *y,* $u = u^2 = u(a \oplus \neg a) = au \oplus (\neg a)u$.

El siguiente teorema muestra cómo están relacionadas las variedades de PMV-álgebras definidas anteriormente.

Teorema 1.2.14. *Se tienen las siguientes relaciones de contenencia:*

$$P\text{Ł}' \subset \mathbb{HSP}([0,1]) \subset PMV_1 \subset PMV_f \subset PMV \subset MVW-rig$$

Demostración. La prueba de la relación entre las álgebras unitarias

$$P\text{Ł}' \subset \mathbb{HSP}([0,1]) \subset PMV_1,$$

se encuentra en [21, Theorem 3.15].

La contenencia $PMV_1 \subset PMV_f$, se sigue de [35, Lema 2.9-iii] y del Ejemplo 1.2.9.

Para la contenencia $PMV_f \subset PMV$, sean $a, b, c \in PMV_f$. Si $a \odot b = 0$, como $ac \leq a$ y $bc \leq b$ entonces, $ac \odot bc \leq a \odot b = 0$. De otra parte, $a \odot b = 0$ implica $a \leq u \ominus b$ y consecuentemente, $ca \leq c(u \ominus b) \leq cu$. Esta última desigualdad implica que (ver [35, Proposición 2.7-vii])

$$c(b \oplus a) = c(u \ominus ((u \ominus b) \ominus a)) = cu \ominus (c(u \ominus b) \ominus ca) = (cu \ominus c(u \ominus b)) \oplus ca = cb \oplus ca.$$

La contenencia es estricta por el ejemplo [11, Ejemplo 3.6, (2)]. Toda MV-álgebra finita M en la cual existen dos únicos átomos a, b de orden $n > 1$ y n^2 respectivamente, admite un producto vía, $aa = b$ y $ab = ba = bb = 0$, tal que M con este producto es una PMV-álgebra que no es PMV_f-álgebra, debido a que $aa = b \nleq a$. La contenencia $PMV \subset MVW$-rig se prueba en la Proposición 2.2.4. Para la contenencia estricta ver el Ejemplo 1.2.20. $\square$

Observación 1.2.3. *La contenencia $PMV_f \subseteq MVf$ es inmediata por las definiciones de las estructuras, pero no se ha encontrado un modelo que verifique que es estricta.*

1.2.2. Ejemplos y propiedades de MVW-rigs

Ejemplo 1.2.15. *Toda MV-álgebra en la que se define $ab = 0$, para todo $a, b \in A$, es un MVW-rig.*

Ejemplo 1.2.16. *La MV-álgebra $[0, 1]$ con la multiplicación usual de los números reales, es un MVW-rig conmutativo con elemento unitario $u = 1$.*

Ejemplo 1.2.17. *La MV-álgebra $[0, u]$ con la multiplicación usual de los números reales y $0 \leq u < 1$, es un MVW-rig conmutativo no unitario.*

Ejemplo 1.2.18. *La MV-álgebra de funciones continuas de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$ con el producto usual de funciones, es un MVW-rig que tiene la propiedad: $xy \leq x \wedge y$ para todo $x, y \in [0, 1]^n$. En paticular, las funciones dadas en el Ejemplo 1.1.4 junto con el producto, son de interés en la búsqueda de las álgebras libres para esta teoría.*

Ejemplo 1.2.19. *[16, 3.9]. El álgebra obtenida al cerrar por productos la MV-álgebra de Łukasiewicz $Ł_n = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}, \oplus, \neg \right\rangle$ con el producto usual de $\mathbb{R}$,*

$$\widetilde{Ł_n} = \left\langle \left\{ \frac{m}{n^k} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] |\ k, m \in \mathbb{N} \right\}, \oplus, \cdot, \neg \right\rangle,$$

es un MVW-rig .

Observación 1.2.4. *En [11, 3.5], se afirma que una MV-álgebra finita A admite un producto $\cdot$ tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ para todo $a \in A$, si y sólo si A es un álgebra Booleana. Si éste es el caso, entonces $a \cdot b = a \wedge b$. Como consecuencia de este resultado se tiene que sólo se pueden definir productos unitarios sobre una MV-álgebra no Booleana si es una MV-álgebra infinita.*

Así que, se pueden tener MVW-rigs sobre MV-álgebras finitas no Booleanas tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ como se muestra en el siguiente ejemplo, pero no PMV-álgebras. Esto también implica que no se puede definir un producto $\cdot$ en $Ł_n$ que satisfaga $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

Ejemplo 1.2.20. *[16, 3.11]. $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $u = n$ como unidad fuerte, $x \oplus y = min\{n, x + y\}$, $\neg x = n - x$ y $xy = min\{n, x \cdot y\}$, es un MVW-rig donde las operaciones suma $+$ y producto $\cdot$ son las usuales en los números naturales.*

$\mathbf{Z}_n$ es unitario, la unidad fuerte es diferente de la unidad multiplicativa, $u \neq 1$, no vale la propiedad cancelativa y el producto entre dos elementos es mayor o igual que el supremo. En algunos casos vale la desigualdad estricta en (1.2), aunque siempre vale la igualdad en (1.1). Por ejemplo en $\mathbf{Z}_{10}$,

$$\begin{aligned} 2(7 \ominus 6) &= 2[\neg(\neg 7 \oplus 6)] = 2[\neg(3 \oplus 6)] = 2[\neg 9] = 2(1) = 2 \\ &> (2)(7) \ominus (2)(6) = 10 \ominus 10 = 0. \end{aligned}$$

Tampoco es una PMV-álgebra puesto que si tomamos los elementos $2, 3 \in \mathbf{Z}_{10}$, $2 \odot 2 = 0$ y $(3)(2) \odot (3)(2) = 6 \odot 6 = 2$.

Ejemplo 1.2.21. $\widehat{Ł}_{n+1} = \left\langle \{0, \frac{1}{n}, \cdots \frac{n-1}{n}, 1\}, \oplus, \cdot, \neg, 0, 1 \right\rangle$, *con el producto definido como:* $\dfrac{x}{n} \cdot \dfrac{y}{n} = \dfrac{min\{n, x \cdot y\}}{n}$, *con $x, y \in \{0, 1, \cdots, n\}$, es un MVW-rig isomorfo a $\mathbf{Z}_n$, mediante el homomorfismo $\varphi : Ł_{n+1} \longrightarrow \mathbf{Z}_n$, $\frac{x}{n} \longmapsto x$.*

Proposición 1.2.1. *Toda MV-álgebra A con el producto definido por el ínfimo $ab = a \wedge b$ es un MVW-rig.*

Demostración. Como el producto está definido en términos del ínfimo, por el teorema de representación de Chang, basta demostrar que vale para cualquier MV-álgebra cadena. Como el ínfimo es asociativo y conmutativo, es suficiente demostrar las desigualdades (1.1) y (1.2).
Dados los elementos a, b, c en una MV-álgebra cadena A, si $b \oplus c \leq a$ entonces $b \oplus c = a \wedge (b \oplus c) \leq b \oplus c = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$. Si por el contrario, $a \leq b \oplus c$ y $a \leq b, c$, entonces $a = a \wedge (b \oplus c) \leq a \oplus a = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$. Si $a \leq b \oplus c$ y $b \leq a \leq c$, entonces $a = a \wedge (b \oplus c) \leq a \oplus a = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$. De manera similar

se prueba que $a \wedge (b \ominus c) \geq a \wedge b \ominus a \wedge c$. $\square$

Observación 1.2.5. *Aunque toda MV-álgebra es un MVW-rig con el producto definido por el ínfimo, en general no es una PMV-álgebra (ver Observación 1.2.4) como se muestra en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 1.2.22. *La MV-álgebra de Łukasiewics $Ł_4$, con el producto definido como el ínfimo, no es PMV-álgebra debido a que, por ejemplo $\frac{1}{3} \odot \frac{1}{3} = 0$ y*

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \wedge \left(\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{3}\right) < \left(\frac{1}{3} \wedge \frac{1}{3}\right) \oplus \left(\frac{1}{3} \wedge \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Proposición 1.2.2. *Toda MV-álgebra A es un MVW-rig con el producto definido como el supremo para elementos diferentes de cero, es decir, $ab = a \vee b$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ y, cero en otro caso.*

Demostración. Basta probar las desigualdades (1.1) y (1.2) para MVW-rigs cadenas. Ellas se siguen directamente del hecho que para todo $a, b, c \in A$ cadena, se tiene que $a \vee (b \oplus c) \leq (a \vee b) \oplus (a \vee c)$ y $a \vee (b \ominus c) \geq (a \vee b) \ominus (a \vee c)$. Si los elementos son diferentes de cero, estas son propiedades de la MV-álgebra. Si alguno de los elementos es cero, un cálculo directo muestra que también se cumplen la desigualdades. $\square$

Ejemplo 1.2.23. *Un caso particular de la proposición anterior y que es de interés en este contexto, se cumple para toda álgebra de Boole A vista como una MV-algebra, dónde la suma es el supremo y la negación el complemento. Si definimos el producto como en las Proposiciones 1.2.1 o 1.2.2, toda álgebra de Boole es de manera natural, un MVW-rig. Además, si el producto se define como el ínfimo entonces es una PMV_1-álgebra (ver Observación 1.2.4).*

Proposición 1.2.3. *El axioma iii) de la Definición 1.2.2, es independiente de los demás axiomas de MVW-rig. De la misma forma se prueba que el axioma i) es independiente de los demás.*

Demostración. La MV-álgebra de Łukasiewicz Ł$_4$ con el producto definido como:

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & si \quad a = 0 \ o \ b = 0, \\ a \oplus b & si \quad a \odot b = 0, \\ a \odot b & si \quad a \odot b \neq 0, \end{cases}$$

es una estructura en la que no vale el axioma *iii*), pero sí valen los demás. Para los elementos de Ł$_4$-$\{0\}$, el producto así definido es equivalente a la suma en el grupo de los enteros módulo 3 ($\mathbb{Z}_3$), por lo cual, este producto es asociativo y conmutativo.

De otra parte, toda MV-álgebra con el supremo como producto, valida los axiomas de MVW-rig, excepto el axioma *i*). La prueba es análoga a la demostración dada en la Proposición 1.2.2. □

Es importante anotar que si el producto distribuye con respecto a la resta, entonces se pueden demostrar los axiomas *i*) y *ii*) de MVW-rig.

Proposición 1.2.4. *[16, 3.4, 3.6]. Sea A un MVW-rig. Para todo $a, b, c \in A$, se tienen las siguientes propiedades:*

i) *Si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$,*

ii) $u^2 \leq u$,

iii) $a \leq b$ *y* $c \leq d$ *entonces* $ac \leq bd$.

Demostración. La propiedad *iii*) se sigue de *i*) puesto que, $a \leq b$ y $c \leq d$ implican $ac \leq bc$ y $cb \leq db$. □

Ideales y Homomorfismos de MVW-rigs

Definición 1.2.24. *Dados los MVW-rigs A y B, una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de MVW-rigs, si y sólo si,*

i) *f es un homomorfismo de MV-álgebras.*

ii) $f(ab) = f(a)f(b)$.

Definición 1.2.25. *[16] El kernel de un homomorfismo $\varphi : A \to B$ de MVW-rigs es el conjunto*

$$ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{x \in A | \varphi(x) = 0\}.$$

Definición 1.2.26. *[16, 4.3] Un subconjunto I de un MVW-rig A, es un ideal si satisface las siguientes propiedades:*

i) I es un ideal de la MV-álgebra subyacente A.

ii) Dados $a \in I$, y $b \in A$, $ab \in I$ (Propiedad absorbente).

Ejemplo 1.2.27 (Álgebras Booleanas). *Las álgebras Booleanas con el supremo como suma y el ínfimo como producto son MVW-rigs. Los ideales de este MVW-rig son los ideales de la MV-álgebra, que a su vez son los ideales del retículo.*

Observación 1.2.6. *Note que en la Proposición 1.2.2, el MVW-rig, no tiene ideales propios no triviales, es decir, sus únicos ideales son cero y todo el MVW-rig.*

Definición 1.2.28. *[16]Un subconjunto S de un MVW-rig A es un sub-MVW-rig si $0 \in S$ y es cerrado para las operaciones de A.*

Definición 1.2.29 (Ideal primo de un MVW-rig). *Un ideal P de un MVW-rig es primo si para todo $a, b \in A$, $ab \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$.*

Notación 2. *$Id_W(A)$ y $Spec_W(A)$ representan el conjunto de ideales e ideales primos del MVW-rig A, respectivamente.*

Proposición 1.2.5. *[16, 5.1]. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales de un MVW-rig A y el conjunto de sus congruencias. Es decir, dado I un ideal de un MVW-rig, A, la relación binaria $a \equiv_I b$ si y sólo si $(a \ominus b) \oplus (b \ominus a) \in I$, es una relación de congruencia, y dada, $\equiv$ una relación de congruencia en A, $\{a \in A | a \equiv 0\}$ es un ideal en A.*

Sólo se probará la compatibilidad del producto por ser de interés en este contexto. La demostración completa está en [16, 2.29].

Demostración. Por ser A una MV-álgebra e I un MV-ideal, se tiene que $a \equiv_I b$ y $c \equiv_I d$ implican $a \oplus c \equiv_I b \oplus d$ y $\neg a \equiv_I \neg b$, (ver [7, 1.2.6]). Resta probar que $a \equiv_I b$ y $c \equiv_I d$ implican $ac \equiv_I bd$.

Dado que $a \equiv_I b$ y $c \equiv_I d$ entonces $a \ominus b \in I$ y $c \ominus d \in I$ respectivamente, luego

$$\begin{aligned} ac \leq (a \vee b)(c \vee d) &= \Big((a \ominus b) \oplus b\Big)\Big((c \ominus d) \oplus d\Big) \\ &\leq (a \ominus b)\Big((c \ominus d) \oplus d\Big) \oplus b\Big((c \ominus d) \oplus d\Big) \\ &\leq (a \ominus b)(c \ominus d) \oplus (a \ominus b)d \oplus b(c \ominus d) \oplus bd. \end{aligned}$$

Lo que es equivalente a tener

$$ac \ominus bd \leq (a \ominus b)(c \ominus d) \oplus (a \ominus b)d \oplus b(c \ominus d) \in I,$$

puesto que $(a \ominus b)$ y $(c \ominus d) \in I$ e I es absorbente, $ac \ominus bd \in I$. De manera análoga se tiene que $bd \ominus ac \in I$, así $(ac \ominus bd) \oplus (bd \ominus ac) \in I$, y por lo tanto $ac \equiv_I bd$. $\square$

Observación 1.2.7. *Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x con respecto a $\equiv_I$ se denotará por $[x]_I$ (también se conoce como la clase de equivalencia de x módulo I) y el conjunto cociente $A/\equiv_I$ por A/I.*

Las operaciones $\neg[a]_I = [\neg a]_I$, $[a]_I \oplus [b]_I = [a \oplus b]_I$ y $[a]_I[b]_I = [ab]_I$ están bien definidas sobre A/I, puesto que $\equiv_I$ es una congruencia.

Proposición 1.2.6. *[16, 5.3]. Dado $I \in Id_W(A)$, A/I es un MVW-rig.*

Corolario 1.2.30. *Dados un MVW-rig A e $I \in Spec(A)$, si I es un MV-ideal primo absorbente, si y sólo si A/I es un MVW-rig totalmente ordenado.*

Proposición 1.2.7. *Dada una PMV_f-álgebra A, $Id_W(A) = Id(A)$ y además, $Spec_W(A) \subseteq Spec(A)$.*

Demostración. Por definición $Id_W(A) \subseteq Id(A)$. De otro lado, dados $I \in Id(A)$ y $a \in I$, para todo $c \in A$, $ac \leq a \wedge c \in I$, así $I \in Id_W(A)$. De otra parte, dados $I \in Spec_W(A)$ y $a, b \in A$ tales que $a \wedge b \in I$, entonces $ab \in I$ debido a que $ab \leq a \wedge b$. Consecuentemente $a \in I$ o $b \in I$, así $I \in Spec(A)$. $\square$

Proposición 1.2.8. *Dada una PMV_f-álgebra A e $I \in Id_W(A)$, A/I es una PMV_f-álgebra.*

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 1.2.5 y de la Proposición 1.2.6. $\square$

1.3. l_u-anillos

En adelante "$|\cdot|$" significa el conjunto subyacente.

Definición 1.3.1 (l-grupo [2, 7])**.** *Un grupo abeliano $(|G|, +, -, 0)$ dotado con una relación de orden parcial $\leq$ compatible con la suma, es decir, para todo $x, y, t \in G$, si $x \leq y$ implica que $t+x \leq t+y$, se dice un l-grupo si la relación de orden define un retículo.*

Definición 1.3.2. *Para cada elemento x de un l-grupo G, el valor absoluto de x se define como $|x| = x^+ + x^-$, donde $x^+ = x \vee 0$ y $x^- = -x \vee 0$ son la parte positiva y la parte negativa respectivamente.*

Definición 1.3.3. *Una unidad fuerte de un l-grupo G es un elemento $0 \leq u \in G$ tal que para todo $x \in G$, $|x| \leq nu$, para algún un entero $n \geq 0$.*

Un l_u-grupo es l-grupo con unidad fuerte u.

Definición 1.3.4 (l-ideal)**.** *Un l-ideal de un l-grupo G es un subgrupo J de G que satisface: si $x \in J$ e $|y| \leq |x|$ entonces $y \in J$.*

Definición 1.3.5 (l-ideal primo)**.** *Un l-ideal P de un l_u-grupo G, es primo si y sólo si, G/P es un grupo totalmente ordenado.*

$Spec_g(G)$ representa el conjunto de l-ideales primos del grupo G.

Definición 1.3.6. *[2, XVII.1]. Un l_u-anillo, es un anillo $R = (|R|, +, \cdot, \leq, u)$ tal que $\langle |R|, +, \leq, u\rangle$ es un l_u-grupo con $|R|$ el conjunto subyacente y, $0 \leq x$, $0 \leq y$ implica $0 \leq xy$.*

En adelante todos los anillos se considerarán conmutativos.

Definición 1.3.7. *Dados los l-anillos R y H con unidad fuerte w y v respectivamente, la función $h : R \to H$ es un l_u-homomorfismo si y sólo si es un homomorfismo de anillos, un homomorfismo de retículos, y además satisface $h(u) = v$.*

Definición 1.3.8. *(L-ideal [2, XVII.3]). Un L-ideal I de un l-anillo R es un l-ideal, tal que para todo $y \in I$ y $x \in R$, $xy \in I$. I es irreducible si y sólo si R/I es un anillo totalmente ordenado.*

Notación 3. *$Id(R)$ representa el conjunto de L-ideales de R, e $Id_g(R)$ el conjunto* *de l-ideales del grupo subyacente de R.*

Definición 1.3.9. *(Low l-ring [34]) Un l-anillo R es llamado low si y sólo si, para todo $x, y \geq 0 \in R$ se tiene $xy \leq x \wedge y$.*

Definición 1.3.10 (l_u-anillo semi-low)**.** *Un l_u-anillo es semi-low si para todo $a, b \in [0, u]$, $ab \leq a \wedge b$.*

Teorema 1.3.11. *Dados un l-anillo R, $0 < u \in R$, y $[0, u] = \{a \in R | 0 \leq a \leq u\}$, con $[0, u]^\sharp \subset R$ el subanillo generado por $[0, u]$, entonces:*

a) Dados $A \subset [0, u]$, una PMV_f-álgebra, $A^\sharp \subset [0, u]^\sharp$ el subanillo generado por A; $A^\sharp$ es un l_u-anillo semi-low con unidad fuerte u y $A = \Gamma(A^\sharp, u)$.

b) Todo l_u-anillo semi-low es generado por sus segmentos,

$$[0, u]^\sharp = \{x \in R | \exists n \geq 0, |x| \leq nu\}.$$

Demostración. a) Dada una PMV_f-álgebra $A = \langle |A|, \oplus, \cdot, \neg, 0\rangle$, se tiene que $A = \langle |A|, \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra. Si A^* es el l_u-grupo asociado, se sigue que los conjuntos subyacentes $|A^\sharp| = |A^*|$, debido a que para todo $a \in A^\sharp$, $a = \sum \epsilon_i b_i c_i + \sum \delta_j d_j$, con $b_i, c_i, b_i c_i, d_j \in A$ y $\epsilon_i, \delta_j \in \{1, -1\}$, es suma de elementos de A. Así, $A = \Gamma(A^\sharp, u)$ por [14, Teorema 1.2-a)]. De otra parte, $x, y \in A^\sharp \cap [0, u]$ implica $x, y \in A$ y $xy \leq x \wedge y$.

b) De [14, Teorema 1.2-b)] se sigue que: $[0, u]^* = \{x \in R | \exists n \geq 0, |x| \leq nu\}$ es un l-grupo con unidad fuerte u, y por las razones expuestas antes, los conjuntos subyacentes $|R| = |[0, u]^*| = |[0, u]^\sharp|$, así $R = [0, u]^\sharp$.

□

Capítulo 2

Representación Categórica para las PMV_f-álgebras

En este capítulo se establece de manera explícita la equivalencia categórica entre la subvariedad propia de la clase de PMV-álgebras, las PMV_f-álgebras, y la categoría de los f_u-anillos semi-low. Esta representación categórica se realiza con el espectro primo de las MV-álgebras, a través de la equivalencia entre MV-álgebras y l_u-grupos establecida por Mundici [36], pero desde la perspectiva dada en [14], que extiende la construcción definida por Chang para cadenas [6]. Como caso particular, se caracterizan los f_u-anillos asociados por esta equivalencia a las álgebras Boole. Los resultados aquí obtenidos se encuentran en [10].

2.1. Equivalencia entre la categoría $\mathcal{PMV}_f$ y la categoría $\mathcal{LR}_u$.

Definición 2.1.1. *Sean $\mathcal{PMV}_f$ y $\mathcal{CPMV}_f$ las categorías cuyos objetos son las PMV_f-álgebras y PMV_f-álgebras cadena respectivamente, y cuyos morfismos son los homomorfismos de PMV_f-álgebras.*

Definición 2.1.2. *Sean $\mathcal{LR}_u$, y $\mathcal{CLR}_u$ las categorías cuyos objetos son los l_u-*

anillos semi-low y l_u-anillos semi-low cadena respectivamente, y cuyos morfismos son los homomorfismos de l_u-anillos.

2.1.1. Equivalencia categórica entre $\mathcal{CPMV}_f$ y $\mathcal{CLR}_u$

Teorema 2.1.3. *(Construcción de Chang del l_u-grupo A^* [6, Lema 5]) Dada una MV-álgebra cadena A, $A^* = \langle \mathbb{Z} \times A, +, \leq \rangle$ junto con las operaciones:*

1. $(m+1, 0) = (m, u)$,
2. $(-m-1, \neg a) = -(m, a)$,
3. $$(m,a) + (n,b) = \begin{cases} (m+n, a \oplus b) & si \quad a \oplus b \neq u, \\ (m+n+1, a \odot b) & si \quad a \oplus b = u, \end{cases}$$

es un l_u-grupo cadena, con unidad fuerte $u = (1, 0)$. La relación de orden "$\leq$" está dada por $(m, a) \leq (n, b)$ si y sólo si, $m < n$ ó $m = n$ y $a \leq b$.

Notación 4. $|A^*| := \mathbb{Z} \times A$.

El funtor $(-)^\sharp \colon \mathcal{CPMV}_f \to \mathcal{CLR}_u$

A partir de la construcción de Chang [6], se define un producto sobre el l_u-grupo A^* para obtener un l_u-anillo apropiado $A^\sharp = \langle |A^*|, +, \cdot, \leq \rangle$.

Definición 2.1.4. *Dada una PMV_f-álgebra cadena A, se define el producto sobre A^* como sigue:*

$$(m, a) \cdot (n, b) := mn(0, u^2) + m(0, bu) + n(0, au) + (0, ab).$$

Para $n \geq 0$, $n(0,a) = \underbrace{(0,a) + \ldots + (0,a)}_{n-veces}$ y $n(0,a) = \underbrace{-(0,a) - \ldots - (0,a)}_{n-veces}$ para $n < 0$.

Proposición 2.1.1. *El producto anterior está bien definido.*

Demostración. Debido a que en A^*, $(m+1, 0) = (m, u)$; basta ver directamente de la definición de producto que $(m, u) \cdot (n, b) = (m+1, 0) \cdot (n, b)$. $\square$

Teorema 2.1.5. *Dada una PMV_f-álgebra A, $A^\sharp = \langle |A^*|, +, \cdot, \leq\rangle$ es un l_u-anillo semi-low cadena.*

Demostración. Se sabe que $A^\sharp$ con la suma y el orden asociado es un l_u-grupo cadena. Basta probar que con el producto dado en la Definición 2.1.4, es un anillo semi-low.

Para todo $(m, x), (n, y), (s, z) \in A^\sharp$, se tienen las siguientes propiedades:

Propiedad Distributiva

$$(m, x)[(n, y) + (s, z)] = (m, x)(n, y) + (m, x)(s, z).$$

Del Teorema 1.2.14, $z \odot y = 0$ implica $xz \odot xy = 0$ y $x(z \oplus y) = xz \oplus xy$. Así, por el ítem 3 del Teorema 2.1.3, para probar esta propiedad tenemos dos casos:

Caso 1. $y \oplus z \neq u$.

$$\begin{aligned}
(m, x)[(n, y) + (s, z)] &= (m, x)[(n + s, y \oplus z)] \\
&= m(n + s)(0, u^2) + m(0, (y \oplus z)u) + (n + s)(0, xu) \\
&\quad +(0, x(y \oplus z)) \\
&= mn(0, u^2) + ms(0, u^2) + m(0, yu \oplus zu) + n(0, xu) \\
&\quad +s(0, xu) + (0, xy \oplus xz) \\
&= mn(0, u^2) + ms(0, u^2) + m(0, yu) + m(0, zu) \\
&\quad +n(0, xu) + s(0, xu) + (0, xy) + (0, xz) \\
&= \Big[mn(0, u^2) + m(0, yu) + n(0, xu) + (0, xy)\Big] \\
&\quad +\Big[ms(0, u^2) + m(0, zu) + s(0, xu) + (0, xz)\Big] \\
&= (m, x)(n, y) + (m, x)(s, z).
\end{aligned}$$

Un caso particular de este resultado es la siguiente afirmación:

Afirmación 2.1.1. *Para $x, y, z \in A$, si $y \odot z \neq 0$ entonces*

$$(0, x)(0, y \odot z) = (0, xy) + (0, xz) - (0, xu).$$

La igualdad también se tiene si $y \oplus z = u$ e $y \odot z = 0$.

En efecto, si $y \oplus z = u$ e $y \odot z = 0$, la igualdad se sigue del Teorema 1.2.14, el Teorema 2.1.3 y la Definición 2.1.4. Por otra parte,

$$y \odot z \neq 0 \Longleftrightarrow \neg y \oplus \neg z \neq u,$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
(0,x)(0,y\odot z) &= (0,x)(0,\neg(\neg y \oplus \neg z)) \\
&= (0,x)\left[-(-1,\neg y \oplus \neg z)\right] \\
&= -(0,x)(-1,\neg y \oplus \neg z) \\
&= -(0,x)\left[(0,\neg y) + (-1,\neg z)\right] \\
&= -(0,x)(0,\neg y) - (0,x)(-1,\neg z) \\
&= (0,x)\left[-(0,\neg y)\right] + (0,x)\left[-(-1,\neg z)\right] \\
&= (0,x)(-1,y) + (0,x)(0,z) \\
&= (0,xy) - (0,xu) + (0,xz).
\end{aligned}$$

Caso 2. $y \oplus z = u$.
La ecuación dada en la Afirmación 2.1.1, es necesaria en este caso.

$$\begin{aligned}
(m,x)[(n,y)+(s,z)] &= (m,x)[(n+s+1, y\odot z)] \\
&= m(n+s+1)(0,u^2) + m(0,(y\odot z)u) \\
&\quad +(n+s+1)(0,xu) + (0,x(y\odot z)) \\
&= m(n+s+1)(0,u^2) + m\Big[(0,yu) + (0,zu) - (0,u^2)\Big] \\
&\quad +(n+s+1)(0,xu) + \Big[(0,xy) + (0,xz) - (0,xu)\Big] \\
&= mn(0,u^2) + ms(0,u^2) + m(0,u^2) + m(0,yu) \\
&\quad +m(0,zu) - m(0,u^2) + n(0,xu) + s(0,xu) \\
&\quad +(0,xu) + (0,xy) + (0,xz) - (0,xu) \\
&= \Big[mn(0,u^2) + m(0,yu) + n(0,xu) + (0,xy)\Big] \\
&\quad +\Big[ms(0,u^2) + m(0,zu) + s(0,xu) + (0,xz)\Big] \\
&= (m,x)(n,y) + (m,x)(s,z).
\end{aligned}$$

Propiedad Asociativa

$$
\begin{aligned}
(m,x)\Big[(n,y)(s,z)\Big] &= (m,x)\Big[ns(0,u^2)+n(0,zu)+s(0,yu)+(0,yz)\Big]\\
&= mns(0,u^3)+ns(0,xu^2)+mn(0,zu^2)+n(0,xzu)\\
&\quad +ms(0,yu^2)+s(0,xyu)+m(0,yzu)+(0,xyz)\\
&= mns(0,u^3)+mn(0,zu^2)+ms(0,yu^2)+m(0,zyu)\\
&\quad +ns(0,xu^2)+n(0,xuz)+s(0,xyu)+(0,xyz)\\
&= \Big[mn(0,u^2)+m(0,yu)+n(0,xu)+(0,xy)\Big](s,z)\\
&= \Big[(m,x)(n,y)\Big](s,z).
\end{aligned}
$$

Dados $(0,0)\leq(m,x)$ y $(0,0)\leq(n,y)$ se tiene que $0\leq m$ y $0\leq n$, así

$$(0,0)\leq mn(0,u^2)+m(0,yu)+n(0,xu)+(0,xy)=(m,x)(n,y).$$

Ahora probemos que $A^\sharp$ es semi-low.
Dados $(0,0)\leq(m,x),(n,y)\leq(0,u)$ tenemos que $m=n=0$, así

$$(0,x)(0,y)=(0,xy)\leq(0,x\wedge y)=(0,x)\wedge(0,y).$$

□

Corolario 2.1.6. *Dada una PMV_f-álgebra cadena A, en $A^\sharp$ se tiene que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(0,x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(0,y_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}(0,x_iy_i).$$

Proposición 2.1.2. *La aplicación $(-)^\sharp\colon \mathcal{CPMV}_f\to\mathcal{CLR}_u$ que asigna a toda PMV_f-álgebra cadena A el l_u-anillo cadena $A^\sharp$, es funtorial.*

Demostración. Dado $h:A\to B$ en $\mathcal{CPMV}_f$, se define $h^\sharp:A^\sharp\to B^\sharp$ en $\mathcal{CLR}_u$ como $h^\sharp(m,a):=(m,h(a))$.

Por construcción (ver [[14], 2.2]), $h^\sharp$ es un homomorfismo de l_u-grupos. Basta probar que $h^\sharp$ es un l_u-homomorfismo de anillos, lo cual se sigue de la Definición

2.1.4:

$$
\begin{aligned}
h^\sharp[(m,a)(n,b)] &= h^\sharp[mn(0,u^2)+m(0,bu)+n(0,au)+(0,ab)] \\
&= h^\sharp(mn(0,u^2))+h^\sharp(m(0,bu))+h^\sharp(n(0,au))+h^\sharp(0,ab) \\
&= mnh^\sharp(0,u^2)+mh^\sharp(0,bu)+nh^\sharp(0,au)+h^\sharp(0,ab) \\
&= mn(0,h(u^2))+m(0,h(bu))+n(0,h(au))+(0,h(ab)) \\
&= mn(0,h(u)^2)+m(0,h(b)h(u))+n(0,h(a)h(u)) \\
&\quad +(0,h(a)h(b)) \\
&= (m,h(a))(n,h(b)) \\
&= h^\sharp(m,a)h^\sharp(n,b).
\end{aligned}
$$

Además, dado $(m,a)\in A^\sharp$,

$$
\begin{aligned}
(gh)^\sharp(m,a) &= (m,gh(a)) \\
&= g^\sharp(m,h(a)) \\
&= g^\sharp\circ h^\sharp(m,a).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A^\sharp \arrow[r, "h^\sharp"] \arrow[rr, bend right, "(gh)^\sharp"'] & B^\sharp \arrow[r, "g^\sharp"] & C^\sharp
\end{tikzcd}
$$

□

El Funtor $\Gamma\colon \mathcal{CLR}_u \longrightarrow \mathcal{CPMV}_f$

Definición 2.1.7. *Para un l_u-anillo semi-low cadena (R,u), se define*

$$\Gamma(R,u)=\{x\in R\,|\,0\le x\le u\}$$

junto con las operaciones:

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x+y) \wedge u, \\ x \cdot y &= xy, \\ \neg x &= u - x. \end{aligned}$$

Observación 2.1.1. *El producto está bien definido puesto que $xy \leq x \wedge y \leq u$, y las demás operaciones pueden verse como:*

$$\begin{aligned} x \odot y &= (x+y-u) \vee 0 \\ x \ominus y &= (x-y) \vee 0. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.3. *([11, 3.2]) Todo l_u-anillo (R,u) que satisface $u^2 \leq u$, $\Gamma(R,u)$ es una PMV-álgebra.*

Observación 2.1.2. *Dado un l_u-anillo semi-low cadena R, el producto distribuye sobre el supremo, $x(y \vee z) = xy \vee xz$. Para ver esto, suponga sin perdida de generalidad que $y \leq z$, entonces $x(y \vee z) = xz = xy \vee xz$, puesto que el producto respeta el orden. Lo mismo se tiene para el ínfimo. En consecuencia, $x(y \ominus z) = xy \ominus xz$.*

Corolario 2.1.8. *Dado un l_u-anillo semi-low cadena R, $\Gamma(R,u)$ es una PMV_f-álgebra.*

Observación 2.1.3. *En [11, 3.2], se prueba que $\Gamma(R,u)$ es una PMV-álgebra, para todo l_u-anillo R.*

Proposición 2.1.4. *La aplicación $\Gamma\colon \mathcal{CLR}_u \to \mathcal{CPMV}_f$ que asigna a todo l_u-anillo cadena (R,u) la PMV_f-álgebra cadena $\Gamma(R,u)$, es funtorial.*

Demostración. Dado $\alpha : (R,u) \to (H,w)$ en $\mathcal{CLR}_u$, (w es la unidad fuerte del l-anillo H), se define $\Gamma(\alpha) : \Gamma(R,u) \to \Gamma(H,w)$ en $\mathcal{CPMV}_f$ como $\Gamma(\alpha) := \alpha|_{[0,u]}$. Por construcción, $\Gamma(\alpha)$ es un homomorfismo de MV-álgebras cadenas, basta ver que respeta productos,

$$\Gamma(\alpha)(a)\Gamma(\alpha)(b) = \alpha(a)\alpha(b) = \alpha(ab) = \Gamma(\alpha)(ab).$$

Luego, $\Gamma(\alpha)$ es un morfismo en $\mathcal{CLR}_u$, tal que para todo $x \in \Gamma(R,u)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)(x) &= \Gamma(\beta)\left(\Gamma(\alpha)(x)\right) \\ &= \Gamma(\beta)(\alpha(x)) \\ &= \beta(\alpha(x)) \\ &= (\beta\alpha)(x) \\ &= \Gamma(\beta\alpha)(x). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} (R,u) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & (H,v) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & (K,w) \arrow[d] \\ \Gamma(R,u) \arrow[r, "\Gamma(\alpha)"] \arrow[rr, bend right, "\Gamma(\beta\alpha)"'] & \Gamma(H,v) \arrow[r, "\Gamma(\beta)"] & \Gamma(K,w) \end{tikzcd}$$

□

Teorema 2.1.9. *Dados una PMV_f-álgebra cadena A y un l_u-anillo semi-low cadena (R,u), se tienen los siguientes isomorfismos:*

$$A \cong \Gamma(A^\sharp, u) \text{ y } R \cong (\Gamma(R,u))^\sharp.$$

Demostración. Las aplicaciones i y υ :

$$\begin{aligned} i : A &\longrightarrow \Gamma(A^\sharp, u) \\ a &\longmapsto (0,a) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \upsilon : (\Gamma(R,u))^\sharp &\longrightarrow R \\ (m,x) &\longmapsto mu + x \end{aligned}$$

son isomorfismos de MV-álgebras y l_u-grupos respectivamente por [6, Lema 6]. Basta probar que i y υ respetan el producto. En efecto, dados $a, b \in A$,

$$i(ab) = (0, ab) = (0,a)(0,b) = i(a)i(b).$$

De otra parte, dados $(m,a), (n,b) \in A^\sharp$,

$$\begin{aligned}
\upsilon\left[(m,a)(n,b)\right] &= \upsilon\left[mn(0,u^2)+m(0,bu)+n(0,au)+(0,ab)\right] \\
&= mn\left[\upsilon(0,u^2)\right]+m\left[\upsilon(0,bu)\right]+n\left[\upsilon(0,bu)\right]+\upsilon(0,ab) \\
&= mnu^2+mbu+nau+ab \\
&= mu(nu+b)+a(nu+b) \\
&= (mu+a)(nu+b) \\
&= \upsilon(m,a)\upsilon(n,b).
\end{aligned}$$

□

Es fácil probar que los isomorfismos definidos a partir de la construcción de Chang dada en el Teorema 2.1.3, i y υ, determinan una equivalencia de categorías.

Teorema 2.1.10. *Los isomorfismos i y υ definidos antes, son transformaciones naturales asociadas a los funtores $\Gamma(-)^\sharp$ y $(-)^\sharp\Gamma$ respectivamente, los cuales establecen una equivalencia categórica:*

$$\mathcal{CPMV}_f \xrightarrow{(-)^\sharp} \mathcal{CLR}_u \qquad \mathcal{CLR}_u \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{CPMV}_f.$$

Demostración. La demostración es análoga a [14, Teorema 2.2].
Dados $A \xrightarrow{h} B$ en $\mathcal{CPMV}_f$ y $(R,u) \xrightarrow{\varphi} (H,w)$ en $\mathcal{CLR}_u$, la naturalidad de i y de υ se sigue de la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & \Gamma(A^\sharp,u) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Gamma(h^\sharp)"] & A^\sharp \arrow[d] \\
B \arrow[r, "i"] & \Gamma(B^\sharp,u) \arrow[r, hook] & B^\sharp
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Gamma(R,u)^\sharp \arrow[r, "\upsilon"] \arrow[d, "(\Gamma\varphi)^\sharp"'] & (R,u) \arrow[d, "\varphi"] \\
\Gamma(H,w)^\sharp \arrow[r, "\upsilon"] & (H,w)
\end{tikzcd}$$

Dado $a \in A$, $\Gamma(h^\sharp)i(a) = \Gamma(h^\sharp)(0,a) = h^\sharp(0,a) = (0,h(a)) = ih(a)$, y dado $(n,x) \in \Gamma(R,w)^\sharp$,

$$\varphi\upsilon(n,x) = \varphi(nu+x) = nw+\varphi(x) = \upsilon(n,\varphi(x)) = \upsilon(n,(\Gamma\varphi)(x)) = \upsilon(\Gamma\varphi)^\sharp(n,x).$$

□

2.1.2. Equivalencia categórica entre las categorías $\mathcal{PMV}_f$ y $\mathcal{LR}_u$.

Representación subdirecta por cadenas

Es importante recordar el isomorfismo de orden entre los ideales de un l_u-grupo G y los ideales de su MV-álgebra $\Gamma(G,u)$ establecido en [7, Teorema 7.2.2].

Teorema 2.1.11. *Dado un l_u-grupo G y $A=\Gamma(G,u)$, la correspondencia,*

$$\begin{array}{rcl} \phi:\mathcal{I}(A) & \longrightarrow & \mathcal{I}(G) \\ J & \longmapsto & \phi(J)=\{x\in G|\,|x|\wedge u\in J\} \end{array}$$

es un isomorfismo de orden entre los ideales de la MV-álgebra A y los l-ideales del l_u-grupo, cuya aplicación inversa es $H\longmapsto\psi(H)=H\cap[0,u]$.

Proposición 2.1.5. *Dados un l_u-anillo semi-low R, J un ideal de la PMV_f-álgebra $\Gamma(R,u)$ y $\phi(J)$ el ideal del l_u-grupo $(R,+,u)$ como en el Teorema 2.1.11, se tiene que $\phi(J)=J^\sharp$ con*

$$J^\sharp=\left\{x\in R|x=\sum_{i=1}^{m}\epsilon_i c_i,\ c_i\in J,\epsilon_i\in\{-1,1\}\right\}.$$

Demostración. $J^\sharp$ es un l-ideal del l_u-grupo $(R,+,u)$. En efecto, $J^\sharp$ es un subgrupo de R por construcción. Ahora, dados $x\in J^\sharp$ e $y\in R$ tal que $|y|\leq|x|$, debemos probar que $y\in J^\sharp$. Suponga sin pérdida de generalidad que $|x|=x^+=x$ e $|y|=y^+=y$.

Como $x=\sum\limits_{i=1}^{m}\epsilon_i c_i$, $c_i\in J$,

$$x\wedge u=\left(\sum_{i=1}^{m}\epsilon_i c_i\right)\wedge u=\left|\sum_{i=1}^{m}\epsilon_i c_i\right|\wedge u\leq\left(\sum_{i=1}^{m}c_i\right)\wedge u=\oplus_{i=1}^{n}c_i\in J. \tag{2.1}$$

luego, $x\wedge u\in J$.

Por [14, Teorema 1.5, c], ya que los elementos están en un l_u-grupo, es suficiente considerar $x = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, con $a_k = (x - ku) \wedge u \vee 0$, donde $0 < x < nu$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Si $x - ku > 0$, $a_k \in J$ puesto que

$$(x - ku) \wedge u \vee 0 = (x - ku) \wedge u \leq x \wedge u \in J,$$

por la inecuación (2.1). Si $(x - ku) < 0$ implica $a_k = 0 \in J$.

Como $0 \leq y \leq x \leq nu$ implica $b_k = (y - ku) \wedge u \vee 0 \leq (x - ku) \wedge u \vee 0 = a_k \in J$, entonces $y = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \in J^\sharp$.

La misma prueba se tiene si $x = x^-$ e $y = y^-$. Puesto que $|x| = x^+ + x^-$ e $|y| = y^+ + y^-$, son sumas de elementos positivos y $J^\sharp$ es un subgrupo de R, así $|y| \leq |x|$, y $x \in J^\sharp$ implica $y \in J^\sharp$.

$J \subseteq J^\sharp$ por construcción y por la inecuación (2.1), $J^\sharp \cap [0, u] \subseteq J$ así,

$$J^\sharp \cap [0, u] = J = \phi(J) \cap [0, u].$$

Por el isomorfismo dado en el Teorema 2.1.11, $J^\sharp = \phi(J)$. □

Corolario 2.1.12. *$\phi(J) = J^\sharp$ es un ideal del l_u-anillo.*

Demostración. Basta ver que $J^\sharp$ es absorbente. Dado $r \in R$, $r = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j d_j$ con $d_j \in [0, u]$ por el Teorema 1.3.11, y dado $x \in J^\sharp$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i c_i$, $c_i \in J$, entonces

$$rx = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j d_j \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i c_i = \sum_{i,j=1}^{mn} \alpha_j \epsilon_i d_j c_i,$$

donde $d_j c_i \in J$, por ser este absorbente, por lo tanto $rx \in J^\sharp$.

Dado que $J^\sharp = \phi(J)$, $\phi(J)$ absorbe. □

Corolario 2.1.13. *En un l_u-anillo semi-low, todo l-ideal es un L-ideal.*

$$Id_g(R) = Id(R).$$

Demostración. Para cada $J \in Id_g(R)$, por el Teorema 2.1.11, se tiene que $J \cap [0,u]$ está en $Id(\Gamma(R))$. Como $\Gamma(R) \in \mathcal{PMV}_f$, $J \cap [0,u]$ absorbe, entonces $J \cap [0,u] \in Id_W(\Gamma(R))$ y consecuentemente $J = (J \cap [0,u])^\sharp \in Id(R)$ por la Proposición 2.1.5. En particular, $Spec_g(R) \subset Id(R)$. □

Corolario 2.1.14. *Dado $J \in Id_g(R)$ con R un l_u-anillo semi-low, R/J es un l_u-anillo semi-low.*

Teorema 2.1.15. *Dado $J \in Id_g(R)$ con R un l_u-anillo semi-low,*

$$\Theta\colon \Gamma(R/J, u_J) \to \Gamma(R,u)/(J \cap [0,u]);\;\; [x]_J \longmapsto [x]_{J\cap[0,u]}$$

es un isomorfismo de MVW-rigs.

Demostración. Como MV-álgebras son isomorfas debido a [7, Teorema 7.2.4], basta ver que el isomorfismo respeta productos. Del corolario 2.1.14, la Proposición 2.1.3 y la definición de Θ se sigue que:

$$\Theta([a]_J[b]_J) = \Theta([ab]_J) = [ab]_{J\cap[0,u]} = \left([a]_{J\cap[0,u]}\right)\left([b]_{J\cap[0,u]}\right).$$

□

Corolario 2.1.16. *Si $J \in Spec(R)$, Θ es un isomorfismo de PMV_f-álgebras cadena.*

Demostración. Se sigue del Teorema anterior y del Corolario 2.1.8. □

Teorema 2.1.17. *Toda PMV_f-álgebra es producto subdirecto de PMV_f-álgebras cadena.*

Demostración. Dada una PMV_f-álgebra A, se tiene que el morfismo inyectivo de MV-álgebras,

$$\widehat{(\,)} : A \to \prod_{P\in Spec(A)} A/P,$$

que asigna $a \mapsto \widehat{a}$ donde $\widehat{a}\colon Spec\,A \to \bigsqcup_{P\in Spec\,A} A/P$ con $\widehat{a}(P) = [a]_P$, es un morfismo de PMV_f-álgebras, tal que $\pi_P \circ \widehat{(\,)}\colon A \to A/P$ es un homomorfismo sobreyectivo para todo ideal primo $P \in Spec(A)$. En efecto, recordemos que todo ideal primo P de la MV-álgebra, es ideal de la PMV_f-álgebra como se mostró en la Proposición 1.2.7, donde, $\widehat{ab} = \widehat{a} \cdot \widehat{b}$ debido a la correspondencia entre los ideales y las congruencias en cualquier PMV_f-álgebra. □

Corolario 2.1.18. *Toda PMV_f-ecuación (ver [7, Sección 1.4]) válida en cualquier PMV_f-álgebra cadena, vale en toda PMV_f-álgebra.*

Corolario 2.1.19. *Para toda PMV_f-álgebra, $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$, $a(b \vee c) = ab \vee ac$.*

Corolario 2.1.20. *Dado un l_u-anillo semi-low (R, u), $\Gamma((R, u))$ es una PMV_f-álgebra.*

Demostración. $\Gamma((R, u))$ es producto subdirecto de $\prod_{P \in Spec(\Gamma(R,u))} \Gamma(R, u)/P$, y por el Corolario 2.1.8 se sigue que cada $\Gamma(R, u)/P$ es una PMV_f-álgebra cadena para todo P, por lo tanto $\Gamma((R, u))$ también es una PMV_f-álgebra. □

Teorema 2.1.21. *Todo l_u-anillo semi-low R es producto subdirecto de cadenas.*

Demostración. Basta ver que el homomorfismo inyectivo de l_u-grupos,

$$\widehat{(-)}^g : R \to \prod_{P \in Spec_g(R)} R/P; \quad x \longmapsto [x]_P,$$

es un homomorfismo de l_u-anillos. Por [7, Teorema 7.2.2] y Corolario 2.1.12, Se sigue directamente que R/P es un l_u-anillo para cada $P \in Spec_g(R)$. □

Extensión de los funtores $(-)^\sharp$ y Γ

A continuación, se debe completar el diagrama de la izquierda para extender la construcción de Chang al funtor $\mathcal{PMV}_f \xrightarrow{(-)^\sharp} \mathcal{LR}_u$, y demostrar así que esta extiende la equivalencia de la primera fila en una equivalencia en la segunda fila.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{CPMV}_f \arrow[r, "(-)^\sharp"] \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{CR}_u f \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{R}}"'] \\
\mathcal{PMV}_f & \mathcal{LR}_u
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{CLR}_u \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{R}}"'] & \mathcal{CPMV}_f \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{M}}"'] \\
\mathcal{LR}_u \arrow[r, "\Gamma"] & \mathcal{PMV}_f
\end{tikzcd}$$

Definición 2.1.22. *Dada una PMV_f-álgebra A, se define*

$$A^\circ := \{(0, \widehat{a}) : a \in A\} \subseteq \prod_{P \in Spec\, A} (A/P)^\sharp.$$

Definición 2.1.23 (l_u-anillo asociado)**.** *Dada una PMV_f-álgebra A, se define*

$$A^\sharp = gen(A^\circ),$$

el l-anillo generado en el l-anillo $\prod\limits_{P \in Spec\, A} (A/P)^\sharp$.

Notación. $A^* = \langle |A^*|, +, u, \leq \rangle$ es el l_u-grupo asociado a la MV-álgebra A y

$$|A^*| = \left\{ x \in \prod_{P \in Spec\, A} (A/P)^* : x = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (0, \widehat{a}_i),\ a_i \in A,\ n \in \mathbb{N},\ \epsilon_i \in \{-1, 1\} \right\}.$$

Proposición 2.1.6. $A^\sharp = \langle |A^*|, +, \cdot, u, \leq \rangle$ *es un l_u-anillo semi-low, donde el producto está definido como sigue:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : |A^*|^2 & \longrightarrow & |A^*| \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) := x \cdot y, \end{array}$$

con $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i (0, \widehat{a}_i)$, $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j (0, \widehat{b}_j)$, $x \cdot y = \sum\limits_{i,j=1}^{nm} \epsilon_i \delta_k (0, \widehat{a_i b_j})$; $a_i, b_j \in A$ *y* $\epsilon_i, \delta_j \in \{-1, 1\}$.

Demostración. φ está bien definida puesto que para cada $P \in Spec(A)$ el producto $(x \cdot y)(P) = x(P) \cdot y(P)$ coincide con el producto dado en la Definición 2.1.4 y descrito en el Corolario 2.1.6. Del Teorema 2.1.5 se sigue que la operación así definida es asociativa y distributiva.

De otra parte, $\langle |A^*|, +, \cdot, \leq \rangle$ es un l_u-anillo semi-low debido a que $\mathbf{0} \leq x\,, y \leq \mathbf{u}$, para todo $x, y \in |A^*|$. Así,

$$x = \sum_{i=1}^{n} (0, \widehat{a}_i) = (0, \oplus_{i=1}^{n} \widehat{a}_i) \text{ e } y = \sum_{j=1}^{m} \left(0, \widehat{b}_j\right) = \left(0, \oplus_{j=1}^{m} \widehat{b}_j\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(x \cdot y)(P) &= x(P) \cdot y(P) \\
&= (0, \oplus \widehat{a}_i)(P) \cdot \left(0, \oplus \widehat{b}_j\right)(P) \\
&= (0, \oplus [a_i]_P) \cdot \left(0, \oplus [b_j]_P\right) \\
&= (0, [\oplus a_i]_P) \cdot \left(0, [\oplus b_j]_P\right) \\
&= \left(0, ([\oplus a_i \cdot \oplus b_j])_P\right) \\
&\leq \left(0, ([\oplus a_i \wedge \oplus b_j])_P\right) \\
&= \left(0, [\oplus a_i]_P \wedge [\oplus b_j]_P\right) \\
&= (0, [\oplus a_i]_P) \wedge \left(0, [\oplus b_j]_P\right) \\
&= \left(0, \widehat{\oplus a_i}\right)(P) \wedge \left(0, \widehat{\oplus b_j}\right)(P) \\
&= x(P) \wedge y(P).
\end{aligned}$$

Como $A^\circ \subseteq |A^*|$, y todo l_u-anillo H que contiene a A°, contiene las sumas finitas y productos de elementos de A°, $\langle |A^*|, +, \cdot, u, \leq \rangle \subseteq H$, es decir, $\langle |A^*|, +, \cdot, u, \leq \rangle$ es el menor l_u-anillo que contiene a A°, por lo tanto

$$A^\sharp = \langle |A^*|, +, \cdot, u, \leq \rangle .$$

$\square$

Definición 2.1.24. *Dado $h : A \to B$ en $\mathcal{PMV}_f$, se define $h^\sharp : A^\sharp \to B^\sharp$ en $\mathcal{LR}_u$ como $h^\sharp \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i (0, \widehat{a}_i) \right) := \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon_i \left(0, \widehat{h(a_i)}\right)$.*

Teorema 2.1.25. *La aplicación $(-)^\sharp \colon \mathcal{PMV}_f \to \mathcal{LR}_u$ que asigna a toda PMV_f-álgebra A el l_u-anillo $A^\sharp$, es funtorial.*

Demostración. Dado $h : A \to B$ en la categoría $\mathcal{PMV}_f$, $h^\sharp$ es un homomorfismo de l_u-anillos y $\mathbf{h}^\sharp$ es un homomorfismo de l-anillos, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h"'] & A^{\circ} \arrow[r, hook, "="] \arrow[d, dashed, "h^{\sharp}"] & \Gamma(A^{\sharp}, u) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\Gamma(h^{\sharp})"] & A^{\sharp} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "h^{\sharp}"] & \prod_{P\in Spec\, A}(A/P)^{\sharp} \arrow[d, "\mathbf{h}^{\sharp}"] \\
B \arrow[r, "\cong"] & B^{\circ} \arrow[r, hook, "="] & \Gamma(B^{\sharp}, u) \arrow[r, hook] & B^{\sharp} \arrow[r, hook] & \prod_{Q\in Spec\, B}(B/Q)^{\sharp}
\end{tikzcd}
$$

Por [14, Teorema 3.3], $h^{\sharp}$ es un homomorfismo de l_u-grupos, y $\mathbf{h}^{\sharp}$ es un homomorfismo de l-grupos. En [14, Teorema 3.3] se prueba que para cada $Q \in Spec(B)$, el morfismo bien definido

$$
\begin{array}{rcl}
h|_Q \colon A/h^{-1}Q & \to & B/Q \\
{[a]}_{h^{-1}Q} & \mapsto & [h(a)]_Q
\end{array}
$$

hace que el siguiente diagrama conmute

$$
\begin{tikzcd}
A/h^{-1}Q \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h|Q"'] & (A/h^{-1}Q)^{\sharp} \arrow[d, "(h|Q)^{\sharp}"] \\
B/Q \arrow[r, "i"] & (B/Q)^{\sharp}
\end{tikzcd}
$$

y permite definir el homomorfismo de grupos $\mathbf{h}^{\sharp}$. Dado $\sigma \in \prod_{P\in Spec\, A}(A/P)^{\sharp}$, $\mathbf{h}^{\sharp}(\sigma)(Q) = (h|_Q)^{\sharp}(\sigma(h^{-1}Q))$, $\quad (\mathbf{h_1 h_2})^{\sharp} = \mathbf{h_1}^{\sharp}\mathbf{h_2}^{\sharp}$, y $\quad \mathbf{h}^{\sharp}|_{A^{\sharp}} = h^{\sharp}$.

Para terminar la demostración basta probar que $h^{\sharp}$ respeta productos en los generadores A°.

Para $P \in Spec\, A$, por la Proposición 2.1.2 se sigue que,

$$
\begin{array}{rcl}
h^{\sharp}\left[(0,\widehat{a})\,(0,\widehat{b})\right](P) & = & h^{\sharp}(0,\widehat{ab})(P) \\
& = & (0,\widehat{h(ab)})(P) \\
& = & (0,[h(ab)]_P) \\
& = & (0,[h(a)h(b)]_P) \\
& = & (0,[h(a)]_P[h(b)]_P) \\
& = & (0,[h(a)]_P)(0,[h(b)]_P) \\
& = & (0,\widehat{h(a)})(P)(0,\widehat{h(b)})(P) \\
& = & h^{\sharp}\,(0,\widehat{a})\,(P)h^{\sharp}(0,\widehat{b})(P).
\end{array}
$$

Por consiguiente, $h^\sharp$ es un homomorfismo de l-anillos.

Por la Proposición 2.1.6, $A^\sharp$ es un l_u-anillo semi-low, y dado un homomorfismo de PMV_f-álgebras $h\colon A \to B$, $h^\sharp\colon A^\sharp \to B^\sharp$ es un homomorfismo de l_u-anillos semi-low.

De otra parte, dados $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{PMV}_f$, de la Definición 2.1.24 se tiene

$$\begin{aligned} (gh)^\sharp\left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\,(0,\widehat{a}_i)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\left(0,\widehat{gh(a_i)}\right) \\ &= g^\sharp\left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\left(0,\widehat{h(a_i)}\right)\right) \\ &= g^\sharp\circ h^\sharp\left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\,(0,\widehat{a}_i)\right). \end{aligned}$$

□

La extensión del funtor Γ es inmediata por las respectivas representaciones subdirectas de los objetos en las categorías.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{CLR}_u \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{R}}"'] & \mathcal{CPMV}_f \arrow[d, hook, "i_{\mathcal{M}}"'] \\ \mathcal{LR}_u \arrow[r, dashed, "\Gamma"] & \mathcal{PMV}_f \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1.26. $\Gamma\colon \mathcal{LR}_u \to \mathcal{PMV}_f$ *es un funtor, donde* $\Gamma(R,u) = [0,u]$ *y* $\Gamma(h) = h|_{[0,u]}$, *para todo* $h\colon (R,u) \to (H,w) \in \mathcal{LR}_u$.

Demostración. La demostración se sigue directamente del Corolario 2.1.20 y la Proposición 2.1.4. □

La equivalencia

Teorema 2.1.27. *Dados una* PMV_f*-álgebra* A *y un* l_u*-anillo semi-low* (R,u)*, se tienen los isomorfismos*

$$A \cong \Gamma(A^\sharp,u) \text{ y } (R,u) \cong (\Gamma(R,u))^\sharp.$$

Demostración. Para el primer isomorfismo tenemos que $A \cong A^\circ$ como PMV_f-

álgebras, con $A^\circ \subset A^\sharp$ como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\widehat{(-)}_A"] \arrow[dr, tail, "\cong"'] & \prod\limits_{P\in Spec\,A}(A/P) \arrow[r, tail, "i"] & \prod\limits_{P\in Spec\,A}(A/P)^\sharp \\
& A^\circ \subset A^\sharp \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

donde la función i se construye por propiedad universal como sigue:

$$\begin{tikzcd}
A/P \arrow[r, "i_P"] & (A/P)^\sharp \\
\prod\limits_{P\in Spec\,A} A/P \arrow[u, "\pi_P"] \arrow[r, dashed, "\exists ! i"] & \prod\limits_{P\in Spec\,A}(A/P)^\sharp \arrow[u, "\pi_P^\sharp"']
\end{tikzcd}$$

con i_P la aplicación definida para cada P como,

$$\begin{array}{rccc} i_P: & A/P & \longrightarrow & (A/P)^\sharp \\ & [a]_P & \longmapsto & (0,[a]_P). \end{array}$$

Por el Teorema 1.3.11,a), $A^\circ = \Gamma(A^\sharp, u)$, así $A \cong \Gamma(A^\sharp, u)$. $\square$

De otra parte, los isomorfismos de l_u-anillos semi-low cadena obtenidos a partir de la construcción de Chang 2.1.3 en el Teorema 2.1.9 sobre las fibras de $\Gamma(R,u)^\sharp$, determinan un isomorfismo $\tau_R : \Gamma(R,u)^\sharp \longrightarrow (R,u)$ de l_u-anillos semi-low como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(R,u)^\sharp \arrow[r, hook, "\subset", "id"'] \arrow[d, dashed, "\tau_R"'] & \prod\limits_{P\in Spec\,R}(\Gamma(R,u)/P\cap[0,u])^\sharp \arrow[r, tail, "\Theta", "\cong"'] & \prod\limits_{P\in Spec\,R}\Gamma(R/P,u_P)^\sharp \arrow[d, "\cong"', "v"] \\
(R,u) \arrow[rr, tail, "\widehat{(-)}^g"] & & \prod\limits_{P\in Spec\,R}(R/P,u_P)
\end{tikzcd}$$

Donde $\tau_R(0,\hat{x}) = \left[\widehat{(-)}^g\right]^{-1}(v\Theta(0,\hat{x})) = \left[\widehat{(-)}^g\right]^{-1}(\hat{x}^g)$.

τ_R queda bien definido, debido a que el homomorfismo $\widehat{(-)}^g$ es inyectivo. La inyectividad de τ_R se sigue de que para todo $x,y\in\Gamma(R,u)$, $\widehat{x}^g = \widehat{y}^g$ implica $x=y$, y así $\widehat{x} = \widehat{y}$, puesto que $\widehat{(-)}$ es un homomorfismo. τ_{R} es sobreyectivo debido a que para todo $x \in (R,u)$ se tiene que $x = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i$ con $x_i \in [0,u]$ por el Teorema 1.3.11,b). Luego, $\tau_{R}(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(0,\widehat{x_i})) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tau_{R}(0,\widehat{x_i}) = x$.

Teorema 2.1.28. *Para cada $A \in \mathcal{PMV}_f$ y $R \in \mathcal{LR}_u$, los isomorfismos*

$$A \xrightarrow{i\widehat{(-)}_A} \Gamma(A^\sharp) \qquad\qquad \Gamma(R)^\sharp \xrightarrow{\tau_R} R$$

son transformaciones naturales.

Demostración. Se sigue directamente de [14, Teorema 3.3]. □

2.2. PMV_f vs f-anillos

Definición 2.2.1. *(f-anillos [[2],XVII.5]). Un anillo de función o f-anillo es un l-anillo en el cual,*

$$x \wedge y = 0 \text{ y } z \geq 0 \text{ implica } xz \wedge y = x \wedge zy = 0.$$

Proposición 2.2.1. *[[2],XVII.5]. En todo f-anillo se tiene*

$$x \wedge y = 0 \implies xy = 0.$$

Teorema 2.2.2. *(Fuchs [[2],XVII.5]). Un l-anillo es un f-anillo si y sólo si todos sus l-ideales cerrados son L-ideales.*

Proposición 2.2.2. *Dado un f-anillo R, el L-ideal generado por un elemento $a \in R$ es*

$$\langle a \rangle = \{x \in R \colon |x| \leq |ra + na|, r \in R,\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. Se sigue de la Definición 1.3.8. □

Proposición 2.2.3. *Dada una PMV_f-álgebra A, $A^\sharp$ es un f_u-anillo semi-low.*

Demostración. $A^\sharp$ es un l_u-anillo semi-low por la Proposición 2.1.6. Por el Corolario 2.1.13 y el Teorema 2.2.2 es un f-anillo, debido a que todos sus l-ideales son L-ideales. □

Ejemplo 2.2.3. *Los números reales es el l_u-anillo correspondiente a la PMV_f-álgebra* $[0,1]$*, es decir* $[0,1]^\sharp = \mathbb{R}$.

Proposición 2.2.4. *Las PMV-álgebras son una subclase propia de los MVW-rigs.*

Demostración. De [11, 4.2] se tiene que dada una PMV-álgebra A, existe un l_u-anillo R tal que $\Gamma(R,u) \cong A$, y por la Proposición 2.1.3 A es un MVW-rig. De la Observación 1.2.5, se sigue que la contenencia es estricta. $\square$

Proposición 2.2.5. *Para todo conjunto X, el f_u-anillo semi-low asociado a la PMV_f-álgebra de Boole 2^X, es isomorfo al anillo de funciones acotadas de $\mathbb{Z}^X$, $B(\mathbb{Z}^X)$.*

Demostración. Basta ver que $\left(2^X\right)^\sharp \cong B(\mathbb{Z}^X)$. La aplicación Θ definida en los generadores,

$$\begin{tikzcd}
\left(2^X\right)^\sharp \arrow[r, "\Theta"] & B(\mathbb{Z}^X) & \\
i\widehat{f} \arrow[r, mapsto] & \tilde{f}\colon X \arrow[r] & \mathbb{Z} \\
& x \arrow[r, mapsto] & f(x)
\end{tikzcd}$$

donde $\Theta\left(\sum_{j=1}^k i\widehat{f_j}\right) = \sum_{j=1}^k \Theta(i\widehat{f_j})$ y $\Theta\left((i\widehat{f})(i\widehat{g})\right) = \Theta((i\widehat{f}))\Theta\left((i\widehat{g})\right)$. Como 2^X es una MV-álgebra hiper-arquimediana, todo ideal primo de esta MV-álgebra es maximal y tiene la forma $P_x = \{f \in 2^X \colon f(x) = 0\}$ para cada $x \in X$ y $[f]_{P_x} = f(x)$. Así, dado $x \in X$,

$$\tilde{f}(x) \neq \tilde{g}(x) \Leftrightarrow f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow f \neq g \Leftrightarrow [f]_{P_x} \neq [g]_{P_x} \Leftrightarrow \widehat{f} \neq \widehat{g},$$

implica que Θ está bien definida y es inyectiva.

Ahora, para $h \in B(\mathbb{Z}^X)$ con $|h| \leq n$ se tiene que,

$$h = \sum_{k=-n}^{n} k\lambda_k, \quad \lambda_k \in 2^X$$

tal que, $\lambda_k(x) = 1$ si $h(x) = k$ y cero en otro caso, con lo cual Θ es sobreyectiva. Por construcción, Θ es homomorfismo de l-anillos. $\square$

Ejemplo 2.2.4. *El f_u-anillo $(2^n)^\sharp$ es isomorfo al anillo $\mathbb{Z}^n$.*

Corolario 2.2.5. *Toda álgebra de Boole vista como PMV_f-álgebra es una subálgebra de 2^X para algún conjunto dado X. Como el funtor $(-)^\sharp$ preserva subálgebras, el f_u-anillo semi-low asociado a un álgebra de Boole, es un subanillo del f_u-anillo semi-low $B(\mathbb{Z}^X)$.*

Ejemplo 2.2.6. *$F[x] \subset \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)$ el f_u-anillo de funciones continuas definido como sigue:*

$$f \in F[x] \Leftrightarrow \exists P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{Z}[x], \text{ tal que } \forall x \in [0,1],\ f(x) = P_i(x),$$

para algún $1 \leq i \leq k$, es el f_u-anillo asociado a la PMV_f-álgebra $\Gamma(F[x])$ (Ejemplo 1.2.11), que es la mínima PMV_f-álgebra que contiene a la MV-álgebra $Free_1$.

Capítulo 3

Álgebras Libres y la Conjetura de Pierce-Birkoff

En este capítulo se aborda la representación de las PMV_f-álgebras provenientes de la MV-álgebra libre $Free_1$ de dos formas: la primera partiendo de las funciones de McNaughton y la segunda, pasando al l_u-anillo de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Esta segunda parte se encuentra en [41] con breves modificaciones en las pruebas.

En la clase de PMV_f-álgebras, la *PMV_f-álgebra libre* existe por resultados ya conocidos del álgebra universal (ver por ejemplo [18, 39]) y sus elementos son *funciones término* (para las MV-álgebras ver [7, 8, 38]).

Observación 3.0.1. *Para las MV-álgebras, $Term_n^{[0,1]} = free_n$ [7, Proposición 3.1.4]. Un resultado similar para la variedad $\mathbb{HSP}[0,1]$ está cerca de una conjetura denominada ([20]) la conjetura de Pierce-Birkhoff, de la cual, los mejores resultados se deben a Mahé que probó la conjetura para $n = 2$ [30] y obtuvo algunos resultados parciales para $n = 3$ [31], (ver también [27, 28, 32]). Resultados en la linea de las PMV-álgebras con aproximaciones a esta conjetura se encuentran en [24, 25].*

Las funciones polinómicas a trozos forman un anillo que contiene al anillo de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y se denota $PW(\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n])$ [27]. La conjetura inicialmente fue enunciada de la siguiente manera:

Conjetura (Pierce-Birkhoff) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está en $PW(\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n])$, entonces existe una familia finita de polinomios $g_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tales que $f = \sup_i \text{ínf}_j(g_{ij})$ (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup_i \text{ínf}_j(g_{ij})$).

3.1. Términos en la PMV_f-álgebra provenientes de $Free_1$

La MV-álgebra de funciones de McNaughton definidas en 1.1.3, tiene un l_u-grupo correspondiente vía la equivalencia categórica dada en [36], el cual se denota $\mathcal{F}[x]$ y es el conjunto de funciones continuas $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ polinomiales a trozos con coeficientes enteros ($PW(\mathbb{Z}[x])$), donde cada polinomio es lineal. En otras palabras,

$$\Gamma(\mathcal{F}[x], 1) \cong Free_1 \tag{3.1}$$

En [41] se encontró el anillo generado por $F[x]$ en el anillo $C(\mathbb{R}^[0, 1])$. Se cortó con el funtor Gamma y se demostró que esta PMV_f- álgebra es la libre en una variable en $\mathbb{HSP}[0, 1]$.

En esta sección se toma el subanillo $\mathcal{F}[x]$ de funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ como en el Ejemplo 1.2.18. Se determinan sus términos partiendo de la descomposición de sus elementos en funciones de McNaughton y de la equivalencia 3.1.

3.1.1. El producto en la MV-álgebra $Free_1$

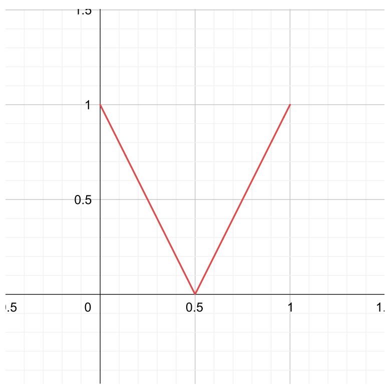
La operación producto puede escribirse como supremos de términos de MV-álgebras, esto aplicado a las funciones de McNaughton con las operaciones dadas en el Ejemplo 1.1.4.

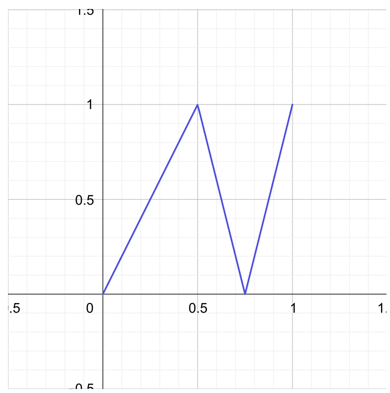
Proposición 3.1.1. *Cada término de la PMV_f-álgebra $\langle Free_1, \cdot\rangle$ se puede escribir como el supremo de términos de la MV-álgebra $Free_1$.*

Demostración. Se sabe que cada término de la MV-álgebra se puede ver como supremos de los componentes de las funciones de McNaughton. Dado que las componentes son positivas y el anillo correspondiente por la equivalencia 2.1.9 es totalmente ordenando, entonces el ínfimo distribuye sobre el supremo. $\square$

Ejemplo 3.1.1. *Dadas las funciones*

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 2x-1 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 3-4x & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}75, \\ 4x-3 & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$





El producto está dado por

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} (1-2x)2x & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ (2x-1)(3-4x) & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}75, \\ (2x-1)(4x-3) & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

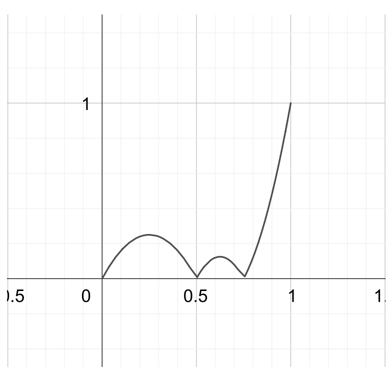


Figura 3.1: $f \cdot g$

Para determinar los términos correspondientes a la MV-álgebra subyacente para f y g tomamos cada componente de las funciones como términos independientes. Así, para f tenemos los componentes $P_1(x) = -2x + 1$ y $P_2(x) = 2x - 1$, y sus respectivas funciones de McNaughton:

$$Q_1(x) = \begin{cases} 1 - 2x & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 0 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} = \text{máx}(0, 1 - 2x) = 1 \ominus 2x = \neg(2x),$$

$$Q_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 2x - 1 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} = \text{máx}(0, 2x - 1) = 2x \ominus 1.$$

Luego, $f(x) = Q_1 \vee Q_2 = \neg(2x) \vee (2x \ominus 1) = (\neg(2x) \ominus (2x \ominus 1)) \oplus (2x \ominus 1)$.

Para la función g tenemos los componentes $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 3 - 4x$ y $P_3(x) = 4x - 3$, y sus respectivas funciones de McNaughton:

$$R_1(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 1 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} = \text{mín}(1, 2x) = 2x \ominus (2x \ominus 1),$$

$$R_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 3 - 4x & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}75, \\ 0 & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases} = \text{mín}(1, \text{máx}(0, 3 - 4x))$$

$$= (3 \ominus 4x) \ominus ((3 \ominus 4x) \ominus 1),$$

$$R_3(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0{,}75, \\ 4x - 3 & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases} = \text{máx}(0, 4x - 3) = 4x \ominus 3.$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(x) &= (R_1 \wedge R_2) \vee R_3 \\ &= [(2x \ominus (2x \ominus 1)) \wedge ((3 \ominus 4x) \ominus ((3 \ominus 4x) \ominus 1))] \vee (4x \ominus 3). \end{aligned}$$

Ahora, el producto de f y g por la equivalencia 2.1.9 es un f-anillo donde cada componente que interviene en el producto es positivo, así

$$(f \cdot g)(x) = (Q_1 \vee Q_2) \cdot ((R_1 \wedge R_2) \vee R_3).$$

Dado que para elementos positivos en un f-anillo el producto distribuye sobre el *ínfimo y el supremo entonces se tiene:*

$(f \cdot g)(x) = [(Q_1R_1 \vee Q_2R_1) \wedge (Q_1R_2 \vee Q_2R_2)] \vee (Q_1R_3 \vee Q_2R_3).$

Gráficamente se puede apreciar cómo $f \cdot g$ *en términos de ínfimos y supremos de las componentes* Q_iR_j, $i, j = 1, 2, 3$, *reconstruye la gráfica dada en la Figura 3.1.*

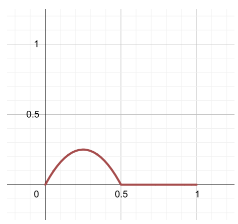


Figura 3.2: Q_1R_1

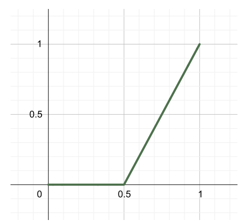


Figura 3.3: Q_2R_1

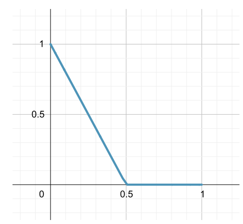


Figura 3.4: Q_1R_2

Figura 3.5: Q_2R_2

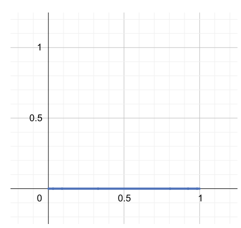


Figura 3.6: Q_1R_3

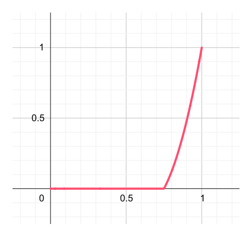


Figura 3.7: Q_2R_3

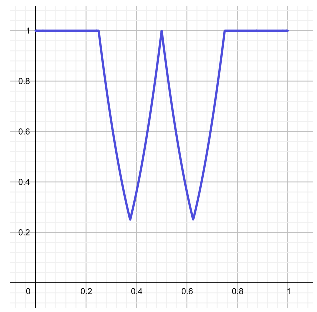
Así, el término correspondiente para la PMV_f*-álgebra es:*

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) = & \Big[\Big(\neg(2x)(2x \ominus (2x \ominus 1)) \vee (2x \ominus 1)(2x \ominus (2x \ominus 1))\Big) \\ & \wedge\Big(\neg(2x)\big((3 \ominus 4x) \ominus ((3 \ominus 4x) \ominus 1)\big)\Big) \\ & \vee\Big((2x \ominus 1)\big((3 \ominus 4x) \ominus ((3 \ominus 4x) \ominus 1)\big)\Big)\Big] \\ & \vee\Big(\neg(2x)(4x \ominus 3) \vee (2x \ominus 1)(4x \ominus 3)\Big).\end{aligned}$$

El producto distribuye sobre la resta, así que el término puede seguir ampliándose.

Ejemplo 3.1.2. *Para el procedimiento inverso se debe determinar si la función es factorizable en* $\mathbb{Z}[x]$ *en factores lineales, los extremos de los subintervalos números racionales y cada factor del primer y último polinomio deben empezar y terminar en 0 y/o 1, teniendo en cuenta además que, las funciones resultantes deben ser* *funciones de McNaughton.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ 16x^2 - 16x + 4 & 0{,}25 \leq x \leq 0{,}375, \\ 16x^2 - 8x + 1 & 0{,}375 \leq x \leq 0{,}5, \\ 16x^2 - 24x + 9 & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}625, \\ 16x^2 - 16x + 4 & 0{,}625 \leq x \leq 0{,}75, \\ 1 & 0{,}75 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

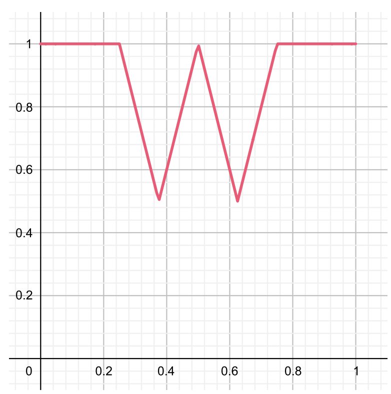


Cada polinomio P_i, $i = 2, 3, 4$ en la función f se puede factorizar

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ (2 - 4x)^2 & 0{,}25 \leq x \leq 0{,}375, \\ (4x - 1)^2 & 0{,}375 \leq x \leq 0{,}5, \\ (3 - 4x)^2 & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}625, \\ (4x - 2)^2 & 0{,}625 \leq x \leq 0{,}75, \\ 1 & 0{,}75 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Luego f se puede ver como la segunda potencia de una función h. Pero los polinomios $P_2 = P_5 = (4x - 2)^2$, entonces para determinar cuál es la función buscada se debe verificar la continuidad en cada parte de la función a trozos. Así,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ 2 - 4x & 0{,}25 \leq x \leq 0{,}375. \\ 4x - 1 & 0{,}375 \leq x \leq 0{,}5, \\ 3 - 4x & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}625, \\ 4x - 2 & 0{,}625 \leq x \leq 0{,}75, \\ 1 & 0{,}75 \leq x \leq 1, \end{cases}$$



es una función de McNaughton y satisface que $h^2 = f$.

Se procede entonces como en el ejemplo anterior a descomponer h en funciones

de McNaughton.
Los componentes de h son: $P_1(x) = 1 = P_6(x)$, $P_2(x) = 2 - 4x$, $P_3(x) = 4x - 1$, $P_4(x) = 3 - 4x$ *y* $P_5(x) = 4x - 2$; *y sus respectivas funciones de McNaughton:*

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ 2-4x & 0{,}25 \leq x \leq 0{,}5, \\ 0 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
&= \text{mín}(1, \text{máx}(0, 2-4x)) = 1 \ominus (1 \ominus (2 \ominus 4x)), \\
Q_2(x) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ 4x-1 & 0{,}25 \leq x \leq 0{,}5, \\ 1 & 0{,}5 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
&= \text{mín}(1, \text{máx}(0, 4x-1)) = 1 \ominus (1 \ominus (4x \ominus 1)), \\
Q_3(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 3-4x & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}75, \\ 0 & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
&= \text{mín}(1, \text{máx}(0, 3-4x)) = 1 \ominus (1 \ominus (3 \ominus 4x)), \\
Q_4(x) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0{,}5, \\ 4x-2 & 0{,}5 \leq x \leq 0{,}75, \\ 1 & 0{,}75 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
&= \text{mín}(1, \text{máx}(0, 4x-2)) = 1 \ominus (1 \ominus (4x \ominus 2)).
\end{aligned}$$

Observe que $Q_1 = P_1 \wedge P_2$ *y* $Q_4 = P_5 \wedge P_6$ *por lo que sólo se tienen 4 funciones de McNaughton y no 6.*

Ahora,

$$\begin{aligned}
h^2(x) &= \Big((Q_1 \vee Q_2) \wedge (Q_3 \vee Q_4)\Big)\Big((Q_1 \vee Q_2) \wedge (Q_3 \vee Q_4)\Big) \\
&= (Q_1^2 \vee Q_1Q_2 \vee Q_2^2) \wedge (Q_1Q_3 \vee Q_2Q_3 \vee Q_1Q_4 \vee Q_2Q_4) \\
&\quad \wedge (Q_3^2 \vee Q_3Q_4 \vee Q_4^2).
\end{aligned}$$

donde $Q_1Q_4 = 0$.

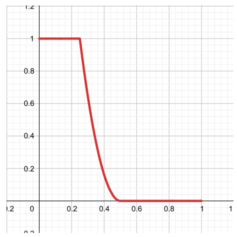


Figura 3.8: Q_1^2

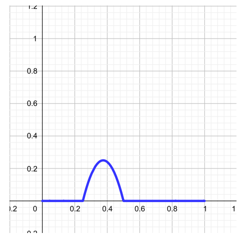


Figura 3.9: Q_1Q_2

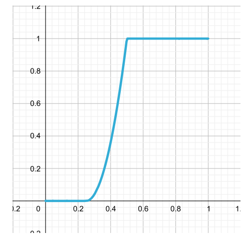


Figura 3.10: Q_2^2

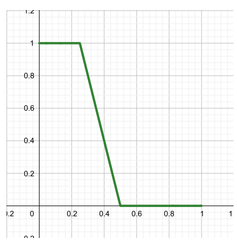


Figura 3.11: Q_1Q_3

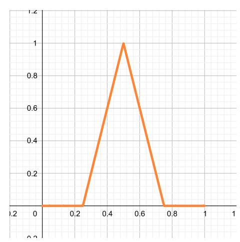


Figura 3.12: Q_2Q_3

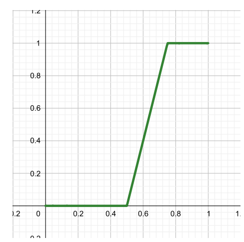


Figura 3.13: Q_2Q_4

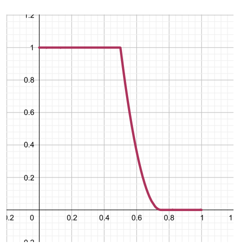


Figura 3.14: Q_3^2

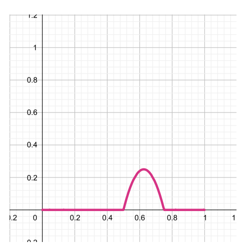


Figura 3.15: Q_3Q_4

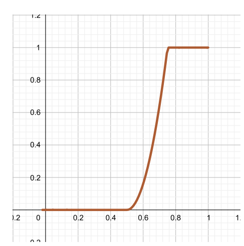


Figura 3.16: Q_4^2

Así, el término correspondiente para la PMV_f-álgebra es:

$$
\begin{aligned}
h^2(x)=&\Big[\Big(1\ominus(1\ominus(2\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(2\ominus 4x))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(2\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 1))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 1))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 1))\Big)\Big]\\
&\wedge\Big[\Big(1\ominus(1\ominus(2\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(3\ominus 4x))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 1))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(3\ominus 4x))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(2\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 2))\Big)\Big]\\
&\wedge\Big[\Big(1\ominus(1\ominus(3\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(3\ominus 4x))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(3\ominus 4x))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 2))\Big)\\
&\vee\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 2))\Big)\Big(1\ominus(1\ominus(4x\ominus 2))\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Observaciones 3.1.1. 1. *Aunque no es la conjetura antes mencionada, se puede observar que para este tipo de funciones provenientes de las funciones de McNaughton, en el f-anillo correspondiente, cada elemento puede verse como ínfimos o supremos de una familia finita de polinomios. Además, el resultado puede ser generalizado para n variables en el anillo $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, y la unidad fuerte puede tomar cualquier valor $\mathbf{0} < u \leq \mathbf{1}$.*

2. *El resultado anterior es aplicable para un n fijo. Las potencias tienden a una recta horizontal cuando n se hace muy grande.*

3. *La estructura no es una PMV_f-álgebra puesto que no es cerrada para ínfimos ni supremos, pues su intersección puede dar en números irracionales. Lo mismo puede ocurrir al truncar la función cuando se realiza la suma. Se debe buscar entonces, el menor l_u-anillo generado por la funciones de McNaughton.*

3.2. Extensión del l_u-grupo $\mathcal{F}[x]$ al l_u-anillo contenido en $PW(\mathbb{Z}[x])$.

El objetivo aquí es hallar el menor l_u-anillo que contiene al l_u-grupo equivalente a la MV-álgebra libre $Free_1$ y caracterizarlo (ver [41]).

Definición 3.2.1. *El anillo generado por el l_u-grupo $\mathcal{F}[x]$ en el anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$, es el conjunto*

$$\langle \mathcal{F}[x] \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} f_{ij} : f_{ij} \in \mathcal{F}[x] \right\}.$$

Definición 3.2.2. *Sea $\mathcal{F}_g[x]$ un subconjunto de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ que satisface:*

i) Para todo $x \in [0,1]$, existen $P_1, P_2, ...P_n \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(x) = P_i(x)$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$,

ii) El dominio de cada polinomio P_i en f, para $i = 1 \ldots n$, es el intervalo $[a,b]$ con $a, b \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Observación 3.2.1. *$\mathcal{F}_g[x]$ es un subanillo del anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ con la suma y el producto usual de funciones, pero no tiene estructura de retículo pues no es cerrado para ínfimos. Por ejemplo, dadas las funciones $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = 2x$ en $\mathcal{F}_g[x]$, $f \wedge g \notin \mathcal{F}_g[x]$ pues*

$$(f \wedge g)(x) = \begin{cases} g(x) & [0, y] \\ f(x) & [y, 1], \end{cases}$$

pero $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

La demostración de la siguiente proposición se escribe completa por proporcionar un algoritmo que permite encontrar la descomposición de las funciones, el cual se programó en el lenguaje de programación *Python* y se encuentra en el Apéndice A.

Proposición 3.2.1. *[41, 2.13]* $\langle \mathcal{F}[x] \rangle = \mathcal{F}_g[x]$.

Demostración. El anillo generado de un conjunto es el menor anillo que lo contiene, entonces para la primera contenencia, basta ver que $\mathcal{F}[x] \subseteq \mathcal{F}_g[x]$, pero esto se tiene por la definición de $\mathcal{F}[x]$.

Ahora, dada $f \in \mathcal{F}_g[x]$, existen $g_{ij} \in \langle \mathcal{F}[x] \rangle$ con $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$ tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} g_{ij}$.

En efecto, si $f \in \mathcal{F}_g[x]$ entonces $f(x) = P_j(x)$ para algún $P_j \in \mathbb{Z}[x]$, $j = 1, ..., n$. Tome $Q_0, Q_1, ..., Q_m$ de tal forma que $Q_i = P_j$, para todo $j = 1, ..., n$, y así f queda reescrita:

$$f = \begin{cases} Q_0 & [0, r_1) \\ Q_1 & [r_1, r_2) \\ \vdots & \\ Q_m & [r_m, 1]. \end{cases}$$

Por la continuidad de f, $Q_{i-1}(r_i) = Q_i(r_i)$ para todo $r_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, ..., m$, luego la función

$$f - Q_0 = \begin{cases} 0 & [0, r_1) \\ Q_1 - Q_0 & [r_1, r_2) \\ \vdots & \\ Q_m - Q_0 & [r_m, 1]. \end{cases}$$

también es continua.

La función

$$\begin{aligned} (f - Q_0) - \begin{cases} 0 & [0, r_1) \\ Q_1 - Q_0 & [r_1, 1) \end{cases} &= \begin{cases} 0 & [0, r_1) \\ 0 & [r_1, r_2) \\ (Q_2 - Q_0) - (Q_1 - Q_0) & [r_2, r_3) \\ \vdots & \\ (Q_m - Q_0) - (Q_1 - Q_0) & [r_m, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & [0, r_1) \\ 0 & [r_1, r_2) \\ Q_2 - Q_1 & [r_2, r_3) \\ \vdots & \\ Q_m - Q_1 & [r_m, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

es continua.

Al hacer este procedimiento m-veces se obtiene que $f - \sum_{i=0}^{m} h_i = 0$ con

$$h_i = \begin{cases} 0 & [0, r_i) \\ R_i & [r_i, 1) \end{cases},$$

donde $R_i = Q_0$ si $i = 0$ y $R_i = Q_i - Q_{i-1}$ si $1 \leq i \leq m$, i.e., $R_i = Q_i - \sum_{j=0}^{i-1} R_j$ y $r_0 = 0$. Así, $f = \sum_{i=0}^{m} h_i$.

Para terminar la prueba basta ver que $h_i = \sum_{k=1}^{l} \prod_{w=1}^{s} f_{kw}$; con $f_{kw} \in \mathcal{F}[x]$.

Como para cada $i \neq 0$, los $r_i \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, entonces se toman de la forma $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ con p_i y q_i primos relativos.
Cada $R_i = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ se puede escribir como $R_i = xR_i^{'} + a_0$, donde $R_i^{'} = a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. Además, $R_i(\frac{p_i}{q_i}) = \frac{p_i}{q_i} R_i^{'}(\frac{p_i}{q_i}) + a_0 = 0$, luego $R_i^{'}(\frac{p_i}{q_i}) = -a_0 \frac{q_i}{p_i}$. Así $p_i(a_n p_i^{n-1} + a_{n-1} p_i^{n-2} q_i + ... + a_1 q^{n-1}) = -q_i^n a_0 \in \mathbb{Z}$, y p_i divide a $-q_i^n a_0$. Puesto que $p_i \not| q_i$ entonces $p_i | a_0$, con lo cual $\dfrac{-q_i a_0}{p_i} = \dfrac{a_0}{r_i} \in \mathbb{Z}$.

Ahora se construye la función continua $h_i^{'} = \begin{cases} -\frac{a_0}{r_i} & [0, r_i) \\ R_i^{'} & [r_i, 1) \end{cases}$ y se observa que

$$h_i = h_i^{'} x + a_0 + \begin{cases} \frac{a_0}{r_i} x - a_0 & [0, r_i) \\ 0 & [r_i, 1]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Repitiendo el mismo procedimiento para $h_i^{'}$, cuyo polinomio $R_i^{'}$ es de grado menor que el de R_i, hasta obtener un polinomio lineal. Así $\langle \mathcal{F}[x] \rangle = \mathcal{F}_g[x]$.

$\square$

3.2.1. El l_u-anillo generado por el l_u-grupo correspondiente a la MV-álgebra $Free_1$.

El conjunto $PW(\mathbb{Z}[x])$ es un l_u-anillo pues es un anillo totalmente ordenado con el orden puntual de funciones y la unidad fuerte el polinomio constante 1, y además, es el menor l_u-anillo de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ que contiene a $\mathcal{F}[x]$. Antes de probar esto último, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.2.3. *Dados un l_u-anillo A y un conjunto $S \subseteq A$, se denota $\langle S \rangle_l$ al menor l_u-anillo que contiene a S.*

El siguiente resultado prueba que al cerrar el anillo $\langle \mathcal{F}[x] \rangle$ para ínfimos y supremos se obtiene $PW(\mathbb{Z}[x])$, es decir

Proposición 3.2.2. *[41] $PW(\mathbb{Z}[x]) = \langle \mathcal{F}[x] \rangle_l$.*

Demostración. Por la Definición 3.2.3, $\langle \mathcal{F}[x] \rangle_l \subseteq PW(\mathbb{Z}[x])$.

Ahora, para $f \in PW(\mathbb{Z}[x])$ existen $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $f(x) = P_i(x)$ para algún $i = 1, 2, ..., n$. Tome $Q_0, Q_1, ...Q_m \in \mathbb{Z}[x]$ de tal manera que cada $Q_i = P_j$ para alguna $j = 1, 2, .., n$ y tales que los Q_i esten ordenados en orden de aparición en f, con lo cual:

$$f = \begin{cases} Q_0 & [0, r_1) \\ Q_1 & [r_1, r_2) \\ . & \\ . & \\ . & \\ Q_m & [r_m, 1]. \end{cases}$$

En la Proposición 3.2.1, se probó que $f = \sum_{i=0}^{m} h_i$ donde $h_i = \begin{cases} 0 & [0, r_i) \\ R_i & [r_i, 1) \end{cases} \in \langle \mathcal{F}[x] \rangle$, con $r_0 = 0$ y $R_i = Q_0$ si $i = 0$ y $R_i = Q_i - Q_{i-1}$ si $1 \leq i \leq m$, así falta probar que h_i se puede expresar como ínfimos o supremos de funciones de $\mathcal{F}[x]$.

Se desea encontrar una función de $\mathcal{F}[x]$ tal que al hacerle ínfimo o supremo con el

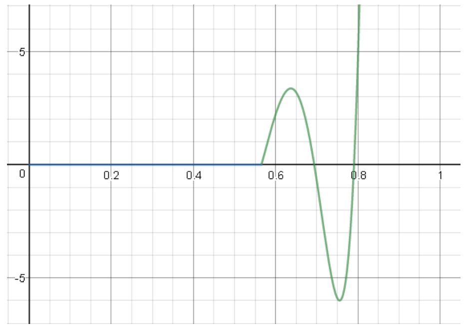


Figura 3.17: Gráfica de h_i.

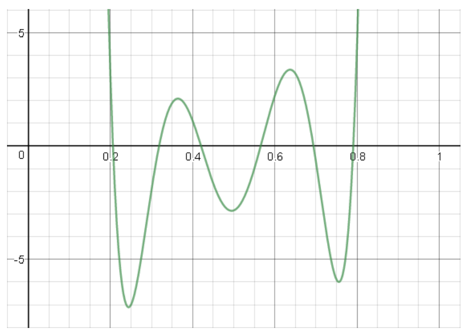


Figura 3.18: Polinomio R_i.

polinomio R_i y sumarle o restarle otra función de $\mathcal{F}[x]$ el resultado sea la función h_i.

Para ello es necesario centrarse en el valor r_i donde la función h_i cambia del polinomio cero al polinomio R_i.

Según el comportamiento del polinomio R_i en el entorno de r_i se deben considerar cuatro casos:

- Caso I: $R_i \leq 0$ en el intervalo $(r_i - \epsilon, r_i]$ y $R_i \geq 0$ en el intervalo $[r_i, r_i + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

  La función buscada $A_k \in \mathcal{F}[x]$, debe cumplir que $A_k(x) > R_i(x)$ para todo $x \in [0, r_i)$ y $A_k(x) \leq R_i(x)$ para todo $x \in [r_i, 1]$, con lo cual

$$R_i \vee A_k = \begin{cases} A_k & [0, r_i) \\ R_i & [r_i, 1]. \end{cases}$$

Si $r_i \in \mathbb{Q}$ entonces se toma la recta

$$A_k(x) = -10^k q_i x + 10^k p_i, \tag{3.3}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ convenientemente escogido. Observe que en este caso $A(r_i) = R(r_i) = 0$.

Si $r_i \in \mathbb{I}$ se consideran los puntos $r_i^- = \frac{[|10^k r_i|]}{10^k}$, $r_i^+ = \frac{[|10^k r_i|]}{10^k} + \frac{1}{10^k} \in \mathbb{Q}$ que satisfacen que $r_i^- \leq r_i \leq r_i^+$ para algún $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y la función

$$A_k(x) = \begin{cases} -10^k x + [|10^k r_i|] & [0, r_i^-) \\ 0 & [r_i^-, r_i^+) \\ -10^k x + [|10^k r_i|] + 1 & [r_i^+, 1], \end{cases} \tag{3.4}$$

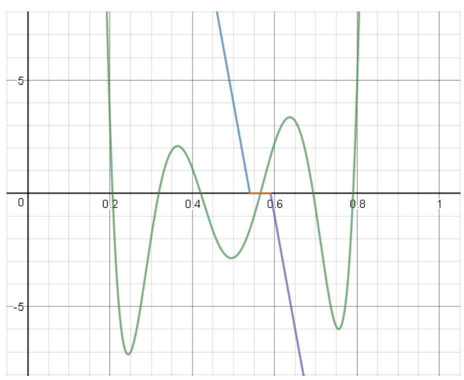


Figura 3.19: Caso I cuando $r_i \in \mathbb{I}$.

Entonces, dependiendo de donde esté r_i se toma A_k como en 3.3 ó 3.4 y

$$h_i = (R_i \vee A_k) - (A_k \vee 0).$$

- Caso II: $R_i \geq 0$ en el intervalo $(r_i - \epsilon, r_i]$ y $R_i \leq 0$ en el intervalo $[r_i, r_i + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

  Al igual que en el caso anterior se define $-A_k$ como 3.3 si $r_i \in \mathbb{Q}$ ó 3.4 si $r_i \in \mathbb{I}$ tal que verifique que

$$h_i = (R_i \wedge -A_k) - (-A_k \wedge 0).$$

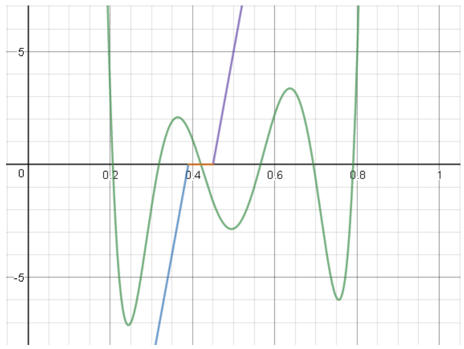


Figura 3.20: Caso II cuando $r_i \in \mathbb{I}$.

- Caso III: $R_i \geq 0$ en el intervalo $(r_i - \epsilon, r_i + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

  La derivada del polinomio R_i denotada por R_i' se anula en r_i y satisface que $R_i' < 0$ en el intervalo $(r_i - \epsilon, r_i)$ y $R_i' > 0$ en el intervalo $(r_i, r_i + \epsilon)$. Para un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se puede garantizar que $NR_i' > R_i$, en el intervalo $(r_i, 1]$.

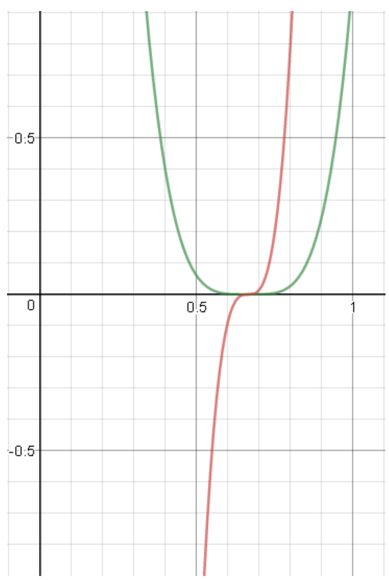


Figura 3.21: Caso III.

Por otro lado, la función

$$A_i = \begin{cases} 0 & [0, r_i) \\ NR_i' & [r_i, 1], \end{cases}$$

pertenece al l_u-anillo $\langle \mathcal{F}[x] \rangle_l$ por el Caso I, con lo cual

$$h_i = A_i \wedge R_i.$$

- Caso IV: $R_i \leq 0$ en el intervalo $(r_i - \epsilon, r_i + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

  Este caso es análogo al anterior. Basta con considerar la función

$$A_i = \begin{cases} 0 & [0, r_i) \\ NR_i' & [r_i, 1], \end{cases}$$

  en $\langle \mathcal{F}[x] \rangle_l$ de tal manera que para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $NR_i' < R_i$ en $(r_i, 1]$, y se considera

$$h_i = A_i \vee R_i.$$

Por lo tanto, $f \in \langle \mathcal{F}[x] \rangle_l$. $\square$

Observación 3.2.2. *Este resultado también se acerca a la conjetura de Pierce-Birkhoff en el tratamiento del problema. Es decir, se buscan funciones polinómicas que separen el polinomio para poder cerrar con ínfimos y supremos.*

Capítulo 4

Co-extensividad de la Categoría de los f_u-anillos

En este capítulo se prueba la co-extensividad de la categoría de f-anillos con una unidad fuerte, con una variación sutil pero importante, de la prueba de la co-extensividad de la categoría de anillos conmutativos unitarios. Como consecuencia, se tiene la co-extensividad de las subcategorías plenas de los f_u-anillos y, dada la equivalencia mostrada en el capítulo 2, de algunas subcategorías plenas de las PMV-álgebras. La importancia de verificar la co-extensividad de la categoría radica en el buen comportamiento de los productos, lo que indica que se puede hacer geometría algebraica. Los resultados expuestos aquí se encuentran en [9].

4.1. Co-extensividad

Las categorías extensivas tienen muchas propiedades geométricas debido a que toda categoría extensiva con productos finitos es distributiva en el sentido que el funtor canónico

$$(X \times Y) + (X \times Z) \to X \times (Y + Z)$$

es un isomorfismo para todo objeto X, Y, Z en la categoría. Lawvere en [26] expresó la necesidad de estudiarlas y caracterizarlas, y Schanuel en [40] las caracterizó para estudiar rigs (semianillos), que son estructuras $\langle A, \cdot, +, 1, 0\rangle$ del tipo

$(2,2,0,0)$ tales que $\langle A,\cdot,1\rangle$ y $\langle A,+,0\rangle$ son monoides conmutativos relacionados por las ecuaciones $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ y $a\cdot 0 = 0$, para todos $a,b,c\in A$.

Definición 4.1.1. *([4, 2.1]) Una categoría $\mathcal{A}$ con coproductos finitos es extensiva si el funtor canónico*

$$+ : \mathcal{A}/X_1 \times \mathcal{A}/X_2 \longrightarrow \mathcal{A}/(X_1+X_2)$$

es una equivalencia para todo X_1, X_2 en $\mathcal{A}$.

Definición 4.1.2. *([4, 2.5]) En una categoría con sumas y pullbacks a lo largo de las inyecciones, las sumas son disjuntas si el pullback de las inyecciones de la suma binaria es el objeto inicial, y las inyecciones son mónicas.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "i_B"] \\ A \arrow[r, "i_A"] & A+B \end{tikzcd}$$

Definición 4.1.3. *([4, 2.10]) En una categoría con coproductos finitos y pullbacks a lo largo de sus inyecciones, un diagrama de coproductos*

$$X_1 \xrightarrow{x_1} X_1 + X_2 \xleftarrow{x_2} X_2$$

es universal si el pullback a lo largo de todo morfismo en X_1+X_2 da un diagrama de coproducto.

Proposición 4.1.1. *([4, 2.14]) Una categoría con coproductos finitos y pullbacks a lo largo de sus inyecciones es extensiva si y sólo si los coproductos son universales y disjuntos.*

Ejemplos 4.1.4. *La categoría de los topos, la categoría de los espacios topológicos, las categorías pequeñas, son algunos ejemplos de categorías extensivas con límites finitos [3]. La categoría de los grupos no es extensiva.*

En general, las categorías extensivas son de naturaleza algebraica [26] y para tener geometría la categoría opuesta debe ser extensiva. Otros resultados acerca de categorías extensivas y distributivas pueden encontrarse en [4].

Definición 4.1.5. *Una categoría $\mathcal{A}$ es co-extensiva si y sólo si $\mathcal{A}^{op}$ es extensiva.*

Observación 4.1.1. *Por el dual de la Proposición 4.1.1, la categoría $\mathcal{A}$ con productos finitos es co-extensiva si las proyecciones son epimorfismos, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "!"] \\ A \arrow[r, "!"] & 1 \end{tikzcd}$$

es un pushout para todo $A, B \in \mathcal{C}$, y para todo $g : A \times B \to C$ los pushouts del siguiente diagrama existen y $C \cong C_0 \times C_1$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d] \\ C_0 & C \arrow[l, "q_0"'] \arrow[r, "q_1"] & C_1 \end{tikzcd}$$

Ejemplos 4.1.6. *La categoría de anillos conmutativos unitarios, la categoría de MV-álgebras*[1]*, la categoría de rigs integrales [5], así como las categorías de álgebras Booleanas y de Heyting, son ejemplos de categorías co-extensivas.*

4.2. Co-extensividad de los f_u-anillos

La categoría de f-anillos con unidad fuerte contiene una clase de anillos no unitarios. Así esta categoría es esencialmente diferente a la categoría de anillos conmutativos unitarios.

Ejemplo 4.2.1. *Sea $R = \mathcal{C}(\mathbb{R}^{[0,1]})$ el anillo de funciones continuas y $u \in R$ tal que $0 < u \leq 1$, $\forall x \neq 1/2$ y $u(1/2) = 0$. Entonces, el anillo generado por u, uR, es un f_u-anillo semi-low sin identidad. En efecto, u es un elemento arquimediano (Definición 1.3.3), puesto que para todo $g \in R$, $|g| < n$ y $ug \in uR$, por consiguiente $|ug| < nu$. Ahora, para $h, z \in uR$ tal que $0 < h, z < u < 1$ se tiene $hz < h \wedge z$.*

La prueba de co-extensividad de la categoría de anillos conmutativos unitarios, es obtenida gracias a la relación entre idempotentes y productos. Lo mismo ocurre

[1] "Comments on the coextensive nature of the category of MV-algebras" presentado por Matías Menni en el Workshop GEOMETRY AND NON CLASSICAL LOGICS, Department of Mathematics, University of Salerno, 2017.

para las MV-álgebras. Pero en los f_u-anillos no necesariamente se tienen los elementos idempotentes, así que se necesitan elementos que cumplan cierta propiedad para obtener el resultado deseado.

Proposición 4.2.1. *Dados dos elementos a, b de un f-anillo C que cumplen $a \wedge b = 0$ y $C = \langle a, b \rangle$ el L-ideal generado,*

$$\theta : C \to C/\langle a \rangle \times C/\langle b \rangle\,;\, c \mapsto ([c]_{\langle a \rangle}, [c]_{\langle b \rangle}),$$

es un isomorfismo de f-anillos.

Demostración. θ está bien definida y es un homomorfismo de f-anillos por construcción. La aplicación es inyectiva puesto que $\theta(c) = ([c]_{\langle a \rangle}, [c]_{\langle b \rangle}) = ([0]_{\langle a \rangle}, [0]_{\langle b \rangle})$ implica $c \in \langle a \rangle$ y $c \in \langle b \rangle$, para todo $c \in C$, es decir, $|c| \leq ra + na$ y $|c| \leq rb + nb$ para algún $r \in C^+$ y $n \in \mathbb{N}$ por la Proposición 2.2.2. De las propiedades de los f-anillos (ver [22, Teorema 1.5 (7)] y [23]), se tiene

$$\begin{aligned} |c| &\leq (ra + na) \wedge (rb + nb) \\ &\leq [(ra + na) \wedge rb] + [(ra + na) \wedge nb] \\ &= (ra \wedge rb) + (na \wedge rb) + (ra \wedge nb) + (na \wedge nb) \\ &\leq (ra \wedge rb) + n(a \wedge rb) + n(ra \wedge b) + n^2(a \wedge b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, $x \equiv y \bmod (\langle a \rangle, \langle b \rangle)$ para todo $x, y \in C$, pues $\langle a, b \rangle = C$. Por el Teorema Chino del Resto, existe $c \in C$ tal que $c \equiv x \bmod \langle a \rangle$ y $c \equiv y \bmod \langle b \rangle$, entonces $\theta(c) = ([c]_{\langle a \rangle}, [c]_{\langle b \rangle}) = ([x]_{\langle a \rangle}, [y]_{\langle b \rangle})$, así θ es sobreyectiva. $\square$

Proposición 4.2.2. *La categoría f_u-anillos es co-extensiva.*

Demostración. Se procede a mostrar el dual de la Proposición 4.1.1.
(Disjunto), el pushout de las proyecciones π_A y π_B de f_u-anillos A, B es el objeto terminal $\{0\} = \mathbf{1}$, puesto que para todo λ_A, λ_B, $\lambda_A \pi_A = \lambda_B \pi_B$ implica $\lambda_A \pi_A(0, u_B) = 0 = \lambda_B \pi_B(0, u_B) = \lambda_B(u_B) = u_X$, donde $(0, u_B) \in A \times B$, u_B es la unidad fuerte B y $0 = u_X$ es la unidad fuerte de X, luego $X = \mathbf{1}$ y $\lambda = id_1$.

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_B"] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\lambda_A"'] & \mathbf{1} \arrow[dr, dotted, "\lambda"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

(Universal), dado $g : A\times B \to C$ un homomorfismo de f_u-anillos, de la Proposición 4.2.1, $\theta : C \to C/\langle e\rangle \times C/\langle\neg e\rangle\,;\, c \mapsto ([c]_{\langle e\rangle}, [c]_{\langle\neg e\rangle})$, es un isomorfismo f_u-anillos con $e = g(0, u_B)$ y $\neg e = u_C - e = g(u_A, 0)$. Se definen $q_e = \pi_e\theta$ con $\pi_e\colon C/\langle e\rangle \times C/\langle\neg e\rangle \to C/\langle e\rangle$ y $q_A(a) = q_e(g(a, 0))$ para todo $a \in A$, y de la misma manera se definen $q_{\neg e} = \pi_{\neg e}\theta$, $q_B(b) = q_{\neg e}(g(0, b))$. Por construcción, q_A, q_B son homomorfismos de f_u-anillos.

Ahora se prueba que los siguientes diagramas son pushouts.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "q_A"] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, dashed, "q_B"] \\
C/\langle e\rangle & C \arrow[l, "q_e"'] \arrow[r, "q_{\neg e}"] & C/\langle\neg e\rangle
\end{tikzcd}$$

Dado $b \in B$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \leq |b| \leq nu_B$. Luego, se tiene que $|g(0, b)| \leq g(0, |b|) \leq g(0, nu_B) = ne$, así $q_e g(0, b) = [0]_{\langle e\rangle}$ y por lo tanto

$$q_A\pi_A(a, b) = q_A(a) = q_e g(a, 0) = q_e g(a, 0) + q_e g(0, b) = q_e g(a, b).$$

Por simetría, $q_B\pi_B = q_{\neg e}g$.

Sean λ_A y λ_g homomorfismos tales que $\lambda_A\pi_A = \lambda_g g$, entonces existe un único λ que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "q_A"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda_A"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[d, "g"] \\
 & C/\langle e\rangle \arrow[dl, dotted, "\lambda"] & C \arrow[l, "q_e"'] \arrow[dll, bend left, "\lambda_g"] \\
P & &
\end{tikzcd}$$

Defina $\lambda([c]_{\langle e\rangle}) = \lambda_g(c)$. Dado que $[c]_{\langle e\rangle} = [c']_{\langle e\rangle}$ si y sólo si $|c - c'| \leq re +$

ne, y $\lambda_g(e) = \lambda_g(g(0, u_B)) = \lambda_A \pi_A((0, u_B)) = 0$, al aplicar λ_g a la desigualdad $c - c' \leq |c - c'| \leq re + ne$, se tiene que $\lambda_g(c) - \lambda_g(c') \leq 0$. De manera similar se obtiene $\lambda_g(c') - \lambda_g(c) \leq 0$, luego λ está bien definida.

Por otro lado, $\lambda q_e = \lambda_g$ por construcción, y

$$\lambda q_A(a) = \lambda q_e(g(a, 0)) = \lambda_g g(a, 0) = \lambda_A \pi_A(a, 0) = \lambda_A(a).$$

λ es única también por construcción.

La demostración de que el siguiente diagrama es un pushout es análoga a la anterior.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "q_B"] \\ C \arrow[r, "q_{\neg e}"] & C/\langle \neg e \rangle \end{tikzcd}$$

□

Dada la contenencia entre las siguientes clases

$$f\text{-anillos con unidad} \subseteq l_u\text{-anillos semi-low} \subseteq f_u\text{-anillos} \subseteq f\text{-anillos},$$

el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 4.2.2. *La categoría $\mathcal{LR}_u$ es co-extensiva.*

La teoría de f-anillos con unidad fuerte está relacionada a la estructura de MVf-álgebras a través de la equivalencia categórica establecida en [11]. Así, todas las subcategorías plenas también son co-extensivas.

Teorema 4.2.3. *Las categorías $P\text{Ł}' \subset \mathbb{HSP}([0,1]) \subset PMV_1 \subset PMV_f \subset MVf$, son co-extensivas.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.2.2, y las equivalencias categóricas [11, Teorema 5.2] y [10, Teorema 3.8]. □

Capítulo 5

Conclusiones

Los cuestionamientos precedentes llevan a pensar que es posible iniciar un estudio sistemático de lo que llamaríamos el álgebra conmutativa difusa. Desde luego, esta es una tarea de más largo alcance, pero se tiene el camino allanado junto con un sinnúmero de publicaciones que así lo indican. En particular, se quiere abordar el problema de la analogía entre las curvas algebraicas en el ámbito del álgebra conmutativa [17] y [19], en contraposición con una teoría de curvas algebraicas en el ámbito de las MV-álgebras y de las MV-álgebras producto.

Debido a la relación entre las PMV_f-álgebras y la clase de f-anillos semi-low, se puede estudiar en este contexto las curvas algebraicas asociadas siguiendo las ideas de [17]. En particular se quiere encontrar una versión del teorema de los ceros de Hilbert en la categoría de f-anillos unitarios conmutativos semi-low, y así a través de la equivalencia con las PMV_f-álgebras se podrá obtener una versión del teorema de los ceros para PMV_f-álgebras, la cual tendría que ser una generalización de los caso descritos en [1] y [15]. Además del teorema de los ceros de Hilbert, otros resultados de la teoría clásica de curvas algebraicas pueden ser descritos en la clase de f-anillos semi-low, por ejemplo, conjuntos algebraicos afines, variedades afines, propiedades locales de curvas planas, y propiedades de curvas planas proyectivas. A través de la equivalencia descrita en [10], se podrán estudiar los resultados correspondientes en la variedad de PMV_f–álgebras. Se espera que

dichos resultados generalicen los resultados algebraicos obtenidos para las MV-álgebras y permitan establecer nuevos caminos de investigación en el campo de la geometría algebraica difusa.
Adicionalmente, a través de la localización en los f-anillos semi-low y la equivalencia categórica con las PMV_f-álgebras, se desea estudiar una representación categórica de las PMV_f-álgebras como un haz de PMV_f-álgebras cadena locales, análoga a la representación categórica hecha para anillos conmutativos unitarios.

A continuación, enunciamos otras preguntas a las que nos ha llevado hasta ahora nuestro trabajo y que hasta el momento no se han desarrollado en la literatura de la teoría y que guían nuestras futuras pesquisas.

- En [12] se construyeron los MV-espacios a partir de la categoría de las MV-álgebras y su representación por MV-cadenas. Esta construcción es un claro ejemplo de cómo se pueden ir copiando las ideas expuestas en [19] para el desarrollo de una geometría algebraica difusa. Especialmente si dotamos a las MV-álgebras de un producto especial. ¿Es posible dar los primeros pasos en esta dirección? ¿Cuáles son los principios básicos de un álgebra conmutativa difusa?
- ¿Cuáles de las propiedades de las curvas algebraicas en el contexto clásico tienen una versión en la variedad de los f-anillos semi-low, [10], y consecuentemente en la variedad de las PMV_f-álgebras producto?
- Los filtros primos de ceros de funciones de la MV-álgebra libre $Free_n$ están en correspondencia biyectiva con sus ideales primos. Estos ceros de funciones son uniones finitas de k-simplex que caracterizan las congruencias de las MV—álgebras. ¿Es posible realizar un estudio de los filtros de ceros de funciones correspondientes a las PMV_f-álgebras libres en una variable?

Apéndice A

En este apéndice se anexa el código en el lenguaje de programación *Phyton*, elaborado a partir de la Proposición 3.2.1. Este programa está elaborado para descomponer, en las funciones h_i, funciones polinómicas a trozos de cualquier cantidad de componentes. El programa arroja un PDF junto con un código Latex de la descomposición. El código fue realizado en colaboración con el profesor León Dario Escobar[1].

```

#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
--------------------------------
|  Descomposicion de funciones|
--------------------------------
"""

#importando modulos
import numpy as np
import sympy as sym


#-----------------------------------------------------------------
#-----------DATOS DE ENTRADA (solo modificar esta parte!)--------
#Declaramos la variable simbolica
x = sym.symbols('x') #declaramos las variables simbolicas
```

[1]Profesor del Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

```

#Introducir los Qs y sus dominios
Q0 = 2*x-4*x**2
Q1 = -8*x**2+10*x-3
Q2 = 8*x**2-10*x+3

r1=0.5
r2=0.75

NumeroDecimales=15

# lista de los Qs
Lista_de_Qs = [Q0 , Q1 , Q2 ]

# Puntos de cambio de polinomios entre cero y uno
#(un numero menor que polinomios!)
Lista_de_rs = [ r1 , r2 ]
#-------------------------------------------------------------
#-------------------------------------------------------------

# Definiendo la clase de los Q para construir los objetos
class Q_objeto():
  def __init__(self, variable , expresion , ri ):
    #inicializa la clase con los atributos que nosotros le pasemos
    self.expresion  = sym.Poly( expresion , variable ) # forma del polinomio
    self.ri     = round(ri,NumeroDecimales)
    self.variable =  variable              # forma de lista


  def __call__(self):#verlo como una matriz para la impresion en pantalla!
      Arreglo_en_matriz = sym.Matrix( [ self.expresion.as_expr() , self.ri ] )
      return Arreglo_en_matriz


#Definiendo la clase de los h (corazon del programa!)
```

```
class h_objeto(object):
  def __init__(self, Q_objeto ):
    self.componente1= 0 * Q_objeto.expresion# para obtener solo la expresion!
    self.dominio1   = [ 0 , Q_objeto.ri ]

    self.componente2= Q_objeto.expresion
    self.dominio2   = [ Q_objeto.ri , 1 ]

    self.descomposicion=[ ]# donde se guardara la descomposicion de h!!
                                    #aqui esta el resultado del programa!!

    self.variable = Q_objeto.variable

  def obtener_hp_objeto(self):
    Ri_prima     = self.componente1.as_expr() # lo cual es cero!
    grado        = self.componente2.degree()
    coeficientes = self.componente2.all_coeffs()
    for n in range( grado ):
      Ri_prima += coeficientes[n] * x**( grado - 1 - n ) # revisar esta parte!!!
    return  Q_objeto(
                      self.variable ,sym.simplify( -coeficientes[-1] / self.dominio1[1] )  ,
                      self.dominio1[1] ), Q_objeto( self.variable , Ri_prima  , self.dominio1[1] )

  def __call__(self):#verlo como una matriz para la impresion en pantalla!
      Arreglo_en_matriz = sym.Matrix([[ self.componente1.as_expr()  ,
                                                  [ self.dominio1[0], self.dominio1[1]  ] ] ,
                                                  [ self.componente2.as_expr() ,
                                                  [ self.dominio2[0] ,
```

```
                                                                    self.
    dominio2[1]   ]  ] ] )
      return Arreglo_en_matriz


#Definiendo la clase de los h primas (corazon del programa!)
class hp_objeto(object):
  def __init__( self,  Q_objeto1 , Q_objeto2 ):

    self.componente1=  Q_objeto1.expresion.as_expr()
    self.dominio1    =  [ 0 , Q_objeto1.ri ]

    self.componente2=  Q_objeto2.expresion
    self.dominio2    = [ Q_objeto2.ri, 1 ]

    self.variable = Q_objeto1.variable

  def transformar_a_h_objeto(self):
    return str( round( self.componente1.as_expr() ,
    NuemroDecimales) ) ,
                         Q_objeto(  self.variable , self.
    componente2.as_expr() -
                                    self.componente1.as_expr(),
                                    round(self.dominio1[1],
    NumeroDecimales) )

  def __call__(self):# Verlo como una matriz para la impresion en
     pantalla!
    #Arreglo_en_matriz = sym.Matrix( [[ self.componente1.as_expr
    () ,
                                                            #[ str(self.
    dominio1[0]),
                                                            #str(self.
    dominio1[1])  ]  ] ,
                                                            #[ self.
    componente2.as_expr() ,
                                                              #[ str(self.
    dominio2[0]),
```

```
                                                    #str(self.dominio2[1])  ]  ] ] )
    Arreglo_en_matriz = sym.Matrix( [[  self.componente1.as_expr() ,
                                                    [ sym.symbols( str(self.dominio1[0]) ),
                                                        sym.symbols( str(self.dominio1[1]) ) ]  ] ,
                                                  [ self.componente2.as_expr() ,
                                                    [  sym.symbols( str(self.dominio2[0]) ) ,
                                                        sym.symbols( str(self.dominio2[1]) )  ]  ] ] )

    return Arreglo_en_matriz

  def el_ultimo_hp(self):
    Arreglo_en_matriz = sym.Matrix(
                    [[ sym.symbols( str( round( self.componente1, NumeroDecimales ) ) ) ,
                                                    [ sym.symbols( str(self.dominio1[0]) ),
                                                      sym.symbols( str(self.dominio1[1]) ) ]] ,
                                                    [ self.componente2.as_expr() ,
                                                    [ sym.symbols( str(self.dominio2[0]) ) ,
                                                      sym.symbols( str(self.dominio2[1]) ) ]]] )
    print round( self.componente1,NumeroDecimales )
    return Arreglo_en_matriz


# Creacion de las diferencias de los Qs
Qs=[]
for i in range( 1 , len( Lista_de_Qs ) ):
  Qs.append( Q_objeto( x , Lista_de_Qs[i]-Lista_de_Qs[i-1] ,
```

```
                             Lista_de_rs[i-1] ) )

#print Qs[0]#()# llamando al objeto Q!
#raw_input()

# Creacion de los objetos h
h=[]
for i in range(  len( Qs ) ):
  h.append(   h_objeto( Qs[i] )   )


  print "------h",i,"-----"
  sym.pprint( h[i]() )
  print "---------------\n"

raw_input()

# Reduccion de todos los h hasta grado 1
h_para_imprimir=[0]*len(h)
contador_de_parentesis=0

for j in range( len(h) ):
  coeficientes = h[j].componente2.all_coeffs() #primero es el del maximo grado
  gradoh       = h[j].componente2.degree()

  if gradoh>1: #reduccion del grado de h si es necesario

    gradohp = 2 #Variable auxiliar

    h_a_descoponer=h[j]

    while(gradohp>1):

      # hallar hp
      hp1,hp2 = h_a_descoponer.obtener_hp_objeto( )
      hp = hp_objeto( hp1,hp2 )

          # h descompuesto como hp y las otras cosas!
```

```
    Coeffs=  h_a_descoponer.componente2.all_coeffs()
    a0 = Coeffs[-1] # el ultimo de la lista de coeficientes
    rj = h[j].dominio1[1]

    # Adicionando los terminos de a0
    h[j].descomposicion.append( str(  round(a0,NumeroDecimales)
   ) )
    #raw_input()

    # Adicionando la funcion por tramos
    A=  hp_objeto(  Q_objeto( h_a_descoponer.variable ,  (a0/rj
) *x - a0 ,
                                                       round(rj,
NumeroDecimales) ),
                                             Q_objeto( h_a_descoponer.
variable ,0,rj)   )
    h[j].descomposicion.append( A )

    #print A()
    #raw_input()

    # Agregando la gran X que multiplica al parentesis!!!!
    h[j].descomposicion.append( str( h_a_descoponer.variable )
)

    # Chequear el grado del Rip para ver si hp tiene que ser
reducido una vez mas o no!...
    gradohp = hp.componente2.degree()

    h[j].descomposicion.append( "{" )

    if gradohp>1:

      # Preparando para la siguiente reduccion de hp...
transformarlo en tipo h!

      #Obtener el hp descompuesto como h
      descomposicion_hp = hp.transformar_a_h_objeto( )

```

```

      h_a_descoponer = h_objeto( descomposicion_hp[1] )


      # Adicionando el termino faltante
      h[j].descomposicion.append( descomposicion_hp[0] )

    else:
                              # adiciono el ultimo hp que no fue descompuesto!
      h[j].descomposicion.append( hp.el_ultimo_hp() )


#Para imprimir en pantalla!
print "*********************************************"

h_descompuesto_final=[]

print "--------descomposicion h",j,"------------"

for k in range( len( h[j].descomposicion ) ):

  if callable( h[j].descomposicion[k] ):
    h_descompuesto_final.append(  h[j].descomposicion[k]()    )
    # lo guarda y lo muestra!
  else:
    h_descompuesto_final.append(   h[j].descomposicion[k]     )
    # lo guarda y lo muestra!

  if k<len( h[j].descomposicion )-1 and h[j].descomposicion[k]!
  ="{" and h[j].descomposicion[k]!=str( h_a_descoponer.variable
  ):
    h_descompuesto_final.append(   "+"   )


h_para_imprimir[j] = h_descompuesto_final # y listo para ser guardado!

#print h_descompuesto_final
```

```
  print "*********************************************"
  raw_input()

#import sys
#sys.exit()



import pylatex

print "llamando el modulo pylatex"
raw_input()


geometry_options = {"tmargin": "2cm", "lmargin": "2cm"}
doc = pylatex.Document(geometry_options=geometry_options,
                       font_size='footnotesize')

#doc = pylatex.Document()
# definiendo el titulo
doc.preamble.append
(pylatex.Command('title','Descomposicion de funciones
    polinomiales a trozos'))

doc.preamble.append(pylatex.Command('author', 'Johana'))# autor
    del documento
doc.append(pylatex.utils.NoEscape(r'\maketitle')) # crear!


with doc.create(pylatex.Section('Polinomios ecuaciones')): #
    creando la secci n"


  #with doc.create(pylatex.Subsection('Las h originales')):

  # for k in range( len(h) ):

        #h_original= pylatex.Matrix(  h[k]() , mtype='b' )
```

```
      #doc.append( pylatex.Math( data = [ 'h',str(k),'=', h_original ]) )
      #doc.append('\\')

with doc.create(pylatex.Subsection('Descomposicion de las h')):
  for a in range( len(h_para_imprimir) ):
    doc.append('Descomposicion de las h')
    doc.append( str(a+1) )
    doc.append( ":" )

    # Formando las matrices

    h_inicial= "h"+str(a+1)+"="
    h_final=[ h_inicial ]
    contador_bracket=0

    #leyendo h para imprimir
    for i in range( len(h_para_imprimir[a]) ):

      if isinstance( h_para_imprimir[a][i], str):

        #print "hola", h_para_imprimir[a][i]
        if (h_para_imprimir[a][i]=="{") or
           (h_para_imprimir[a][i]=="}"):

          contador_bracket +=1
          h_final.append(  pylatex.Matrix( sym.Matrix(
                                                    [ [ contador_bracket ] ,
                                                    [ contador_bracket] ,
                                                    [ contador_bracket]]),
                                                    mtype='b') )

        else:
          h_final.append( h_para_imprimir[a][i] )

```

```
        else:
          h_final.append( pylatex.Matrix( h_para_imprimir[a][i],
            mtype='B')  )


    # cerrando los parentesis
    for q in range( contador_bracket , 0 , -1):
      h_final.append(  pylatex.Matrix( sym.Matrix( [ [ q ] , [q ] , [q]]  ) ,
mtype='b') )

    doc.append(pylatex.Math( data = h_final  ) )


doc.generate_pdf('Ecuaciones') # generar el .pdf con nombre ecuaciones!
doc.generate_tex('Ecuaciones') # generar el .tex con nombre ecuaciones!

print "Listo!!!, .pdf y .tex creados..... ;)!!!\n"
```

A.1. Ejemplos

Ejemplo 1.

```
#Introducir los Qs y sus dominios
Q0 = 2*x-4*x**2
Q1 = -8*x**2+10*x-3
Q2 = 8*x**2-10*x+3

r1=0.5
r2=0.75

NumeroDecimales=15

# lista de los Qs
Lista_de_Qs = [Q0 , Q1 , Q2 ]
```

```
# Puntos de cambio de polinomios entre cero y uno
#(un numero menor que polinomios!)
Lista_de_rs = [ r1 , r2 ]
```

Después de ingresar en el programa la función que se desea reescribir, en este caso la función $f \cdot g$ dada en Ejemplo 3.1.1, el PDF obtenido es:

Descomposición de las h

Descomposición de las h1:

$$h1 = -3{,}0 + \begin{Bmatrix} 3{,}0 - 6{,}0 * x & [0, 0{,}5] \\ 0 & [0{,}5, 1] \end{Bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6{,}0 & [0, 0{,}5] \\ 8 - 4 * x & [0{,}5, 1] \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de las h2:

$$h2 = 6{,}0 + \begin{Bmatrix} 8{,}0 * x - 6{,}0 & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{Bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -8{,}0 & [0, 0{,}75] \\ 16 * x - 20 & [0{,}75, 1] \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tome la matriz $[1]_{3\times 1}$ como un paréntesis.

Así, la función puede reescribirse como $f \cdot g = h_0 + h_1 + h_2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) =& x(2-4x) + \left[-3 + \begin{cases} 3-6x & [0,0{,}5] \\ 0 & [0{,}5,1] \end{cases} + x\left(\begin{cases} 6 & [0,0{,}5] \\ 8-4x & [0{,}5,1] \end{cases}\right)\right] \\ &+ \left[6 + \begin{cases} -6+8x & [0,0{,}75] \\ 0 & [0{,}75,1] \end{cases} + x\left(\begin{cases} -8 & [0,0{,}75] \\ -20+16x & [0{,}75,1] \end{cases}\right)\right].\end{aligned}$$

El programa descompone las h_i donde el grado de los polinomios R_i es mayor o igual a dos y las muestra en pantalla, pero lo hace para $i \neq 0$, por esta razón h_0 no aparece.

De la Proposición 3.2.1:

1) $h_0 = -4x^2 + 2x = x(2-4x)$.

2) $h_1 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}5] \\ -3+8x-4x^2 & [0{,}5, 1] \end{cases}$ y $h_1' = \begin{cases} 6 & [0, 0{,}5] \\ 8-4x & [0{,}5, 1] \end{cases}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} h_1 = & \ -3 + \begin{cases} 3-6x & [0, 0{,}5] \\ 0 & [0{,}5, 1] \end{cases} + h_1' x \\ = & \ -3 + \begin{cases} 3-6x & [0, 0{,}5] \\ 0 & [0{,}5, 1] \end{cases} + x \left(\begin{cases} 6 & [0, 0{,}5] \\ 8-4x & [0{,}5, 1] \end{cases} \right). \end{aligned}$$

3) $h_2 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}75] \\ 6-20x+16x^2 & [0{,}75, 1] \end{cases}$ y $h_2' = \begin{cases} -8 & [0, 0{,}75] \\ -20+16x & [0{,}75, 1] \end{cases}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} h_2 & = 6 + \begin{cases} -6+8x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{cases} + h_2' x \\ & = 6 + \begin{cases} -6+8x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{cases} + x \left(\begin{cases} -8 & [0, 0{,}75] \\ -20+16x & [0{,}75, 1] \end{cases} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

```
#introducir los Qs y sus dominio
Q0 = 1
Q1 = 16*x**2-16*x+4
Q2 = 16*x**2-8*x+1
Q3 = 16*x**2-24*x+9
Q4 = 16*x**2-16*x+4
Q5 = 1

r1=0.25
r2=0.375
r3=0.5
r4=0.625
r5=0.75

NumeroDecimales=15
```

```

# lista de los Qs
Lista_de_Qs = [Q0 , Q1 , Q2 , Q3 , Q4 , Q5 , 1 ]

# puntos de cambio de polinomios entre cero y uno (un numero menor que polonomios!)
Lista_de_rs = [ r1 , r2 , r3 , r4 , r5 ]
#---------------------------------------------------------------
```

Al tomar la función h^2 dada en Ejemplo 3.1.2, el PDF obtenido es:

Descomposición de las h

Descomposición de las h1:

$$h1 = 3{,}0 + \begin{Bmatrix} 12{,}0 * x - 3{,}0 & [0, 0{,}25] \\ 0 & [0{,}25, 1] \end{Bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -12{,}0 & [0, 0{,}25] \\ 16 * x - 16 & [0{,}25, 1] \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de las h2:

$$h2 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}375] \\ -3 + 8 * x & [0{,}375, 1] \end{cases} .$$

Descomposición de las h3:

$$h3 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}5] \\ 8 - 16 * x & [0{,}5, 1] \end{cases} .$$

Descomposición de las h4:

$$h4 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}625] \\ -5 + 8 * x & [0{,}625, 1] \end{cases} .$$

Descomposición de las h5:

$$h5 = -3{,}0 + \left\{\begin{matrix} 3{,}0 - 4{,}0 * x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{matrix}\right\} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} 4{,}0 & [0, 0{,}75] \\ 16 - 16 * x & [0{,}75, 1] \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así, la función puede reescribirse como $h^2(x) = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5$.

$$\begin{aligned} h^2(x) = \quad & 1 + \left[3 + \left\{\begin{matrix} -3 + 12x & [0, 0{,}25] \\ 0 & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right. + x \left(\left\{\begin{matrix} -12 & [0, 0{,}25] \\ -16 + 16x & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right.\right)\right] \\ & + \left\{\begin{matrix} 0 & [0, 0{,}375] \\ -3 + 8x & [0{,}375, 1] \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} 0 & [0, 0{,}5] \\ 8 - 16x & [0{,}5, 1] \end{matrix}\right. \\ & + \left\{\begin{matrix} 0 & [0, 0{,}625] \\ -5 + 8x & [0{,}625, 1] \end{matrix}\right. \\ & + \left[-3 + \left\{\begin{matrix} 3 - 4x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{matrix}\right. + x \left(\left\{\begin{matrix} 4 & [0, 0{,}75] \\ 16 - 16x & [0{,}75, 1] \end{matrix}\right.\right)\right] \end{aligned}$$

De la Proposición 3.2.1:

1) $h_0 = 1$.

2) $h_1 = \left\{\begin{matrix} 0 & [0, 0{,}25] \\ 3 - 16x + 16x^2 & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right.$ y $h_1' = \left\{\begin{matrix} -12 & [0, 0{,}25] \\ -16 + 16x & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right.$.

   Entonces,

$$\begin{aligned} h_1 \quad &= 3 + \left\{\begin{matrix} -3 + 12x & [0, 0{,}25] \\ 0 & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right. + h_1' x \\ &= 3 + \left\{\begin{matrix} -3 + 12x & [0, 0{,}25] \\ 0 & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right. + x \left(\left\{\begin{matrix} -12 & [0, 0{,}25] \\ -16 + 16x & [0{,}25, 1] \end{matrix}\right.\right). \end{aligned}$$

3) $h_2 = \left\{\begin{matrix} 0 & [0, 0{,}375] \\ -3 + 8x & [0{,}375, 1] \end{matrix}\right.$.

4) $h_3 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}5] \\ 8 - 16x & [0{,}5, 1] \end{cases}$.

5) $h_4 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}625] \\ -5 + 8x & [0{,}625, 1] \end{cases}$.

6) $h_5 = \begin{cases} 0 & [0, 0{,}75] \\ -3 + 16x - 16x^2 & [0{,}75, 1] \end{cases}$ y $h_5' = \begin{cases} 4 & [0, 0{,}75] \\ 16 - 16x & [0{,}75, 1] \end{cases}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} h_5 &= -3 + \begin{cases} 3 - 4x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{cases} + h_5' x \\ &= -3 + \begin{cases} 3 - 4x & [0, 0{,}75] \\ 0 & [0{,}75, 1] \end{cases} + x \left(\begin{cases} 4 & [0, 0{,}75] \\ 16 - 16x & [0{,}75, 1] \end{cases} \right). \end{aligned}$$

Estos ejemplos son funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ pero el algoritmo funciona para funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

Bibliografía

[1] L. P. Belluce, A. Di Nola, y G. Lenzi. On generalizing the nullstellensatz for mv algebras. *Journal of Logic and Computation*, 25(3):701–717, 2014.

[2] G. Birkhoff. Lattice theory, Third edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, 25. En *American Mathematical Society, Providence, R.I.* 1967.

[3] A. Carboni y G. Janelidze. Decidable (= separable) objects and morphisms in lextensive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 110(3):219–240, 1996.

[4] A. Carboni, S. Lack, y R.F.C. Walters. Introduction to extensive and distributive categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 84(2):145–158, 1993.

[5] J. L. Castiglioni, M. Menni, y W. J. Botero. A representation theorem for integral rigs and its applications to residuated lattices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(10):3533–3566, 2016.

[6] C. C. Chang. A new proof of the completeness of the łukasiewicz axioms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1):74–80, 1959.

[7] R. L. Cignoli, I. M. DÓttaviano, y D. Mundici. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, tomo 7. Springer Science & Business Media, 2000.

[8] R. L. Cignoli y A. Torrens. An algebraic analysis of product logic. *Multiple Valued Logic*, 5:45–65, 2000.

[9] L. J. Cruz y Y. A. Poveda. On coextensivite of f-rings with a strong unit. *Sometido.*

[10] L. J. Cruz y Y. A. Poveda. Categorical equivalence between PMV_f-product algebras and semi-low f_u-rings. *Studia Logica*, 107:1135–1158, 2019.

[11] A. Di Nola y A. Dvurečenskij. Product MV-algebras. *Multiple-Valued Logics*, 6:193–215, 2001.

[12] E. J Dubuc y Y. A. Poveda. Representation theory of MV-algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(8):1024–1046, 2010.

[13] E. J. Dubuc y Y. A. Poveda. The intimate relationship between the McNaughton and the chinese remainder theorems for MV-algebras. *Studia Logica*, 101(3):483–485, 2013.

[14] E. J. Dubuc y Y. A. Poveda. On the equivalence between MV-algebras and l-groups with strong unit. *Studia Logica*, 103(4):807–814, 2015.

[15] E. J. Dubuc y J. Zilber. Some remarks on infinitesimals in MV-algebras. *arXiv preprint arXiv:1602.05204*, 2016.

[16] A. Estrada y Y. A. Poveda. MVW-rigs and product MV-algebras. *Journal of Applied Non-Clasisical Logics*, 29(1):78–96, 2019.

[17] W Fulton. *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry.* Addison-Wesley, 1989.

[18] G. Grätzer. *Universal algebra.* Springer Science & Business Media, 2008.

[19] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer Science & Business Media, 2013.

[20] M. Henriksen y J. R. Isbell. Lattice-ordered rings and function rings. 1962.

[21] R. Horčík y P. Cintula. Product Łukasiewicz logic. *Archive for Mathematical Logic*, 43(4):477–503, 2004.

[22] Ma Jingjing. *Lecture notes on algebraic structure of lattice-ordered rings.* World Scientific, 2014.

[23] D. G. Johnson. A structure theory for a class of lattice-ordered rings. *Acta mathematica*, 104(3):163–215, 1960.

[24] S. Lapenta y I. Leuştean. f-MV-algebras and piecewise polynomial functions. *MANYVAL 2013*, pág. 34.

[25] S. Lapenta y I. Leuştean. Towards understanding the pierce–birkhoff conjecture via MV-algebras. *Fuzzy sets and systems*, 276:114–130, 2015.

[26] F. W. Lawvere. Some thoughts on the future of category theory. En *Category Theory*, págs. 1–13. Springer, 1991.

[27] F. Lucas, J. Madden, D. Schaub, y M. Spivakovsky. On connectedness of sets in the real spectra of polynomial rings. *manuscripta mathematica*, 128(4):505, 2009.

[28] F. Lucas, D. Schaub, y M. Spivakovsky. On the pierce–birkhoff conjecture. *Journal of Algebra*, 435:124–158, 2015.

[29] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer Science & Business Media, 2013.

[30] L. Mahé. On the pierce-birkhoff conjecture. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14(4):983–985, 1984.

[31] L. Mahé. On the pierce–birkhoff conjecture in three variables. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 211(2):459–470, 2007.

[32] M. Marshall. The pierce-birkhoff conjecture for curves. *Canadian Journal of Mathematics*, 44(6):1262–1271, 1992.

[33] F. Montagna. An algebraic approach to propositional fuzzy logic. *Journal of Logic, Language and Information*, 9(1):91–124, 2000.

[34] F. Montagna. Subreducts of MV-algebras with product and product residuation. *Algebra Universalis*, 53(1):109–137, 2005.

[35] F. Montagna y G. Panti. Adding structure to MV-algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164(3):365–387, 2001.

[36] D. Mundici. Interpretation of AF C∗-algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65(1):15–63, 1986.

[37] D. Mundici. A constructive proof of McNaughton's theorem in infinite-valued logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 59(2):596–602, 1994.

[38] Daniele Mundici. *Advanced Łukasiewicz calculus and MV-algebras*, tomo 35. Springer Science & Business Media, 2011.

[39] H. P. Sankappanavar y S. Burris. A course in universal algebra. *Graduate Texts Math*, 78, 1981.

[40] S. H. Schanuel. Negative sets have Euler characteristic and dimension. En *Category theory*, págs. 379–385. Springer, 1991.

[41] S. Zuluaga. *Los MVW-rigs provenientes de las MV-álgrebras Libres*. Proyecto Fin de Carrera, Universidad Tecnológica de Pereira, 2017.