Situaciones didácticas para el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales a partir de un enfoque geométrico

Fabián Salazar Méndez.
Cód. 1703529

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática
Santiago de Cali
2020

Situaciones didácticas para el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales a partir de un enfoque geométrico

Fabián Salazar Méndez.
Cód. 1703529

Director:
Edinsson Fernández Mosquera
Magíster en Educación Matemática.

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Maestría en Educación Énfasis Educación Matemática
Santiago de Cali
2020

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección de Investigaciones y Posgrados

ACTA DE SUSTENTACIÓN

Programa Académico: Maestría en Educación - Énfasis Educación Matemática - Modalidad Profundización

Código del programa: 7412 Resolución del programa: 017

Día	Mes	Año
11	9	2020

Título del Trabajo o Proyecto de Grado
"SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES A PARTIR DE UN ENFOQUE GEOMÉTRICO"

Se trata de:
Trabajo de grado de Maestría ☑
Director
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA

Evaluadores	
Nombres y Apellidos	**Filiación Universitaria**
CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA	UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
EVELIO BEDOYA MORENO	UNIVERSIDAD DEL VALLE

Estudiantes			
Nombres y Apellidos	**Código**	**E-mail**	**Teléfonos de contacto**
FABIÁN SALAZAR MÉNDEZ	1703529	mendez_fs@hotmail.com	313-7761339

Evaluación					
Aprobado	☑	Meritorio	☐	Laureado	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de ________ (máximo un mes) ante:*

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☑ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de ________ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

En el caso de ser ***Aprobado con distinción meritorio o laureado****, diligenciar en la página siguiente los conceptos de evaluación.*

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firma

Edinsson Fernández M.	Carlos Pérez	E. B. M.
Prof. EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA	*Prof. CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA*	*Prof. EVELIO BEDOYA MORENO*
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador

Henry Giovany Cabrera C.	[firma]
Prof. HENRY GIOVANY CABRERA C.	*Prof. DAVID BENÍTEZ MOJICA*
Subdirector de Investigaciones y Posgrados	(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)

Recomendaciones ☐ **Observaciones** ☐ **Razón de desacuerdo - Alternativas** ☑

Si se considera necesario, usar hojas adicionales.

LOS JURADOS RESALTAN LA CALIDAD DEL TRABAJO Y LA EXCELENTE SUSTENTACIÓN QUE HIZO EL ESTUDIANTE.

Firmas

Edinsson Fernández M.	Carlos Pérez	E. B. M.
Prof. EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA	*Prof. CARLOS ROBERTO PÉREZ MEDINA*	*Prof. EVELIO BEDOYA MORENO*
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador

Henry Giovany Cabrera C.	[firma]
Prof. HENRY GIOVANY CABRERA C.	*Prof. DAVID BENÍTEZ MOJICA*
Subdirector de Investigaciones y Posgrados	(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)

Este documento está dedicado

A mi familia, especialmente a mi madre María Solaida Méndez P. y a mi padre Luis Enrique Salazar B.

Agradecimientos

Deseo expresar mis más sinceros agradecimientos a las instituciones y personas que hicieron posible, de manera directa o indirecta, la culminación de este trabajo:

A la Universidad del Valle y su equipo de docentes del Instituto de Educación y Pedagogía.

Al programa de Formación de Alto Nivel (FAN) de la Gobernación del Valle.

A la Institución Educativa Juan Pablo II de la ciudad de Cali y su equipo de directivos, docentes y estudiantes.

A los compañeros y compañeras de estudio de la maestría.

Y por último y no menos importante, deseo hacer una mención de agradecimiento muy especial al Mg. Edinsson Fernández Mosquera por las orientaciones y asesoría en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Muchas investigaciones alrededor del aprendizaje de la trigonometría han enfatizado en que se le ha dado mucha importancia a los procesos algorítmicos. Para contrarrestar esta cuestión, en este trabajo se realizó una sistematización de una experiencia docente con estudiantes de grado décimo, la cual buscó que construyeran y comprendieran las identidades trigonométricas fundamentales por medio de un diseño de situaciones didácticas, a la luz de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007) bajo el enfoque de la geometría del círculo, el cual promovió procesos cognitivos como la visualización matemática, la generalización, abstracción y el uso de diversos registros de representación matemática mediados por GeoGebra. Se utilizó una micro-ingeniería didáctica como metodología asociada, estudiando cuatro casos, los cuales permitieron testear las actividades aplicadas. Dentro de las conclusiones importantes se presenta el análisis del proceso de aprendizaje de los estudiantes desde la visualización matemática hasta llegar a las representaciones del objeto matemático, lo cual se logró gracias a las redes de representación, donde GeoGebra jugó un papel relevante.

Palabras clave: aprendizaje, identidades trigonométricas, geometría, círculo, situaciones didácticas, representaciones matemáticas, visualización matemática.

Abstract

Much research around the learning of trigonometry has emphasized that a lot of importance has been given to algorithmic processes. To counteract this question, in this work a systematization of a teaching experience with tenth grade students was carried out, which sought to make them construct and understand the fundamental trigonometric identities through a design of didactic situations, in light of the theory of Brousseau's (2007) didactic situations under the circle geometry approach, which promoted cognitive processes such as mathematical visualization, generalization, abstraction and the use of different register of mathematical representation mediated by GeoGebra. A didactic micro-engineering was used as associated methodology, studying four cases, which allowed to test the applied activities. Among the important conclusions, the analysis of the learning process of the students is presented from the mathematical visualization to the representations of the mathematical object, which was achieved thanks to the representation networks, where GeoGebra played a relevant role.

Keywords: learning, trigonometric identities, geometry, circle, didactic situations, mathematical representations, mathematical visualization.

Contenido

Lista de tabla

Lista de Figuras

Introducción

Este trabajo se refiere al tema del aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales, desde un enfoque geométrico. Con respecto a entrelazar lo algebraico con lo geométrico, se alude en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006), que la percepción geométrica es un proceso complejo donde lo métrico es necesario después de haber trabajado las relaciones topológicas de los cuerpos y figuras. En este proceso de metrización, es donde se da un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, por lo que aparecen nuevas relaciones y operaciones entre los objetos, lo que luego se convertirá en conocimientos formales de la geometría.

Lo anterior no es exclusivo de la educación media. Por ejemplo, se puede observar que en la Historia de las Matemáticas se ha dado este proceso de forma natural, sin embargo, a medida que los estudiantes avanzan en sus estudios, necesitan de ciertos procesos de abstracción y generalización lo cual se requiere en ramas como el álgebra y la trigonometría.

Es común que los aspectos referentes a la trigonometría se inicien en grado décimo, por lo tanto, se considera que el estudiante ya tiene algunas bases sobre el proceso de generalización, el conocimiento de los números reales, sus operaciones y propiedades; la factorización, operaciones con polinomios, etc. Lo anterior se hace necesario cuando se trabaja, con las identidades trigonométricas.

Es importante resaltar que no se puede pretender que los estudiantes alcancen estos procesos de generalización y abstracción sin haber pasado por los procesos de metrización que mencionan los Estándares, pues desde lo didáctico se estaría omitiendo un aspecto importante, en tanto que se pierde la oportunidad para que visualicen, analicen, construyan y demuestren.

Lo anterior indica la relevancia de hacer uso de una variada gama de registros de representación matemáticos, ya que la articulación entre registros permiten la comprensión conceptual de las matemáticas (Duval, 1999), aspecto que no se tiene en cuenta cuando se aborda la trigonometría, particularmente, las identidades trigonométricas, dado que el registro algebraico es el que prevalece sobre cualquier otro cuando este tema es enseñado de manera usual.

Este trabajo pretendió dar cuenta de este proceso, haciendo uso de una tecnología digital como es GeoGebra, al imprimirle un tratamiento didáctico y más dinámico de las Identidades Trigonométricas Fundamentales (en adelante, ITF) haciendo necesario que fluyera el proceso de medir ángulos, vectores y la covariación entre estos dos; pues la función del arrastre y la hoja de cálculo de GeoGebra permite tal dinamismo, en contraposición de los ambientes estáticos al que los estudiantes están acostumbrados al trabajar en lápiz y papel.

En este sentido, GeoGebra actuó como un mediador al haber hecho uso de múltiples representaciones matemáticas, permitiendo además que lo geométrico, con ayuda de lo métrico, llevaran a los estudiantes a desarrollar esos procesos de generalización y abstracción, lo que contribuyó a la construcción y comprensión de las ITF.

Es importante señalar que este trabajo de sistematización también obedece a la reflexión planteada por su autor respecto a sus intereses investigativos y profesionales por la transversalización (la coherencia horizontal en los Estándares) del pensamiento matemático, pues se tiene la plena convicción que en la escuela se ha hecho una interpretación errónea al separar lo geométrico y métrico de lo numérico y variacional. En esta sistematización, se pretendió articular estos pensamientos basado en la teoría de los registros semióticos de representaciones de Duval (1999) y su relación con las habilidades de visualización geométrica.

A continuación, se presenta un sucinto resumen de la estructura de esta tesis, condensada en cuatro capítulos, de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se presentan algunos aspectos centrales del proceso de sistematización de la experiencia docente como son: el problema de investigación con unos objetivos (el general y los específicos) que apuntan a que el estudiante pueda construir y comprender las identidades trigonométricas fundamentales, además de otras investigaciones educativas al respecto. Estos antecedentes se categorizaron teniendo en cuenta los intereses del autor y de acuerdo con el problema mismo.

En el capítulo 2 se muestran la fundamentación teórica organizados en las dimensiones histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica, las cuales aportaron al diseño de las situaciones didácticas.

En el capítulo 3 se puede observar la metodología utilizada, referente a la micro-*ingeniería didáctica*, en donde además se presentan sus fases asociadas. Por ejemplo, la fases2: de diseño, donde están los análisis *a priori*, se determinan la hipótesis de este diseño y las variables micro didáctica. La fase 3: de experimentación, en la cual estas descritos los casos que permitieron testear las situaciones didácticas y el proceso de aplicación de estas en el aula de clase y por último, la fase 4: de validación, donde se realizó la validación interna haciendo una confrontación entre los análisis *a priori* y los análisis *a posteriori* según la información registrada en la fase 3.

Por último, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones y algunas recomendaciones.

Capítulo 1: Aspectos Generales de la Investigación

En este capítulo se exhibe la presentación de la problemática, así como el planteamiento del problema a través de la pregunta de investigación que direccionó el trabajo. De la misma manera, se presentan los objetivos y la justificación del problema. Por último, en esta primera parte del trabajo, se muestra una masa documental de investigaciones previas que rodearon los intereses investigativos, concretizados en los antecedentes, que a su vez se agruparon en tres categorías: la primera, investigaciones que giraron alrededor de la enseñanza de las ITF, la segunda, discurrió alrededor de la integración de lo geométrico en la construcción del conocimiento trigonométrico y por último, artículos alrededor del uso de la tecnología digital en la enseñanza de la trigonometría.

1.1. Presentación del problema

La enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría ha sido motivo de diferentes investigaciones reportadas en artículos, trabajos de grado, tesis de maestría y doctorados. Tesis doctorales como la de Montiel (2005) y Fiallo (2010) son un ejemplo de lo anterior. Así, el primero es un trabajo socio-epistemológico donde se aborda el proceso de cómo se enseña y qué se enseña para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, esto con miras a rediseñar el discurso matemático; siendo el objeto matemático de estudio: la Función Trigonométrica. El segundo trabajo aporta elementos didácticos para mejorar la comprensión del proceso de aprendizaje de la demostración, usando un Software de Geometría Dinámica donde el objeto matemático es la Razón Trigonométrica.

Un aspecto en común entre estos dos trabajos y otros que se han analizado[1], son las dificultades en el aprendizaje de la Trigonometría, relacionado esto a su proceso de enseñanza, pues como lo

[1] Algunos de estos trabajos se referencian en los antecedentes.

mencionan Martínez, Ruiz, & Rico (2016), se puede dificultar la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría por una expresión y transmisión deficiente de conceptos provocando confusión en la explicación de sus significados. Los mismos autores señalan que “Inconvenientes para su aprendizaje son también las distintas vías de entender, representar y relacionar sus diversas nociones básicas, como las relativas a la circunferencia goniométrica y a los triángulos rectángulos” (Martínez et al., 2016, p.52).

Implícitamente, se menciona que la enseñanza de la trigonometría está enfocada en ciertos aspectos que no atienden a su desarrollo histórico. Así mismo, se puede entender que en muchas ocasiones tampoco atiende a los objetivos de la enseñanza de las matemáticas[2].

En los citados trabajos anteriormente, se encontró dos cuestiones comunes e importantes de resaltar: la aritmetización de la trigonometría y la pérdida de lo geométrico en la construcción de lo trigonométrico. A continuación, se dan algunos detalles respectivamente:

1) El principal problema de la enseñanza de la trigonometría es el abuso de las fórmulas (Van Hiele, 1957 citado en Fiallo 2010). Fiallo (2010) lo explica esto de la siguiente manera:

> Este problema es producto de una enseñanza de la trigonometría caracterizada por un enfoque algebraico consistente en la manipulación de símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la comprensión de los conceptos y propiedades, a conectar unos y otras, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones (p. 17)

Fiallo concuerda con otras investigaciones como la de Miranda & Maldonado (2009), quienes habían indicado que la enseñanza de la trigonometría se ha reducido a preparar al estudiante para mecanizar algoritmos (algoritmización), lo que hace que este se forme unos conceptos carentes de significados. Montiel (2014), describe este fenómeno como una aritmetización de la trigonometría, pues se hace énfasis en la operación matemática y no en la actividad matemáticas en la cual juega un papel importante lo geométrico. Así, por ejemplo, en el manejo de las razones trigonométricas,

---

[2] Referidos en los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional (2006), con la coherencia horizontal de los Estándares donde se usarían diferentes representaciones.

se enfatiza en la solución de triángulos rectángulos donde se le da al estudiante un problema con datos necesarios para que sólo reemplace en una fórmula y encuentre el lado faltante de dicho triángulo. Este tratamiento es usado en los libros de texto (que son materiales de apoyo para el trabajo en el aula) donde sólo se les da un uso ilustrativo a los triángulos, pues no se constituyen en una construcción geométrica teniendo en cuenta sus propiedades y relaciones entre lados y ángulos. Por su parte, Fiallo (2010), analiza la dificultad que tienen los estudiantes para pasar del triángulo al círculo en la manipulación de las razones trigonométricas.

2) La génesis y el desarrollo evolutivo de la trigonometría, desde el punto de vista histórico, ha estado fundamentado en lo geométrico, aspecto que se hace principal para su compresión. Entonces es necesario una recuperación de este enfoque para abordar lo trigonométrico de tal manera que se permita contrarrestar lo descrito en el punto 1 siendo el *contexto del círculo* una herramienta que permite tal fin (Torres, Montiel, & Cuevas, 2014).

Otro aspecto para tener en cuenta es desde lo curricular: es importante analizar lo que se pretende en la formación matemática, cuál es el objetivo mismo de lo que se enseña en la escuela. Al respecto, se toma como referencia desde un punto de vista normativo, los documentos de las políticas públicas de educación en Colombia.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2006) es relevante la contribución de las matemáticas a los fines de la educación, debido a su transversalidad en la cultura y la sociedad, porque se le relaciona con el desarrollo del pensamiento lógico y porque se considera esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología; es por esto que en los Estándares Básicos de Competencias, se resalta la necesidad de dar un “salto” de la enseñanza por contenidos a una enseñanza que permita desarrollar no sólo las competencias matemáticas, sino también las científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas; por lo que se hace imperativo reflexionar sobre las prácticas del profesor a la luz de las políticas públicas de educación, particularmente, desde los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

De acuerdo con lo anterior, los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional. 1998) señalan que el énfasis de la formación matemática básica estaría en potenciar el pensamiento matemático mediante la apropiación de los sistemas matemáticos. Estos sistemas permiten desarrollar los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y el variacional, entre otros.

Estos tres aspectos influyen en la construcción de los conocimientos trigonométricos en la escuela; pues la ***geometría del círculo*** podría contrarrestar la aritmetización de la trigonometría ayudando a desarrollar los pensamientos que se mencionan en los lineamientos, en tanto que se pueden abordar teniendo en cuenta una coherencia horizontal[3] propiciando actividades propias que activen cada pensamiento.

Como se mencionó anteriormente, el presente trabajo de sistematización, se restringe a las ITF, que al igual que la trigonometría en general, se ve inmerso en los problemas que se han descrito. La aritmetización de las razones trigonométricas, se traslada al uso exclusivo del registro algebraico (como lo menciona Fiallo, 2010) cuando se enseñan las identidades en donde se continúan presentando las mismas dificultades: conceptos carentes de significados, falta de comprensión en uso de las identidades y pérdida de lo geométrico, por lo que no se da una construcción del conocimiento por lo menos, de las Identidades Fundamentales, sino que hace que el estudiante las asuma como verdades absolutas.

Lo anterior fue lo que motivó esta sistematización de la experiencia docente: la necesidad de generar una estrategia para favorecer el aprendizaje de las ITF de tal manera que se aborden de forma diferente de cómo son presentadas en libros de texto y como tradicionalmente se trabajan en la escuela. Las tareas diseñadas se pusieron en acto con cuatro estudiantes de la Institución Educativa Juan Pablo II, de la ciudad de Santiago de Cali.

Con respecto al uso de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) como GeoGebra, se considera este como un medio indispensable para el presente trabajo, en tanto que la construcción y comprensión de los objetos matemáticos, específicamente las identidades trigonométricas,

[3] La coherencia horizontal, según los Estándares Básicos de Competencia (2006), es la relación que tiene un Estándar con los otros Estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (p. 78, 79)

requieren del uso de diferentes representaciones constituyéndose GeoGebra en un *medio* para promover el proceso cognitivo de *visualización matemática* el cual, usualmente, no se tiene en cuenta cuando se enseña las identidades trigonométricas, dado que se hace un tratamiento desde un solo registro: el algebraico.

Por lo tanto, el AGD está en contraposición a los procesos estáticos que normalmente se llevan a cabo en el aula con la enseñanza de la trigonometría. Además, según Fiallo (2010), este proporciona herramientas a los estudiantes para construir y experimentar con objetos y relaciones geométricas; lo cual permitió un diseño de tareas donde se relacionaron los diferentes pensamientos, siendo el espacial (con el sistema geométrico) el articulador de dichas tareas.

Teniendo en cuenta lo anterior, se formuló la siguiente pregunta:

¿Cómo favorecer el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales en estudiantes de grado 10º, a través de un diseño de situaciones didácticas usando la geometría del círculo y adoptando al GeoGebra como medio?

Para sistematizar esta experiencia docente, se plantean los siguientes objetivos:

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

- Analizar algunos procesos de aprendizaje de los estudiantes del grado 10ºcuando estudian las identidades trigonométricas fundamentales, a partir de la geometría del círculo y por medio de un diseño de situaciones didácticas mediados con GeoGebra.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Diseñar desde los referentes de la Teoría de Situaciones Didácticas y desde la micro-ingeniería didáctica, una secuencia de situaciones didácticas que busquen favorecer la construcción y comprensión de las identidades trigonométricas fundamentales a partir de la geometría del círculo, teniendo a GeoGebra como medio.

- Analizar la actividad matemática de cuatro estudiantes de grado décimo, a partir de los procesos de visualización y de representaciones matemáticas cuando abordan la construcción geométrica de las ITF en el desarrollo de las situaciones didácticas diseñadas.

1.3. Justificación

Son innegables los aportes de la Geometría en el origen de la Trigonometría. Desconocer esta simbiosis desde los didáctico, hace que se presenten algunos fenómenos que redundan en dificultades de aprendizaje en los estudiantes. Así, por ejemplo, este desconocimiento de lo geométrico conduce a una aritmetización trigonométrica (Montiel, 2014), ya que conllevan a que las construcciones geométricas sean innecesarias pues se centra la actividad matemática en la operación aritmética y desconoce la génesis del conocimiento.

De igual manera, es usual que los Profesores de Matemáticas, cuando enseñan aspectos de la trigonometría, le den importancia y se centren en representaciones algebraicas dejando de lado otras, como por ejemplo las visuales, eludiendo ciertos procesos generales de la actividad matemática (Peralta, 1994 citado en Muñoz, 2013, p. 36).

Específicamente, la enseñanza de las ITF se ha abordado desde enfoques estrictamente algebraicos, limitándose a una serie de procedimientos esquemáticos en los cuales los estudiantes deben realizar demostraciones de identidades movilizándose sólo en este registro, en donde deberían desarrollar el pensamiento deductivo.

Lo anterior provoca que los estudiantes presenten dificultades al trabajar con nociones trigonométricas desde la secundaria hasta el nivel de educación superior (Torres, Montiel & Cuevas, 2014), por lo que se hace necesario repensar la enseñanza de la trigonometría donde lo geométrico sea fundamental en la construcción y comprensión de estas nociones trigonométricas, lo cual implica que la visualización matemática juegue un papel importante.

Así mismo, el uso de las tecnologías digitales se hace imperativo, no como solución única, sino como un medio que fomente procesos cognitivos como la visualización matemática a través de las representaciones ejecutables[4] (Moreno, 2002), permitiendo trabajar la trigonometría desde aspectos más dinámicos y menos estáticos, dándole sentido a la variación de los elementos matemáticos involucrados.

Los anteriores aspectos, propician la necesidad de tener una visión desde lo curricular pues los Lineamientos y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas están fundamentados en una propuesta constructivista y orientados hacia la comprensión y al desarrollo de competencias, lo que se podría lograr gracias al uso de múltiples representaciones que permiten las tecnologías digitales y los procesos constructivistas que permite la geometría.

La propuesta se aborda desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), haciendo uso de la metodología de Micro-ingeniería didáctica de Artigue (1995), de tal manera que permitan indagar desde la didáctica de las matemáticas los fenómenos didácticos mencionados y otros que se identifiquen en el proceso de investigación relativos al objeto trigonométrico mencionado.

Se espera que este trabajo de sistematización docente impacte de manera positiva la comunidad de la Institución Educativa Juan Pablo II de la ciudad de Cali, en particular, a estudiantes de grado décimo, además de generar reflexiones que permitan permear el currículo de la institución y la práctica pedagógica del docente.

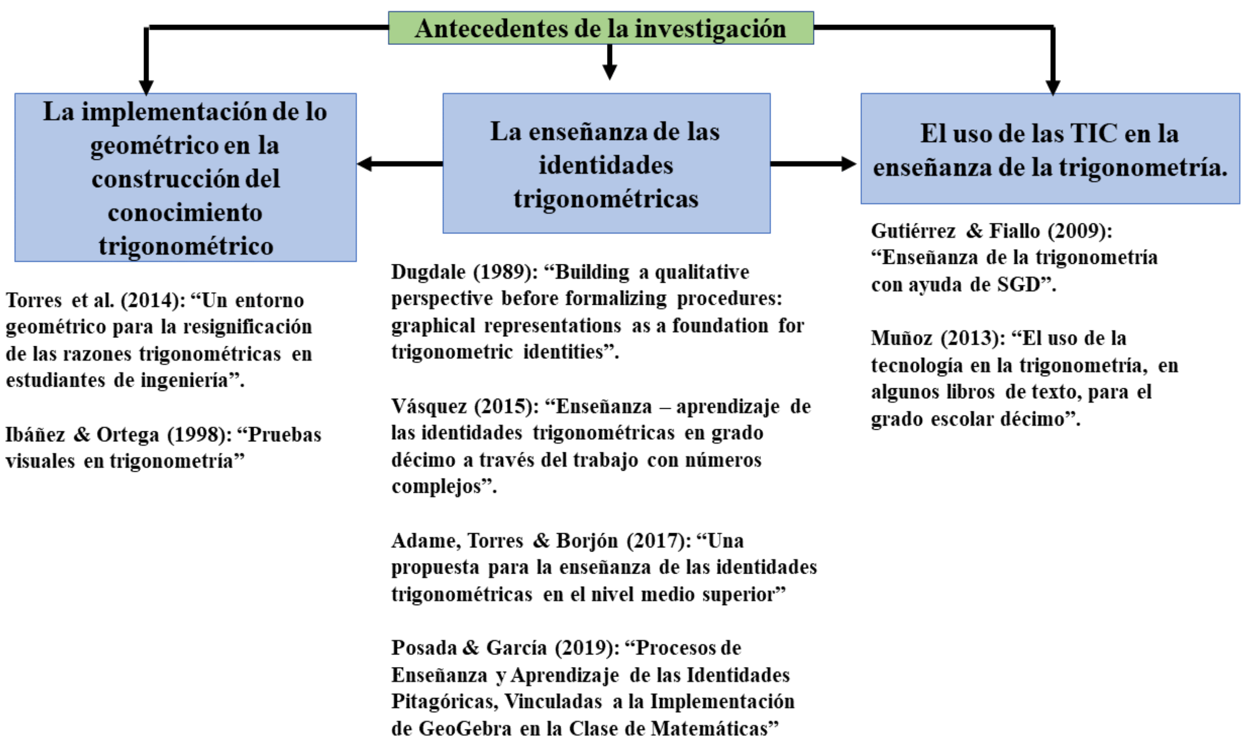
[4] Según Moreno (2002), las representaciones ejecutables son aquellas que, una vez instaladas en el lenguaje del medio ambiente computacional, se pueden procesar o manipular, por ejemplo, las construcciones que se realizan en un ambiente de geometría dinámica. Esto contribuye al "realismo" de los objetos matemáticos.

1.4. Antecedentes

Teniendo en cuenta los intereses en este proceso de sistematización, la recopilación de antecedentes se categorizó en tres grupos de investigaciones: los que han indagado sobre la enseñanza de las identidades trigonométricas, los que han hecho implementación de lo geométrico en la construcción del conocimiento trigonométrico (donde juega un papel importante la visualización matemática) y los que han hecho uso de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría; sin embargo, algunas investigaciones de la primera categoría, bien podría estar dentro de las otras dos, debido a que estas hicieron uso de lo geométrico y lo tecnológico. La Tabla 1 muestra esta categorización:

Tabla 1

Categorización de los Antecedentes



A continuación, se explica cada una de estas tres categorías.

1.4.1. Investigaciones sobre la enseñanza de las identidades trigonométricas

En esta categoría, se encontró en las memorias de la undécima reunión anual del grupo internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME, por sus siglas en inglés), uno de los trabajos más relevantes, el de Dugdale (1989), quien publicó el artículo "*Building a qualitative perspective before formalizing procedures: graphical representations as a foundation for trigonometric identities*" que consistió en comparar dos enfoques para introducir las identidades trigonométricas a partir de representaciones gráficas. El primer enfoque (PE) fue tradicional con una manipulación algebraica de las identidades, donde se usaron las gráficas como representación adicional. El segundo enfoque (SE) tuvo como base el registro gráfico para introducir las identidades trigonométricas, las manipulaciones usuales de los símbolos se usaron para justificar las relaciones evidenciadas en las actividades gráficas.

Este estudio comparativo trabajó con un total de 30 estudiantes, divididos en dos grupos de 15: PE y SE. En cada grupo se trabajó un enfoque. Se concluyó que los resultados sugieren que un enfoque gráfico, con una atención cuidadosa a las experiencias de los estudiantes más allá de los objetivos de contenido inmediato, puede producir una experiencia de aprendizaje más significativa y variada. Además de mostrar un rendimiento posprueba superior en las funciones relacionadas con sus representaciones gráficas, los estudiantes del SE (gráfico) exhibieron una mayor variedad y participación personal en el trabajo desarrollado.

Un segundo antecedente, es la tesis de maestría realizado por Vásquez (2015) titulado: *"enseñanza – aprendizaje de las identidades trigonométricas en grado décimo a través del trabajo con números complejos"*. El objetivo general fue el diseño de una unidad didáctica orientada a trabajar las identidades trigonométricas en el contexto de los números complejos y sus operaciones aritméticas en sus diferentes representaciones**.** Este trabajo se caracterizó por ampliar el dominio matemático de los Reales a los Complejos, dados que en el primer campo existían limitaciones como raíces pares de números negativos, deducción de identidades, entre otros; solucionándose, según el autor, de forma más simple.

Estas actividades se apoyaron en el aprendizaje significativo y este no se limitó únicamente a la repetición y memorización. A pesar de que se trabajó ampliamente en un registro algebraico, en esta investigación se concluyó que, al trabajar con los números Complejos, se abre la posibilidad de correlacionar un mayor número de conceptos y además mostró a los estudiantes una nueva forma de llegar al tema de las identidades trigonométricas en la cual su deducción es más sencilla de entender debido a que se realizaron menos operaciones y los procedimientos fueron más directos.

Otro de los trabajos pertinentes que se analizó, fue realizado por Adame, Torres, & Borjón (2017), titulado *"Una propuesta para la enseñanza de las identidades trigonométricas en el nivel medio superior"* en el que se analiza la importancia de la visualización en la comprensión de las matemáticas, permitiéndole al estudiante tener a su disposición diferentes representaciones de las identidades; de tal manera que le permitan construir y comprender el concepto de identidad trigonométrica. La propuesta se abordó desde la Teoría de Situaciones Didácticas con la metodología de Micro-ingeniería didáctica e hicieron uso de GeoGebra.

Se trabajaron seis actividades orientadas a identificar y comprender el concepto de identidad trigonométrica, esperando que los estudiantes se movilizaran en diferentes registros de representación como el tabular, el gráfico y el algebraico. Cuando se analizaron los resultados, ubicaron a los estudiantes en cierto nivel de visualización. En este trabajo se concluyó sobre la importancia de la visualización matemática, pero a través de diseños cuidadosos y con la intervención de diferentes registros de representación y el uso de herramientas tecnológicas; considerando esta última crucial para el desarrollo de la propuesta, pues sin GeoGebra, no habría sido posible la representación de los objetos trabajados.

Por último, se tiene el trabajo de pregrado realizado por Posada & García (2019), en la Universidad del Valle, titulado *"Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Identidades Pitagóricas, Vinculadas a la Implementación de GeoGebra en la Clase de Matemáticas"* donde el objetivo principal era describir las características del proceso de enseñanza y aprendizaje, haciendo una mediación entre GeoGebra y material concreto de tal manera que se propiciara la construcción de las identidades Pitagóricas.

Justificándose en resultados de pruebas estandarizadas, en procesos de enseñanza tradicionales de la trigonometría donde lo algebraico es lo preponderante, en la necesidad de promover múltiples representaciones de las identidades y el desarrollo de competencias matemáticas; se presenta una propuesta didáctica haciendo uso de GeoGebra y de material concreto, trabajados en una fase de diseño que incluía el diagnóstico, las hojas de trabajo y entrevistas clínicas; dejando una serie de sugerencia tanto para los profesores como para la comunidad de investigadores. En las hojas de trabajo se puede observar que se enfocó hacia el Teorema de Pitágoras (considerado prerrequisito) y dos identidades pitagóricas fundamentales. Se considera fundamental el diagnóstico realizado en este trabajo como punto de partida para el presente proceso de sistematización

1.4.2. La implementación de lo geométrico en la construcción del conocimiento trigonométrico

Los trabajos citados a continuación no hacen referencia explícitamente a las identidades trigonométricas, pero sí al conocimiento trigonométrico en algunos tópicos particulares. Se analizan estas investigaciones porque los fenómenos didácticos que se presentan en dichos tópicos afectan también al objeto matemático trabajo en la presente sistematización docente.

El primer trabajo que se analizó en esta categoría, fue la investigación llevada a cabo por Torres, Montiel & Cuevas (2014): *"Un entono geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de ingeniería".* El objetivo era identificar si la resignificación de la razón trigonométrica en un proceso de construcción geométrica permitiría contrarrestar el fenómeno de aritmetización[5] que se presenta en la trigonometría escolar. Esta investigación la motivó el hecho de que los estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) presentaban dificultades al relacionar las razones trigonométricas con ejercicios intramatemáticos y extramatemáticos.

[5] Según Montiel (2011), la aritmetización trigonométrica se refiere a la pérdida del proceso geométrico para la construcción de las razones trigonométricas (teniendo en cuenta, el momento didáctico de la investigación citada).

En este sentido, se identificó la necesidad de un nuevo escenario escolar para abordar lo trigonométrico de tal manera que no se separe tajantemente del contexto geométrico, por lo que los investigadores caracterizaron propuestas de Moore (2009, 2010 y 2014) y de Vohns (2006) ya que permiten dicha resignificación de las razones, en el contexto del círculo. De acuerdo con una serie de actividades de trigonometría donde se incluye lo geométrico, se concluyó que se dio una resignificación de lo trigonométrico, además, los estudiantes evolucionaron en su lenguaje y uso de herramientas (materiales didácticos manipulables), utilizando sus conocimientos previos.

Teniendo en cuenta la importancia de la visualización en lo geométrico (y trigonométrico), se analizó el artículo *"Pruebas visuales en trigonometría",* realizado por Ibañes & Ortega (1998); en el cual plantean la hipótesis que el pensamiento visual proporciona, por sí mismo, un proceso de razonamiento deductivo. Inician explicando lo que entienden por visualización, desde autores como Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996). Después se hace referencia a algunas visualizaciones en trigonometría. Luego, se describe una experiencia con alumnos de 16 y 17 años en la que se les presentó una demostración del Teorema de Napoleón en un registro algebraico y luego unas visualizaciones con CABRI II.

Por último, analizaron las respuestas de los estudiantes donde concluyeron, entre otros aspectos, que los comentarios que hacen los estudiantes sobre la finalidad explicativa son más ricos en la visualización que en la demostración, aunque muchos estudiantes creen que la visualización no bastaría por sí misma. De igual manera, concluyeron que hay un manifiesto claro sobre la riqueza didáctica de las pruebas visuales. Esto llevó a comprobar lo sugerido en su hipótesis, por lo tanto, los autores sugieren que las pruebas visuales deben ser consideradas como instrumentos didácticos en el aula de matemáticas.

1.4.3. El uso de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría

El trabajo "*Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD"*[6]de Gutiérrez & Fiallo (2009), es una propuesta de enseñanza basada en tres ejes, en la cual se incluye no sólo una serie de fórmulas y conceptos (eje conceptual) sino herramienta y estrategias útiles (eje metodológico –

[6] SGD: Software de Geometría Dinámica. Gutiérrez & Fiallo hacen uso de Cabri II y GeoGebra.

SGD) para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar (eje formativo). Según los autores, es el SGD quien desempeña un papel importante para tales fines. Esto surge después de que se analizaron sugerencias[7] sobre la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría y donde se ve poca concreción del enfoque metodológico propuesto para la enseñanza de la trigonometría.

Según los autores, las tecnologías digitales ofrecen herramientas que pueden ayudar a definir una metodología de enseñanza activa y participativa. El SGD existente pone a disposición del estudiante un micro mundo geométrico en el cual los conceptos trigonométricos pasan de ser simples dibujos o fórmulas a convertirse en "objetos geométricos". Se concluye que el SGD usado ha demostrado ser una valiosa ayuda para que los estudiantes alcanzaran en buena medida los objetivos previstos.

Otro trabajo analizado en este tópico, fue el trabajo de maestría *"el uso de la tecnología en la trigonometría, en algunos libros de texto, para el grado escolar décimo",* Muñoz (2013) de la Universidad de Medellín. El objetivo era identificar la presencia y la variedad de usos que se hace de la tecnología en algunos libros de texto de décimo grado, en el contenido de los capítulos o unidades donde se abordan los conceptos y temas trigonométricos. Los libros fueron tomados aleatoriamente de la librería de matemáticas de la página Colombia Aprende, además se analizó si cumplen con las recomendaciones hechas por el Ministerio de Educación Nacional.

En las conclusiones y recomendaciones de este trabajo, se exponen algunas ventajas que tiene las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, como el trabajo con diferentes representaciones, dinamizando estos procesos, economizando tiempo en algoritmos y cálculos. En los libros analizados, se evidencia la relación de los avances tecnológicos y la forma en la que el uso de algunas herramientas tecnológicas se ha introducido en el campo de la educación matemática. Los SGD son una buena estrategia metodológica que permiten a los docentes incrementar la motivación individual y grupal de sus estudiantes en clase y fuera de ella.

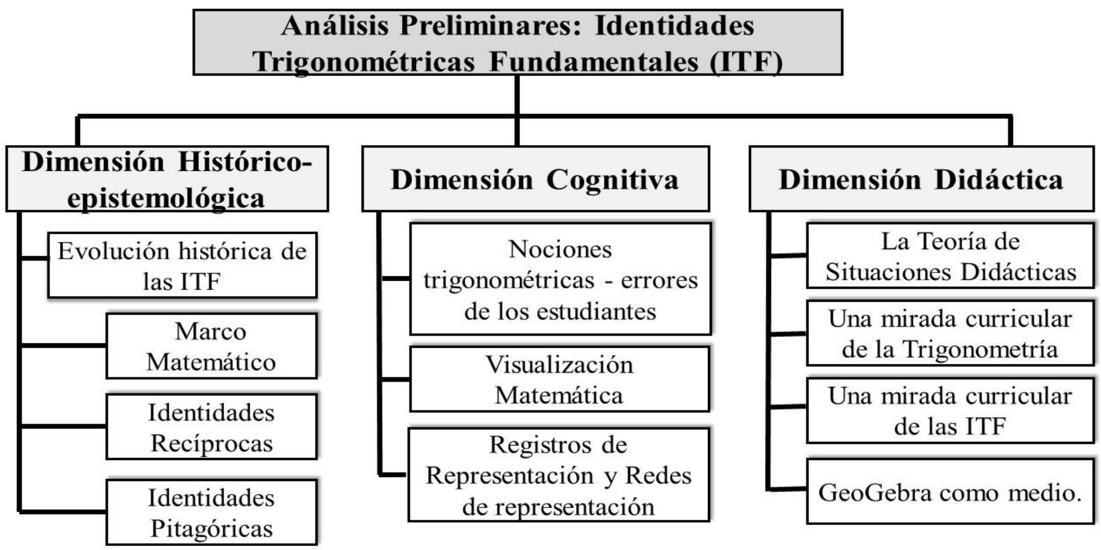
---

[7] Sugerencias contenidas en "Principios y Estándares" (NCTM, 1991, 2003) y en los currículos oficiales de la ESO y bachillerato de la comunidad Valenciana.

Capítulo 2: Fundamentación Teórica

En este capítulo se presentan los *análisis preliminares* correspondientes a la primera fase del marco metodológico de *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 2015) a partir del cual se estructuró está sistematización. La Tabla 2 presenta una estructuración de estos análisis:

Tabla 2
Análisis Preliminares



1) La dimensión *histórico-epistemológica:* se analiza el surgimiento de las identidades trigonométricas, teniendo en cuenta los conceptos relacionados con ellas, comparando este proceso con el que se lleva a cabo en las aulas de clase, de tal manera que se pueda vislumbrar si hay o no relación entre el desarrollo histórico del saber matemático y el desarrollo didáctico que se da en la escuela.

2) La dimensión *cognitiva:* Se analizan algunas dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a las identidades trigonometrías. Teniendo en cuenta el enfoque de la investigación (geométrico), también se analiza la visualización matemática como proceso cognitivo fundamental y el marco teórico para analizar dicha visualización.

3) La dimensión *didáctica:* Se explica la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como teoría que orienta el diseño de las tareas y se analiza cómo la trigonometría y, particularmente las ITF, son vistas desde el currículo y cómo se enseñan o se presentan en la escuela: desde los libros de texto, algunas investigaciones y las políticas educativas.

2.1. Dimensión Histórico-epistemológica

2.1.1. Evolución Histórica de las Identidades Trigonométricas

El surgimiento de las identidades trigonométricas como objetos matemáticos no corresponden a una persona o época particular y su desarrollo está ligado a otros conocimientos trigonométricos. Según Montiel (2005), "los estudios históricos sobre la trigonometría se dividen en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos". A continuación, se presenta un recorrido historiográfico de la trigonometría, en el cual se describe la configuración de las identidades trigonométricas y cómo éstas surgen desde actividades prácticas como, por ejemplo, la astronomía y la medición. Se presenta, por lo tanto, un recorrido histórico externalista; pues "los inicios prácticos pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que no son consideradas actividad matemática en sentido estricto de la palabra" Montiel (2005, p. 67, 68)

Según Boyer (1968), el problema 56 del papiro de Rhind presenta lo que se podría llamar unos *rudimentos de trigonometría* en el antiguo Egipto. Boyer explica su importancia:

> En la construcción de las pirámides un problema esencial era mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, y puede haber sido este problema el que llevo a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo […] (p. 40).

Para este concepto, los egipcios usaban la palabra *seqt* que significa la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura, esto es equivalente al concepto de *cotangente* de un ángulo.

Sin embargo, Boyer menciona que fue con los griegos donde se encontraron por primera vez estudios sistemáticos de las relaciones entre los ángulos centrales en un círculo y las longitudes de las cuerdas que la subtienden, pues los antiguos egipcios y babilonios usaban algunos conceptos de manera implícita y al no encontrase con concepto alguno de medida de ángulos antes de la cultura griega, Boyer llama a estos estudios *trilaterometría* o medida de los polígonos de tres lados (triláteros) en vez de *trigonometría.*

Al respecto, los griegos de la época de Hipócrates ya estaban familiarizados con las propiedades de las cuerdas tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, por lo que es posible que se hayan usado este tipo de medidas para determinar el tamaño de la Tierra y las distancias relativas del Sol y la Luna.

A pesar de ello, Boyer menciona que desde esa época de Hipócrates hasta Eratóstenes (aproximadamente dos siglos y medio después) los matemáticos griegos estudiaron relaciones entre rectas y circunferencias y aplicaron esto a muchos problemas astronómicos, pero no había nada que se pudiera llamar una *trigonometría* más o menos sistemática. Luego de esto, en el siglo II a.C., fue compuesta la primera *tabla trigonométrica* por el astrónomo Hiparco de Nicea, quien por ello se ganó el derecho de ser conocido como *"el padre de la trigonometría"*, pues fue él quien se preocupó por tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos (Boyer, 1968, p. 215) y también fue el autor de la primera tabla con los valores de las cuerdas de los arcos de un círculo (Piñeiro, Ibañez, & Ortega, 1998, p. 60).

Hiparco fue una figura de transición entre la astronomía de babilonia y la obra de Ptolomeo, cuyos aportes se describirán más adelante. De igual manera, Boyer menciona que fue gracias a la conexión con el cálculo de la tabla de cuerdas de Hiparco que se pudo haber comenzado a usar el círculo completo de 360°.

A continuación, se describe cómo surgieron algunas identidades trigonométricas, principalmente en Grecia, sin embargo, no se pretende minimizar los aportes a la trigonometría desde otras culturas, como la hindú, por ejemplo, que introdujo lo equivalente a la función seno para reemplazar las tablas de cuerdas griegas y en el siglo VI desarrollaron los conceptos de algunas funciones trigonométricas (Piñeiro, M., Ibáñez, M. & Ortega, T. 1998, p. 61) o cómo los árabes que dieron tres aportes fundamentales a la trigonometría: 1. El establecimiento de un conjunto de funciones trigonométricas básicas: seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante; 2. La deducción de la regla del seno y la obtención de otras ecuaciones trigonométricas y 3. La obtención de tablas trigonométricas muy precisas con métodos de interpolación (Piñeiro, M., Ibáñez, M. & Ortega, T., 1998 p. 64), además fueron el puente de la trigonometría del seno (tomándola de la cultura hindú) y su paso a Europa. Por ser las *Identidades Trigonométricas* el objeto de esta investigación, se pretende darle un mayor énfasis a su génesis.

Antes de esto, es importante resaltar las contribuciones de los Pitagóricos (aunque en la antigüedad se atribuían todas a Pitágoras de Samos). El lema de esta escuela era *"Todo es número"*, este lema tiene una fuerte afinidad con los babilonios. En consecuencia, El teorema de Pitágoras procede con toda probabilidad de los babilonios (Boyer, 1968, p.79), se ha sugerido el mencionado nombre porque los pitagóricos habrían sido los primeros en dar una demostración (aunque esto es una conjetura no comprobada).

Por otro lado, en lo relacionado con las identidades, se mencionan varias obras matemáticas y astronómicas de Menelao de Alejandría (100 a.C.) entre la que se encuentra *Elementos de geometría*, aunque la única versión que existe es una árabe titulada *Esférica*. En ésta existen tres libros: en el libro I se establecen las bases para un estudio de los triángulos esféricos, en el libro II trata sobre las aplicaciones de la geometría esférica y en el libro III y el último de ellos, contiene el "*teorema de Menelao"* formando una geometría o trigonometría de cuerdas en un círculo.

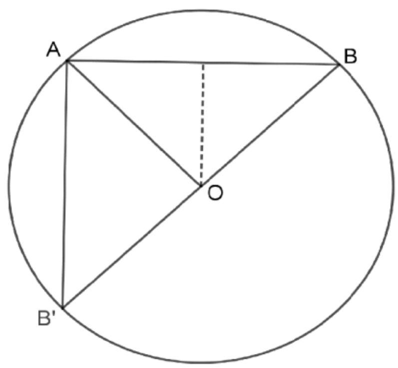
Menelao y probablemente Hiparco conocían algunos tipos de identidades, dos de las cuales, Menelao hizo uso para demostrar su teorema sobre transversales. Boyer (1986) explica la equivalente a la identidad trigonométrica $\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$ a partir del círculo de la figura 1:

> Menelao y sus sucesores griegos se referían a *AB* simplemente como la cuerda correspondiente al arco *AB*. Si *BOB'* es un diámetro del círculo, entonces la cuerda AB' es el doble del coseno de la mitad del ángulo *AOB* (multiplicado por el radio del círculo). Por

lo tanto, los teoremas de Tales y de Pitágoras, que conducen a la ecuación $AB^2+AB'^2=4r^2$, son equivalentes a la identidad trigonométrica moderna $\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$ (p. 216, 217).

Figura 1

Círculo Para Explicar la Identidad $\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$



La obra de trigonometría más significativa de toda la antigüedad fue una escrita en trece libros por Ptolomeo de Alejandría: *sintaxis matemática*, esta es conocida como *Almagesto* (el más grande) (S. II a.C.). Esta obra debe mucho a las *cuerdas del círculo* de Hiparco, aunque al respecto no se ha podido determinar en qué medida. A pesar del tiempo, se dispone de la obra de Ptolomeo, por ejemplo, las tablas trigonométricas y los métodos que utilizó para su construcción.

Tabla 3

Tabla de Ptolomeo

Ángulo		Cuerda	
36	37°	4´	55´´
60	60°		
72	70°	32´	3´´
90	84°	51´	10´´
120	103°	55´	23´´

Nota. Tomado de Montiel, 2005, p.78

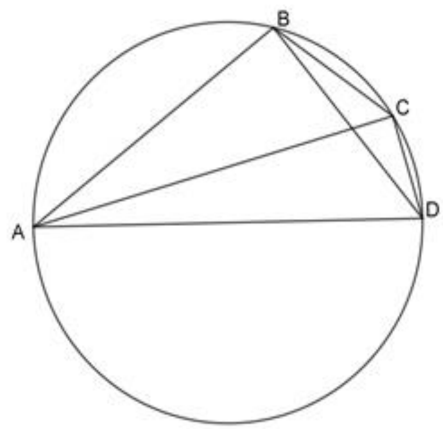
Para la construcción de las cuerdas (Tabla 3), jugó un papel importante la proposición geométrica que se conoce como el *Teorema de Ptolomeo.* Un caso especial de este teorema son las cuatro fórmulas de sumas y diferencias de ángulos que se conocen como fórmulas de Ptolomeo.

Boyer (1968) explica lo anterior a partir de la figura 2:

> *AD* es un diámetro del círculo, entonces si $AD=2r$, tenemos $2r.\,BC + AB.CD = AC.BD$. Llamamos al arco $BD = 2\alpha$ y al arco $CD = 2\beta$, entonces $BC = 2r.\ sen\ (\alpha - \beta)$, $AB = 2r.\ sen\ (90° - \alpha)$, $BD = 2r.\ sen\ \alpha$, $CD = 2r.\ sen\ \beta$ y $AC = 2r.\ sen\ (90° - \beta)$. Por lo tanto, el teorema de Ptolomeo conduce en este caso al resultado $sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta$. Un razonamiento análogo nos lleva a la fórmula $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta$ y al par $cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta \mp sen\ \alpha\ sen\ \beta$ (p. 219, 220).

Figura 2

Círculo Usado Para Explicar las Fórmulas de Ptolomeo



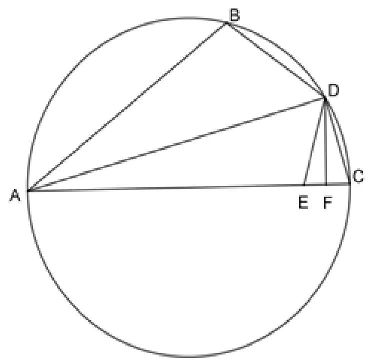
La fórmula que da el seno de una diferencia (la cuerda de diferencia de dos arcos) fue la que Ptolomeo usó para construir sus tablas. Otra identidad que también utilizó Ptolomeo fue la fórmula moderna del seno del ángulo mitad. Boyer (1968) lo explica a partir de la figura 3:

> Ptolomeo calcula la cuerda correspondiente a la mitad del arco de la manera siguiente: sea *D* el punto medio del arco BC en una circunferencia de diámetro AC = 2r, sea AB = AE y sea DF la mediatriz de EC. Entonces es fácil demostrar que $FC = \frac{1}{2}(2r - AB)$; por otra parte, se sabe de la geometría elemental que $DC^2 = AC.\,FC$, de donde se obtiene que $DC^2 = r\ (2r$

– AB). Si tomamos el arco BC = 2α entonces DC = 2r .sen $\frac{\alpha}{2}$ y AB =2r .cos α, y obtenemos como consecuencia nuestra bien conocida fórmula moderna $sin\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{2}}$ (p. 220).

Figura 3

Círculo Usado Para Explicar Fórmula del Seno del Ángulo Mitad



Desde Hiparco hasta la edad moderna, no hubo nada parecido a las razones trigonométricas como las conocemos hoy, griegos e hindúes usaban líneas trigonométricas. Estas líneas, al principio, tomaron forma de cuerdas en un círculo y Ptolomeo le dio valores aproximados. Para ello, se tomó la circunferencia de 360°, pues al parecer desde la época de Hiparco, ya se usaba en Grecia dicha medida. Como el sistema de numeración babilónico (sexagesimal) era superior al griego, entonces Ptolomeo subdividió sus grados en 60 partes (minutos) y cada una de ellas en otras 60 partes (segundos), también uso este sistema de numeración para dividir el diámetro de su círculo en 120 partes, cada una de estas está dividida en 60 minutos y cada minuto de longitud en 60 segundos de longitud.

Boyer (1968), presenta la transformación de nuestras identidades trigonométricas usuales al lenguaje de las cuerdas de Ptolomeo por medio de relaciones:

$sen\ x = \frac{cuerda\ 2x}{120}$ y $cos\ x = \frac{cuerda\ (180° - 2x)}{120}$

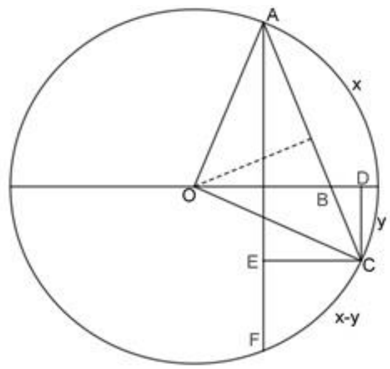
Boyer (1968), concluye sobre el poco avance de las matemáticas desde Hiparco hasta Ptolomeo; más bien, se dieron importantes avances en astronomía, geografía, óptica y mecánica. Aunque durante estos siglos se dio el desarrollo inicial de la trigonometría, en el mejor de los casos, esto era una aplicación de la geometría elemental a las técnicas de medición, respondiendo a las necesidades de la astronomía.

Ya como entrada o preludio a la matemática de la edad moderna, está la trigonometría de Viéte que se caracterizó por su generalidad y amplitud de perspectiva. Viéte se puede considerar como el padre del enfoque analítico general de la trigonometría (llamado a veces goniometría). En su *Canon mathematicus (*1579) calculó unas extensas tablas de las seis funciones trigonométricas. Durante esta época, empezaron a aparecer todo tipo de identidades trigonométricas en Europa, esto se dio porque se hizo un menor énfasis en los cálculos de resolución de triángulos y mayor énfasis a las relaciones de tipo analítico. Entre estas identidades, apareció un grupo de fórmulas que se conocen como *"reglas de prostafairesis"* (palabra griega que significa suma y resta), estas permitían convertir un producto de funciones circulares en una suma o una diferencia y llevan el nombre de *"fórmulas de Werner"* pues al parecer fueron utilizadas por Werner (1468 – 1522) para simplificar los cálculos astronómicos. Una de estas identidades, la que convierte el producto de cosenos en una suma, la habían conocido los árabes en la época de Ibn-Yunus, pero sólo a finales del siglo XVI fue cuando se popularizó el método de *prostafairesis.* Boyer (1968) explica, por ejemplo, cómo se obtuvo la fórmula $sen\, x + sen\, y = 2\, sen \frac{x+y}{2} cos\, \frac{x-y}{2}$ por medio de este método:

> A partir de la figura, [(figura 4)], obtuvo Viéte, por ejemplo, la fórmula $sen\, x + sen\, y = 2\, sen \frac{x+y}{2} cos\, \frac{x-y}{2}$ sea sen $x = AB$ y $sen\ y = CD$, entonces se tiene que $sen\ x + sen\ y = AB + CD = AE = AC\ cos\, \frac{x-y}{2} = 2\, sen \frac{x+y}{2} . cos \frac{x-y}{2}$ Haciendo la sustitución $\frac{x+y}{2} = A$ y $\frac{x-y}{2} = B$ obtenemos la fórmula más útil de la identidad anterior *sen (A + B) + sen (A – B) = 2 sen A cos B de* manera análoga se obtiene *sen (A + B)* - *sen (A – B) = 2 cos A sen B colocando* los ángulos *x* e *y* del mismo lado del radio OD. Las fórmulas *2 cos A cos B = cos (A+ B) + cos (A – B)* y *2 sen A sen B = cos (A- B)* - *cos (A + B)* pueden obtenerse por un método parecido (p.392).

Figura 4

Círculo Usado Para Explicar las Reglas de Prostafairesis



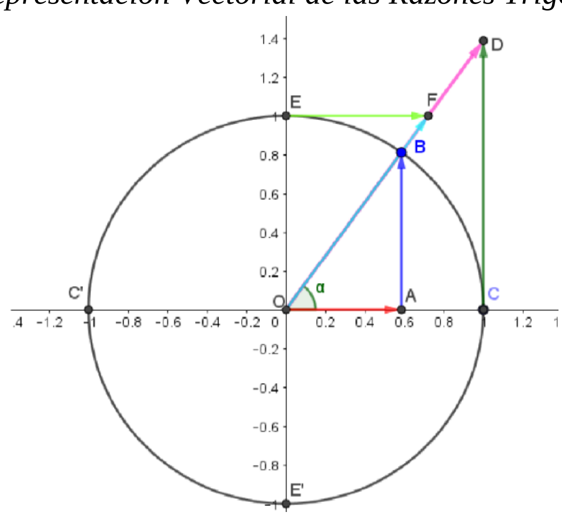
2.1.2. Marco matemático

Teniendo en cuenta el pensamiento y el sistema que articula las tareas: Pensamiento Espacial – Sistemas Geométricos (PE-SG), a continuación, se define las razones trigonométricas en el círculo goniométrico (radio igual a la unidad y centro en el origen del sistemas de coordenadas), básicamente, partiendo desde la construcción de la tarea 1 del presente trabajo , la cual fue adaptada de Gutiérrez & Fiallo (2009).

La adaptación consistió precisamente, en el cambio de la medida del radio; transformando este círculo en uno goniométrico:

Figura 5

Representación Vectorial de las Razones Trigonométricas



Nota. Adaptado de Gutiérrez & Fiallo, 2009, p. 157.

El ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ está en posición normal o canónica, pues está representado en un sistema de coordenadas cartesianas, de tal manera que el vértice coincide con el origen y el lado inicial con el semieje positivo x. La intersección entre el lado final del ángulo y la circunferencia es el punto B con coordenadas (x, y).

Las medidas de los vectores que forma el triángulo rectángulo OAB, están determinadas por: $\overrightarrow{AB} = y$, $\overrightarrow{OA} = x$ y por definición, la medida del segmento $\overline{OB} = r = 1$ (r = radio).

De acuerdo con lo anterior, se definen las razones trigonométricas para cualquier valor del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, en el triángulo OAB, de la siguiente manera:

Seno: $\boldsymbol{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$

Coseno: $\boldsymbol{cos}\,\alpha = \frac{x}{r}$

Tangente: $\boldsymbol{tan}\,\alpha = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$

Cotangente: $\boldsymbol{cot}\,\alpha = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$

Secante: $\boldsymbol{sec}\,\alpha = \frac{r}{x}$, con $x \neq 0$

Cosecante: $\boldsymbol{csc}\,\alpha = \frac{r}{y}, con\; y \neq 0$

Juega un papel importante el hecho que $r = 1$, pues de esta manera, se puede determinar directamente que $sen\alpha = y,\;\; cos\alpha = x$, donde se puede deducir que el coseno y el seno del ángulo α, está dado por la coordenada del punto B (lado final del ángulo) respectivamente. En alguna de las tareas, el círculo no será goniométrico, por lo que el estudiante deberá tener en cuenta el valor del radio, pues el seno y el coseno ya no se determinarán por la coordenada directamente. En este caso: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Por Pitágoras).

De esta manera, se espera que, con la definición de las 6 razones trigonométricas, con las herramientas "Distancia o Longitud" y la hoja de cálculo de GeoGebra, los estudiantes puedan visualizar las razones trigonométricas en la figura 5, de tal manera que asignen a cada vector una razón.

En este caso, como $r = 1$, la longitud de cada vector representa el valor absoluto de la razón trigonométrica representada[8]. En esta representación vectorial realizada por Fiallo (2010), se puede determinar el valor positivo o negativo de cada razón trigonométrica, así, cuando la razón es positiva, el vector que la representa apunta hacia la derecha, hacia arriba o hacia fuera del punto O y cuando la razón trigonométrica es negativa, el vector apunta hacia la izquierda, hacia abajo o hacia el punto O.

Fiallo (2010, p. 63) llama *lados trigonométricos* del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ a cada uno de los vectores:

Lado seno: vector $\overrightarrow{AB}$ (azul oscuro); *lado seno* = $\overrightarrow{sen\boldsymbol{\alpha}}$

Lado coseno: vector $\overrightarrow{OA}$ (rojo); *lado coseno* = $\overrightarrow{cos\boldsymbol{\alpha}}$

Lado tangente: vector $\overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{D'C'}$ (verde oscuro); *lado tangente* = $\overrightarrow{tan\boldsymbol{\alpha}}$

Lado cotangente: vector $\overrightarrow{EF}$ o $\overrightarrow{F'E'}$ (verde claro); *lado cotangente*= $\overrightarrow{cot\boldsymbol{\alpha}}$

Lado secante: vector $\overrightarrow{OD}$ o $\overrightarrow{D'O'}$ (fucsia); *lado secante* = $\overrightarrow{sec\boldsymbol{\alpha}}$

Lado cosecante: vector $\overrightarrow{OF}$ o $\overrightarrow{F'O'}$ (azul claro); *lado cosecante* = $\overrightarrow{csc\boldsymbol{\alpha}}$

Si el círculo tiene un radio diferente de 1, cada lado trigonométrico se define respectivamente: $\overrightarrow{rsen\boldsymbol{\alpha}}$, $\overrightarrow{rcos\boldsymbol{\alpha}}$, $\overrightarrow{rtan\boldsymbol{\alpha}}$, $\overrightarrow{rcot\boldsymbol{\alpha}}$, $\overrightarrow{rsec\boldsymbol{\alpha}}$, $\overrightarrow{rcsc\boldsymbol{\alpha}}$

Con lo anterior, se espera que los estudiantes puedan determinar, según el objetivo de este trabajo, algunas de las identidades trigonométricas fundamentales (recíprocas y Pitagóricas). En De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & Ramirez (2001) se define una identidad como un caso particular de ecuación (igualdad entre expresiones algebraicas, que puede incluir funciones trigonométricas o de otro tipo y puede tener o no solución) que es cierta para todos los valores de la variable y las que involucran las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, etc.

---

[8] Si el radio es diferente de 1, la longitud del vector representado es el valor absoluto del producto del radio por la razón trigonométrica representada.

El presente trabajo de sistematización docente se restringe a la construcción y comprensión de las identidades recíprocas y Pitagóricas.

2.1.2.1. *Identidades Recíprocas.*

Considerando el concepto de recíproco de un número x, es decir, aquel número que, al multiplicarlo con x da como resultado el módulo de la multiplicación $(x \cdot \frac{1}{x} = 1)$, se puede determinar que algunas razones trigonométricas son recíprocas entre sí. Estas son:

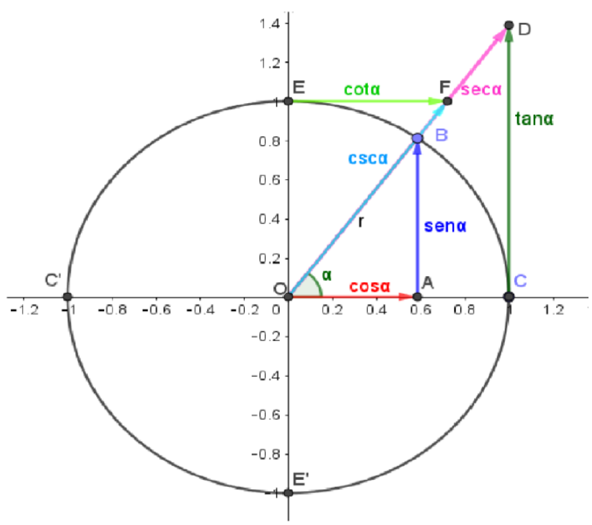
$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\csc \alpha}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$, $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$,

$csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$, $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$, $cot\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha}$

Geométricamente, estas identidades se pueden comprobar en el círculo goniométrico, tomando las medias de cada lado trigonométrico. Es importante tener en cuenta que si el círculo tiene un radio diferente de 1, se debe multiplicar cada lado por r.

Figura 6

Representación de los Lados Trigonométricos.



Nota. Tomado de Gutiérrez & Fiallo, 2009, p. 157

De esta construcción, también se puede determinar las identidades que son razón entre dos funciones:

$\tan\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$ (si $\cos\alpha \neq 0$) y $\cot\alpha = \frac{cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$ (si sen $\alpha \neq 0$)

2.1.2.2. Identidades Pitagóricas.

Teniendo las construcciones de las figuras 5 y 6, se puede observar algunos triángulos rectángulos que se forman en cualquier cuadrante:$\triangle\ OAB$, $\triangle\ OCD$ y $\triangle\ OFE$[9]; donde se pueden deducir algunas identidades aplicando el Teorema de Pitágoras:

$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ (en $\triangle\ OAB$)
$\boldsymbol{tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$ (en $\triangle\ OCD$)
$\boldsymbol{cot^2\alpha + 1 = csc^2\alpha}$ (en $\triangle\ OFE$)

Estas identidades que se deducen por medio de la aplicación del Teorema de Pitágoras en una construcción geométrica con las especificidades descritas, se denomina **Identidades Pitagóricas Básicas.** Teniendo en cuenta algunas propiedades de los números Reales, de potenciación y radicación; se pueden obtener otras identidades a partir de las básicas:

Tabla 4

Identidades Trigonométricas Pitagóricas

Identidades Pitagóricas básicas.	Identidades que se derivan de las Pitagóricas.	
$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$	$\boldsymbol{sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha}$ $\boldsymbol{sen\ \alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$	$\boldsymbol{cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha}$ $\boldsymbol{cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}}$
$\boldsymbol{tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$	$\boldsymbol{tan^2\alpha = sec^2\alpha - 1}$ $\boldsymbol{sec^2\alpha - tan^2\alpha = 1}$	$\boldsymbol{tan\ \alpha = \pm\sqrt{sec^2\alpha - 1}}$ $\boldsymbol{sec\alpha = \pm\sqrt{tan^2\alpha + 1}}$
$\boldsymbol{cot^2\alpha + 1 = csc^2\alpha}$	$\boldsymbol{cot^2\alpha = csc^2\alpha - 1}$ $\boldsymbol{csc^2\alpha - cot^2\alpha = 1}$	$\boldsymbol{cot\ \alpha = \pm\sqrt{csc^2\alpha - 1}}$ $\boldsymbol{csc\ \alpha = \pm\sqrt{cot^2\alpha + 1}}$

[9] En la construcción geométrica, en otros cuadrantes se nombran estos puntos con la letra prima correspondiente.

De acuerdo con lo anterior, se resaltan los siguientes aspectos:

1) se puede evidenciar que los orígenes de la trigonometría son en esencia la medición y la astronomía (Montiel, 2005, p. 68). Al respecto, la geometría en el círculo jugó un papel preponderante, pues las *cuerdas del círculo* fueron la herramienta para el desarrollo de esta disciplina.

2) El paso de esta trigonometría de *cuerdas en el círculo* a la *trigonometría analítica* (que se inició con Viéte), significó muchos siglos de diferencia, por lo que se puede considerar un proceso lento. Esta transición entre una y otra trigonometría, permitió a los matemáticos aplicar métodos algebraicos a problemas que sólo habían sido tratados en forma puramente geométrica (Montiel, 2005, p. 83).

3) Así se puede determinar entonces que la trigonometría se desarrolló inicialmente desde la geometría y después pasó a lo algebraico. En el caso particular de las identidades trigonométricas, ¿Cuál es el proceso que se lleva a cabo en su enseñanza? ¿Se atiende a este desarrollo histórico y a las posibles dificultades que se pueden presentar al pasar de una representación gráfica a una algebraica?

Las investigaciones reportadas sugieren que no se atiende al desarrollo histórico, inclusive cuando se habla de la trigonometría en general. En este análisis, por tanto, se concluye la necesidad de realizar una génesis artificial de la ITF, es decir, frente a esta epistemología histórica, realizar una epistemología artificial, según como lo define Chamorro (2002).

2.2. Dimensión cognitiva

En esta dimensión, se tendrán en cuenta tres aspectos fundamentales. El primero tiene que ver con los errores que cometen los estudiantes al comprobar identidades trigonométricas. Este análisis se basará en varios exámenes que aplicó Adame (2017), en el marco de su trabajo de investigación de maestría. Como preludio a esta primera parte, se hace necesario también, reconocer el significado que los estudiantes le dan a las razones trigonométricas trabajadas en diferentes contextos, pues este conocimiento previo es indispensable para abordar las ITF. Para ello, se tendrá en cuenta el estudio realizado por Martínez, Ruíz & Rico (2016).

El segundo aspecto hace referencia al proceso cognitivo de visualización matemática, principalmente teniendo en cuenta las investigaciones de Hitt (1998, 2003) y Hitt, Páez & Guzmán, (2001), pues este aspecto se considera relevante en esta investigación, ya que se trabajará con AGD.

En el tercer aspecto se describe lo concerniente a los registros de representación y a las redes de representación lo que permitirá analizar la visualización matemática de los estudiantes.

2.2.1. Nociones trigonométricas y errores de los estudiantes

Al iniciar el trabajo con las ITF, se hace indispensable que los estudiantes comprendan las nociones trigonométricas del Seno, el Coseno y la Tangente en diferentes contextos, por ejemplo, en el triángulo, el círculo (principalmente para el presente trabajo) y el de Función, pues este conocimiento previo es uno de los fundamentales en tanto que la manipulación de las ITF vincula de manera inevitable dichas nociones.

Las investigaciones respecto a la complejidad didáctica de los contenidos escolares de la trigonometría son pocos (Martínez, Ruíz & Rico, 2016), por lo que se presentará una breve reseña de lo que encontraron Martínez, *et al.,* (2006) en lo referente a la interpretación y representación que le dan estudiantes de bachillerato a las nociones de Seno y Coseno (no se incluye la Tangente en dicha investigación), este estudio se sustenta en cómo se determina el significado de un concepto matemático considerando tres componentes: los sistemas de representación, la estructura conceptual y el sentido.

Algunos hallazgos importantes y que se deben considerar a la hora de diseñar las tareas de esta investigación, son:

1) Para representar el Seno y el Coseno, los estudiantes utilizaron la circunferencia y el triángulo. Los autores relacionan esto con la manera tradicional de enseñar y entender la trigonometría.

2) Una interpretación válida para el Seno y Coseno que dieron los estudiantes, es la de la Razón. Esto se muestra como un punto a favor para el diseño de las tareas del presente trabajo, pues se vincula la razón como una manera de ver el Seno y Coseno para poder construir las ITF, además en trabajos previos[10] con los estudiantes, también se pudo comprobar dicha interpretación.

3) Otra interpretación, pero errónea, es ver el Seno y el Coseno como los ángulos interiores de un triángulo y como las distancias de un triángulo rectángulo con hipotenusa diferente de uno. Esto puede significar un obstáculo epistemológico a la hora de trabajar en una circunferencia con radio diferente a uno, pues se puede presentar el mismo error.

4) Se evidenció que la mayoría de los estudiantes interpretaron el Seno y el Coseno como una longitud.

5) Hay conexiones incorrectas al momento de relacionar las concepciones del Seno y Coseno en un triángulo rectángulo y en la circunferencia. Fiallo (2010) también expone dicha dificultad. En la Tabla 5 se explica con más detalle este hallazgo. En el marco de esta investigación, este es un obstáculo didáctico (por lo expuesto en la presentación del problema).

6) Se evidenció un uso incorrecto del círculo unitario, la mayoría de los estudiantes mostraron una comprensión deficiente de este, así por ejemplo, lo dibujaron sin indicar el valor de su radio, lo que los llevó a cometer muchos errores. Más adelante se hará una explicación más detallada al respecto de este obstáculo didáctico y epistemológico.

Por otro lado, en su trabajo de investigación de maestría, Adame (2017) aplicó un examen a 46 estudiantes del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) de México de manera individual, en el cual se presentaron algunos errores muy comunes

[10] Estos trabajos no se reportan en esta sistematización, pues hacen parte la práctica pedagógica del docente.

debido estos a obstáculos epistemológicos. Cabe resaltar que estos exámenes estaban propuestos desde una representación algebraica.

Después de hacer el análisis a los exámenes se encontraron errores de dos tipos: desde la trigonometría, se determinó que los estudiantes no reconocen las equivalencias de expresiones trigonométricas, por ejemplo, consideran que $\frac{1}{cos^2x} = cos^2x$, la autora supone que esto es debido a una falta de comprensión en el significado de dichas expresiones.

Otro tipo de error fue lo relacionado con la ejecución de algoritmos. Se presentaron dificultades en factorización, operaciones con fracciones evidenciadas en las simplificaciones de las expresiones, además de un *razonamiento cíclico:*

> El estudiante realiza algunos artilugios que él cree convenientes como el querer multiplicar por 1 utilizando el conjugado del numerador y la multiplicación de expresiones algebraicas. Una vez que realiza lo anterior el error está en que no saca provecho de lo antes realizado y elimina precisamente las expresiones que acaba de obtener dejando la expresión como estaba en un principio (Adame, 2017, p. 37).

2.2.2. La visualización Matemática

Teniendo en cuenta los objetivos del trabajo, se pretende orientarlo desde un enfoque geométrico, por lo que la visualización matemática tomará un papel relevante en tanto que los estudiantes se enfrentarán a representaciones en un AGD, lo que supone que la gráfica será la base para construir lo algebraico y tratar de corregir los errores descritos anteriormente, principalmente el primero.

La visualización matemática ha ido adquiriendo importancia en el campo de la investigación en didáctica durante los últimos años (Cantoral & Montiel, 2003; Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012), por lo que existen múltiples miradas al respecto.

Así por ejemplo, una de estas perspectivas afirma que "la visualización matemática es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende" (Cantoral & Montiel, 2003, p. 694).

Según Ibañes & Ortega (1998), lo visual suele relacionarse con las imágenes, las figuras, lo pictórico, lo geométrico y aparece en oposición con lo verbal, lo abstracto, lo analítico. Estos autores se basan en otros teóricos como Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996), para definir la visualización, considerándola como:

> Un acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso se obtiene a través de los sentidos. Tal conexión puede hacerse en dos direcciones. Un acto de visualización puede consistir en cualquier construcción mental de objetos o procesos que un individuo asocia con objetos o sucesos percibidos por él como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en la construcción, en algún medio externo como papel, encerado o pantalla de ordenador, de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos o procesos en su mente (citado en Ibañes & Ortega 1998. p. 106)

Por su parte, Hitt (1998, p. 23), considera que la visualización requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Argumenta desde lo histórico, que la enseñanza de las matemáticas ha perdido lo gráfico (por ende, lo visual) en la solución de problemas, convirtiéndose en un proceso de corte algorítmico-algebraico, donde los profesores les restan importancia a los procesos visuales. Al respecto, menciona que "El Currículum escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de los resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y en la mayoría de los salones de clase la enseñanza enfatiza los métodos no visuales" (Presmeg, 1986, citado en Hitt, 1998, p. 29).

Así mismo, se hace una diferencia entre percibir y visualizar, teniendo en cuenta a Zimmermann & Cunningham (1990):

> "Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del mismo, pero visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o una imagen

> visual. La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento" (p. 29).

El trabajo de Hitt (1998), es aún más pertinente para el presente trabajo por varias razones: la primera de ellas es que rescata la importancia de la geometría y de la gráfica para la enseñanza de las matemáticas, poniendo las consideraciones visuales como un acercamiento al aprendizaje. Puntualiza: "Se le ha dado una importancia mayor a la generación de imágenes mentales adecuadas para el aprendizaje de la matemática, para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática en la resolución de problemas" (Hitt, 1998, p. 25).

Otro aspecto importante en el trabajo de Hitt es la integración de tecnologías digitales, ya que permiten un mayor acceso a las múltiples representaciones de un objeto matemático. Concluye que "La visualización matemática promoverá entonces una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas"(Hitt , 1998, p. 43.).

Por su parte, Zimmermann & Cunningham (1990) se basan en algunas investigaciones como "Nonanalytic Aspects of Mathematics and Their Implications for Research and Education" donde se sugiere que no se debe poner énfasis a un solo elemento o grupo de las matemáticas (elementos espaciales, cinestésicos; aritméticos o algebraicos; verbales, lógicos, didácticos, et.), pues esto generaría un desequilibrio. Este trabajo da una serie de sugerencias, entre las que se incluyen, entre otras, "restaurar la geometría. Restaurar las matemáticas intuitivas y experimentales. Dar un lugar adecuado para la informática y la programación. Hacer pleno uso de gráficos por ordenador" (Davis y James A. Anderson, 1979, Citado en Zimmermann & Cunningham, 1990, p. 2).

Sin embargo, es importante anotar que Zimmermann & Cunningham (1990), sugieren también que la visualización basada en el uso de tecnologías digitales puede usarse de manera eficiente y significativa si el estudiante tiene ciertas capacidades como, por ejemplo, dibujar una figura para representar un problema matemático, interpretar cifras para comprender y usarlas como una ayuda en la resolución de problemas (consideran estas capacidades como habilidades fundamentales de la visualización).

Estos investigadores advierten que la visualización matemática no es un fin sino un medio hacia la comprensión. Así mismo indican que la visualización debe estar inmersa en el resto de las matemáticas, por lo tanto, el pensamiento visual y las representaciones gráficas deben estar vinculados a otros modos de pensamiento matemático y otras formas de representación (simbólica, numérica, grafica) (Zimmermann & Cunningham, 1990).

Según lo anterior, se pretende entonces en este trabajo, lograr que los estudiantes construyan un conocimiento a través de la interacción con el AGD, de tal manera que puedan coordinar coherentemente la representación gráfica, la algebraica y otras; en donde la visualización matemática juega un papel importante como proceso cognitivo.

2.2.3 Registros de Representación semióticos y Redes de Representación

Cuando el estudiante logra coordinar coherentemente las diferentes representaciones es lo que lo define como competente en matemáticas según la teoría de las representaciones. En este sentido, Hitt, Páez & Guzmán (2001) se apoyan en el trabajo de Duval (1993) para definir algunas características de un registro semiótico como sistema de representación. Cabe resaltar que Hitt (1998) ha propuesto esta teoría como un requisito para la visualización matemática siendo lo gráfico algo adecuado para resolver un problema.

Moreno & Lupiáñez (2001, p. 249) definen las representaciones como “notaciones simbólicas o gráficas, o verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes”. Sin embargo, según Duval (1999) no se pueden comprender de manera independiente al sistema que ha permitido producirlas, por lo que dichas representaciones, están dentro de un registro de representación semiótica[11].

El registro de representación semiótica, se define como las “reglas más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido” (Duval, 1999, p. 43). Esto permite realizar transformaciones de dicha representación,

[11] Duval (1999, p44) elige hablar el término “registro” en lugar de hablar de sistema semiótico de representación.

siendo esto un indicador de aprendizaje de las matemáticas; en palabras de Hitt (2001): " un concepto se va construyendo mediante tareas que impliquen la utilización de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre representaciones"

Los dos tipos de transformaciones son el *tratamiento* y la *conversión*. El primero se define como una transformación interna en un registro, utilizando las posibilidades de funcionamiento propios del sistema; en cambio la conversión es la transformación de un registro a otro (Duval, 1999, p. 44 , 45), por ejemplo, del algebraico al gráfico. Esta última transformación está orientada, es decir, se define cuál es el registro de salida y cuál el de llegada. Como lo menciona Hitt (2001), se hace necesario mínimo dos registros semióticos de representación para dar cuenta de la construcción del concepto matemático en juego:

> Las representaciones de los objetos matemáticos son parciales con respecto a lo que representan. Es decir, que es absolutamente necesario contar con actividades de conversión en por lo menos dos registros de representación para que las representaciones en juego, que por su naturaleza son complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión (p. 175).

Así mismo, el hecho de articular representaciones de un registro a otro se denomina coordinación de representaciones. Solamente a través de estas representaciones se tiene acceso a los objetos matemáticos y juegan un papel importante en la construcción del conocimiento matemático. Hiebert & Carpenter (1992) citados en Hitt (2000) explican lo anterior dentro del marco teórico de las *redes* formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas (propiciando la idea de conexión):

> Iniciamos definiendo comprensión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones (p. 169).

Para los resultados de la presente sistematización, se tendrá en cuenta la matriz de análisis (Tabla11) de Hitt (1998), que permite analizar los procesos de los estudiantes referentes a las anteriores definiciones (las transformaciones), de acuerdo a su *Visualización Matemática* usando tecnologías digitales; esto a partir de la *red de representación* ideal (Figura 11) que se dan en las interconexiones de los registros. En dicha red se manifestarían las representaciones externas y permitirían explicar los errores que cometen los estudiantes.

Según Hitt (2000), "la construcción inadecuada de un concepto se pudiera deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación", al respecto, explica:

> Un obstáculo se manifiesta, por lo tanto, por sus errores, pero ellos no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo, no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos (Brousseau (1976 citado en Hitt, 2000, p. 11).

Desde esta perspectiva de Brousseau (1976) citada en Hitt (2000), los errores, en este caso, se presentan por obstáculos didácticos, es decir, son producto del proceso de enseñanza e impiden avanzar en la construcción de un nuevo conocimiento, imposibilitando, además, superar obstáculos epistemológicos. Estos últimos hacen referencia a conocimientos erróneos que tiene el estudiante y conocimientos que obstaculizan la construcción de otros (no necesariamente erróneos).

En este sentido, el objetivo general de este trabajo es generar tareas que promuevan mejores redes de conexión que favorezcan el aprendizaje, pues en el todo este proceso ya se han determinado algunos obstáculos de corte didáctico y epistemológico[12] que podrían provocar algunos errores, por lo que se espera que algunos de estos serán franqueables. Al respecto, Adame, Torres Borjón, & Hitt (2019) concluyen que:

[12] Los errores (referentes a las ITF) y obstáculos que los producen, se especifican en los resultados de la investigación.

> […] la visualización matemática, concebida a través de un diseño cuidadoso de actividades en el que intervienen tanto la interrelación de diversas representaciones de los objetos matemáticos como las herramientas tecnológicas, son un medio que permiten a los estudiantes desprender el objeto de sus representaciones, al tiempo que al crear redes entre estas últimas van logrando un mayor nivel de comprensión de los objetos trabajados (p. 372).

La matriz de análisis y la red de representación ideal para construir las ITF se presentan en los análisis *a priori*.

De acuerdo con lo descrito en la dimensión cognitiva, se concluye que:

1) Las interpretaciones y representaciones que los estudiantes hagan de las Razones Trigonométricas son esenciales para la construcción de las ITF. El uso del círculo como elemento epistemológico se hace fundamental en este proceso. Sin embargo, los errores analizados en este apartado hacen referencia exclusivamente al registro algebraico de las ITF, por lo que no se relacionan con dichas interpretaciones y representaciones. Esto se da, principalmente, porque no se atiende al desarrollo histórico de la trigonometría en el proceso de enseñanza.

2) Para atender a este desarrollo histórico de tal manera que se pueda hacer una génesis artificial de las ITF, se hace indispensable hacer uso del registro gráfico de este objeto matemático, por lo que la visualización matemática juega un papel relevante en este proceso; aunque debería estar vinculada a los diferentes registros de representación. En esta investigación, se entiende la visualización matemática desde los constructos de Hitt (1998, 2000, 2001, 2003, 2019), pues integra tecnologías digitales a este concepto.

3) La coordinación de diferentes registros de representación son un indicador de aprendizaje de las matemáticas, donde la cantidad y fuerza de las conexiones (redes) que se hagan determinan dicho aprendizaje. Los Registros de Representación deben ser analizados por medio de estas conexiones (Hitt, 2001, p. 170).

2.3. Dimensión didáctica

En esta dimensión se presentan los principales conceptos asociados a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) que orientan el diseño de las tareas y su puesta en acto. Además se dará una mirada curricular sobre trigonometría, primero de manera general como en la tesis de maestría de Muñoz (2013) y la tesis doctoral de Fiallo (2010) y segundo de las identidades trigonométricas, de manera particular, como en el trabajo de Adame (2017) analizando cómo este objeto matemático se presenta en la escuela, especialmente desde los libros de texto. Finalmente, se exponen algunas ideas generales del AGD GeoGebra como *medio* para poner en acto el diseño.

2.3.1. La Teoría de Situaciones Didácticas

El principal referente teórico para el desarrollo de esta sistematización es la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007)[13], quien la fundamentó en el constructivismo en un sentido piagetiano, básicamente desde un aprendizaje por adaptación, siendo este aquel aprendizaje que se produce por interacción entre el estudiante y el *medio*. La teoría de Brousseau (2007) pretende unas condiciones necesarias para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos.

Algunos conceptos fundamentales en la TSD son las situaciones didácticas y situaciones a-didácticas (aprendizaje por adaptación y sus elementos), los cuales se definen a continuación.

Cuando el docente tiene el objetivo de hacer que los estudiantes adquieran determinado saber se da una situación[14] didáctica (donde intervienen tres factores: profesor, alumno y saber), por lo que debe diseñar unas tareas, es decir, unos problemas de manera intencional. Sin embargo, según Brousseau (2007), estos problemas deben estar diseñados de tal manera que el estudiante los acepte para que produzca una solución él mismo:

[13] La primera versión de la TDS de Brousseau es de 1972.
[14] Brousseau (2007) define una situación como un modelo de interaccion entre un sujeto y un medio determinado, siendo las decisiones un recurso que tiene el sujeto para alcanzar o conservar, en este medio, un estado favorable.

> Esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer (p. 31).

Es en este punto, donde el profesor no interviene y el estudiante actúa sobre el medio recibiendo las retroacciones, es donde se presenta la *situación a-didáctica* dándose el aprendizaje por adaptación. En este proceso de aprendizaje se presentan cinco elementos (Acosta & Fiallo, 2017):

1) Intención del sujeto: necesidades, propósitos u objetivos del estudiante.
2) Acción: actuaciones del sujeto con el medio.
3) Retroacción: reacción del medio frente a las actuaciones del sujeto.
4) Interpretación: el sujeto interpreta la retroacción del medio.
5) Validación: el sujeto decide si la acción (2) que realizó en el medio le sirvió para alcanzar su intención (1). Esta validación puede ser negativa o positiva: en el primer caso, el sujeto iniciará nuevamente el proceso. En el segundo caso, el sujeto integrará la acción como una respuesta a su intención.

De estas cinco acciones, sólo son observables la acción y la retroacción; las demás son internas del sujeto. No es observable la validación, pero sí sus efectos: cambio o refuerzo de la acción, siendo estas signos de aprendizaje (Acosta & Fiallo, 2017)

En definitiva, en el aprendizaje por adaptación el estudiante actúa sobre el medio motivado por sus intenciones, el medio reacciona a las acciones del estudiante y le propicia una retroacción. A través de esta retroacción, él decide si alcanzó lo que se proponía o no, es decir, construye su conocimiento sin la intervención directa del profesor.

La función del profesor no es comunicar el saber (aunque lo haga de manera clara y precisa). Según la TSD, este saber se debe transmitir de manera indirecta. En este proceso, la tarea del profesor es proponer problemas matemáticos que lleven al estudiante a las adaptaciones deseadas (Brousseau, 2007), es decir, dar las condiciones para que se lleve a cabo lo descrito anteriormente.

Cabe resaltar una diferencia que hace la TSD respecto a dos conceptos que pueden ser sinónimos en el lenguaje cotidiano: el conocimiento y el saber. El primero hace referencia a lo que construye el estudiante (en este caso, por adaptación), resulta de su experiencia y es personal y contextualizado. Por su parte, el segundo concepto hace referencia al saber sabio, es institucional y tiene estructuras y forma convencionales.

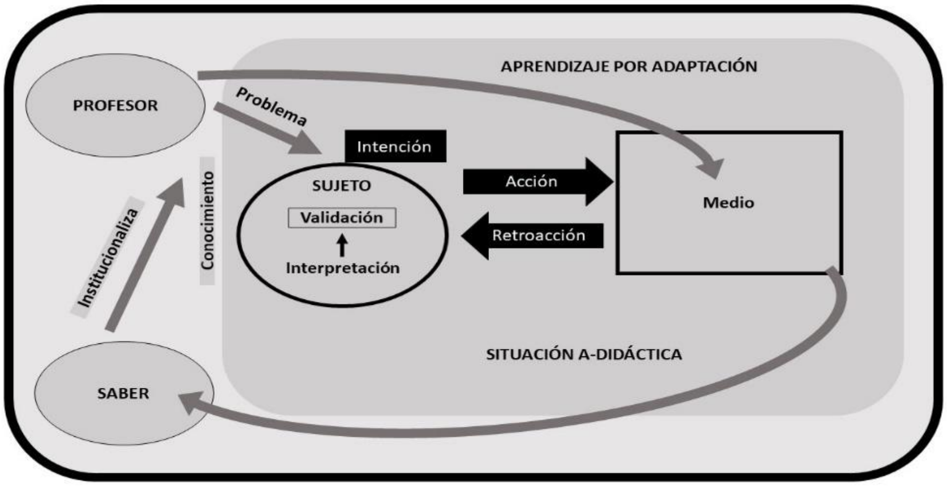
Con esta diferenciación, entra en juego la situación de institucionalización y de devolución (proceso de enseñanza), es decir, que el profesor utiliza el conocimiento construido por el estudiante para transmitir el saber (institucionaliza). Para que esto se lleve a cabo, se debe dar primero el proceso de devolución, que es poner en juego la situación *a-didáctica*; entregándole el problema al estudiante, un medio y acompañando este proceso (para que se dé el aprendizaje por adaptación). Esta devolución e institucionalización se da, según Brousseau (2007), gracias al contracto didáctico.

El contrato didáctico son las expectativas, tanto del docente como del estudiante, reglas "de juego", normas, etc. que se dan en todo este proceso, desde el momento en el cual el docente tiene el objetivo de hacer que los estudiantes adquieran determinado saber matemático, pasando por la situación *a-didáctica* hasta la fase de institucionalización; sin embargo, una paradoja de este contrato es que no puede ser pactado entre el docente y el estudiante, pues "solo la aventura de la adquisicion del saber permite conocer el sentido y las condiciones. Ni siquiera son explicitables. Tampoco hay clausulas de ruptura ni de sanciones" (Brousseau, 2007, p. 72).

La figura 7, tomado de Acosta & Fiallo (2017), presenta un esquema general de la TSD.

Figura 7

Esquema General de la TSD

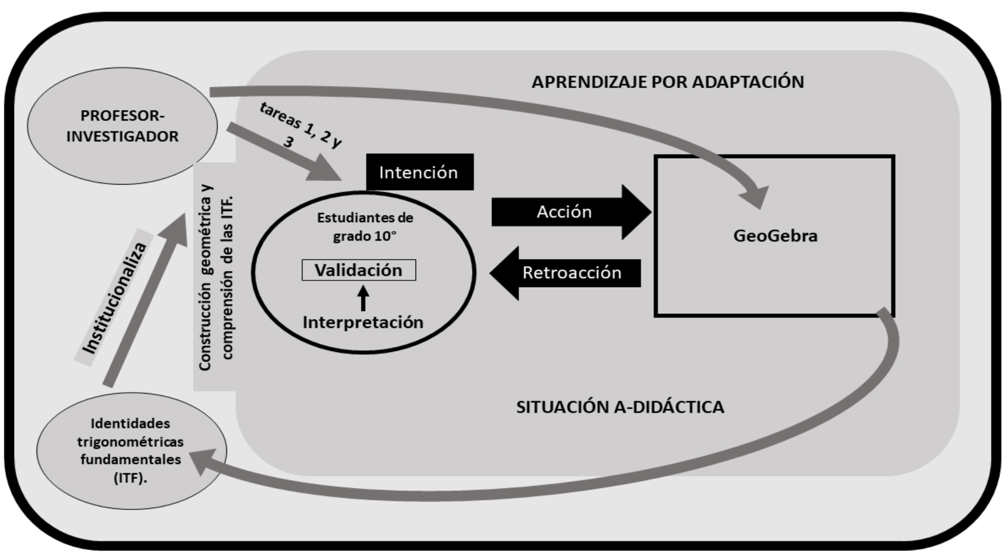


Nota. Tomado de: Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la Teoría de Situaciones Didácticas. Acosta, M & Fiallo J. (2017)

De manera particular, a continuación se muestra el mismo esquema adaptado con los elementos de esta sistematización docente:

Figura 8

Esquema Particular de la TSD: Situaciones Para la Enseñanza de las ITF a Partir de un Enfoque Geométrico



El autor de la TSD establece una clasificación de las situaciones didácticas diferenciándolas en tres fases:[15] de acción, de formulación y de validación. Para el diseño de las tres tareas de esta sistematización se hace una aproximación a cada una, diferenciándolas en: situación 1, situación 2 y situación 3, respectivamente:

Situación 1. De acción: el estudiante actúa con el medio, lo reconoce y toma decisiones para solucionar lo que se le propone, haciendo varios ensayos.

Situación 2. De formulación: las actuaciones de los estudiantes le permiten determinar la estrategia ganadora o las modificaciones al respecto. No sólo debe lograr esto, sino que además debe lograr comunicarlo, por lo que dicha comunicación está sometida a las retroacciones del *medio* (inclusive de los compañeros según sea la tarea).

Situación 3. De validación: aquí los estudiantes organizan enunciados, demostraciones, construyen teorías, además de convencer a los demás y a sí mismos sin dejarse influenciar fácilmente (Brousseau, 2007, p.23). Deben justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha.

De manera general, Brousseau (2007) explica esta clasificación de la siguiente manera:

- De acción: intercambios de informaciones no codificadas sin lenguaje (acciones y decisiones);
- De formulación: intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (mensajes);
- De validación: intercambios de juicios (sentencias que se refieren a un conjunto de enunciados que tienen un-rol de teoría).

2.3.2. Una mirada curricular de la trigonometría

Muñoz (2013) analizó algunos libros de texto de grado 10° para determinar el uso que estos le dieron a la tecnología digital en los capítulos donde se abordan temas o unidades de trigonometría.

[15] Estas fases son diferentes a las fases presentadas en la ingeniería didáctica.

Además de ello, hizo un paralelo entre éstos, algunos investigadores en educación matemática y documentos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Si bien, este trabajo no abordó de manera específica las identidades trigonométricas, sí lo hace con la trigonometría en general mostrando algunas investigaciones que evidencian las dificultades de comprensión, de resolución de problemas y errores conceptuales que tienen los estudiantes. Estas dificultades se dan, según varios teóricos, por varias razones: una es por la manera estática en que se manejan los conceptos desde la enseñanza, mostrando el uso de las TIC como una manera para abordar esta problemática haciendo el aprendizaje de la trigonometría más versátil (Blackett y Tall, 1991 citado en Muñoz , 2013).

Otra razón de dichas dificultades, es que los planes de estudio presentan dos formas de abordar la trigonometría: una lo hace desde el triángulo rectángulo y otra forma es presentarla desde la utilización del círculo unitario siendo la tecnología una posible solución para lidiar con ello (Moore, 2010 citado en Muñoz, 2013).

Según Fiallo (2010, p. 45) lo anterior presenta una dificultad porque al cambiar de un enfoque al otro (del triángulo al círculo), el estudiante debe cambiar una serie de definiciones dadas a las razones trigonométricas según el contexto planteado, como lo muestra la tabla:

Tabla 5

Diferencias en la Definición de Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo y el Círculo Unitario

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo	**Razones trigonométricas en el círculo unitario**
Se cambia… →	**a…**
una definición geométrica	una definición analítica (al plano cartesiano)

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo	Razones trigonométricas en el círculo unitario
de analizar los valores de los lados del triángulo rectángulo	analizar los valores de las coordenadas del plano y el radio de la circunferencia
de un concepto de ángulo como región comprendida entre dos lados del triángulo	un concepto de ángulo como giro o rotación, los valores del ángulo pasan de ser valores de ángulos agudos o rectos ($0º \leq \alpha \leq 90º$) a ángulos positivos y negativos, al menos en el intervalo $-360º \leq \alpha \leq 360°$
la relación o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas	Distancias dirigidas en el plano cartesiano o coordenadas del punto de intersección entre el lado terminal del ángulo el circulo goniométrico.

Nota. Tomado de Fiallo, 2010, p. 45

Específicamente, Fiallo (2010) menciona los factores que según Brown (2006) afectan la comprensión de conceptos trigonométricos. Cabe resaltar que estos factores están asociados al uso del círculo unitario a dichos conceptos. Algunas son:

> […] conceptos débiles de ideas importantes sobre las rotaciones y el círculo goniométrico; poca o ninguna comprensión del papel de la unidad en el círculo goniométrico o aplicación inconsistente de la unidad; dificultad para interpretar los gráficos coordenados como información geométrica y numérica combinada […]; dificultad para comprender el seno y el coseno como coordenadas […] (Brown, 2006 citado en Fiallo, 2010, p. 46).

El análisis de estas dificultades es fundamental en el diseño de las tareas y los *a-priori*, pues son propios de un trabajo en trigonometría con un enfoque geométrico.

Por su parte, Muñoz (2013) resume varias investigaciones en trigonometría que muestran cómo es abordada la trigonometría desde la educación media, el uso de las TIC en esta rama de las matemáticas y dificultades que presentan los estudiantes:

Tabla 6

Algunas Investigaciones Sobre Trigonometría y su Comprensión

INVESTIGADORES	AÑO	OBJETO DE ESTUDIO	CONCLUSIÓN
BLACKETT y TALL	1991	El aprendizaje de la trigonometría utilizando programas informáticos.	El uso del computador en clase de trigonometría les permite a los estudiantes mejorar la comprensión del concepto de proporción.
ORHUN	2001	Las falencias que poseen los estudiantes al usar la trigonometría para resolver problemas.	En la educación media la trigonometría se limita a calcular el cociente entre las medidas de los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.
WEBER	2005	Examinar la comprensión de los estudiantes en relación con las funciones trigonométricas.	Sugiere cambiar la instrucción estándar con la metodología magistral por la instrucción experimental basada en la utilización de las TIC.
BROWN	2006	La comprensión incompleta que tienen muchos estudiantes de las tres maneras de ver los conceptos del Seno y el Coseno.	La dificultad de muchos estudiantes está en entender el seno y el coseno como coordenadas, otros como las razones entre los lados del triángulo rectángulo, y muchos no comprenden que los números racionales pueden ser representados como números y como cocientes.
MOORE	2010	Las dificultades que tienen los estudiantes para construir comprensiones coherentes de las funciones trigonométricas.	Implementar en las clases de trigonometría el uso de la tecnología puede permitir que los estudiantes mejoren la oportunidad de reflexionar sobre sus conjeturas en relación con los valores y el movimiento generado en las construcciones.

Nota. Tomada de Muñoz L., 2013, p. 20

Así mismo, Muñoz (2013) analizó una serie de libros seleccionándolos de acuerdo a los que referencian los profesores como bibliografía para grado décimo y primeros semestres de la universidad, además porque están fundamentados en las directrices del Ministerio de Educación

Nacional. El autor considera importante hacer este análisis de textos ya que según él, los libros de texto son uno de los principales recursos didácticos que el docente emplea para hacer sus intervenciones en clase, por lo que serían un elemento básico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

También analizó otros libros del repositorio de Colombia Aprende del Ministerio de Educación Nacional, concluyendo entre otros aspectos, el enfoque metodológico que presentan, pues todos están orientados según las propuestas de Ministerio de Educación Nacional (Lineamientos y Estándares Básicos de Competencia), buscando, según el autor, desarrollar el pensamiento matemático a través de los diferentes sistemas tal y como lo propone el MEN. Además de la importancia que ha ido adquiriendo el uso de las TIC en el momento de presentar los temas de trigonometría y se determinó que casi todos los libros tienen las mismas temáticas y en el mismo orden:

- Ángulos y triángulos.
- Solución de triángulos rectángulos:
    - Teorema de Pitágoras.
    - Razones trigonométricas.
        - ✓ Gráficas de las funciones trigonométricas.
        - ✓ Ecuaciones trigonométricas.
        - ✓ Identidades trigonométricas.
- Solución de triángulos oblicuángulos:
    - Ley del seno y Ley del coseno.

2.3.3. Una mirada curricular de las ITF

De manera más particular, en el trabajo de Adame (2017) se analiza cómo los libros de texto presentan el tema de las Identidades Trigonométricas, determinando que éstos las muestran de manera sencilla hasta llegar a una forma más compleja. Sin embargo, en este análisis se puede inferir que este objeto matemático se presenta sólo desde un registro algebraico, pues Adame (2017) indica que cuando se trabajan de manera sencilla, sólo se necesita hacer sustituciones de ciertas identidades trigonométricas y operaciones básicas como multiplicación o división de fracciones y en los ejercicios más complicados se requiere del uso de operaciones algebraicas como adición de fracciones y la factorización.

Leithold (1989) citado en Adame (2017), habla de la importancia de familiarizar a los estudiantes con las identidades trigonométricas en sus diferentes formas, pues esto es decisivo para el éxito o fracaso que se pudiera tener, lo que sugiere la relevancia de trabajar, por ejemplo, otros registros como el gráfico. De hecho, de los investigadores mencionados por Adame (2017), sólo Leithold (1989) sugiere trazar la gráfica de cada miembro de la expresión que se sospeche sea una identidad.

Por otro lado, Adame (2017), cita algunos investigadores en Educación Matemática como Nieles (2000) quien sugiere ir del término más complicado al más simple o como Goodman (1996), que sugiere cambiar todo en términos de senos y coseno Según el análisis de Adame (2017) en los libros de texto normalmente se presentan dos formas de abordar las identidades trigonométricas: una es tomar cada uno de los miembros de la identidad por separado y llegar a la misma forma equivalente y la otra manera es tomar un solo miembro de la identidad, desarrollar y llegar a la expresión contenida en el otro lado (siguiendo la sugerencia de Nieles (2000)).

Por último es importante analizar cómo es presentada la trigonometría desde los documentos del Ministerio de Educación Nacional, particularmente desde los lineamientos y estándares. En los conocimientos básicos mencionados en los Lineamientos curriculares, se describen cada uno de los pensamientos y sus sistemas:

- El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos.
- El pensamiento métrico y los sistemas de medidas.
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Son muchos los conceptos matemáticos que entran en juego cuando se trabajan las Identidades Trigonométricas, siendo importantes algunos de geometría, álgebra y por supuesto, la misma trigonometría. Para el diseño de las tareas se tienen en cuenta estos conceptos como conocimientos previos que el estudiante debe dominar para poder enfrentarse tanto al *medio* (GeoGebra) como a los objetivos mismos de las actividades.

Algunos ejemplos de estos son[16]: ecuaciones lineales, cuadráticas y con radicales, sistema de coordenadas cartesianas, clasificación de ángulos y de triángulos, medición de ángulos, ángulos complementarios y suplementarios, teorema de Pitágoras, Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en el círculo goniométrico, circunferencia, segmentos, vectores, etc.

Lo anterior no indica la necesidad de definir todos estos objetos en el marco del presente proceso de sistematización, pues existen diferentes trabajos y libros de texto que lo hacen (algunos de estos trabajos hacen parte de los antecedentes referenciados en el capítulo 1. Se consideró más relevante definir lo concerniente a algunos elementos necesarios para la adaptación de las construcciones geométricas y el diseño de las tareas, las cuales se presentaron en la dimensión *histórico-epistemológica*.

Además de esto, es importante tener en cuenta lo que se pretende con las tareas, pues como se menciona en la presentación del problema y según los Lineamientos Curriculares de matemáticas, el énfasis de la formación matemática básica estaría en potenciar el pensamiento matemático. En esta investigación se está favoreciendo, principalmente, los pensamientos espacial, métrico, numérico y variacional, pues el objeto matemático y los objetivos de la investigación están directamente ligados a ellos y a sus sistemas (coherencia horizontal). Para comprender esto, primero se definen dichos pensamientos según el Ministerio de Educación Nacional.

En los Estándares Básicos de Competencias, se menciona que el pensamiento espacial es "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales", el pensamiento métrico lo relaciona con "la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y

[16] Se determinaron estos conceptos previos de acuerdo con las diferentes investigaciones analizadas y a los objetivos mismos de las tareas diseñadas.

cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de las medidas en diferentes situaciones"; así mismo indica que el pensamiento numérico es "la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación" y por último, define el pensamiento variacional como "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos […]" (Ministerio de Educación Nacional , 2006, p. 60, 61 , 63, 66).

Lo anterior se interpreta como una manera de pensar dinámica donde el estudiante puede entender, modelar y transformar diferentes situaciones problema que implican cambios entre magnitudes (pensamiento métrico). En este sentido, particularmente, el objetivo del pensamiento variacional es la covariación entre cantidades de magnitud, siendo un propósito importante tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Vasco, 2002). En este trabajo, se pretende que el pensamiento espacial sea el articulador de todo el proceso, por esto cobra mayor relevancia la geometría dinámica a través del uso de software ya que permiten diferentes representaciones y manipulaciones que en un gráfico estático no sería posible. Según esto, los pensamientos y sus sistemas se relacionan de la siguiente manera:

Pensamiento espacial y sistemas geométricos (PE-SG): el enfoque de la investigación es geométrico, donde se hace necesario el reconocimiento de lugares geométricos para poder abordar las tareas. Este pensamiento es el articulador de todo el proceso.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas (PM-SM): el estudiante se enfrentará a una construcción geométrica donde deberá abordar problemas con situaciones de medición, por ejemplo, medidas de ángulos y de segmentos (en la construcción, vectores) y las relaciones entre estos.

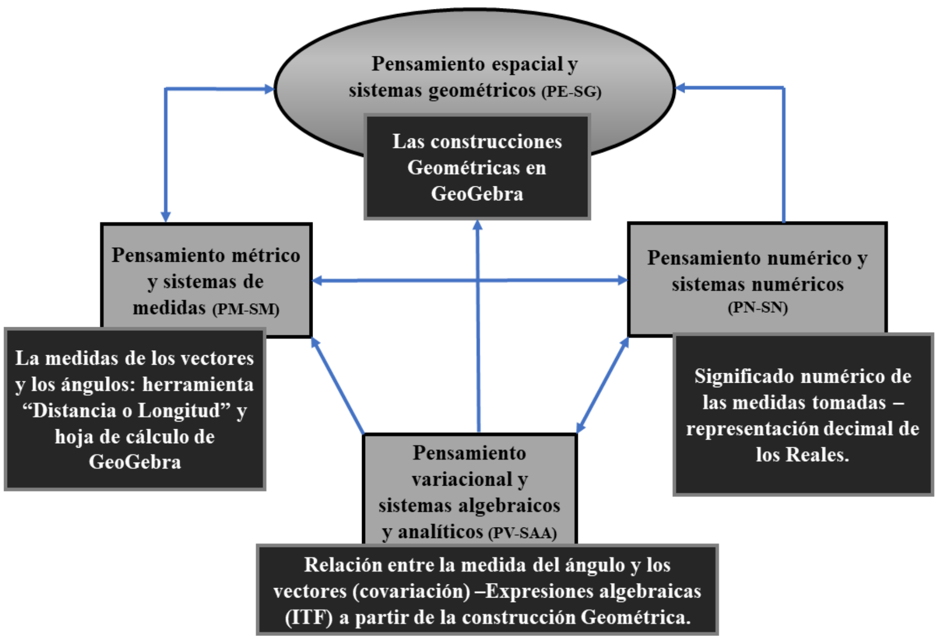
Pensamiento numérico y sistemas numéricos (PN-SN): se hace necesario el uso y comprensión de los números reales, sus operaciones y propiedades en cada una de las tareas, pues estará muy relacionado con la medición que tomen de los ángulos, los vectores y las operaciones que pueda realizar.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos (PV-SAA): en la construcción geométrica, se espera que el estudiante logre determinar la covariación entre el ángulo y los vectores de tal manera que esto (y el uso de conocimientos previos) le permita llegar a algunas expresiones algebraicas (Identidades), es decir, pasar de los lugares geométricos a la expresión analítica.

En el siguiente gráfico se presenta la relación entre estos pensamientos:

Figura 9

Relación Entre los Pensamientos Matemáticos



Los rectángulos negros indican cómo interviene *el medio* en cada pensamiento. La líneas azules relacionan el posible camino que recorrería el estudiante, por lo tanto, las flechas señalan el paso de un pensamiento al otro de la siguiente manera: PE-SG articula el proceso, luego en PM-SM analiza las longitudes de los vectores y la medida de los ángulos, en este punto es importante el PN-SN, por lo tanto, puede ir de uno al otro, como también puede hacerlo de PM-SM a PE-SG, esto lo permite el mismo *medio* con el arrastre y la hoja de cálculo. Movilizarse entre estos pensamientos es fundamental ya que luego, con las tareas, se orientará al estudiante para pasar al PV-SAA, donde deberá hacer una conversión de registro (pasar a uno algebraico) según los análisis que hayan hecho en los pensamientos anteriores. Finalmente, se espera que coordine el registro algebraico, con el tabular y gráfico.

A las Instituciones Educativas Públicas, el MEN entregó en el año 2017 una serie de libros denominada, para el caso de educación media "*Matemáticas 10°*" y "*Matemáticas 11°*" de la editorial Larousse. El material se entregó para los estudiantes (25 libros de cada grado) y para los docentes, con la guía del docente.

Se referencia lo anterior, pues en la Institución Educativa donde se lleva a cabo este proceso de sistematización, se hizo dicha dotación. Analizando estos textos, se puede observar que, particularmente, en el tema de *identidades trigonométricas*, se muestra un proceso didáctico muy similar al descrito por Adame (2017) en el que las identidades se muestran principalmente desde lo algebraico, siendo la parte gráfica usada como un recurso alternativo. Las sugerencias didácticas dadas para los maestros se fundamentan principalmente en orientar la comprobación de las identidades y no a su construcción ni comprensión.

El libro de texto en cuestión, por ser directamente entregado por el MEN, pretende abordar su propuesta desde los Lineamiento y Estándares, ubicando las *identidades trigonométricas* como se muestra en la Tabla 7, siendo esta la unidad 4:

Tabla 7

Una propuesta de Matemáticas Larousse 10: Identidades Trigonométricas Dentro del Contenido

<table>
<tr><th colspan="4">PENSAMIENTO ESPACIAL Y VARIACIONAL.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Contenidos base de Grado 10°</td><td>Contenido de la propuesta</td><td rowspan="2">Relación con los contenidos base de Grado 9°.</td><td rowspan="2">Relación con los contenidos base de Grado 11°.</td></tr>
<tr><td>Temas de la Unidad</td></tr>
<tr><td rowspan="4">• Funciones periódicas, propiedades y comportamientos.</td><td>1. Función seno</td><td rowspan="4">• Propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de</td><td rowspan="4">• Análisis gráfico de funciones.</td></tr>
<tr><td>2. Función coseno</td></tr>
<tr><td>3. Gráficas de las funciones sinusoidales</td></tr>
<tr><td>4. Función tangente</td></tr>
</table>

• Gráficas de las funciones trigonométricas.	5. Función cotangente 6. Función secante 7. Función cosecante **8. Identidades trigonométricas fundamentales** 9. Funciones trigonométricas en términos de las otras 10. Simplificación de expresiones trigonométricas 11. Coordenadas polares y cartesianas	teoremas básicos (teorema de Pitágoras y Tales). • Introducción a las razones trigonométricas.	

En el tema 8 del libro de texto, presenta los siguientes subtemas:

- Concepto de identidad trigonométrica.
- Identidades pitagóricas.
- Identidades de cociente.
- Identidades recíprocas.

Este texto ubica las identidades trigonométricas en el pensamiento variacional, restando importancia a los pensamientos espacial y métrico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático.

A pesar que el texto ubica las identidades trigonométricas en el pensamiento variacional, se desconoce la definición de los lineamientos en este, en la manera como desarrollan el tema, pues sólo usan la gráfica como algo meramente ilustrativo y se centra sólo en procesos algebraicos, sin embargo, es importante mencionar que en las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) (lineamientos y estándares) no hay una claridad respecto a la enseñanza de la trigonometría (y por supuesto, de las ITF). En ninguno de estos documentos se presentan algunas orientaciones específicas al respecto.

Fiallo (2010, p.51) resalta la importancia del papel que juega la geometría en la enseñanza de la trigonometría, fundamentándose en Laborde y otros (2006) y en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003). Menciona Fiallo (2010) que “Las representaciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano pueden servir para conectar la geometría y el álgebra”.

Por lo anterior, se entiende entonces que al trabajar las identidades trigonométricas, no se pretende sólo llevar a cabo una serie de procedimientos que lleven de una expresión a otra, sino que se debe apuntar al desarrollo del pensamiento matemático, la generalización y los procesos deductivos del estudiante, a través del uso de múltiples representaciones donde la geometría puede ser la articuladora de este proceso.

2.3.4. GeoGebra como medio

En la TSD, el *medio* es considerando como un sistema autónomo, antagonista del estudiante y quien le "responde" de acuerdo con algunas reglas, lo que indica que la relación entre este y el alumno, se explica a partir del concepto de situación *a didáctica*.

En el nivel en que se encuentran los estudiantes que hacen parte de este proceso de sistematización, es decir, donde las diferentes representaciones que puedan utilizar son más complejas, se hace necesario la metrización, lo que implica procesos más cuantitativos que cualitativos, haciendo aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos[17] (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Para lograr la construcción de estos pensamientos, se puede trabajar "la resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones de variación y cambio a través de diferentes sistemas de representación […]" (Fiallo & Parada, 2014, p. 60). Según el Ministerio de Educación Nacional (2004), esto se puede lograr a partir de la representación de simulaciones o mediante la producción de simulaciones a partir de las representaciones.

Fiallo y Parada (2014), argumentando su postura en diferentes proyectos y programas académicos, sugieren proponer problemas que permitan el cambio de una representación a otra haciendo énfasis en las conexiones, siendo el uso de las tecnologías digitales la herramienta idónea para tal fin, por lo que GeoGebra se convierte en el *medio*[18] con el cual el estudiante actuará en la presente investigación.

[17] Por ejemplo, la relación de la medida de un ángulo central y de los lados que lo subtienden.
[18] Entendido este término desde el concepto que se da en la TSD.

Esta decisión de elegir el AGD GeoGebra como el *medio*, viene sustentado, además de lo anterior, por la identificación que se tiene con estos dos investigadores que consideran este software de Geometría dinámica como "una herramienta poderosa, dado que se constituye en un laboratorio de experimentación, análisis, conjeturación, comprobación y conexión de las diferentes representaciones" (Fiallo & Parada, 2014, p. 61). Por lo tanto, según el diseño de las tareas, el AGD puede darle al estudiante las retroacciones necesarias, permitiéndole hacer conversiones y tratamientos entre diferentes representaciones, direccionando el trabajo hacia la obtención del objetivo general propuesto en esta investigación.

Según su creador, "GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo" (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009), ofreciendo múltiples representaciones de los objetos matemáticos: gráfica, algebraica y en una hoja de cálculo, por lo que es un sistema dotado de diferentes herramientas que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas se vuelven potentes. Particularmente, en este trabajo, dos de estas herramientas son el arrastre y la medida (que se apoyará con la hoja de cálculo) que se puede establecer en los diferentes vectores y ángulos de las construcciones y serán clave para dirigir al estudiante hacia lo propuesto en los objetivos.

De acuerdo con lo descrito en la dimensión didáctica, se concluye que:

1) La TSD es la teoría que orienta el diseño de las tareas, pues está en coherencia con los objetivos de esta sistematización ya que está fundamentada en un modelo constructivista, siendo el aprendizaje un proceso que se da por adaptación a través de interacciones con un *medio* (GeoGebra) en una situación *a-didáctica*, es decir, en una situación donde no hay intervención del profesor.

2) Las consideraciones que llevaron a elegir GeoGebra como *medio* están sustentadas, básicamente, en la disponibilidad libre del software y en el dinamismo que este AGD permite, lo que contribuye a las retroacciones que les brindará a los estudiantes, necesarias para construir el conocimiento en una situación *a-didáctica*.

3) Teniendo en cuenta que en los documentos del Ministerio de Educación Nacional no se evidencia orientaciones específicas sobre la enseñanza de la trigonometría, ni mucho menos sobre la enseñanza de las ITF y ateniendo a esa necesidad de dar "un salto" de enseñanza por contenidos a una que propenda por el desarrollo del pensamiento matemático, se propone una articulación de pensamientos para el estudio de esta rama de las matemáticas, específicamente de las ITF.

Esta visión, por supuesto, no resta importancia a los contenidos pues estos, como las ITF, son una excusa para desarrollar dicho pensamiento. En este sentido, Duval (1999) expone con respecto a los registros de representación que:

> El reto de la enseñanza para la formación inicial (educación básica o media) no es tanto en la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino, a través de ellos, el desarrollo de las capacidades de pensamiento del niño o del preadolescente. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir no solamente en la escuela sino después de ella. […] (p. 63).

Capítulo 3: Metodología

En este capítulo se presentan los aspectos relacionados con la metodología de micro – ingeniería didáctica donde se relaciona la concepción, el diseño y el análisis de la secuencia didáctica, en los siguientes apartes: 1. Consideraciones metodológicas, 2. El diseño y análisis *a priori* de las tareas, donde se reflejan los análisis preliminares en el diseño. Se presentan las selecciones generales de las tareas como las hipótesis del diseño y las variables micro-didácticas, 4. La fase experimental donde se puso en acto las tareas diseñadas y 5. Las unidades de análisis, donde se presentan los resultados obtenidos y los análisis *a posteriori.*

3.1. Consideraciones metodológicas: la micro-ingeniería didáctica

La *ingeniería didáctica* es la metodología de investigación e instrumento para la concepción, diseño, realización, observación y análisis de secuencias didácticas, a partir de un estudio de caso. Su nombre hace referencia a la labor del investigador que hace uso de herramientas profesionales, al igual que un ingeniero, para producir dichos productos (problemas), siendo alguna de estas herramientas: la epistemología e historia del objeto matemático, la trasposición didáctica que se ha hecho de este, obstáculos y errores de los alumnos, entre otros; permitiendo una génesis artificial de saber (Chamorro, 2003).

Una característica fundamental de la ingeniería didáctica es la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, distinguiéndose dos niveles: micro-ingeniería y macro-ingeniería (Artigue, 1995). En esta sistematización docente, se llevará a cabo una *micro – ingeniería,* pues esta hace referencia a un estudio de tipo local de amplitud limitada (contrario a la *macro – ingeniería*), siendo las ITF, su construcción y comprensión, el foco del presente trabajo.

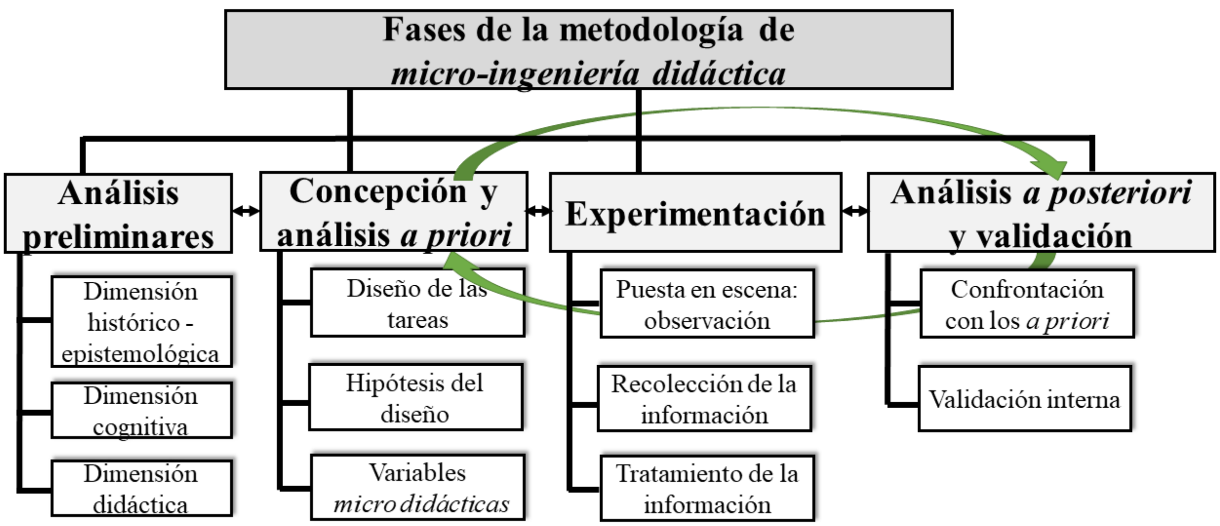
A la luz de esta metodología (Artigue, 1995), se distinguen cuatro fases: 1. Análisis preliminar, 2. Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas, 3. Experimentación y 4. Análisis *a posteriori* y validación.

En la primera fase se analizan tres dimensiones, las cuales fueron presentadas en el capítulo 2. Con este análisis, se procedió con las otras tres fases, las cuales se presentan en este capítulo.

En la Figura 10, se muestran las fases de la metodología:

Figura 10

Fases de la Metodología de micro-ingeniería didáctica



3.2. Concepción y Análisis *a priori* de las Situaciones Didácticas

Se han diseñado tres tareas que obedecen al objetivo general del presente trabajo de sistematización. Los estudiantes interactuarán con algunas construcciones geométricas que han sido tomadas y adaptadas del artículo de Gutiérrez & Fiallo (2009) y de la tesis doctoral de Fiallo (2010).

Cada tarea está diseñada con tres fases:

Fase 1: de acción.

Fase 2: de formulación.

Fase 3: de validación e institucionalización

A continuación se presentan las tres tareas y su respectivo enlace de la construcción geométrica en GeoGebra:

Construcción geométrica "Tarea 1": https://www.geogebra.org/m/jrksm3ug

Tabla 8

Tarea 1

Tarea 1
Identidades recíprocas.

Fase 1: Situación de acción. ***Interactúe con la construcción geométricamente.***

Las razones trigonométricas se pueden construir geométricamente en un círculo unitario donde se pueden determinar de manera aproximada, para ángulos entre 0° y 360°

Dado un círculo goniométrico, se construyen algunos vectores que tienen las siguientes características:

- Si el vector apunta hacia la derecha, hacia arriba o hacia el exterior de la circunferencia, su valor es positivo.
- Si el vector apunta hacia la izquierda, hacia abajo o hacia el interior de la circunferencia (termina en el centro de esta), su valor es negativo.

1) Abra el archivo ***"Tarea 1".*** Arrastre el punto B y observe lo que sucede. A continuación:

1a) Determine el signo de cada vector (diferenciándolos por color y nombre) en cada cuadrante del plano cartesiano:

Color del vector	Nombre	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV.

Puedes observar cómo cambia el ángulo central y la medida de cada vector. Explica:

1b). Cuando arrastras el punto B, ¿Qué cambios se presentan en el vector $\overrightarrow{CD}$ cada vez que cambia la medida del ángulo central?

1c). ¿Qué sucede con este vector cuando se sobrepone el punto B sobre el punto E y sobre E'? Explica. ¿Cuántos grados mide el ángulo central en cada una de estas posiciones?

2). Encuentra la longitud de cada vector y registra los datos en la siguiente tabla, asociando los colores similares. Arrastrando el punto B, regístralos 3 veces:

	Longitud del vector.			
Nombre del vector	**Dato 1**	**Dato 2**	**Dato 3**	**Dato 4**

¿Qué relación hay entre las medidas de los vectores asociados (en cada columna)?

Fase 2: Situación de formulación. *Reflexione y formule*.

1) Abra la hoja de cálculo de GeoGebra (vista – hoja de cálculo) y digite los datos de la segunda fila:

Ángulo	Medida $\overline{OB}$ (hipotenusa)	Medida $\overline{AB}$	Medida $\overline{OA}$	Medida $\overline{CD}$	Medida $\overline{EF}$	Medida $\overline{OD}$	Medida $\overline{OF}$

Al arrastrar el punto B puedes observar cómo cambian los valores en la segunda fila.

-Analiza y contrasta las ideas que explicaste en la fase **1** con lo que estás observando en la tabla. Con el uso de la calculadora, realiza diferentes operaciones básicas entre los vectores asociados (por color) y encuentra la relación entre sus medidas. ¿Puedes escribirlos como una expresión matemática?

2). En la construcción geométrica, se visualizan triángulos rectángulos en los cuales uno de sus ángulos agudos es **α (**el ángulo central). Si determinas las razones trigonométricas de **α** en el triángulo AOB ¿Con qué vector de la tabla anterior están relacionados? Explica

3). ¿Con qué razones trigonométricas se pueden relacionar los otros vectores? Explica

4). Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

Fase 3: Situación de validación.

1). Teniendo en cuenta lo expresado en **la fase 2,** expresa matemáticamente igualdades entre los 6 vectores (asociando sus colores) y luego reemplaza el nombre de cada vector por la razón trigonométrica correspondiente.

2) Explique al profesor y compañeros dichas expresiones.

Construcción geométrica "Tarea 2": geoe

Tabla 9

Tarea 2

Tarea 2.
Identidad trigonométrica fundamental

Fase 1: Situación de acción. ***Interactúe con la construcción geométricamente.***

Dado un círculo de radio $\boldsymbol{r}$, se construyen vectores y algunos polígonos. Abra el archivo ***"Tarea 2"*** y observe.

Escriba algunas características de la construcción, por ejemplo:

1) Mida la longitud de los vectores que conforman el triángulo. ¿puedes determinar alguna relación entre estas medidas? Explica (si encuentra alguna relación, arrastra el punto $\boldsymbol{B}$ y verifica que lo que planteaste se cumple para cualquier valor del ángulo. Si no es así, reformula).

2) ¿Qué teorema se cumple en la construcción? ¿Cuál es la fórmula de este Teorema?

3) ¿Qué relación hay entre las áreas de los 3 cuadrados? Justifica.

4) Teniendo en cuenta la "Tarea 1", ¿Qué razones trigonométricas están en juego en esta construcción? Justifica.

Fase 2: Situación de formulación. ***Reflexione y formule.***

Por ser este un triángulo rectángulo y tener un ángulo en posición normal, se presentan algunas relaciones entre las medidas de sus lados. Al desplegar la hoja de cálculo de GeoGebra, encuentras unos datos relacionados con dichas medidas.

1) Toma las medidas de los lados del triángulo usando la herramienta "Distancia o Longitud".
Dando doble clic o colocando el cursor en las celdas **C2, D2, E2** se puede ver cómo se obtienen los valores de estas. Arrastrando el punto $\boldsymbol{B}$, se comprueba que se cumple para cualquier valor del ángulo. ¿Qué relación hay entre los valores de las celdas y la medida de los lados del triángulo? Explica.

2) Arrastra el punto $\boldsymbol{B}$ y observa los cambios en los valores de las celdas **C2, D2 y E2**. Registra los datos en una tabla.
¿Qué relación hay entre estos valores y el radio del círculo? ¿Por qué se presenta esta relación? Explica.

3) A partir de las medidas de los lados del triángulo se puede obtener los valores de las celdas **A8 y B8,** pero también con los valores de las celdas **C2, D2 y E2.** Explica cada procedimiento y comprueba si es correcto arrastrando el punto $\boldsymbol{B}$ y haciéndolo con otros valores.

4) Encuentra qué relación hay entre el radio $\boldsymbol{r}$ y entre $\boldsymbol{r \cdot sen\,\theta}$ y $\boldsymbol{r \cdot cos\,\theta}$, utilizando toda la información disponible en el gráfico y la hoja de cálculo, además de lo que respondiste en las preguntas 2 y 4 de la fase 1. Es posible que requieras factorizar por medio del caso de "factor común".

5) Teniendo en cuenta lo que explicas en el punto 4 de la **situación 1** y en la **situación 2**, se puede representar esto de manera más general, siempre que se cumpla para cualquier valor del ángulo central.

La forma general es una igualdad matemática. ¿Cuál podría ser dicha representación? Escríbela según lo expresado en el punto anterior**.** También se puede apoyar con una operación entre las celdas A8 y B8: sin

<table>
<tr><td>
importar el valor del ángulo, ¿a qué es igual esta operación? Escribe su expresión en términos de las razones trigonométricas involucradas.

Fase 3: Situación de validación.
1) Comprueba si lo que plateaste en el punto 5 de la fase 2, efectivamente se cumple para cualquier valor del ángulo (con el arrastre del punto $\boldsymbol{B}$. Si no es así, reformule).

2) Despejando las razones trigonométricas (una a la vez) en la expresión matemática anterior, se pueden obtener otras a partir de esta. Realiza esta operación y escríbela en la tabla.

Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto $\boldsymbol{B}$. Siempre tenga en cuenta el valor del ángulo $\boldsymbol{\theta}$. Recuerda que todo debe estar en términos de las razones trigonométricas involucradas.
<table>
<tr><th>Expresión original</th><th>Despeje de cada razón.</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

3) Explica tus conclusiones con tus propias palabras a tus compañeros y profesor.
</td></tr>
</table>

Construcción geométrica “Tarea 3”: https://www.geogebra.org/m/rmerqb5c

Tabla 10

Tarea 3

<table>
<tr><th>Tarea 3.</th></tr>
<tr><th>Otras Identidades Trigonométricas Fundamentales.</th></tr>
<tr><td>
Fase 1: Situación de acción. Interactúe con la construcción geométrica –defina algunos elementos.
Abra el archivo “Tarea 3”.
En esta construcción se encuentran un círculo unitario y algunos triángulos rectángulos donde se involucran las seis (6) razones trigonométricas.

1). Identifica los triángulos rectángulos (exceptuando el que se observó en la tarea 2). Escribe el nombre de cada uno (usando las letras de los vértices) y determine el ángulo de 90°. Puedes ayudarte con la herramienta “Polígono” para resaltarlos.

2). Escribe cuáles razones trigonométricas consideras que están involucradas en cada uno de los triángulos y define los catetos y la hipotenusa de cada uno.

Arrastra el punto B a cada uno de los cuadrantes. Comprueba si los triángulos que identificaste siguen siendo rectángulos (ten en cuenta los vértices). Si no es así, inicia nuevamente en el punto 1 hasta que selecciones los triángulos que son rectángulos sin importar el cuadrante en el que se encuentre.

Fase 2: Situación de formulación. Reflexione y formule.
</td></tr>
</table>

Por ser triángulos rectángulos y teniendo en cuenta su construcción, se cumplen ciertas relaciones entre sus lados, debido esto al Teorema de Pitágoras.

1). Con la herramienta "Distancia o Longitud" mide los lados de cada triángulo resaltado.
Indica dichas relaciones (en cada triángulo). Escríbelas.

2). Arrastra nuevamente el punto ***B*** e indica si las relaciones se conservan o no. Reformula hasta que encuentre la expresión que se cumple para cada valor del ángulo.

3) Teniendo en cuenta estas relaciones entre los lados de cada triángulo, se puede formular de manera más general a través de una expresión matemática.
Formula esta expresión matemática para cada triángulo, que represente la relación encontrada, reemplazando el vector por la razón trigonométrica involucrada.

Fase 3: Situación de validación.

1). En la siguiente tabla, escribe las expresiones matemáticas con las razones trigonométricas involucradas en cada triángulo según lo realizado en el punto 3 de la **fase 2.** Verifica si esto es verdadero para cualquier valor del ángulo, así que arrastra el punto ***B*** y reemplaza el ángulo en la expresión. Reformula en caso de que no sea igual.

Triángulo	**Expresión matemática planteada.**

2). Despeja la razón trigonométrica en cada expresión matemática con el objetivo de obtener otras (Si hay más de una razón trigonométrica involucrada, primero despeja una y después la otra).
En la tabla, escribe las fórmulas de las nuevas expresiones. Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto ***B*** y reemplazando el ángulo en la expresión. Si no es así, reformula.

Triángulo	**Expresión matemática**	**Otras expresiones**

3). Explica tus conclusiones a tus compañeros y profesor.

Teniendo en cuenta el objetivo específico dos de este trabajo, se fundamentará este análisis en la teoría de las representaciones desde la cual Hitt (2003) hace énfasis en el uso de la tecnología digital, donde la visualización matemática está ligada estrechamente. En Hitt, Páez & Guzmán (2001) y Hitt (2003), se resalta la importancia de la Teoría de los Registros Semióticos de Representación de Duval.

Hitt et al. (2001) proponen una posición teórica en la construcción de conceptos matemáticos, donde se describen cinco categorías, de las cuales se han considerado las cuatro primeras de ellas para el diseño de las tareas. Estas categorías permitirán analizar el proceso de visualización matemática, donde los estudiantes deben reconocer los elementos del sistema semiótico **(R),** hacer tratamientos o transformaciones internas **(T↑),** conversiones **(C→)** y coordinación entre registros **(C↔)**[19]. En la siguiente Tabla, se muestran las categorías con las preguntas de cada tarea asociadas a cada una:

Tabla 11

Matriz de Análisis de las tareas.

Categoría	**Descripción.**	**Fases:** preguntas asociadas a cada categoría.		
		Tarea 1	**Tarea 2**	**Tarea 3**
A: **(R)**	Reconocimiento de los elementos de un sistema semiótico: reconoce los elementos de un sistema semiótico de la representación en relación con un objeto matemático.	**Fase 1:** 1, 2. **Fase 2:**1, 2, 3.	**Fase 1:** 1, 2, 3. **Fase 2**: 1, 2, 3.	**Fase 1:** 1, 2. **Fase 2:** 1. **Fase 3:** 2.
B: **(T↑)**	Transformaciones internas a un sistema semiótico: procesa las actividades de un sistema de representación en el mismo registro (tratamiento)	**Fase 1:** 2. **Fase 2:** 1, 2, 3, 4. **Fase 3:** 1.	**Fase 1:** 1, 4 **Fase 2:** 3, 4, 5. **Fase 3:** 1, 2.	**Fase 2:** 1, 3 **Fase 3:** 1, 2.
C: **(C→)**	Conversiones de una representación de un sistema semiótico a otro: realiza conversiones de un sistema semiótico a otro (cambio de registro)	**Fase 1:** 1, 2. **Fase 2:** 1, 2, 3. **Fase 3:** 1.	**Fase 1:** 1, 2, 3, 4. **Fase 2:** 1, 2, 3 **Fase 3:** 3.	**Fase 1:** 2 **Fase 2:** 1
D: **(C↔)**	Coordinación de representaciones entre diferentes sistemas: manipula representaciones de un sistema semiótico a otro (articulación entre las representaciones, y un sistema semiótico a otro).	**Fase 3:** 1, 2	**Fase 2:** 3. **Fase 3:** 1, 2, 3.	**Fase 3:** 2, 3

Nota. Adaptado de Hitt et al. (2001)

En las tareas se distinguen los siguientes registros de representación: Gráfico **(G),** Algebraico o analítico **(A),** Tabular **(T)** y Verbal **(V).** En la Tabla 12, se explican los reconocimientos, tratamientos, conversiones y coordinaciones de registros que se prevé o se espera que el estudiante

[19] Esta nomenclatura es tomada del trabajo de Adame (2017)

haga, es decir, las transformaciones completas de las representaciones en cada tarea, fase y pregunta. La letra escrita en forma de subíndice indica el registro de representación. Las flechas indican el paso de una pregunta a otra o el proceso que debería hacer el estudiante dentro de la misma pregunta según sea el caso. Algunas conversiones no están especificadas, pues estas están implícitas en la coordinación del registro, sólo que en la pregunta no se pide de manera explícita tal transformación:

Tabla 12

Reconocimientos y Transformaciones de las Representaciones Completas o Ideales en las Tareas

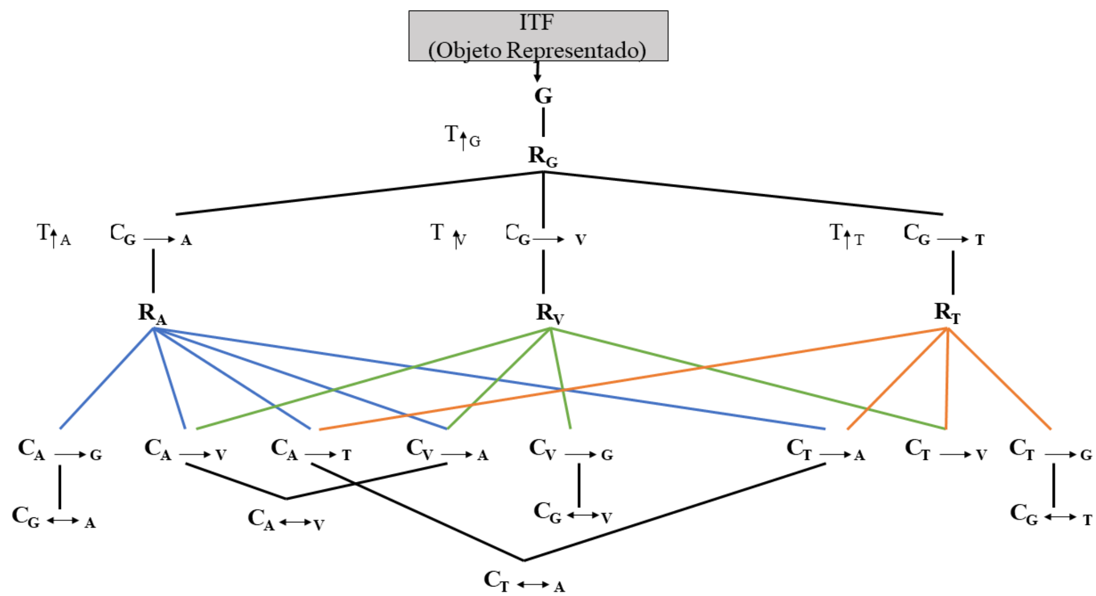
		pregunta (**Categoría** $_{\text{registro de representación}}$)
Tarea 1	**Fase 1**	1 $(\mathbf{R}_{G})$ →1b,1c $(\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$ 2 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow T})$ →2$(\mathbf{R}_{T})$ →2$(\mathbf{T}\uparrow_{T})$
	Fase 2	1 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow T})$ → 1 $(\mathbf{R}_{T})$ → 1 $(\mathbf{T}\uparrow_{T})$ → 2,3 $(\mathbf{C}_{T\rightarrow A})$ → 2, 3 $(\mathbf{R}_{A})$ → 2, 3 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 4$(\mathbf{T}\uparrow_{A})$
	Fase 3	1 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 1, 2 $(\mathbf{C}_{G\leftrightarrow A})$
Tarea 2	**Fase 1**	1 $(\mathbf{R}_{G})$ → 1$(\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$ → 2, 4 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow A})$ → 1, 4 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ ↓ 3 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$
	Fase 2	1 $(\mathbf{R}_{G})$ → 2 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$ → 3$(\mathbf{C}_{G\rightarrow A})$ →3 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 3$(\mathbf{C}_{G\leftrightarrow T})$ $(\mathbf{C}_{T\leftrightarrow A})$ $(\mathbf{C}_{A\leftrightarrow G})$ → 5 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ ↓ 4$(\mathbf{T}\uparrow_{A})$
	Fase 3	1 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 1 $(\mathbf{C}_{A\leftrightarrow G})$ 2 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 2 $(\mathbf{C}_{A\leftrightarrow T})$ $(\mathbf{C}_{T\leftrightarrow G})$ $(\mathbf{C}_{G\leftrightarrow A})$ → 3$(\mathbf{C}_{G,\,A,\,T\rightarrow V})$ → 3 $(\mathbf{C}_{V\leftrightarrow G,\,A,\,T})$
Tarea 3	**Fase 1**	1, 2 $(\mathbf{R}_{G})$ → 2 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$
	Fase 2	1 $(\mathbf{C}_{G\rightarrow A})$ → 1 $(\mathbf{R}_{A})$ → 1 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$ → 3 $(\mathbf{T}\uparrow_{A})$

	Fase 3	$1\ (\mathbf{T}{\uparrow}_{A}) \rightarrow 2\ (\mathbf{T}{\uparrow}_{A}) \rightarrow 2, 3\ (\mathbf{C}_{A\leftrightarrow G})$ $\downarrow$ $2\ (\mathbf{R}_{A})$

Si bien, en la Tabla 12 se muestran unas transformaciones esperadas en cada tarea y fase, estas se pueden organizar en una sola red de representación, en tanto que los objetivos de las tareas es construir las ITF (recíprocas y Pitagóricas). Por lo que la Tabla 12 se complementa con las categorías de la triangulación (explicadas en el análisis de resultados) en la siguiente red que se espera, logren realizar los estudiantes:

Figura 11

Red de Representación Ideal o Completa de las Actividades



La red inicia en registro Gráfico **(G),** donde el estudiante debe hacer un reconocimiento de este **($\mathbf{R}_G$),** en las tres tareas debe hacer conversiones del registro gráfico a los otro tres: Algebraico **(A)**, Verbal **(V)** y Tabular **(T).** En cada uno de estos registros, debe reconocer sus elementos **($\mathbf{R}_A$), ($\mathbf{R}_V$),** (**$\mathbf{R}_T$**) y luego hacer conversión **(C→)** (líneas azules, verdes y naranjas) entre unos y otros para poder coordinarlos. Nótese que en cada registro se indica el tratamiento **(T↑).** Finalmente aparecen las coordinaciones **(C↔).**

El diseño de las tareas se orientó desde los análisis preliminares realizados en la primera fase. En la siguiente Tabla se relaciona el aporte de cada dimensión al diseño:

Tabla 13

Aportes del Análisis Preliminar al Diseño de las Tareas

Desde la dimensión Histórica-epistemológica.	**Desde la dimensión cognitiva**	**Desde la dimensión Didáctica**
La geometría del círculo es la base de la construcción y comprensión de las identidades trigonométricas fundamentales.	El proceso cognitivo de visualización matemática es fundamental para construir y comprender las Identidades Trigonométricas, pues se hace uso de un AGD. El cambio de registro, partiendo del gráfico a otros y luego haciendo una coordinación, se hace fundamental en este proceso. Así mismo, juega un papel fundamental los conocimientos previos de los estudiantes.	Las Identidades Trigonométricas se construyen desde un ambiente dinámico saliéndose de esos espacios estáticos tan comunes en la enseñanza de la trigonometría, atendiendo al desarrollo histórico de este objeto y dando un tratamiento diferente al que presentan los libros de texto. La herramienta arrastre y hoja de cálculo del AGD propician dicho dinamismo. Esto permite el uso de múltiples representaciones de las ITF.

3.2.1. Análisis a priori

A continuación se presenta una descripción de las tres tareas con sus análisis *a priori*, las hipótesis del diseño y las variables micro-didácticas.

3.2.1.1. Tarea 1: Identidades trigonométricas recíprocas.

Medio: AGD GeoGebra.

Objetivos: Construir y comprender las identidades trigonométricas recíprocas visualizándolas a través de la geometría en el círculo.

Descripción de la tarea 1:

Se pretende que el estudiante realice un proceso de construcción de las razones trigonométricas en GeoGebra, de tal manera que tenga una compresión de estas desde un enfoque geométrico (*génesis artificial*). En esta tarea, es indispensable que asigne a cada vector, una razón; esto para que pueda determinar las relaciones entre ellos y pueda inferir las identidades recíprocas.

Conocimientos previos: se hace necesario que los estudiantes hayan sido instrumentalizados en el uso de GeoGebra, además de algunos objetos matemáticos como el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, razones y proporciones, clasificación de ángulos, la circunferencia y el círculo y algunos de sus elementos (radio, cuerda, arco, recta tangente y secante), rectas paralelas y perpendiculares.

La tarea 1 de acuerdo con el análisis preliminar:

Análisis *a priori*.

1) De manera general:

a) Como se pudo evidenciar en el análisis cognitivo, las dificultades con ciertas equivalencias, como por ejemplo $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{AB}} = \overline{OD}$ = cosecante o $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\alpha}$= csc$\alpha$, se pueden presentar en los estudiantes, principalmente al hacer el cambio de registro, ya que ellos pueden creer que $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\alpha}$= sen$\alpha$. Sin embargo, se espera ir superando este error, obstáculo epistemológico, con la construcción geométrica.

b) La visualización matemática es un proceso cognitivo que no se ha fortalecido en la escuela, tal como lo menciona Presmeg (1986):

> “El Currículum escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de los resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y en la mayoría de los salones de clase la enseñanza enfatiza los métodos no visuales” (citado en Hitt, 1998, p. 29).

Por lo anterior, se espera que la formación de imágenes y el uso de estas para la construcción del conocimiento matemático, sea un proceso lento por parte de los estudiantes. Esto puede afectar sus construcciones y comprensiones. Se prevé ciertas dificultades al interactuar con la construcción “Tarea 1” en tanto que esta es compleja por la cantidad de vectores que presenta (obstáculo didáctico).

c) Es posible que los estudiantes presenten ciertas dificultades en los conocimientos previos descritos anteriormente, esto puede afectar las conclusiones a las que puedan llegar con la construcción geométrica (obstáculo epistemológico).

2) De manera particular:

Comportamientos previstos de acuerdo con la matriz de análisis:

Fase 1: *Situación de acción.*

A continuación, se presenta una posible solución de la tarea 1 //fase 1. Se considera que el estudiante se encuentre en cada categoría de acuerdo con sus respuestas según la Tabla 11.

Tabla 14

Tarea 1. Solución Fase 1

Tarea 1
Identidades recíprocas.
Fase 1: Situación de acción. *Interactúe con la construcción geométricamente.* Las razones trigonométricas se pueden construir geométricamente en un círculo unitario donde se pueden determinar de manera aproximada, para ángulos entre 0° y 360° Dado un círculo goniométrico, se construyen algunos vectores que tienen las siguientes características: - Si el vector apunta hacia la derecha, hacia arriba o hacia el exterior de la circunferencia, su valor es positivo. - Si el vector apunta hacia la izquierda, hacia abajo o hacia el interior de la circunferencia (termina en el centro de esta), su valor es negativo. **1)** Abra el archivo ***“Tarea 1”.*** Arrastre el punto B y observe lo que sucede. A continuación: **1a)** Determine el signo de cada vector (diferenciándolos por color y nombre) en cada cuadrante del plano cartesiano:

Color del vector	Nombre	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV.

Azul oscuro	$\overrightarrow{AB}$	+	+	-	-
Rojo	$\overrightarrow{OA}$	+	-	-	+
Verde oscuro	$\overrightarrow{CD}$	+	-	+	-
Verde claro	$\overrightarrow{EF}$	+	-	+	-
Fucsia	$\overrightarrow{OD}$	+	-	-	+
Azul claro	$\overrightarrow{OF}$	+	+	-	-

Puedes observar cómo cambia el ángulo central y la medida de cada vector. Explica:

1b). Cuando arrastras el punto B, ¿Qué cambios se presentan en el vector $\overrightarrow{CD}$ cada vez que cambia la medida del ángulo central?

En el primer cuadrante, a medida que aumenta el valor del ángulo central también aumenta la longitud del vector $\overrightarrow{CD}$. En el segundo cuadrante sucede lo contrario: pues a medida que aumenta el valor del ángulo central, disminuye la longitud del vector. En el tercer cuadrante sucede lo mismo que en el primero y en el cuarto cuadrante sucede lo mismo que en el segundo.

1c). ¿Qué sucede con este vector cuando se sobrepone el punto B sobre el punto E y sobre E'? Explica. ¿Cuántos grados mide el ángulo central en cada una de estas posiciones?

Cuando se sobrepone el punto B sobre los puntos E y E', el vector $\overrightarrow{CD}$ se extiende infinitamente, su distancia o longitud no se puede determinar. En el punto E el ángulo mide 90° y en el punto E' mide 270°

2). Encuentra la longitud de cada vector y registra los datos en la siguiente tabla, asociando los colores similares. Arrastrando el punto B, regístralos 3 veces:

	Longitud del vector.			
Nombre del vector	**Dato 1**	**Dato 2**	**Dato 3**	**Dato 4**
$\overrightarrow{AB}$	**0.81**	**0.99**	**0.46**	**0.35**
$\overrightarrow{OF}$	**1.23**	**1.00**	**2.13**	**2.81**
$\overrightarrow{OA}$	**0.58**	**0.12**	**0.88**	**0.93**
$\overrightarrow{OD}$	**1.71**	**8.19**	**1.13**	**1.06**
$\overrightarrow{CD}$	**1.39**	**8.13**	**0.53**	**0.37**
$\overrightarrow{EF}$	**0.71**	**0.12**	**1.88**	**2.63**

¿Qué relación hay entre las medidas de los vectores asociados (en cada columna)?

En los dos primeros casos la longitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OA}$ siempre están entre 0 y 1, o teniendo en cuenta el cuadrante donde se tome la medida, entre 0 y -1 (es importante tener en cuenta que piden longitudes y las longitudes son positivas)

Una relación importante que se da entre los dos números relacionados es que el segundo es el recíproco del primero, es decir, $\overrightarrow{OF}$ es recíproco de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD}$ de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{EF}$ de $\overrightarrow{CD}$. Esto se determinó, porque al dividir 1 entre el valor del primer vector, da como resultado el segundo vector.

En esta fase, se espera que el estudiante reconozca los elementos del sistema semiótico de la representación geométrica presentada (G) tales como:

- elementos de un sistema de coordenadas cartesianas identificando sus ejes y cuadrantes.

- Círculo goniométrico: identifica la medida del radio.
- Circunferencia y algunos de sus elementos: centro, recta tangente.
- Segmentos orientados (vector) y su signo.
- Ángulo en posición normal y ángulo central.
- Representación decimal de los números Reales.
- Además de estos saberes matemáticos, es indispensable el uso de GeoGebra y algunas de sus herramientas (“Distancia o Longitud”, el arrastre, etc.).

Es importante resaltar que, si el estudiante hace una conversión de registros, debería reconocer los elementos del registro de llegada, por ejemplo: en el Algebraico (A), se espera que reconozca elementos como operaciones, potencias, radicales, etc. Así mismo, con los registros Tabular (representación decimal de los Reales y aproximaciones por defecto y exceso, representación de un vector) y Verbal. También se prevé que el estudiante logre hacer un cambio del registro gráfico al verbal en las preguntas 1b y 1c, explicando por escrito la indeterminación de la Tangente del ángulo central cuando este mide 90°.

Se prevé que en la pregunta 2 el estudiante realice en un primer momento, una conversión, pues deben pasar de un registro Gráfico a otro Tabular donde el uso de los números reales es fundamental. Cuando se encuentren en este registro Tabular, deberán hacer transformaciones internas o tratamientos (operaciones básicas, por ejemplo) para poder encontrar la relación entre los vectores asociados por colores. El arrastre y la medida se hacen necesario en este proceso.

Situación 2: *Situación de formulación.*

Una solución a la tarea 1//fase 2, podría ser la siguiente:

Tabla 15

Tarea 1. Solución Fase 2

Fase 2: Situación de formulación. *Reflexione y formule.*
1) Abra la hoja de cálculo de GeoGebra (vista – hoja de cálculo) y digite los datos de la segunda fila:

Ángulo	Medida $\overline{OB}$ (hipotenusa)	Medida $\overline{AB}$	Medida $\overline{OA}$	Medida $\overline{CD}$	Medida $\overline{EF}$	Medida $\overline{OD}$	Medida $\overline{OF}$
A	OB	AB	OA	CD	EF	OD	OF

Al arrastrar el punto B puedes observar cómo cambian los valores en la segunda fila.

-Analiza y contrasta las ideas que explicaste en la fase **1** con lo que estás observando en la tabla. Con el uso de la calculadora, realiza diferentes operaciones básicas entre los vectores asociados (por color) y encuentra la relación entre sus medidas. ¿Puedes escribirlos como una expresión matemática?

Se debe realizar las siguientes operaciones:

$\frac{\mathbf{1}}{\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OF}}$ $\quad \frac{\mathbf{1}}{\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ $\quad \frac{\mathbf{1}}{\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$

2). En la construcción geométrica, se visualizan triángulos rectángulos en los cuales uno de sus ángulos agudos es **α (**el ángulo central). Si determinas las razones trigonométricas de **α** en el triángulo AOB ¿Con qué vector de la tabla anterior están relacionados? Explica

En el triángulo AOB se marca el ángulo α. Siendo $\hat{A}$ de 90°, $\overline{OB}$ es la hipotenusa cuya longitud es de 1 unidad (por ser un círculo unitario o goniométrico), $\overrightarrow{AB}$ el lado opuesto al ángulo α y $\overrightarrow{OA}$ es el adyacente. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, $\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ y $\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$, se pueden determinar estas razones para el triángulo AOB:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}}{1} = \overrightarrow{AB}$, $\quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}}{1} = \overrightarrow{OA}$, $\quad \tan\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OA}}$, este valor es el mismo que la longitud del vector $\overrightarrow{CD}$.

En conclusión, se tiene que:

$\operatorname{sen}\alpha = \overrightarrow{AB}$ $\qquad \cos\alpha = \overrightarrow{OA}$ $\qquad \tan\alpha = \overrightarrow{CD}$

3). ¿Con qué razones trigonométricas se pueden relacionar los otros vectores? Explica

Teniendo en cuenta lo que se respondió en el punto 2 de la fase 1, en el punto 1 de la fase 2, además de la definición de las otras razones trigonométricas ($\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$; $\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$ y $\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$) los otros vectores se pueden relacionar con las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$\cot\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AB}}$, este valor es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{EF}$; por lo tanto, $\cot\alpha = \overrightarrow{EF}$

$\sec\alpha = \frac{1}{\overrightarrow{OA}}$, este valor es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{OD}$; por lo tanto, $\sec\alpha = \overrightarrow{OD}$

$\csc\alpha = \frac{1}{\overrightarrow{AB}}$, este valor es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{OF}$, por lo tanto, $\csc\alpha = \overrightarrow{OF}$

4). Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

$\operatorname{sen}\alpha = \overrightarrow{AB}$ $\qquad \cos\alpha = \overrightarrow{OA}$ $\qquad \tan\alpha = \overrightarrow{CD}$

$\cot\alpha = \overrightarrow{EF}$ $\qquad \sec\alpha = \overrightarrow{OD}$ $\qquad \csc\alpha = \overrightarrow{OF}$

Estas igualdades se conservan para los valores de α cuando se arrastra el punto B por los cuatro cuadrantes.

En la fase 2, pregunta 1, se espera que el estudiante realice la conversión del registro Gráfico al Tabular (reconociendo los elementos del segundo registro) para después hacer tratamientos en este, según lo que se le pregunta en el segundo ítem. Si el estudiante no logra encontrar la relación específica que se necesita para continuar con el resto de la tarea (pregunta 2 de la fase 1), este segundo ítem es para complementar esta búsqueda. Para dar esta respuesta, se espera que tenga en cuenta el concepto de recíproco de un número, sin embargo, podría presentar un error descrito en el análisis didáctico: considerar, por ejemplo, que las expresiones $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overrightarrow{AB}}{1}$ y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\overrightarrow{AB}}$ son iguales.

En la segunda y tercera pregunta de esta fase, se espera que el estudiante realice una conversión desde lo tabular (apoyado en el gráfico) a la expresión analítica. En este caso, se considera relevante la medida del radio: $r = 1$, sin esta medida, no se podrán determinar directamente las razones y, por consiguiente, las identidades reciprocas. Se prevé que el estudiante haga un tratamiento a las expresiones que ha obtenido, así, por ejemplo, se espera que comprenda que la medida de la hipotenusa (r) permite dividir de tal manera que el vector lo puede relacionar directamente con la razón trigonométrica. Para esto, es importante el uso de la herramienta "Distancia o Longitud". Si el estudiante tiene dificultades con conocimientos previos referentes a "razones trigonométricas en un triángulo rectángulo", podrían no determinar estas relaciones.

En la cuarta pregunta, el estudiante debe hacer un tratamiento que le permita comprobar que su formulación ha sido correcta, esto es fundamental para pasar al proceso de validación. Este tratamiento se hará en el registro algebraico, apoyándose en el gráfico, sin que esto signifique una coordinación de los mismos. Cabe resaltar que cada que pase a un nuevo registro, deberá reconocer los elementos de este, es decir, estar en la categoría A.

Situación 3: ***Situación de validación.***

Una solución a la tarea 1//fase 3, podría ser la siguiente:

Tabla 16

Tarea 1. Solución Fase 3

Fase 3: Situación de validación.
1). Teniendo en cuenta lo expresado en **la fase 2,** expresa matemáticamente igualdades entre los 6 vectores (asociando sus colores) y luego reemplaza el nombre de cada vector por la razón trigonométrica correspondiente. **Teniendo en cuenta lo expresado hasta el momento y por la definición de cada una de las razones trigonométricas, se puede determinar que las que están asociadas por colores, son recíprocas, así, por ejemplo, en $\csc\alpha = \frac{1}{\overrightarrow{AB}}$, se reemplaza $\overrightarrow{AB}$ por su razón correspondiente, el Seno del ángulo, entonces:**
$\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$, de manera similar se hace con la secante del ángulo: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.
En la cotangente del ángulo, se reemplaza $\cot\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AB}}$ por $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$, al dividir estos valores da como resultado la longitud del vector $\overrightarrow{EF}$, como $\tan\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$ (reemplazando) y además al multiplicar los vectores CD y EF, el resultado es 1 (en ocasiones da 0,99…, porque en la hoja de cálculo sólo dan dos cifras decimales, pero este valor se redondea a 1 o si se hace la operación en la hoja de cálculo, da exactamente 1), se concluye que la tangente y la cotangente del ángulo son recíprocas, así que $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
En conclusión:
$\csc\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$ $\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ y de manera análoga, se comprueba que:
$sen\,\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ $\quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$
2) Explique al profesor y compañeros dichas expresiones.

Se espera que, en esta fase, el estudiante realice una coordinación de registros, entre el algebraico y el gráfico, para validar la fase 2 y poder determinar las Identidades Trigonométricas Recíprocas. En el registro algebraico, debe hacer tratamientos para poder pasar de las razones que construyó en la fase 2 a las Identidades que sería la conclusión que se espera de ellos. La coordinación se presenta cuando logra articular el registro gráfico (medida de los vectores con los otros que son recíprocos) y la expresión algebraica, comprendiendo que el registro algebraico es una elección adecuada para generalizar su conclusión.

La segunda parte de esta fase constituye la situación de *institucionalización,* que permitirá escuchar al estudiante para identificar algunas construcciones de su conocimiento que no se puedan comprender desde su producción escrita. En este punto, se espera una conversión de toda su construcción al registro verbal, así mismo, el estudiante podría hacer coordinación de registros en su explicación.

3.2.1.2. Tarea 2: identidad trigonométrica pitagórica fundamental.

Medio: AGD GeoGebra.

Objetivos: Construir y comprender la identidad Pitagórica Fundamental a través del proceso cognitivo de visualización matemática en un AGD y determinar otras a partir de esta.

Descripción de la tarea 2:

Se pretende que el estudiante interactúe con una construcción geométrica en GeoGebra similar a la realizada en la situación 1, con la diferencia que el radio del círculo tiene otra medida. A partir de esta, la hoja de cálculo y haciendo uso de su proceso de visualización matemática, se espera que pueda llegar a concluir que

$$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Conocimientos previos: es importante que el estudiante tenga conocimientos básicos sobre números reales, ecuaciones, factorización, propiedades de potencias y radicales, razones trigonométricas y Teorema de Pitágoras, además del uso de GeoGebra.

3.2.1.3. Tarea 3: otras identidades pitagóricas.

Objetivos: Construir y comprender las otras identidades Pitagóricas básicas a través del proceso cognitivo de visualización matemática en un AGD y determinar otras identidades a partir de estas.

Descripción de la tarea 3:

Se pretende que los estudiantes construyan las otras dos identidades Pitagóricas haciendo uso de una construcción geométrica similar a la que se les presentó en la tarea 1. Deben reconocer en esta construcción, a través del proceso de visualización matemática, dónde se "manifiesta" el teorema de Pitágoras. Por lo tanto, se espera que lleguen a concluir que:

$$\boldsymbol{tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha} \text{ y } \boldsymbol{cot^2\alpha + 1 = csc^2\alpha}$$

Conocimientos previos: es fundamental que los estudiantes comprendan muy bien el teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y ecuaciones.

Como estas ITF tienen similitudes como objetos matemáticos, se prevé unos comportamientos generales comunes en las tareas 2 y 3, por esto, de acuerdo con el análisis preliminar, se presentan estas generalidades en conjunto.

La tarea 2 y 3 de acuerdo con el análisis preliminar:

Análisis *a priori*.

Teniendo en cuenta que los estudiantes deben construir las identidades Pitagóricas básicas y las que se obtienen a partir de estas en las tareas 2 y 3, se hace este análisis de manera conjunta:

1) De manera general:

a) Es posible que los estudiantes presenten ciertas dificultades y errores que se mencionan en el análisis cognitivo. Dichas dificultades pueden estar relacionadas con la factorización, solución de ecuaciones, despeje de variables, aplicación de las propiedades de los radicales y el teorema de Pitágoras (obstáculos epistemológicos).

b) El dinamismo que proporciona GeoGebra puede ser motivador para el estudiante, en tanto que están acostumbrados a trabajar en ambientes estáticos, sin embargo, pueden presentar algunas dificultades ya que deben desarrollar otros procesos de pensamiento como la visualización matemática, aunque se prevé que dichas dificultades sean un poco menores respecto a la “tarea 1”, siempre que hayan logrado comprender esta (obstáculo didáctico).

c) Las construcciones geométricas se trabajan muy poco en clase, por lo que puede tomar desprevenido al estudiante en algunos aspectos importantes, como por ejemplo, la medida del radio del círculo (obstáculo didáctico y epistemológico), ya que esta medida condiciona las posibles soluciones. Así mismo, podría suceder que el estudiante pretenda validar sus procesos y construcciones de conocimientos por medio del profesor, sin tener en cuenta las retroacciones del medio, pues están acostumbrados a ello.

2) De manera particular:

a) Comportamientos previstos en la **tarea 2** de acuerdo con la matriz de análisis:

Fase 1: ***Situación de acción.***

A continuación se presenta una posible solución de la tarea 2 //fase 1. Se presenta el mismo análisis con la matriz:

Tabla 17

Tarea 2. Solución Fase 1

Tarea 2.
Identidad trigonométrica fundamental
Fase 1: **Situación de acción.** ***Interactúe con la construcción geométricamente.*** Dado un círculo de radio $\boldsymbol{r}$, se construyen vectores y algunos polígonos. Abra el archivo ***“Tarea 2”*** y observe. Escriba algunas características de la construcción, por ejemplo: **1)** Mida la longitud de los vectores que conforman el triángulo. ¿Puedes determinar alguna relación entre estas medidas? Explica (si encuentra alguna relación, arrastra el punto $\boldsymbol{B}$ y verifica que lo que planteaste se cumple para cualquier valor del ángulo. Si no es así, reformula). **Al tomar las longitudes, se tiene que $\overrightarrow{OA} = 2,33$, $\overrightarrow{AB}$ = 2,56 y $\overrightarrow{OB}$ = 3,46** **Por ser este un triángulo rectángulo (90° en $\hat{A}$), se cumple que la suma de los cuadrados de $\overrightarrow{OA}$ y de $\overrightarrow{AB}$ es igual al cuadrado de $\overrightarrow{OB}$. Si se arrastra el punto B, esta relación se conserva: $2,33^2 + 2,56^2 = 3,46^2$**

2) ¿Qué teorema se cumple en la construcción? ¿Cuál es la fórmula de este Teorema?

Se cumple el Teorema de Pitágoras. Su Fórmula es: $h^2 = a^2 + b^2$, siendo h la hipotenusa ($\overrightarrow{OB}$), a y b los catetos ($\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$ respectivamente).

3) ¿Qué relación hay entre las áreas de los 3 cuadrados? Justifica.

Al tomar el área de cada cuadrado con la herramienta "Área" y al sumar el área de los dos cuadrados pequeños, da como resultado el área del cuadrado grande. Esto se da porque se cumple el Teorema de Pitágoras.

4) Teniendo en cuenta la "Tarea 1", ¿Qué razones trigonométricas están en juego en esta construcción? Justifica.

En esta construcción, están en juego las razones trigonométricas seno ($\overrightarrow{AB}$) y coseno ($\overrightarrow{OA}$), sin embargo, se debe tener en cuenta que el radio es diferente de 1. En esta construcción, la hipotenusa no es 1 como en la "Tarea 1", sino 3,46 por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overrightarrow{AB}}{3{,}46} \ \text{ y } \ \cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}}{3{,}46}$$

Se espera que los estudiantes tengan una menor dificultad en la categoría A de la matriz de análisis, es decir, que reconozcan los elementos del sistema semiótico. En este punto en particular, se prevé que puedan reconocer las líneas trigonométricas sin dificultades, pues esto se trabajó en la "tarea 1", además, de acuerdo con sus conocimientos previos, se espera que reconozcan ángulos rectos y triángulos rectángulos y puedan determinar el Teorema de Pitágoras, pues en la construcción se muestra una prueba de este de manera gráfica. Así, se prevé que logren realizar una conversión del registro Gráfico al Algebraico, en las preguntas o ítems 1, 2 y 4, haciendo un tratamiento algebraico en los ítems 1 y 4, y una conversión del registro gráfico al Verbal en la pregunta 3.

A pesar del avance que el estudiante pudiere lograr en las anteriores preguntas, se espera una mayor dificultad al hacer una conversión de registro pasando del Gráfico al Algebraico. Esto se puede presentar, pues según lo expuesto en el análisis didáctico, los estudiantes le podrían restar importancia a la medida del círculo y considerar este como si fuese goniométrico, por lo pueden concluir que sen $\theta = \overline{AB}$ y $\cos\theta = \overline{OA}$.

Situación 2: ***Situación de formulación.***

Una solución a la tarea 2//fase 2, podría ser la siguiente:

Tabla 18

Tarea 2. Solución Fase 2

Fase 2: Situación de formulación. *Reflexione y formule.*

Por ser este un triángulo rectángulo y tener un ángulo en posición normal, se presentan algunas relaciones entre las medidas de sus lados. Al desplegar la hoja de cálculo de GeoGebra, encuentras unos datos relacionados con dichas medidas.

1) Toma las medidas de los lados del triángulo usando la herramienta "Distancia o Longitud". Dando doble clic o colocando el cursor en las celdas **C2, D2, E2** se puede ver cómo se obtienen los valores de estas. Arrastrando el punto B, se comprueba que se cumple para cualquier valor del ángulo. ¿Qué relación hay entre los valores de las celdas y la medida de los lados del triángulo? Explica.

Si nuevamente se toman las longitudes o se hace que estas cambien por medio de arrastre, se tiene que:
$\overrightarrow{AB}$ **= 2,93**
$\overrightarrow{OA}$ **= 1,84**
$\overrightarrow{OB}$ **= 3,46**

Loa valores de las celdas son los cuadrados de los lados del triángulo:
La celda C2 es el cuadrado de $\overrightarrow{AB}$
La celda D2 es el cuadrado de $\overrightarrow{OA}$
La celda E2 es el cuadrado de $\overrightarrow{OB}$

2) Arrastra el punto B y observa los cambios en los valores de las celdas **C2, D2 y E2**. Registra los datos en una tabla.
¿Qué relación hay entre estos valores y el radio del círculo? ¿Por qué se presenta esta relación? Explica.

C2	D2	E2
8,58	3,39	11.97
5,93	6,04	11,97
8,33	3,64	11.97

E2 es el cuadrado del radio del círculo. Al sumar C2 y D2 (los cuadrados de los otros dos lados del triángulo OAB) se obtiene el valor de E2. Esta relación se presenta porque el triángulo es rectángulo y se cumple el Teorema de Pitágoras.

3) A partir de las medidas de los lados del triángulo se puede obtener los valores de las celdas **A8 y B8,** pero también con los valores de las celdas **C2, D2 y E2.** Explica cada procedimiento y comprueba si es correcto arrastrando el punto B y haciéndolo con otros valores.

Teniendo en cuenta la respuesta de la pregunta 4 de la fase 1, en esta construcción está en juego las razones seno y coseno.

Desde el triángulo: se eleva al cuadrado la longitud de cada lado del triángulo, por lo que la razón trigonométrica también debe estar elevada al cuadrado (para conservar la igualdad):

$sen^2\,\theta = \frac{\overrightarrow{AB}^2}{3{,}46^2}$ **Sin importar el valor de** $\overrightarrow{AB}$ **y** θ, **el resultado siempre va a ser la celda A8.**

$cos^2\,\theta = \frac{\overrightarrow{OA}^2}{3{,}46^2}$ **Sin importar el valor de** $\overrightarrow{OA}$ **y** θ, **el resultado siempre va a ser la celda B8.**

Como los valores de las celdas C2, D2 Y E2 son los cuadrados de los lados del triángulo, sólo hay que dividir $\frac{C2}{E2}$
y a $\frac{D2}{E2}$, en el primer caso, da el valor de A8 y en el segundo caso da el resultado de B8.

$\boldsymbol{\frac{C2}{E2} = A8} \qquad \boldsymbol{\frac{D2}{E2} = B8}$

4) Encuentra qué relación hay entre el radio $\boldsymbol{r}$ y entre $\boldsymbol{r \cdot sen\,\theta}$ y $\boldsymbol{r \cdot cos\,\theta}$, utilizando toda la información disponible en el gráfico y la hoja de cálculo, además de lo que respondiste en las preguntas 2 y 4 de la fase 1. Es posible que requieras factorizar por medio del caso de "factor común".

Como se cumple el Teorema de Pitágoras, entonces se eleva cada expresión al cuadrado:
$\boldsymbol{r^2 \cdot sen^2\,\theta + r^2 \cdot cos^2\,\theta = r^2}$

Luego, sacando como factor común a $\boldsymbol{r^2}$, se tiene que
$\boldsymbol{r^2(sen^2\,\theta + cos^2\,\theta\,) = r^2}$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por $\boldsymbol{r^2}$:
$\boldsymbol{\frac{r^2(sen^2\,\theta + cos^2\,\theta\,)}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}}$ ***así que*** $\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$

5) Teniendo en cuenta lo que explicas en el punto 4 de la **situación 1** y en la **situación 2**, se puede representar esto de manera más general, siempre que se cumpla para cualquier valor del ángulo central.

La forma general es una igualdad matemática. ¿Cuál podría ser dicha representación? Escríbela según lo expresado en el punto anterior**.** También se puede apoyar con una operación entre las celdas A8 y B8: sin importar el valor del ángulo, ¿a qué es igual esta operación? Escribe su expresión en términos de las razones trigonométricas involucradas.

Según lo que se explicó en el punto 3 de la fase 2, el valor de la celda A8 es $\boldsymbol{sen^2\,\theta}$ y el valor de la celda B8 es $\boldsymbol{cos^2\,\theta}$. Teniendo en cuenta que en la construcción geométrica se cumple el Teorema de Pitágoras, entonces se pueden sumar estos dos valores, por lo tanto:

A8 + B8 =1 (siempre que se suman estas dos celdas, el resultado es 1, sin importar el valor del ángulo central).
Sustituyendo A8 y B8:
$\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$

En esta fase, se espera que los estudiantes reconozcan los elementos del sistema semiótico inicial, el Gráfico, por lo que la pregunta 1 también está orientado a ello. En particular, se prevé que:

- Reconozca ángulos en posición normal.
- Triángulos rectángulos y sus elementos (hipotenusa, catetos).
- Como en la fase 1, la comprobación del Teorema de Pitágoras es fundamental.

Lo anterior permitiría que pasen de un registro gráfico a uno verbal, pues en la pregunta 1 deberán explicar, indirectamente, el Teorema de Pitágoras.

En la pregunta 2 se espera, primero una conversión de registro, pues deberá pasar del Gráfico al Tabular y después al verbal, en este punto, se prevé que explique el Teorema de Pitágoras en esta tabla, para esto deberá hacer un tratamiento en el registro Tabular. Se prevé que la pregunta 2 no signifique mayor dificultad, pues el estudiante podría identificar fácilmente el Teorema de Pitágoras, sin embargo, podría haber una mayor dificultad para llegar a la respuesta esperada en la pregunta 3, pues nuevamente entra en juego la medida del radio del círculo. El estudiante podría caer en el error explicado en la fase 1 de esta misma tarea. En esta pregunta, se espera que logre hacer un tratamiento Algebraico a partir de la pregunta 4 de la fase 1, pero además debería coordinar los registros algebraicos, tabular y gráfico, comprendiendo que el algebraico generaliza lo que se muestra en el tabular y que el gráfico permite comprobar la veracidad de estos dos.

La pregunta 4 obedece directamente a un tratamiento. La transformación interna que el estudiante pueda realizar aquí está relacionada con la comprensión que haya hecho de la medida del radio. Podría restarle importancia a dicha medida e igualar la expresión a 3,46 (medida de r en la construcción), por esto se le solicita que factorice por medio de factor común. Este tratamiento que haga de la expresión no asegura que pueda llegar a la Identidad, pues también podría presentar dificultades en el proceso de factorizar.

Por lo anterior, la pregunta 5 se diseña con el objetivo de reforzar o permitir que el estudiante reflexione acerca de lo construido hasta el momento. Se espera que, con esta pregunta, logre hacer un tratamiento a partir del tratamiento que pudiere haber realizado en la pregunta 3 de esta misma fase y llegar a la Identidad Pitagórica Fundamental

Situación 3: ***Situación de validación.***

Una solución a la tarea 2//fase 3, podría ser la siguiente:

Tabla 19

Tarea 2. Solución Fase 3

Fase 3: Situación de validación. **1)** Comprueba si lo que plateaste en el punto 5 de la **fase 2,** efectivamente se cumple para cualquier valor del ángulo (con el arrastre del punto $\boldsymbol{B}$. Si no es así, reformule).

2) Despejando las razones trigonométricas (una a la vez) en la expresión matemática anterior, se pueden obtener otras a partir de esta. Realiza esta operación y escríbela en la tabla. Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto $\boldsymbol{B}$. Siempre tenga en cuenta el valor del ángulo $\boldsymbol{\theta}$. Recuerda que todo debe estar en términos de las razones trigonométricas involucradas.

Expresión original	Despeje de cada razón.
$\boldsymbol{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$	$\boldsymbol{sen^2\,\theta = 1 - cos^2\,\theta}$
	$\boldsymbol{sen\;\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\,\theta}}$
	$\boldsymbol{cos^2\,\theta = 1 - sen^2\,\theta}$
	$\boldsymbol{cos\,\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\,\theta}}$

3) Explica tus conclusiones con tus propias palabras a tus compañeros y profesor.

En esta fase, se prevé que el estudiante haga un tratamiento de la Identidad Trigonométrica Pitagórica para que luego coordine este registro con el tabular y gráfico, permitiéndole validar la tarea 2. Como se mencionó en los aspectos generales de este análisis, podría haber dificultades en el uso de las retroacciones que el *medio* le proporciona para lograr dicha validación. El numeral 3 tiene por objetivo dar cuenta de la comprensión de estas retroacciones y de la coordinación de registros que el estudiante haya realizado, por lo que también se espera una conversión de todo el trabajo, a un registro verbal.

b) Comportamientos previstos en la **tarea 3** de acuerdo con la matriz de análisis:

Fase 1: *Situación de acción.*

A continuación se presenta una posible solución de la tarea 3 //fase 1

Tabla 20

Tarea 3. Solución Fase 1

Tarea 3.
Otras Identidades Trigonométricas Fundamentales.
Fase 1: **Situación de acción.** ***Interactúe con la construcción geométrica –defina algunos elementos.*** Abra el archivo ***“Tarea 3”.*** En esta construcción se encuentran un círculo unitario y algunos triángulos rectángulos donde se involucran las seis (6) razones trigonométricas.

1). Identifica los triángulos rectángulos (exceptuando el que se observó en la tarea 2). Escribe el nombre de cada uno (usando las letras de los vértices) y determine el ángulo de 90°. Puedes ayudarte con la herramienta "Polígono" para resaltarlos. **En la construcción se pueden observar dos triángulos rectángulos (si se exceptúa el de la tarea 2):** **1) Triángulo OFE con ángulo de 90° en $\widehat{E}$** **2) Triángulo OCD con ángulo de 90° en $\widehat{C}$** **2).** Escribe cuáles razones trigonométricas consideras que están involucradas en cada uno de los triángulos y define los catetos y la hipotenusa de cada uno. **1) En el triángulo OFE están involucradas las razones csc α (vector $\overrightarrow{OF}$) y cot α (vector $\overrightarrow{EF}$).** **En este triángulo, los catetos son $\overrightarrow{EF}$ $(\cot\alpha)$ y el radio, que en este caso es igual a 1 unidad.** **Como el ángulo de 90° es $\widehat{E}$, la hipotenusa es $\overrightarrow{OF}$ $(csc$ α)** **2) En el triángulo OCD están involucradas las razones sec α (vector $\overrightarrow{OD}$) y $tan\,\alpha$ (vector $\overrightarrow{CD}$).** **En este triángulo, los catetos son $\overrightarrow{CD}$ $(tan\,\alpha)$ y el radio, es igual a 1 unidad.** **Como el ángulo de 90° es $\widehat{C}$, la hipotenusa es $\overrightarrow{OD}$ $(sec$ α)** Arrastra el punto $\boldsymbol{B}$ a cada uno de los cuadrantes. Comprueba si los triángulos que identificaste siguen siendo rectángulos (ten en cuenta los vértices). Si no es así, inicia nuevamente en el punto 1 hasta que selecciones los triángulos que son rectángulos sin importar el cuadrante en el que se encuentre.

Se prevé que los estudiantes presentarán poca o ninguna dificultad al reconocer los elementos del registro Gráfico en el ítem 1 y 2. Al respecto, identificarían los triángulos rectángulos presentes en la construcción, sus elementos (ángulo recto, catetos e hipotenusa) y las razones trigonométricas involucradas. El propio *medio* les propiciará las retroacciones para determinar que los triángulos que elije son los correctos. En la pregunta 2, deberá hacer una conversión del registro gráfico al verbal. Le escasa dificulta que se pueda presentar, radica en que se hizo *institucionalización* en las tareas 1 y 2, por lo que se espera que esto ayude en la tarea 3.

Situación 2: *Situación de formulación.*

Una solución a la tarea 3//fase 2, podría ser la siguiente:

Tabla 21

Tarea 3. Solución Fase 2

Fase 2: Situación de formulación. *Reflexione y formule*. Por ser triángulos rectángulos y teniendo en cuenta su construcción, se cumplen ciertas relaciones entre sus lados, debido esto al Teorema de Pitágoras.

1). Con la herramienta "Distancia o Longitud" mide los lados de cada triángulo resaltado. Indica dichas relaciones (en cada triángulo). Escríbelas. **1) En el triángulo $\boldsymbol{OFE}$: $\overrightarrow{EF} = 0,76$ r=1 (catetos)** **$\overrightarrow{OF} = 1,26$ (hipotenusa).** **Como se cumple el Teorema de Pitágoras, entonces: $0,76^2 + 1^2 = 1,26^2$ por lo tanto $\overrightarrow{EF}^2 + r^2 = \overrightarrow{OF}^2$** **2) En el triángulo $\boldsymbol{OCD}$: $\overrightarrow{CD} = 1,32$ r=1 (catetos)** **$\overrightarrow{OD} = 1,65$ (hipotenusa).** **Como se cumple el Teorema de Pitágoras, entonces: $1,32^2 + 1^2 = 1,65^2$ por lo tanto $\overrightarrow{CD}^2 + r^2 = \overrightarrow{OD}^2$** **2)** Arrastra nuevamente el punto $\boldsymbol{B}$ e indica si las relaciones se conservan o no. Reformula hasta que encuentre la expresión que se cumple para cada valor del ángulo. **3)** Teniendo en cuenta estas relaciones entre los lados de cada triángulo, se puede formular de manera más general a través de una expresión matemática. Formula esta expresión matemática para cada triángulo, que represente la relación encontrada, reemplazando el vector por la razón trigonométrica involucrada. **Reemplazando según lo que se respondió en la pregunta 2 de la fase 1:** **1) En el triángulo $\boldsymbol{OFE}$: $\overrightarrow{EF}^2 + r^2 = \overrightarrow{OF}^2$** **$cot\, \alpha^2 + 1 = csc\, \alpha^2$** **2) En el triángulo $\boldsymbol{OCD}$: $\overrightarrow{CD}^2 + r^2 = \overrightarrow{OD}^2$** **$tan\, \alpha^2 + 1 = sec\, \alpha^2$**

En el ítem 1 se prevé que el estudiante realice una conversión del registro Gráfico al Algebraico. En este último, deberá reconocer los elementos del registro de llegada, como las operaciones que se pueden realizar según el Teorema de Pitágoras. Es importante el tratamiento que el estudiante realice en esta fase, pues facilitará el proceso para llegar a las Identidades que se les pide. Sin este tratamiento se podría decir que se le dificultará cumplir el objetivo de la tarea. Dicho tratamiento se espera que se de en los ítems 1 y 3.

Situación 3: *Situación de validación.*

Una solución a la tarea 2//fase 3 podría ser la siguiente:

Tabla 22

Tarea 3. Solución Fase 3

Fase 3: **Situación de validación.**

1). En la siguiente tabla, escribe las expresiones matemáticas con las razones trigonométricas involucradas en cada triángulo según lo realizado en el punto 3 de la **fase 2.** Verifica si esto es verdadero para cualquier valor del ángulo, así que arrastra el punto $\boldsymbol{B}$ y reemplaza el ángulo en la expresión. Reformula en caso de que no sea igual.

Triángulo	Expresión matemática planteada.
▲ $\boldsymbol{OFE}$	$\boldsymbol{cot\,\alpha^2 + 1 = csc\,\alpha^2}$
▲ $\boldsymbol{OCD}$	$\boldsymbol{tan\,\alpha^2 + 1 = sec\,\alpha^2}$

2). Despeja la razón trigonométrica en cada expresión matemática con el objetivo de obtener otras (Si hay más de una razón trigonométrica involucrada, primero despeja una y después la otra).
En la tabla, escribe las fórmulas de las nuevas expresiones. Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto $\boldsymbol{B}$ y reemplazando el ángulo en la expresión. Si no es así, reformula.

Triángulo	Expresión matemática	Otras expresiones
▲ $\boldsymbol{OFE}$	$\boldsymbol{cot^2\alpha + 1 = csc^2\alpha}$	$\boldsymbol{cot^2\alpha = csc^2\alpha - 1}$ $\boldsymbol{cot\,\alpha = \pm\sqrt{csc^2\alpha - 1}}$ $\boldsymbol{csc^2\alpha}$ - $\boldsymbol{cot^2\alpha = 1}$ $\boldsymbol{csc\,\alpha = \pm\sqrt{cot^2\alpha + 1}}$**.**
▲ $\boldsymbol{OCD}$	$\boldsymbol{tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha}$	$\boldsymbol{tan^2\alpha = sec^2 - 1}$ $\boldsymbol{tan\,\alpha = \pm\sqrt{sec^2\alpha - 1}}$ $\boldsymbol{sec^2\alpha - tan^2\alpha = 1}$ $\boldsymbol{sec\alpha = \pm\sqrt{tan^2\alpha + 1}}$

3). Explica tus conclusiones a tus compañeros y profesor.

En esta fase, ítem 1, se espera que el estudiante valide lo que formuló. Esto lo logrará a través del arrastre en GeoGebra y haciendo un tratamiento con el valor del ángulo en cada una de las igualdades. En el ítem 2, se espera que logre obtener otras expresiones a partir de las Identidades originales, esto por medio de un tratamiento (despejando cada razón). Para este proceso se requiere que reconozca todos los elementos involucrados en este sistema de representación. Así mismo, deberá coordinar los registros Algebraico y gráfico para validar las nuevas expresiones o Identidades. Dicha coordinación también se podrá evidenciar en el ítem 3.

3.2.2. Hipótesis del diseño

Primera hipótesis del diseño.

Al enfrentar al estudiante a una construcción geométrica, se generarían procesos de visualización que propiciarían representaciones matemáticas permitiéndoles realizar diversas conjeturas que los llevarían a determinar las ITF.

Segunda hipótesis del diseño:

Los estudiantes determinarían las ITF desde una construcción geométrica, realizarían transformaciones entre registros que le permitirían determinar otras identidades, comprobándolas por medio de una coordinación de los mismos.

3.2.3. Variables micro-didácticas

1) La medida del radio ($\boldsymbol{r}$) del círculo: en dos de las construcciones geométricas se trabajará con un círculo unitario y en otra será un círculo con radio $\boldsymbol{r}$, diferente de $\mathbf{1}$. No se le hará énfasis de esto a los estudiantes, con el objetivo que ellos puedan determinar la complejidad de trabajar con una u otra medida de $\boldsymbol{r}$. Se puede presentar poca o ninguna comprensión del papel de la unidad en el círculo goniométrico o aplicación inconsistente de la unidad (Brown, 2006 citado en Fiallo, 2010). Se espera entonces que el estudiante se adapte a la situación que se le presenta generando nuevas estrategias de solución, por esto se considera una variable.

2) La magnitud de los vectores: la magnitud de los vectores (Distancia o Longitud) estará presente en todas las tareas, que apoyado con el *arrastre*, permitirá cambiar el estado de la construcción geométrica y determinar su proceder en cada fase. La importancia de permitir que el estudiante acceda a dicha medida radica en el soporte que esta pueda brindar a un proceso cognitivo como lo es la visualización matemática, así como lo menciona Arzarello (2001):

> […] arrastrar y medir, puede mediar en la relación teórica-perceptual de una manera específica, la creación de entidades con un nuevo estado. De hecho, el arrastre y la medida están relacionadas con importantes funciones cognitivas del sujeto, es decir, con la forma (s) que se ve en los dibujos y manipula (p. 4).

3.3. Experimentación: Puesta en escena de las Situaciones Didácticas

Antes de aplicar las Situaciones Didácticas con estudiantes, se entregó un borrador a 3 docentes del área de Matemáticas para que resolvieran las tareas. Después de este proceso, se procedió a realizar algunos ajustes pertinentes según sus observaciones. El análisis *a priori* se realiza con base a las resoluciones hechas por estos docentes y según criterios del investigador.

3.3.1. Caracterización de la población y descripción del estudio

La experimentación de este trabajo de sistematización consistió en un estudio de casos donde se eligieron cuatro estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa de carácter oficial Juan Pablo II – Comuna 18, de la Ciudad de Santiago de Cali. Los estudiantes tienen una edad promedio de 16 años y provienen de familias de estratos 0, 1 y 2. El proceso de selección se hizo teniendo en cuenta sus niveles de desempeño en el área según sus procesos de evaluación de acuerdo al Decreto 1290 (2009), es decir, se eligió al azar un estudiante que se encontrara en cada una de las escalas de valoración de los desempeños: Superior, alto, básico, bajo. El autor de esta sistematización, quien también es docente de los estudiantes, informó a estos y a sus padres de familia sobre el presente trabajo y su relación con la Universidad del Valle, obteniendo el consentimiento tanto de los estudiantes como de los padres de familia, sin embargo el criterio de selección no fue compartido con ninguno de ellos.

Dicha selección obedece a la oportunidad de análisis que pudiere ofrecer cada estudiante según el objetivo general de este trabajo, pues de esta manera se determinaría cómo se podría favorecer o no el aprendizaje de las ITF en cada caso y qué ajustes serían pertinentes.

Para efectos del proceso de validación y confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori*, se identifican los estudiantes de la siguiente manera: Nivel – sexo

Estudiante A: Nivel superior – Masculino.
Estudiante B: Nivel alto – Femenino.
Estudiante C: Nivel básico – Masculino.
Estudiante D: Nivel bajo – Femenino.

El caso del estudiante A: se caracteriza por presentar un excelente rendimiento académico en las diferentes áreas. Particularmente en matemáticas, demuestra capacidad para resolver problemas complejos en registros verbales y algebraicos, en los cuales hace uso de varias heurísticas. Hace preguntas de manera insistente cuando no entiende algún proceso o concepto relacionado con la clase. Se muestra siempre dispuesto a confrontar y socializar sus resultados de manera autónoma.

El caso de la estudiante B: se caracteriza por presentar un muy buen rendimiento en el área de matemáticas, demostrando capacidad para resolver problemas menos complejos en registros verbales y algebraicos. Al igual que el estudiante A, hace uso de diferentes heurísticas en el proceso de resolver problemas. Aunque no lo hace de manera autónoma, confronta y socializa sus resultados condicionando este de acuerdo con sus necesidades o expectativas.

El caso del estudiante C: presenta dificultades en la resolución de problemas, así como el uso de diferentes heurísticas en este proceso. Cuando se le orienta de manera adecuada, atiende las explicaciones y puede desarrollar algunos ejercicios en registros algebraicos. En pocas ocasiones pregunta sobre sus dudas y su participación en las clases de matemáticas es muy mínima. Se muestra muy reacio a socializar sus resultados.

El caso de la estudiante D: presenta un desempeño bajo en el área. Su participación en clase es nula y se le dificulta integrarse a esta. Sus dificultades radican, principalmente, en el deficiente dominio de conocimientos previos en el área y comprensión lectora. No hace uso de diferentes heurísticas en la solución de problemas. No presenta procesos de metacognición acordes a su grado escolar. Se destaca por su alto grado de responsabilidad.

En las clases de matemáticas se ha hecho uso del SGD GeoGebra, trabajándolo con todos los estudiantes en computadores, pero principalmente en la aplicación móvil en tabletas. Por lo anterior, con los 4 estudiantes de la investigación, se realizaron cuatro sesiones de instrumentalización del software antes de aplicar las tareas. Este trabajo consistió en un reconocimiento más amplio de las herramientas, la hoja de cálculo y algunas construcciones blandas y robustas, en particular, la construcción que se presenta en las tareas 1 y 3 fue hecha por los estudiantes en dichas sesiones. Sin embargo, algunas de estas no fueron robustas, aunque el objetivo de la actividad era permitir una mayor familiarización con el software de tal manera que el uso de este no representara un obstáculo en el desarrollo de las tareas. Cada una de estas sesiones tuvo una duración de 2 horas.

Respecto a los conocimientos previos necesarios para abordar las tareas, con los estudiantes ya se había trabajo la trigonometría según el plan de área para grado 10° de la Institución Educativa: clasificación de ángulo y triángulos, medición de ángulos, Teorema de Pitágoras, razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, concepto de ecuación e identidad trigonométrica y algunos elementos básicos de la circunferencia.

La aplicación de las tareas se llevó a cabo en 4 sesiones con un promedio de 2 horas cada una en el transcurso de 3 semanas durante el mes de noviembre del año 2019. En la tabla 23 se especifica dicho proceso. En cuanto a la recolección de la información, se utilizaron diferentes instrumentos como videograbaciones de las sesiones, diario de campo, hojas de trabajo de los estudiantes y algunas grabaciones de las pantallas de los computadores mediante el software OBS Studio. Además de esto, en la fase de *institucionalización*, el investigador hizo algunas preguntas a los estudiantes y fuera de cámara se llevaron a cabo entrevistas no estructuradas para complementar sus producciones escritas. La cámara significó algún tipo de presión para los estudiantes, pues fuera de esta fueron más participativos.

Tabla 23

Organización de la Puesta en Acto de las Situaciones Didácticas

Sesión	Fecha	Tarea puesta en acto	Hora
1	Noviembre 6 de 2019	Tarea 1/Fase 1	6:30 – 8:45 am
2	Noviembre 8 de 2019	Tarea 1 /Fases 2 y 3	7:20 - 9:30 am.
3	Noviembre 15 de 2019	Tarea 2	8:10 -9:15 y 9:50 – 10:40 am
4	Noviembre 20 de 2019	Tarea 3	7: 00 – 9:15 am.

A cada estudiante se le entregó un computador en el cual había una carpeta con las construcciones geométricas de cada tarea. Al inicio de la sesión 1, se explicó de manera general la dinámica del trabajo, la estructura de cada tarea (las fases) y la construcción que correspondía a cada una. Se organizaron los tiempos como se muestran en la tabla 23, aunque, en particular, los estudiantes A y B, se adelantaron en la sesión 1 a la fase 2. En sesiones de clase, los estudiantes ya habían trabajado el concepto de ecuación e identidad trigonométrica, pero sin construir o trabajar alguna de ellas. Las tres tareas se trabajaron de manera individual, sin embargo, en el último ítem de la fase 3 de cada tarea, se hizo un trabajo colaborativo donde el docente – investigador realiza además la fase de *institucionalización.*

3.3.2. Descripción General de las sesiones

Se presenta a continuación una descripción general y un análisis de las sesiones aplicadas.

Sesión 1 (noviembre 6 de 2019 – Tarea 1/Fase 1): la sesión inició con una explicación general de la metodología de trabajo y los tiempos para cada tarea, principalmente se expuso el objetivo con GeoGebra y la función de este software y del docente, pues su presencia era sólo para dar algunas orientaciones sin especificar la veracidad o no de algún procedimiento. Cada estudiante se sentó frente a un computador y se les entregó la hoja de trabajo “Tarea 1”. Se especificó la estructura de la tarea: fase1, fase 2 y fase 3. En esta sesión sólo se trabajó la fase 1. Así mismo, se acordó la presencia de un camarógrafo profesional quien iba a estar presente durante todas las sesiones.

Los estudiantes se organizaron de tal manera que la cámara pudiera filmar sus pantallas, además de esto, cada computador contaba con un software que permitía capturarla en video. El inicio de la sesión se dio sin mayores contratiempos. La construcción geométrica de esta tarea fue reconocida por los estudiantes, pues en otras sesiones de instrumentalización, ellos realizaron una similar, aunque no fue robusta como la que se presentaba en la tarea. Se permitió que leyeran toda la fase 1 y después se procedió a realizar preguntas sobre saberes previos necesarios para abordar la tarea.

Los estudiantes A y B avanzaron rápido en el trabajo, logrando iniciar la fase 2, sin embargo, la pregunta 2-Fase 1 fue la que presentó mayor dificultad para todos, requiriendo más tiempo del presupuestado para su solución. Se evidenció una mayor dificultad en el desarrollo de la actividad en los estudiantes C y D. Al finalizar la sesión, el investigador se quedó con las hojas de trabajo.

Sesión 2 (noviembre 8 de 2019 – Tarea 1/Fases 2 y 3): esta sesión se realizó sin mayores contratiempos y novedades. Los estudiantes A y B continuaron en la fase 2 y los otros dos estudiantes iniciaron esta. La tarea 1 fue realizada en su totalidad por cada estudiante. Con la última pregunta de la fase 3, se inició la fase de *institucionalización,* para esto, se les pidió a los estudiantes que compartieran su trabajo con los demás compañeros. El docente realizó esta fase de acuerdo con conocimiento construido por ellos. Los estudiantes A y B compartieron su producción frente a la cámara, los otros dos se sintieron intimidados por lo que optamos que hicieran esto fuera de cámaras (se complementó con la entrevista no estructurada). En este proceso no se les permitió que cambiaran ninguna de las respuestas en sus hojas de trabajo: los nuevos apuntes se tomaron en sus cuadernos. Al finalizar la sesión, el investigador se quedó con dichas hojas de trabajo.

Sesión 3 (noviembre 15 de 2019 – Tarea 2/Fases 1, 2 y 3): esta sesión se realizó una semana después. El docente dio algunas indicaciones generales y pidió que abrieran el archivo correspondiente a la tarea. Se les estregó las hojas de trabajo pidiéndoles que leyeran cada fase. Se respondieron algunas dudas de comprensión literal de la tarea y se pronosticaron unos tiempos para cada fase (fase 1: 30 minutos; fase 2: 60 minutos; fase 3: 30 minutos), sin embargo, al final de la sesión se dispuso de 10 minutos adicionales para terminar la tarea. En general, los tiempos acordados fueron respetados, aunque los estudiantes C y D se tomaron un poco más en la fase 2. Los 4 estudiantes solicitaron el favor de tener acceso a su tarea 1, pues requerían algunos elementos de esta para desarrollar la tarea 2. El docente permitió que cada uno tuviera sus hojas de trabajo "Tarea 1" para la tarea 2.

La fase de *institucionalización* se realizó siguiendo una metodología similar a la Tarea 1. Al finalizar la sesión, el docente se quedó nuevamente con capturas de pantalla en video y las hojas de trabajo.

Sesión 4 (noviembre 20 de 2019 – Tarea 3/Fases 1, 2 y 3): la metodología para esta sesión fue similar a las anteriores. Esta vez se observó que los estudiantes, al notar que la construcción de esta tarea es similar a la Tarea 1, decidieron abrir el archivo de esta, pues al parecer la hoja de cálculo les permitía comprender algunos aspectos y/o se sentían más cómodos; de todas formas, no se les impidió esta acción, pues ambas construcciones son iguales (sólo las diferencia la hoja de cálculo). En esta sesión, fue necesario dar 15 minutos adicionales para su desarrollo.

En general, en las cuatro sesiones se pudo evidenciar lo siguiente respecto al uso de GeoGebra:

1) La naturalidad con la cual los estudiantes asumieron el "arrastre".
2) Escasas - y en algunas sesiones o fases de estas, nulas - preguntas sobre el uso del software.
3) El uso de algunas herramientas para aclarar algunos aspectos de la construcción, aun cuando en la hoja de trabajo no se pedía.

En general, la familiaridad con GeoGebra que presentaron los cuatro estudiantes les permitió un avance significativo en el desarrollo de las sesiones y centrar su atención en los objetivos propuestos en las tareas.

3.4. Análisis *a posteriori* y validación: resultados obtenidos

A continuación se presentan los resultados obtenidos con los cuales se ha hecho una triangulación de datos de acuerdo con los instrumentos de recolección. Después se realizará la validación interna, es decir, el contraste entre los análisis *a priori* y *a posteriori*. En la triangulación, se tiene en cuenta las siguientes categorías:

1) Las hojas de trabajo de los estudiantes: estas se analizan teniendo en cuenta las tablas 11 y 12 y la red de representaciones ideas (Figura 11) descritas en el análisis *a priori*, donde se especifican las categorías, los reconocimientos y transformaciones ideales de las representaciones en cada tarea, respectivamente

2) La observación directa: se analiza teniendo en cuenta las videograbaciones, algunas capturas de pantalla y el diario de campo contrastándolas con las producciones escritas (hojas de trabajo).

3) Explicaciones dadas por los estudiantes: se analiza la fase de *institucionalización* que se realizó de manera colaborativa y donde ellos debían dar algunas explicaciones de su trabajo, además de las entrevistas no estructuradas que se dieron fuera de cámara.

En las tablas 24, 25, 26 y 27; se muestran los resultados de cada caso según lo evidenciado en las hojas de trabajo, en cada tarea y fase. Luego se describen los errores y aciertos de los estudiantes. Se utiliza la siguiente convención:

- **1** indica que la transformación (o reconocimiento) fue lograda.
- $\mathbf{1}^-$ indica que logró la transformación (o reconocimiento) con algún tipo de error (conceptual, procedimental o de comprensión).
- $\mathbf{0}^+$ indica que no logró la trasformación (o reconocimiento) pero que tuvo varios aciertos en el procedimiento que podrían ser clave para un desarrollo posterior.
- **0** indica que el estudiante no logró la transformación (o reconocimiento) ideal o prevista de la representación según el análisis *a priori*.

3.4.1. Resultados obtenidos con el estudiante A

Tabla 24

Resultados del Estudiante Caso A

<table>
<tr><th colspan="8">Resultados del Estudiante A.</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Tarea</th><th rowspan="2">Fase</th><th rowspan="2">Pregunta</th><th colspan="4">Categoría</th><th>Transformaciones hechas por el estudiante</th></tr>
<tr><th>A
(R)</th><th>B
(T↑)</th><th>C
(C→)</th><th>D
(C↔)</th><th>(Comparar con la tabla 12 de los análisis a priori)</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1^-</td><td></td><td>1</td><td></td><td rowspan="2">1 ($\mathbf{R}_G$) →1b,1c ($\mathbf{C}_{G\to V}$) 2 ($\mathbf{C}_{G\to T}$) →2($\mathbf{R}_T$)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td rowspan="4">1 ($\mathbf{C}_{G\to T}$) → 1 ($\mathbf{R}_T$) → 1 ($\mathbf{T}\uparrow_T$) → 2,3 ($\mathbf{C}_{T\to A}$) → 2, 3 ($\mathbf{R}_A$) → 2, 3 ($\mathbf{T}\uparrow_A$) → 4($\mathbf{T}\uparrow\mathbf{A}$)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td rowspan="2">1 ($\mathbf{T}\uparrow_A$) → 1, 2 ($\mathbf{C}_{G\leftrightarrow A}$)</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="7">2</td><td rowspan="4">1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1^-</td><td></td><td rowspan="4">1 ($\mathbf{R}_G$) → 1($\mathbf{C}_{G\to V}$) → 2 ($\mathbf{C}_{G\to A}$)
↓
3 ($\mathbf{C}_{G\to V}$)</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td>1^-</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">1 ($\mathbf{R}_G$) → 4 ($\mathbf{C}_{G\to A}$) → 4($\mathbf{T}\uparrow_A$) → 5 ($\mathbf{T}\uparrow_A$)
↓
5 ($\mathbf{C}_{A\to V}$)</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td>0^+</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>0</td><td>0^+</td><td>0^+</td></tr>
</table>

		4		1			
		5		1			
	3	**1**		1		1	1 $(\mathbf{T}\uparrow_{A}) \rightarrow 1\ (\mathbf{C}_{A\leftrightarrow G}) \rightarrow 3(\mathbf{C}_{G,\ A,\ T\rightarrow V}) \rightarrow 3\ (\mathbf{C}_{V\leftrightarrow G,\ A,\ T})$
		2		0		0	2 $(\mathbf{T}\uparrow_{A}) \rightarrow 2\ (\mathbf{C}_{A\leftrightarrow T})\ (\mathbf{C}_{T\leftrightarrow G})\ (\mathbf{C}_{G\leftrightarrow A})$
		3			1	1	
3	**1**	**1**	1				1, 2 $(\mathbf{R}_{G}) \rightarrow 2\ (\mathbf{C}_{G\rightarrow V})$
		2	1^-		1^-		
	2	**1**	1	0	0		3 $(\mathbf{C}_{V\leftrightarrow A}) \rightarrow 1\ (\mathbf{R}_{A}) \rightarrow 3\ (\mathbf{T}\uparrow_{A})$
		2					
		3		1			
	3	**1**		1			1 $(\mathbf{T}\uparrow_{A}) \rightarrow 2\ (\mathbf{T}\uparrow_{A}) \rightarrow 2,\ 3\ (\mathbf{C}_{A\leftrightarrow G})$
		2	1	1^-		1	↓
		3				1	2 $(\mathbf{R}_{A})$

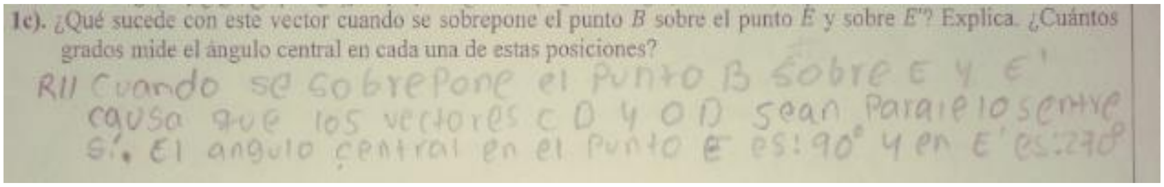
El estudiante A se mostró muy motivado para realizar las tareas. En el desarrollo de las mismas, se puede evidenciar que logra estructurar un plan de trabajo para abordar cada una, esto es: 1) abre el archivo "Tarea 1" y lo explora. 2) Lee cuidadosamente las consignas presentadas en cada fase. 3) Realiza algunas preguntas de comprensión literal (si presenta dudas). 4) Inicia a realizar la tarea en la fase correspondiente.

Se puede observar en la tabla 24, los múltiples reconocimientos y transformaciones que realizó el estudiante, lo que le permitió construir unos conocimientos relevantes que en la fase de *institucionalización* favoreció la transmisión del saber. Con respecto GeoGebra, demuestra agilidad y facilidad en su manejo, pues en múltiples ocasiones utilizó herramientas para verificar sus respuestas, aun cuando estas no eran solicitadas en las consignas. Así mismo, asumió con mucha naturalidad el arrastre y la medida de los vectores.

a) la tarea 1: en esta tarea, el estudiante avanzó de manera acelerada en la primera pregunta de la fase 1, mostrando mayor dificultad en la segunda, donde tardó un poco más. Se muestra inseguro en muchas de sus producciones o conclusiones, pues, aunque el *medio* le daba las retroacciones necesarias, constantemente preguntaba al docente sobre su veracidad. En muchas de estas preguntas se pudo evidenciar que el estudiante tenía la estrategia ganadora o estaba en lo cierto en sus afirmaciones, pero esto no se vio reflejado en la hoja de trabajo. Por ejemplo, en la pregunta 1c de la fase 1, donde debía concluir sobre cómo el vector que representa la tangente es infinito cuando el ángulo central mide 90° y 270°, se puede evidenciar su inseguridad al contrastar su hoja de respuesta con una intervención que hizo durante el desarrollo de la actividad:

Figura 12

Respuesta dada por Estudiante A en Tarea 1, Fase 1, Pregunta 1c


1c). ¿Qué sucede con este vector cuando se sobrepone el punto B sobre el punto E y sobre E'? Explica. ¿Cuántos grados mide el ángulo central en cada una de estas posiciones?

R// Cuando se sobrepone el punto B sobre E y E' causa que los vectores CD y OD sean paralelos entre sí. El angulo central en el punto E es: 90° y en E' es: 270°

Estudiante A: profe, en noventa grados y doscientos setenta, los vectores se vuelven paralelos.

Profesor: ¿Qué pasa que sean paralelos?

Estudiante A: no se van a encontrar los dos puntos, no se van a cortar. Cuando está así [arrastra el punto B al segundo cuadrante] aquí por ejemplo se corta CD y OD, pero cuando se lo pasa así [sobrepone el punto B en el punto E] no se van a cortar y va a seguir así hasta el infinito [se desplaza por el eje *y* hacia arriba]. Si tienen exactamente noventa grados no se van a encontrar nunca.

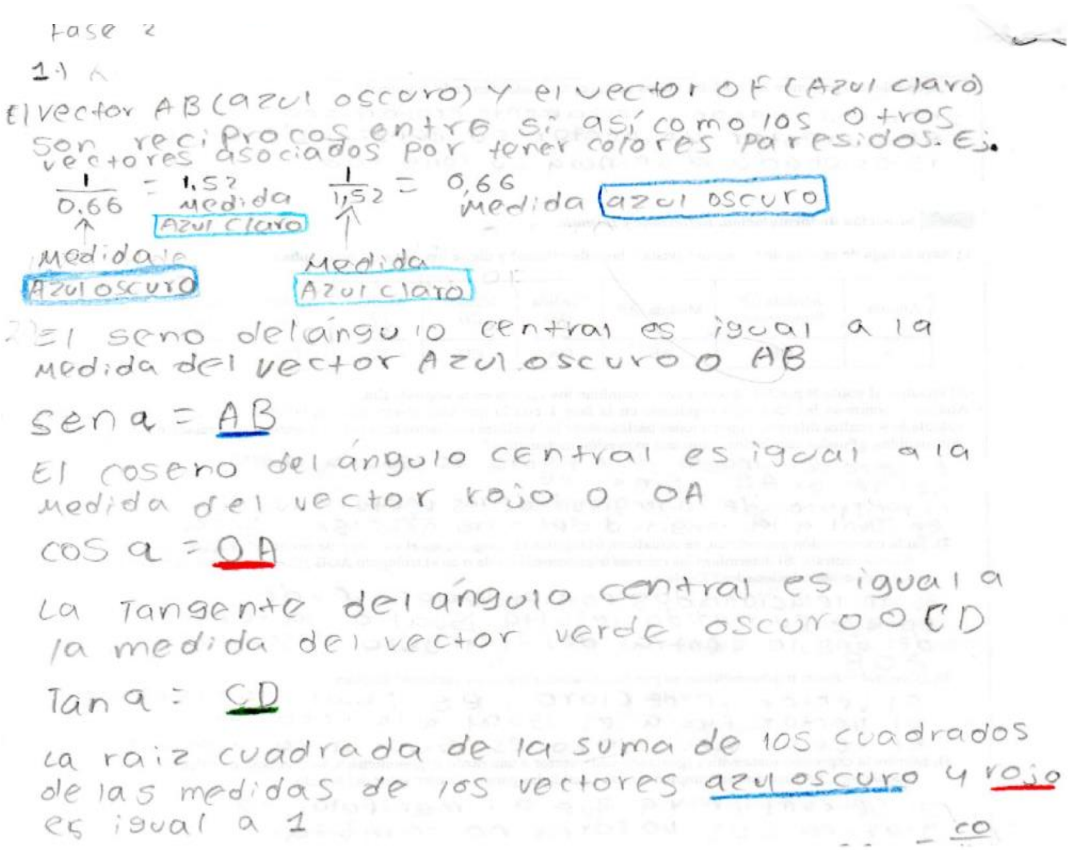
A pesar de que el estudiante tiene una retroacción adecuada del *medio* y logra dar con la respuesta correcta, tiene la necesidad de informar esto al docente y buscar una retroacción de este. Además, no consigna lo esencial de su respuesta que es el infinito de los vectores. Este comportamiento fue muy común en el estudiante durante las 3 tareas, sin embargo, se le orientó para que pudiera continuar sin las intervenciones del docente.

El estudiante demuestra tener dominio de los conocimientos previos necesarios para abordar la tarea, esto se puede evidenciar en las respuestas dadas en la fase 2 y en el reconocimiento que hizo de los elementos de los diferentes registros utilizados. Por otro lado, se estaba adelantando a la tarea 2, pues en el último párrafo escribió una conclusión con lo que podría darse a entender que, desde esta tarea, pudo haber construido la Identidad Trigonométrica Pitagórica fundamental, sin embargo, hay ambigüedad en su redacción:

Analiza y contrasta las ideas que explicaste en la fase **1** con lo que está observando en la tabla. Con el uso de la calculadora, realiza diferentes operaciones básicas entre los vectores asociados (por color) y encuentra la relación entre sus medidas. ¿Puedes escribirlos como una expresión matemática?

Figura 13

Respuesta dada por Estudiante A en Tarea 1, Fase 2, pregunta 1

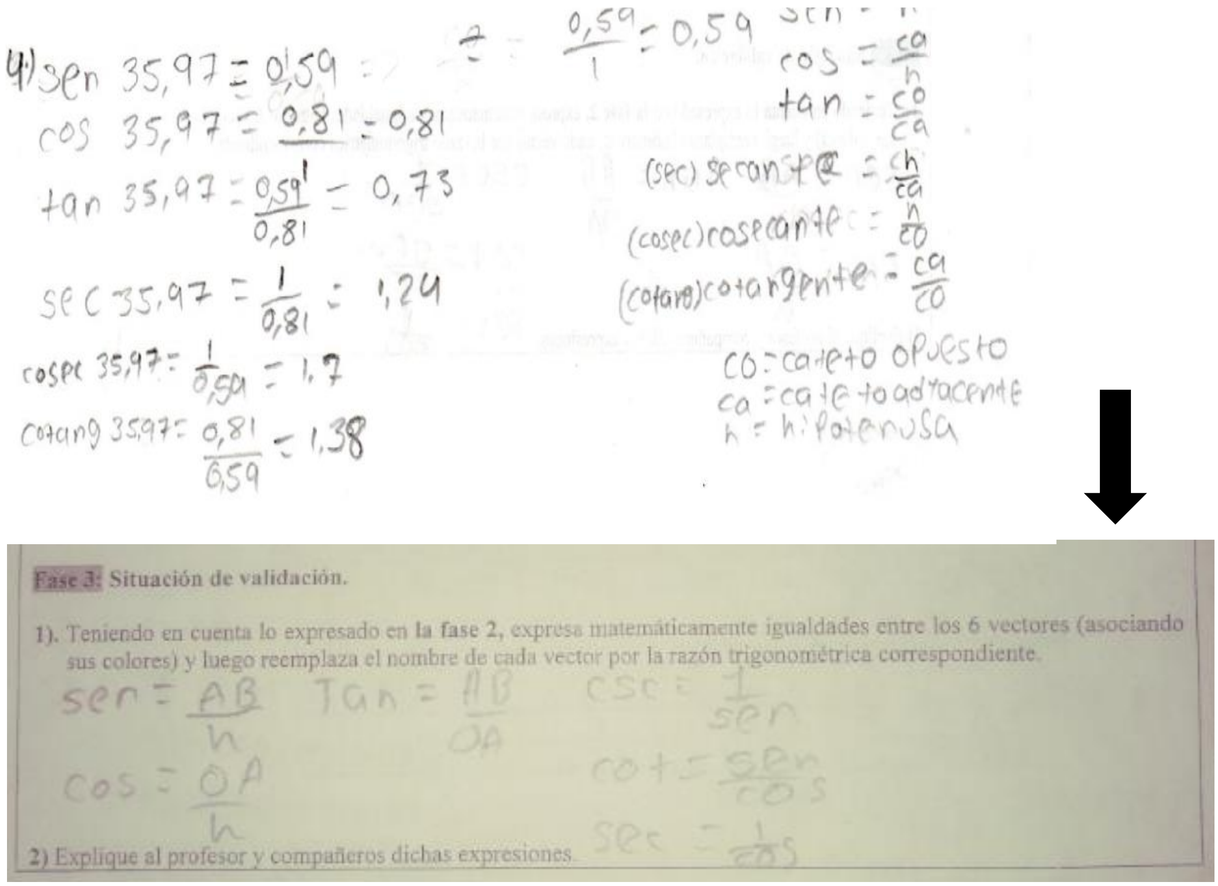


Se puede observar que el estudiante redacta con claridad sus conclusiones (a excepción del último párrafo), generalizando sus respuestas haciendo las transformaciones señaladas en la tabla 24, lo que indica que es un visualizador en potencia, esto le favoreció para realizar procesos de generalización en la fase 3. La construcción de sus conocimientos hizo que en la fase de *institucionalización* se mostrara seguro de sus aportes:

Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

Figura 14

Generalización realizada por el Estudiante A de la Respuesta 4 – Fase 2 a la Respuesta 1 – fase 3



En la fase de *institucionalización* explicó de manera acertada, relacionando cada vector con la celda correspondiente en la hoja de cálculo, tomando las medidas y determinado las razones trigonométricas:

***Estudiante A**:* la medida de AB o del vector AB o el azul, es igual al seno del ángulo que está aquí en pantalla.

Profesor: ¿Cuál ángulo?

***Estudiante A**:* el central, de alfa.

Profesor: ¿Cómo llegó a esa conclusión?

***Estudiante A**:* porque si mide 0,56 y lo dividimos…

Profesor: ¿quién mide 0,56?

Estudiante A: el vector AB mide 0,56 que es el cateto opuesto a alfa. Como el seno es cateto opuesto sobre hipotenusa, en este caso sería 0,56 sobre 1 por lo que daría el mismo resultado, entonces AB es el seno de este ángulo [señala el ángulo central]

Así mismo explica cómo relacionó los otros vectores con las razones trigonométricas. Para las razones inversas al seno, coseno y tangente comparó los resultados de sus divisiones con las medidas de los vectores correspondientes y de esta manera asignó el vector a la cotangente, secante y cosecante. Sin embargo, en su producción escrita (respuesta 1-fase 3) se puede observar que presentó una confusión con las razones: tangente y cotangente, posiblemente porque estas no relacionan directamente el radio del círculo, pero en la explicación hecha a los compañeros y profesor, lo hizo correctamente.

b) Tarea 2 y 3: a pesar de que en la tarea 2 el estudiante logró escribir algunas conclusiones que podrían haberlo llevado a Identidad Pitagórica Fundamental, este no fue el caso, pues la medida del radio significó una confusión importante para él (en esta construcción $r \neq 1$). Esto queda demostrado con mayor énfasis porque en la tarea 3, logró encontrar la IT Pitagórica que se le pedía en la 2, ya que el círculo sí era unitario.

En la fase 1 de la tarea 2, se le pide:

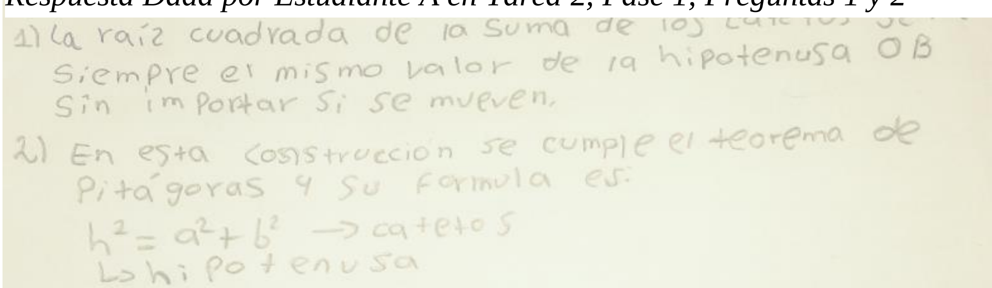
Escriba algunas características de la construcción, por ejemplo:

1) Mida la longitud de los vectores que conforman el triángulo. ¿Puedes determinar alguna relación entre estas medidas? Explica (si encuentra alguna relación, arrastra el punto ***B*** y verifica que lo que planteaste se cumple para cualquier valor del ángulo. Si no es así, reformula).

2) ¿Qué teorema se cumple en la construcción? ¿Cuál es la fórmula de este Teorema?

Figura 15

Respuesta Dada por Estudiante A en Tarea 2, Fase 1, Preguntas 1 y 2



1) La raíz cuadrada de la suma de los ... siempre el mismo valor de la hipotenusa OB sin importar si se mueven.

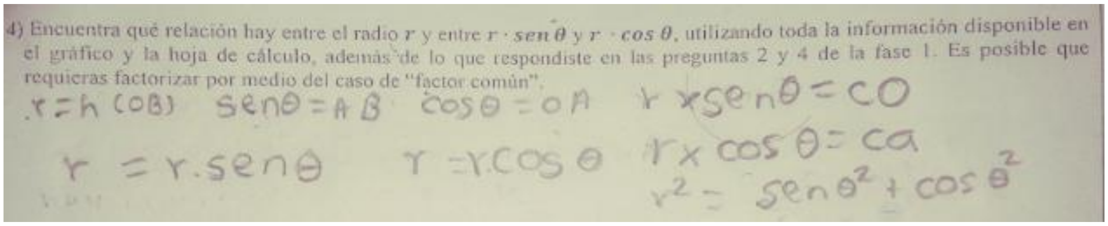
2) En esta cosistruccion se cumple el teorema de Pitágoras y su formula es:

$h^2 = a^2 + b^2$ → catetos

↳ hipotenusa

Figura 16

Respuesta Dada por Estudiante A en Tarea 2, Fase 2, Pregunta 4


4) Encuentra qué relación hay entre el radio r y entre $r \cdot sen\,\theta$ y $r \cdot cos\,\theta$, utilizando toda la información disponible en el gráfico y la hoja de cálculo, además de lo que respondiste en las preguntas 2 y 4 de la fase 1. Es posible que requieras factorizar por medio del caso de "factor común".

r = h (OB)   sen θ = AB   cos θ = OA   r × sen θ = CO

r = r.sen θ   r = r.cos θ   r × cos θ = ca

r² = sen θ² + cos θ²

A pesar de algunos errores cometidos en la respuesta 4 de la Fase 2, se puede evidenciar que el estudiante logró hacer unas transformaciones importantes desde el registro gráfico. Luego en la entrevista no estructurada se le preguntó por qué no había dado respuesta a las preguntas 5 de la fase 2 y a ninguna de la fase 3, explicando que no encontró un camino para continuar, ya que realizó la operación en la calculadora y no le daba el resultado:

Profesor: ¿por qué no continuó con la pregunta 5 y la siguiente fase?

Estudiante A: porque realice esta operación en la calculadora y no me daba igual.

Profesor: ¿Qué operación?

Estudiante A: está [señala la respuesta 4 de la fase 2 donde escribió: r^2=sin θ^2 + cos θ^2].

Profesor: es que lo tienes mal escrito.

Estudiante A: ¡ah…si! El cuadrado va en el seno y coseno y no en el ángulo, pero en la calculadora coloqué un paréntesis, creo que es lo mismo, ¿no?

Profesor: muéstreme cómo lo hizo.

Estudiante A: puse esto en la calculadora [muestra la pantalla de la calculadora con la expresión $(\sin 24{,}57)^2 + \cos(24{,}57)^2$] porque veinticuatro punto cincuenta y siete es la medida del ángulo.

Profesor: ¿Y por qué dices que hay un error?

Estudiante A: porque esa operación me tendría que dar once punto noventa y siete, o sea el cuadrado del radio. Y no me da. Ensayé con varios valores del ángulo y siempre me da uno.

Profesor: ¿Qué puede concluir de esto?

Estudiante A: que estoy cometiendo un error, pero no sé dónde.

Profesor: te piden que factorices, ¿será eso?

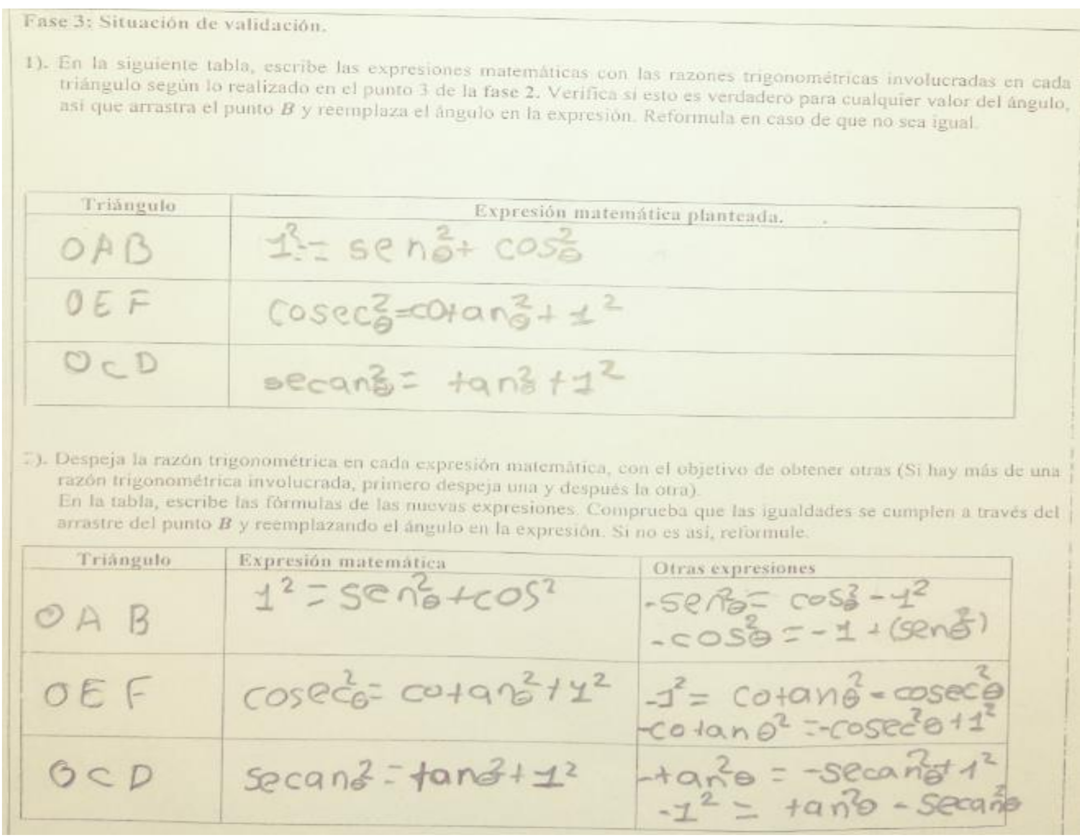
Estudiante A: no lo sé, porque ahí dice que es posible, o sea que también es posible hacerlo de otra manera, y es que no recuerdo cómo se factoriza.

A pesar de que durante la sesión, el estudiante A fue el único que comentó que el radio no era igual a 1 como en la construcción de la “tarea 1”, no reflexionó al respecto o le restó importancia, esto se puede evidenciar en la anterior transcripción.

En la tarea 3 se desempeñó con una menor complejidad, logrando encontrar la segunda y tercera Identidad Pitagórica, además de la primera que se le pedían en la tarea 2, realizando varias transformaciones. En esta tarea no hubo tanta dificultad en tanto que el radio era igual a 1, sin embargo, los tratamientos de la pregunta 2 de la fase 3 quedaron incompletos, a continuación, se puede observar esto en las respuestas del estudiante:

Figura 17

Respuesta Dada por Estudiante A en Tarea 3, Fase 3, Preguntas 1 y 2



Fase 3: Situación de validación.

1). En la siguiente tabla, escribe las expresiones matemáticas con las razones trigonométricas involucradas en cada triángulo según lo realizado en el punto 3 de la fase 2. Verifica si esto es verdadero para cualquier valor del ángulo, así que arrastra el punto *B* y reemplaza el ángulo en la expresión. Reformula en caso de que no sea igual.

Triángulo	Expresión matemática planteada.
OAB	$1^2 = sen^2_\theta + cos^2_\theta$
OEF	$cosec^2_\theta = cotan^2_\theta + 1^2$
OCD	$secan^2_\theta = tan^2_\theta + 1^2$

2). Despeja la razón trigonométrica en cada expresión matemática, con el objetivo de obtener otras (Si hay más de una razón trigonométrica involucrada, primero despeja una y después la otra).
En la tabla, escribe las fórmulas de las nuevas expresiones. Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto *B* y reemplazando el ángulo en la expresión. Si no es así, reformule.

Triángulo	Expresión matemática	Otras expresiones
OAB	$1^2 = sen^2_\theta + cos^2$	$-sen^2_\theta = cos^2_\theta - 1^2$ $-cos^2_\theta = -1 + (sen^2_\theta)$
OEF	$cosec^2_\theta = cotan^2_\theta + 1^2$	$-1^2 = cotan^2_\theta - cosec^2_\theta$ $-cotan\,\theta^2 = -cosec^2\theta + 1^2$
OCD	$secan^2_\theta = tan^2_\theta + 1^2$	$-tan^2\theta = -secan^2_\theta + 1^2$ $-1^2 = tan^2\theta - secan^2_\theta$

3.4.2. Resultados obtenidos con la estudiante B

Tabla 25

Resultados de la Estudiante Caso B.

Resultados de la Estudiante B.							
Tarea	**Fase**	**Pregunta**	**Categoría**				**Transformaciones hechas por el estudiante**
			A (R)	B (T↑)	C (C→)	D (C↔)	(Comparar con la **tabla 12** de los análisis *a priori)*
1	1	1	1		1^-		1 (**R**$_G$) →1b,1c (**C**$_{G\to V}$) 2 (**C**$_{G\to T}$) →2(**R**$_T$)
		2	1	0^+	1^-		
	2	1	1	1^-	1		1 (**C**$_{G\to T}$) → 1 (**R**$_T$) → 1 (**T↑**$_T$) → 2,3 (**C**$_{T\to A}$) → 2, 3 (**R**$_A$) → 2, 3 (**T↑**$_A$) → 4(**T↑A**)
		2	1^-	1^-	1^-		
		3	1^-	1^-	1^-		
		4		1^-			
	3	1		0^+		0^+	2 (**C**$_{G\leftrightarrow A}$)
		2				1^-	
2	1	1	1	0	0		1 (**R**$_G$) → 2 (**C**$_{G\to A}$)
		2			1		
		3			0^+		
		4		0	0		
	2	1	1				1 (**R**$_G$) → 4 (**C**$_{G\to A}$) → 4(**T↑**$_A$)
		2			0^+		
		3		0	0	0	
		4		1			
		5		0			
	3	1		0		0	2 (**T↑**$_A$) → 2 (**C**$_{A\leftrightarrow T}$) (**C**$_{T\leftrightarrow G}$) (**C**$_{G\leftrightarrow A}$) → 3(**C**$_{G,\ A,\ T\to V}$) → 3 (**C**$_{V\leftrightarrow G,\ A,\ T}$)
		2		1^-		1^-	
		3			1	1^-	
3	1	1	1				1, 2 (**R**$_G$) → 2 (**C**$_{G\to V}$)
		2	1		1		
	2	1	0	0	0		3(**C**$_{G\to V}$) →3 (**T↑**$_A$)
		2					
		3		1			
	3	1		1			1 (**T↑**$_A$) → 2 (**T↑**$_A$) → 2, 3 (**C**$_{A\leftrightarrow G}$) ↓ 2 (**R**$_A$)
		2	1^-	1^-		1^-	
		3				1^-	

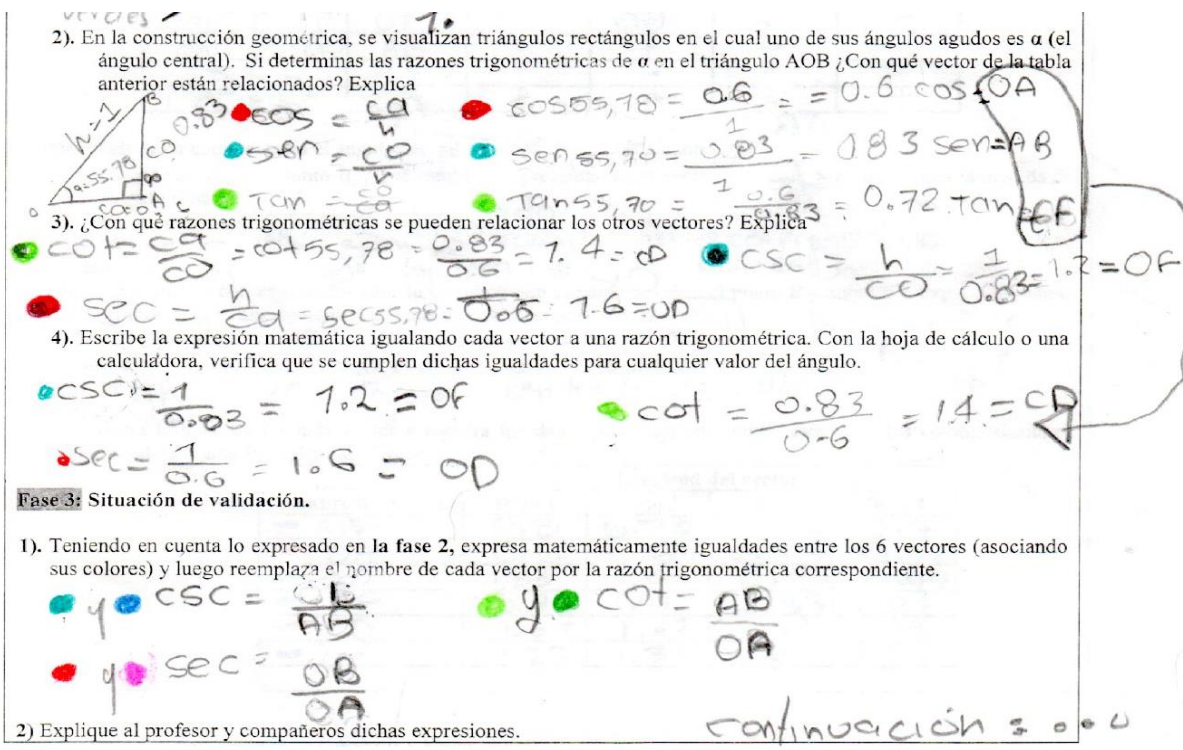
La estudiante B fue muy organizada al realizar las diferentes tareas. Así como el estudiante A, esta estudiante logra estructurar una ruta de trabajo. Fue muy independiente en este proceso, pero a la vez muy participativa. En la fase de *Institucionalización* compartió sus conclusiones de manera muy apropiada. Presenta una buena base de conocimientos previos que le permitieron enfrentarse a las tareas y avanzar a un ritmo rápido.

En la tabla 25 se pueden observar las múltiples transformaciones hechas por la estudiante, lo que también favoreció la construcción de su conocimiento y la transmisión del saber. Demuestra agilidad y destreza en el uso del GeoGebra, asumiendo con naturalidad el arrastre y la medida de los vectores. En ningún caso hizo preguntas al respecto.

a) tarea 1: la estudiante logra reconocer los elementos del sistema presentado, logrando identificar las líneas trigonométricas, sin embargo, en la fase 2, pregunta 4 y la fase 3, pregunta 1, presentó dificultades al registrar por escrito las Identidades Recíprocas, básicamente porque asumió que $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1}$, un error mencionado en los análisis preliminares.

Figura 18

Respuesta Dada por Estudiante B en Tarea 1, Fase 2, Preguntas 2, 3 y 4 y Fase 3


2). En la construcción geométrica, se visualizan triángulos rectángulos en el cual uno de sus ángulos agudos es α (el ángulo central). Si determinas las razones trigonométricas de α en el triángulo AOB ¿Con qué vector de la tabla anterior están relacionados? Explica

3). ¿Con qué razones trigonométricas se pueden relacionar los otros vectores? Explica

4). Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

Fase 3: Situación de validación.

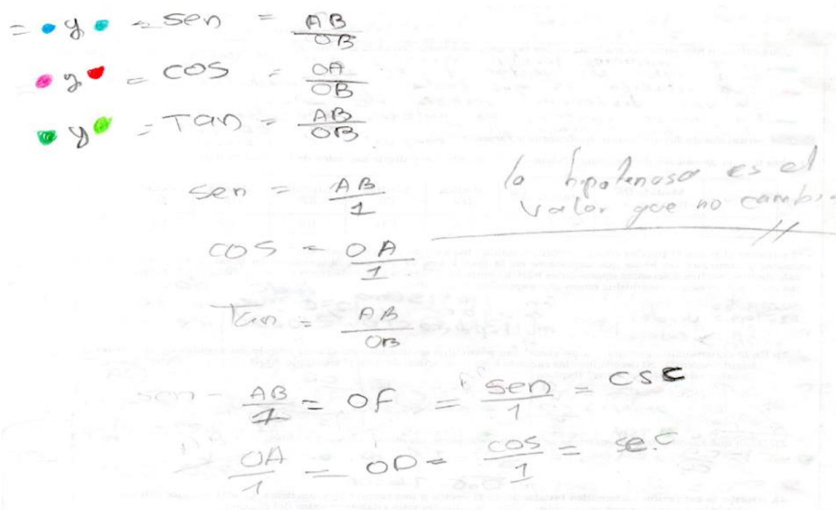
1). Teniendo en cuenta lo expresado en **la fase 2,** expresa matemáticamente igualdades entre los 6 vectores (asociando sus colores) y luego reemplaza el nombre de cada vector por la razón trigonométrica correspondiente.

2) Explique al profesor y compañeros dichas expresiones.

Podría decirse que en la situación de validación, la estudiante no logra coordinar los diferentes registros, pues la continuación de la respuesta a la fase 3 deja en evidencia esto al cometer el error mencionado anteriormente:

Figura 19

Continuación de la Respuesta Dada por Estudiante B en Tarea 1, Fase 3



Bien pudo tratarse de un error al escribir o una falta de coordinación entre registros, sin embargo, esto se confrontó con la estudiante en la fase de *institucionalización*, donde se le pidió que explicara su proceder (sin hacerle caer en cuenta del error), lo que evidencia que fue más un error de escritura que de falta de coordinación de registros, donde hizo unos aportes después de que el estudiante A relacionara los vectores con las razones trigonométricas:

Profesor: explica la fase 3.

Estudiante B: bueno, aquí nos están pidiendo que expresemos de seis maneras distintas los vectores de manera matemática, entonces tenemos que reemplazar la trigonométrica, que son seno, coseno y todas esas. Entonces tenemos que relacionar los colores, que serían … ¿Coloco los colores?

Profesor: no, coloca el nombre de los vectores de una vez.

Estudiante B: voy a empezar por la cosecante y una cosa es que la hipotenusa nunca cambia entonces es el número fijo que siempre se coloca. Como cosecante es hipotenusa sobre cateto opuesto entonces sería 1 sobre AB … [csc = $^{1}/_{AB}$ fue lo que la estudiante escribió en el tablero, determinado de la misma manera la cotangente y la secante].

Profesor: luego, ¿qué es lo que te piden en la fase 3?

Estudiante B: que reemplace el vector por la trigonométrica, por ejemplo, como AB es el seno, entonces me quedaría así: [csc = $1/_{seno}$ escribe la estudiante en el tablero, reemplazando de manera similar en la cotangente y la tangente].

Profesor: ¿y cómo sabes que esto es correcto?

Estudiante B: ah, porque se puede verificar con varios ángulos, por ejemplo, si arrastro el punto B, el central cambia, entonces AB también. Divido uno sobre AB y me da OF, o sea la cosecante, además eso también lo hice en la fase 2.

En esto se podría concluir entonces que la estudiante sí logró hacer las transformaciones y coordinaciones, pero presenta un error al creer que, por ejemplo, $\frac{AB}{1} = \frac{1}{AB}$. Luego, fuera de cámara se le preguntó esto a la estudiante:

Profesor: ¿por qué escribiste diferente en tu explicación y en la hoja de respuesta?

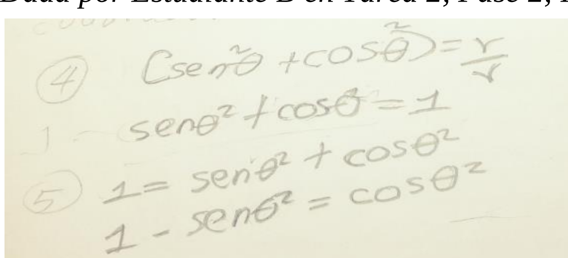
Estudiante B: no creo que esté diferente, estoy dividiendo entre 1, ¿no es lo mismo?

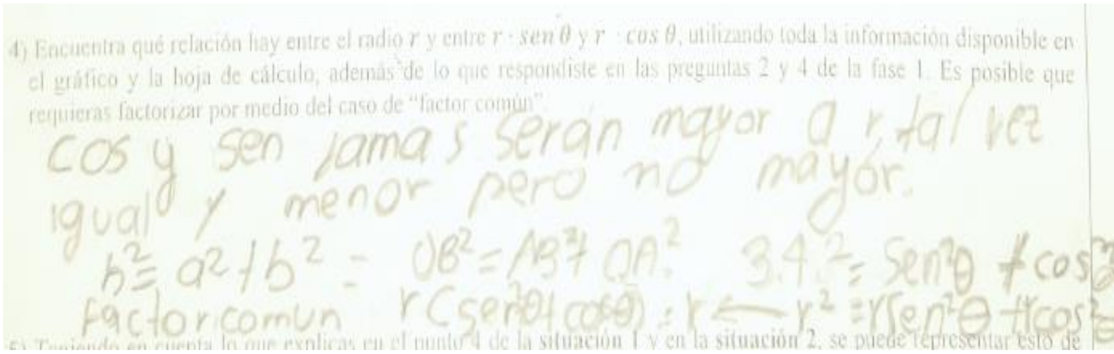
Aquí se puede observar que fue más un error conceptual que de transformaciones o coordinación.

b) Tarea 2 y 3: en la tarea 2, la estudiante presentó una contradicción que podría haberla solucionado gracias a la consigna. Esta contradicción está relacionada con la medida del radio. Si bien, en la pregunta 4 de la fase 2, la estudiante da a entender que $r = 1$ al indicar que el seno y el coseno jamás serán mayores al radio, logra encontrar la ITF Pitagórica por medio de la factorización que se le pide en la consigna:

Figura 20

Respuesta Dada por Estudiante B en Tarea 2, Fase 2, Pregunta 4 y Fase Pregunta 2




4) Encuentra qué relación hay entre el radio r y entre $r \cdot sen\,\theta$ y $r \cdot cos\,\theta$, utilizando toda la información disponible en el gráfico y la hoja de cálculo, además de lo que respondiste en las preguntas 2 y 4 de la fase 1. Es posible que requieras factorizar por medio del caso de "factor común".

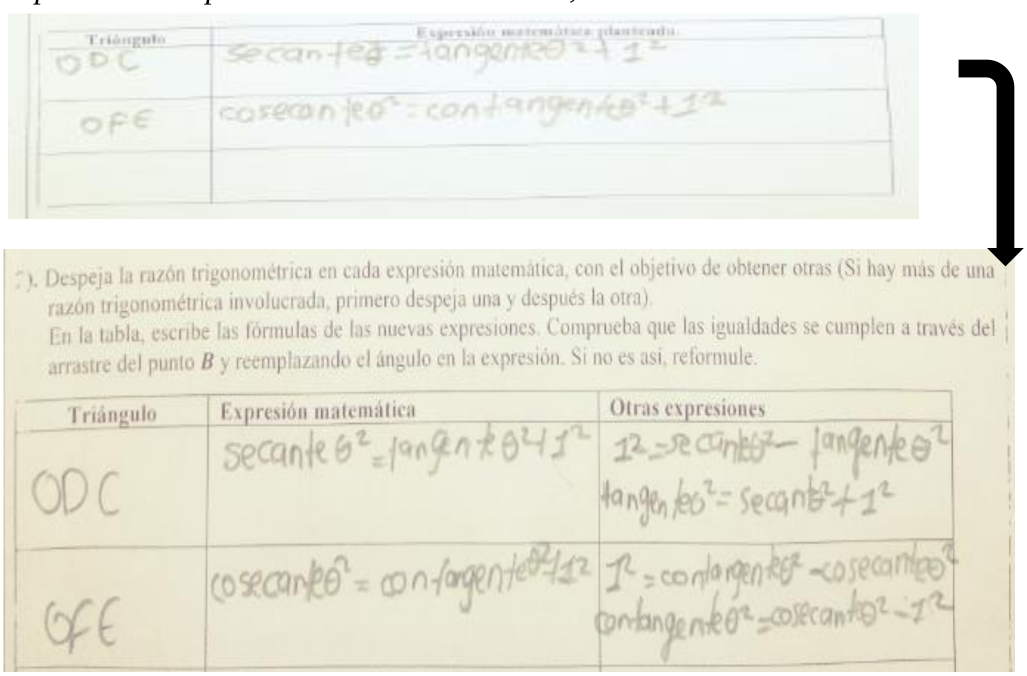
cos y sen jamas seran mayor a r, tal vez igual y menor pero no mayor.

factor comun

En la tarea 3 no presentó mayores dificultades, logrando concluir su trabajo con las otras ITF Pitagóricas realizando algunos tratamientos de estas en la fase 3.

Figura 21

Respuesta Dada por Estudiante B en Tarea 3, Fase 3 – Tratamiento



Triángulo	Expresión matemática planteada
ODC	secante θ² = tangente θ² + 1²
OFE	cosecante θ² = contangente θ² + 1²

5). Despeja la razón trigonométrica en cada expresión matemática, con el objetivo de obtener otras (Si hay más de una razón trigonométrica involucrada, primero despeja una y después la otra).
En la tabla, escribe las fórmulas de las nuevas expresiones. Comprueba que las igualdades se cumplen a través del arrastre del punto ***B*** y reemplazando el ángulo en la expresión. Si no es asi, reformule.

Triángulo	Expresión matemática	Otras expresiones
ODC	secante θ² = tangente θ² + 1²	1² = secante θ² − tangente θ² tangente θ² = secante θ² + 1²
OFE	cosecante θ² = contangente θ² + 1²	1² = contangente θ² − cosecante θ² contangente θ² = cosecante θ² − 1²

La estudiante no utiliza correctamente algunas abreviaturas de las razones trigonométricas y en varias de sus respuestas omite escribir el ángulo o el cuadrado de la razón lo escribe sobre este, sin embargo, esto no dificulta las transformaciones hechas. Dichos errores se superan en la fase de *institucionalización.*

3.4.3. Resultados obtenidos con el estudiante C

Tabla 26

Resultados del Estudiante Caso C

Resultados del Estudiante C.							
Tarea	**Fase**	**Pregunta**	**Categoría**				**Transformaciones hechas por el estudiante**
			A **(R)**	B **(T↑)**	C **(C→)**	D **(C↔)**	(Comparar con la **tabla 12** de los análisis *a priori)*
1	**1**	**1**	1^-		1^-		1 ($\mathbf{R}_G$) →1b,1c ($\mathbf{C}_{G\to V}$) 2 ($\mathbf{C}_{G\to T}$) →2($\mathbf{R}_T$)
		2	1	0	1		
	2	**1**	1	1^-	1		1 ($\mathbf{C}_{G\to T}$) → 1 ($\mathbf{R}_T$) → 1 ($\mathbf{T}\uparrow_T$) → 2 ($\mathbf{C}_{T\to A}$) → 2 ($\mathbf{T}\uparrow_A$)
		2	0^+	1^-	1		
		3	0	0	0		
		4		0			
	3	**1**		0		0	
		2				0	
2	**1**	**1**	1	0	1		1 ($\mathbf{R}_G$) → 1($\mathbf{C}_{G\to V}$) → 2 ($\mathbf{C}_{G\to A}$)
		2			1		
		3			0		
		4		0	0		
	2	**1**	0^+				
		2			0^+		
		3		0	0	0	
		4		0^+			
		5		0			
	3	**1**		0		0	2 ($\mathbf{C}_{G\to A}$) →2 ($\mathbf{T}\uparrow_A$)
		2		0		0	
		3			0	0	
3	**1**	**1**	1				1 ($\mathbf{R}_G$)
		2	0		0		
	2	**1**	1^-	0^+	1		1 ($\mathbf{C}_{G\to A}$) → 1 ($\mathbf{R}_A$)
		2					
		3		0			
	3	**1**		0^+			1 ($\mathbf{T}\uparrow_A$)
		2	0	0		0	
		3				0	

El estudiante C se mostró tímido en el desarrollo de las tareas. Esto también se vio evidenciado en la fase de *institucionalización* donde no participó y evitó compartir sus construcciones. Fuera de cámara se le hicieron algunas preguntas, donde se mostró mucho más inseguro y no logró explicar lo realizado en cada una de las tareas. Como se puede observar en la tabla 26, los reconocimientos y transformaciones hechas no son muy abundantes quedándose casi siempre en la categoría A según la matriz de análisis.

A pesar de que el estudiante tenía un buen manejo de GeoGebra, esto no implicó que sus procesos de visualización permitieran el objetivo de las tareas. Posee conocimientos previos que pudieron favorecer el desarrollo de las tareas, así, por ejemplo, se evidenció que reconoce las razones seno, coseno y tangente, pero no las inversas: cotangente, secante y cosecante. Identificó el Teorema de Pitágoras y los diferentes elementos del triángulo rectángulo.

a) tarea 1: Al inicio de esta tarea no estructuró un plan a seguir, por el contrario, durante algunos minutos hizo un arrastre del punto B sin una aparente razón. Las retroacciones no significaron mayor relevancia para él, en tanto que continuó con las diferentes fases y preguntas sin validar si lo escrito estaba o no correcto.

Así mismo, se pudo detectar una dificultad en sus procesos de generalización, pues la mayoría de sus respuestas estaban expresadas con las medidas de los vectores. En algunas de sus respuestas, principalmente cuando debía trabajar en un registro verbal, escribía frases muy obvias sin hacer una reflexión más profunda de estas:

Figura 22

Respuesta Dada por Estudiante C en Tarea 1, Fase 1, Preguntas 1b y 1c

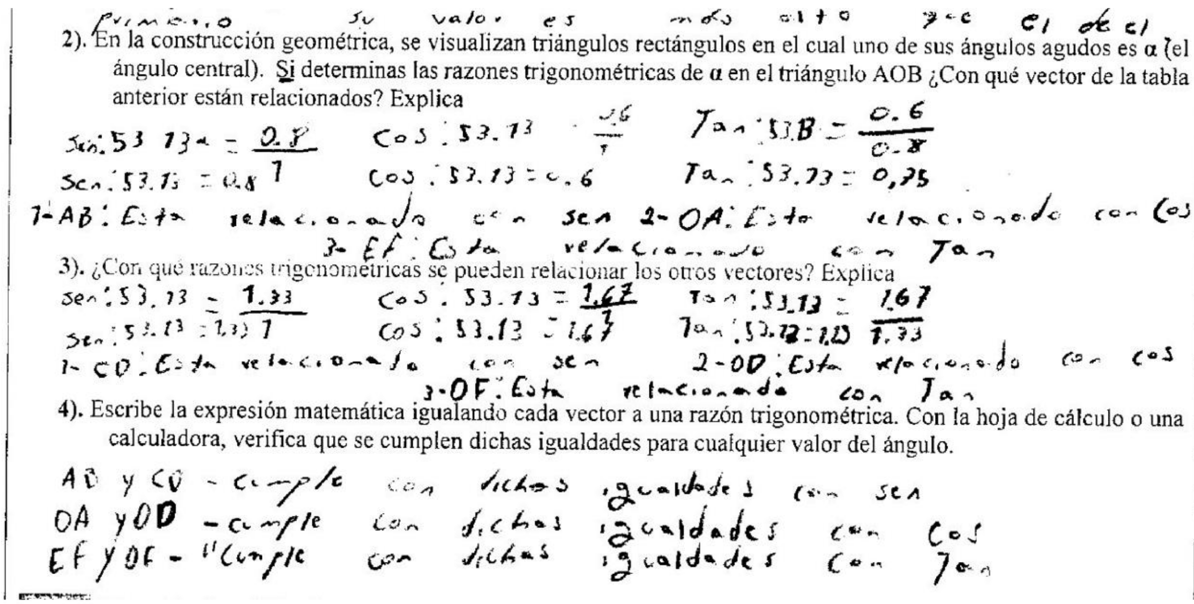
1b). Cuando arrastras el punto B, ¿Qué cambios se presentan en el vector $\overrightarrow{CD}$ cada vez que cambia la medida del ángulo central? Lo distancia entre los dos puntos disminuye o aumenta.

1c). ¿Qué sucede con este vector cuando se sobrepone el punto B sobre el punto E y sobre E'? Explica. ¿Cuántos grados mide el ángulo central en cada una de estas posiciones? El vector CD paso a ser positivo en el punto "E" y en el punto "E'" paso a ser negativo.
El angulo en la posición "E" es de 90° y en la posicion "E'" es de 270°.

Como el estudiante reconoció los elementos del triángulo rectángulo y sabía de antemano las razones seno, coseno y tangente estas las pudo relacionar con las líneas trigonométricas, pero al tratar de relacionar las otras líneas trigonométricas, tomó el triángulo OCD y relacionó sus lados también con el seno, coseno y tangente. Su proceso de visualización y la hoja de cálculo no significaron mayor ayuda al respecto, en la respuesta dada en la pregunta 3 y 4 de la fase 2 se puede observar este error:

Figura 23

Respuesta Dada por Estudiante C en Tarea 1, Fase 2, Preguntas 2, 3 y 4



Primero su valor es mas alto que el de cl

2). En la construcción geométrica, se visualizan triángulos rectángulos en el cual uno de sus ángulos agudos es α (el ángulo central). Si determinas las razones trigonométricas de α en el triángulo AOB ¿Con qué vector de la tabla anterior están relacionados? Explica

Sen: 53.13 = 0.8/1 Cos: 53.13 = 0.6/1 Tan: 53.13 = 0.6/0.8

Sen: 53.13 = 0.8 Cos: 53.13 = 0.6 Tan: 53.13 = 0,75

1- AB: Esta relacionado con sen 2- OA: Esta relacionado con Cos 3- EF: Esta relacionado con Tan

3). ¿Con qué razones trigonométricas se pueden relacionar los otros vectores? Explica

Sen: 53.13 = 1.33/1 Cos: 53.13 = 1.67/1 Tan: 53.13 = 1.67/1.33

Sen: 53.13 = 1.33 Cos: 53.13 = 1.67 Tan: 53.13 = 1.25

1- CD: Esta relacionado con sen 2- OD: Esta relacionado con cos 3- OF: Esta relacionado con Tan

4). Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

AB y CD - cumple con dichas igualdades con sen

OA y OD - cumple con dichas igualdades con Cos

EF y OF - "cumple con dichas igualdades con Tan

Obsérvese cómo en la pregunta 4 concluye que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ corresponden al seno. Lo mismo sucede con las otras dos razones trigonométricas. Esto se le preguntó fuera de cámara:

Profesor: ¿Cómo obtienes el seno, coseno y tangente del ángulo central en la gráfica?

Estudiante C: pues primero lo hice en el triángulo pequeño y luego en el grande.

Profesor: ¿Cuáles?

Estudiante C: el pequeño es este [señala el triángulo OAB] y el grande es este [señala el triángulo OCD]. Entonces, por ejemplo, el seno es cateto opuesto sobre hipotenusa, el cateto opuesto en el pequeño es AB y en el grande es CD.

Profesor: ¿y cuánto mide la hipotenusa en cada uno?

Estudiante C: bueno, en el pequeño mide uno. ¡En el grande…mmm! ¡No sé!

***Profesor*:** pero en la respuesta tres pusiste que el seno de cincuenta y tres punto trece era uno punto treinta y tres sobre uno. ¿De dónde obtuviste el uno si OD, que sería la hipotenusa de ese triángulo, no mide uno?

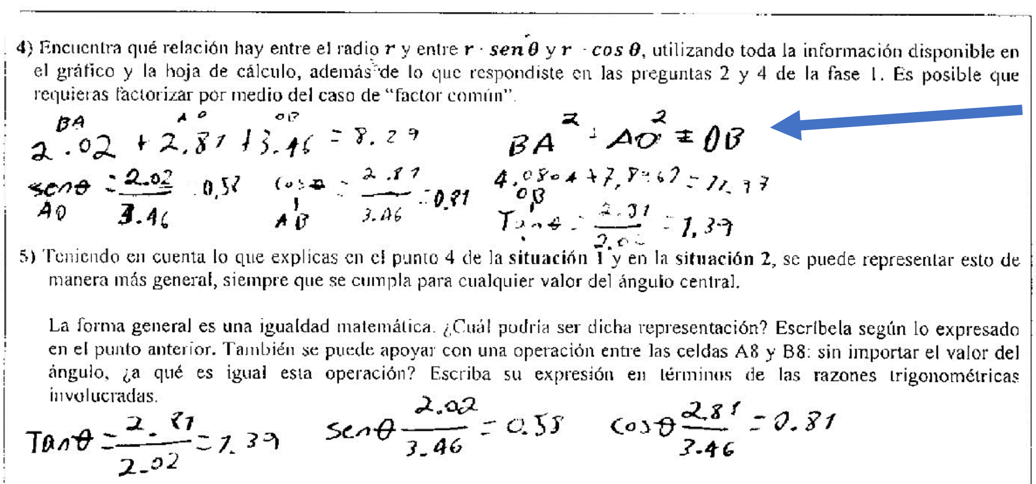
Estudiante C: no lo sé. Creí me medía uno también.

Se puede evidenciar que el estudiante no se apoyó ni en la gráfica ni en la hoja de cálculo para dar algunas conclusiones. En esta tarea el estudiante no logró el objetivo.

b) Tarea 2 y 3: en estas tareas el estudiante presentó unas dificultades similares a las presentadas en la tarea 1. Si bien, en la tarea 2 reconoce el Teorema de Pitágoras y logra reemplazar los vectores, nuevamente se le dificulta sus procesos de generalización. No solamente la medida del radio representa un obstáculo para el estudiante, sino también la confusión que presenta con las razones trigonométricas, principalmente, la tangente.

Figura 24

Respuesta Dada por Estudiante C en Tarea 2, Fase 2, Preguntas 4 y 5



4) Encuentra qué relación hay entre el radio r y entre $r \cdot sen\,\theta$ y $r \cdot cos\,\theta$, utilizando toda la información disponible en el gráfico y la hoja de cálculo, además de lo que respondiste en las preguntas 2 y 4 de la fase 1. Es posible que requieras factorizar por medio del caso de "factor común".

5) Teniendo en cuenta lo que explicas en el punto 4 de la **situación 1** y en la **situación 2**, se puede representar esto de manera más general, siempre que se cumpla para cualquier valor del ángulo central.

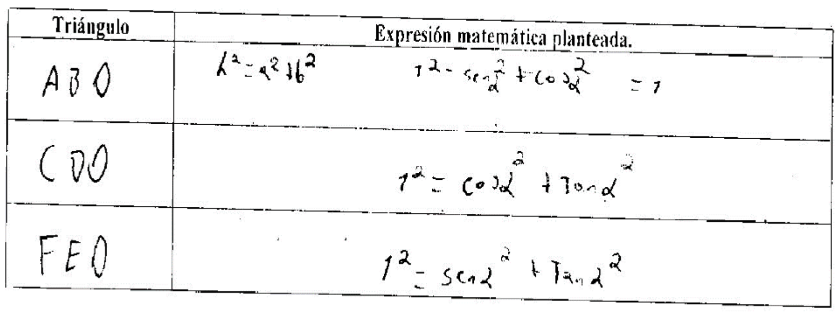
La forma general es una igualdad matemática. ¿Cuál podría ser dicha representación? Escríbela según lo expresado en el punto anterior. También se puede apoyar con una operación entre las celdas A8 y B8: sin importar el valor del ángulo, ¿a qué es igual esta operación? Escriba su expresión en términos de las razones trigonométricas involucradas.

Se observa cómo el estudiante identifica el Teorema de Pitágoras (donde señala la flecha), aunque con cierta confusión respecto a la hipotenusa. Sin embargo, no continúa generalizando sino que reemplaza esto con valores numéricos. En esta tarea el estudiante tampoco logró el objetivo.

En la tarea 3 logró encontrar la Identidad que se le pedía en la tarea 2, sin embargo, el error que presentó en la tarea 1 también se vio reflejado en las otras identidades que debía encontrar o tratar de construir, esto a pesar de las fases de *institucionalización* de las dos anteriores tareas donde se construyeron estos saberes:

Figura 25

Respuesta Dada por Estudiante C en Tarea 3, Fase 3, Pregunta **1**



Triángulo	Expresión matemática planteada.
ABO	$\lambda^2 = a^2 + b^2$ $\quad 1^2 = sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
CDO	$1^2 = cos^2\alpha + tan^2\alpha$
FEO	$1^2 = sen^2\alpha + tan^2\alpha$

En el primer triángulo pudo determinar la Identidad Trigonométrica (la que se le pedía en la tarea 2), pero presenta un error en la otras dos. Al preguntarle por esto al estudiante, da una explicación similar a la que dijo en la tarea 1.

3.4.4. Resultados obtenidos con el estudiante D

Tabla 27

Resultados del Estudiante Caso D

Resultados de la Estudiante D.							
Tarea	**Fase**	**Pregunta**	**Categoría**				**Transformaciones hechas por el estudiante**
			A **(R)**	B **(T↑)**	C **(C→)**	D **(C↔)**	(Comparar con la **tabla 12** de los análisis *a priori)*
1	1	**1**	1^-		1^-		1 **(R**$_G$**)** →1b,1c **(C**$_{G}$→$_V$**)** 2 **(C**$_G$→$_T$**)**
		2	0	0	1^-		
	2	**1**	0	0	1		1 **(C**$_G$→$_T$**)**
		2	0	0	0		
		3	0	0	0		
		4		0^+			
	3	**1**		0		0	1**(R**$_G$**)**
		2				0	

2	**1**	**1**	0	1^-	0		1 **($T\uparrow_A$)**
		2			0		
		3			0		
		4		0	0^+		
	2	**1**	1^-				1 **(R_G)**
		2			0		
		3		0	0	0	
		4		0			
		5		0^+			
	3	**1**		0		0	2 **($C_{G\rightarrow A}$)** $\rightarrow$2 **($T\uparrow_A$)**
		2		0		0	
		3			0	0	
3	**1**	**1**	1^-				1 **(R_G)**
		2	0+		0		
	2	**1**	1	1	1^-		1 **($C_{G\rightarrow A}$)** $\rightarrow$ 1 **(R_A)** $\rightarrow$ 1 **($T\uparrow_A$)**
		2					
		3		1^-			
	3	**1**		1^-			1 **($T\uparrow_A$)**
		2	0	0		0	
		3				0	

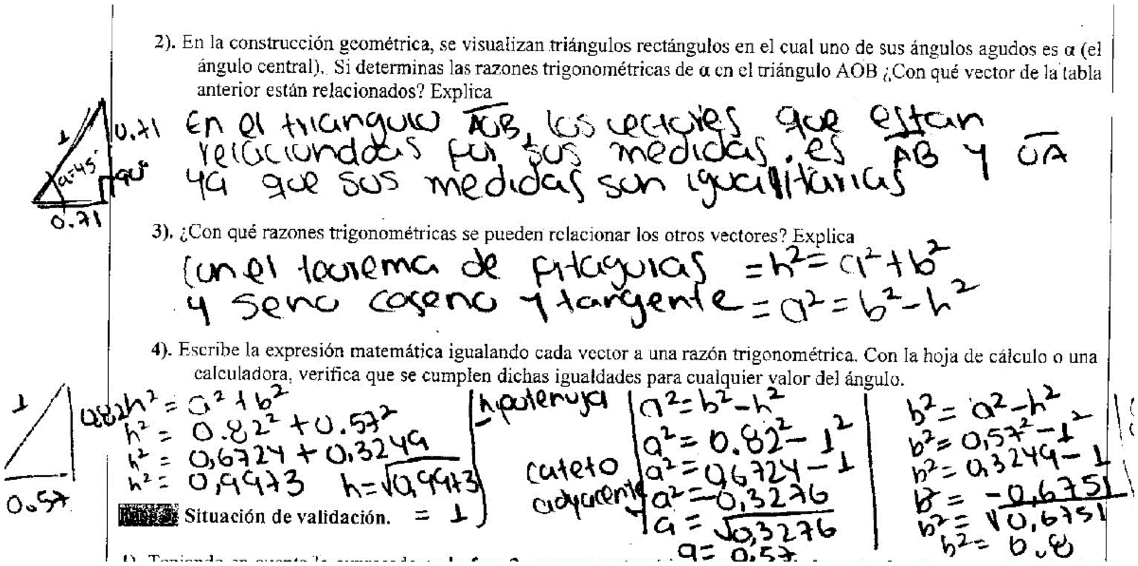
La estudiante fue muy tímida en el desarrollo de las tareas. Al igual que el estudiante C, no participó en la fase de *institucionalización* manifestando que prefería hacerlo sin la cámara de filmación. El uso de GeoGebra no significó mayor dificultada para ella sin embargo, hizo algunas preguntas básicas de ciertas herramientas donde se le dio algunas explicaciones que no requirieron de mucho tiempo.

Como se puede observar en la tabla 27, las transformaciones hechas por la estudiante fueron muy escasas, presentando también dificultades en el reconocimiento de los elementos de algunas representaciones. De igual manera, se puede observar en la tabla que no logró realizar coordinación entre registros.

a) tarea 1: las dificultades en el proceso de visualización matemática y en los conocimientos previos de la estudiante, llevaron a unas producciones muy escasas y básicas por lo que el objetivo de la tarea 1 no se logró. Uno de los conocimientos previos fundamentales en esta tarea, son las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Se pudo evidenciar que la estudiante no tenía claro estos:

Figura 26

Respuesta Dada por Estudiante D en Tarea 1, Fase 2, Preguntas 2, 3 y 4


2). En la construcción geométrica, se visualizan triángulos rectángulos en el cual uno de sus ángulos agudos es α (el ángulo central). Si determinas las razones trigonométricas de α en el triángulo AOB ¿Con qué vector de la tabla anterior están relacionados? Explica

En el triangulo AOB, los vectores que estan relacionados por sus medidas, es AB y OA ya que sus medidas son igualitarias

3). ¿Con qué razones trigonométricas se pueden relacionar los otros vectores? Explica

Con el teorema de Pitagoras $= h^2 = a^2 + b^2$
y seno coseno y tangente $= a^2 = b^2 - h^2$

4). Escribe la expresión matemática igualando cada vector a una razón trigonométrica. Con la hoja de cálculo o una calculadora, verifica que se cumplen dichas igualdades para cualquier valor del ángulo.

$h^2 = a^2 + b^2$
$h^2 = 0.82^2 + 0.57^2$
$h^2 = 0,6724 + 0,3249$
$h^2 = 0,9973$ $h = \sqrt{0,9973} = 1$

hipotenusa

$a^2 = b^2 - h^2$
$a^2 = 0.82^2 - 1^2$
$a^2 = 0,6724 - 1$
$a^2 = -0,3276$
$a = \sqrt{0,3276}$
$a = 0,57$

cateto adyacente

$b^2 = a^2 - h^2$
$b^2 = 0,57^2 - 1^2$
$b^2 = 0,3249 - 1$
$b^2 = -0,6751$
$b^2 = \sqrt{0,6751}$
$b^2 = 0,8$

Situación de validación.

A pesar de que se le preguntaba por razones trigonométricas (preguntas 3 y 4) la estudiante aplica el Teorema de Pitágoras. De igual manera, se puede evidenciar una dificultad en sus procesos de generalización y ambigüedades en su redacción.

b) Tarea 2 y 3: a pesar de que en la tarea 1 la estudiante reconoce el Teorema de Pitágoras, en la tarea 2 no se hace uso de este, por el contrario confunde las razones trigonométricas con el Teorema por el cual se le pregunta. El proceso de visualización matemática no se ve reflejado en la producción que hace la estudiante. Además, les resta importancia a las retroacciones del medio.

En la tarea 3 la estudiante contaba con una ventaja: las fases de *institucionalización* de las dos tareas anteriores donde no sólo fue la transmisión del saber por parte del docente, sino que hubo unas conclusiones por parte de los estudiantes A y B. Esto permitió un mejor desempeño en la tarea 3, donde la estudiante logró construir la Identidad Pitagórica de la tarea 2 y otra que se le pedía en la tarea 3. Sin embargo, no logró hacer tratamientos con estas ni coordinar registros.

Figura 29

Respuesta Dada por Estudiante D en Tarea 3, Fase 3, Preguntas 1

Triángulo	Expresión matemática planteada.
(ΔEFO)	$csc^2\theta = cot^2\theta + 1^2$
(ΔBAC)	$1 = cos^2\theta + sin^2\theta$

Sobre esta construcción, se le preguntó a la estudiante cómo hizo para lograrla, donde se comprueba que no fue una construcción sólo de ella, sino que se apoyó en lo dicho por sus compañeros:

Profesor: ¿Cómo encontró la expresión en cada triángulo, por ejemplo, en el primero?

Estudiante D: pues en ese triángulo que es rectángulo se cumple Pitágoras. Como OF es la cosecante y EF la cotangente, además OE mide uno, sólo reemplacé esto en el Teorema de Pitágoras.

Profesor: ¿Cómo sabes que esas líneas trigonométricas corresponden a la cosecante y a la tangente?

Estudiante D: bueno, así lo explicaron en la tarea 1.

Profesor: ¿entonces no verificaste que esto fuera cierto en la gráfica?

Estudiante D: no.

Profesor: ¿por qué?

Estudiante D: porque ya lo habían explicado, además no sé hacerlo desde la gráfica.

3.3.5. Análisis a posteriori

Para este análisis se tiene en cuenta la importancia de las representaciones en la construcción de las ITF, por esto, teniendo en cuenta a Hitt (2001), se analizará el proceso de visualización matemática a partir de las *redes* de representación que se dieron en las interconexiones de los registros.

Los estudiantes A y B presentan una red como la descrita en la Figura 11 por lo que ellos se encuentran en la categoría D de la matriz de análisis, pues lograron realizar coordinación entre registros con numerosas conexiones. Al respecto, se favoreció el aprendizaje de las ITF, por lo que se puede decir que comprenden o entienden este objeto matemático.

En contraste, los estudiantes C y D presentaron una red de conexiones muy escasas por lo que no se favoreció el aprendizaje de las ITF con ellos. Las gráficas 28 y 29 presentan estas redes:

Figura 32

Red de Representación del Estudiante C

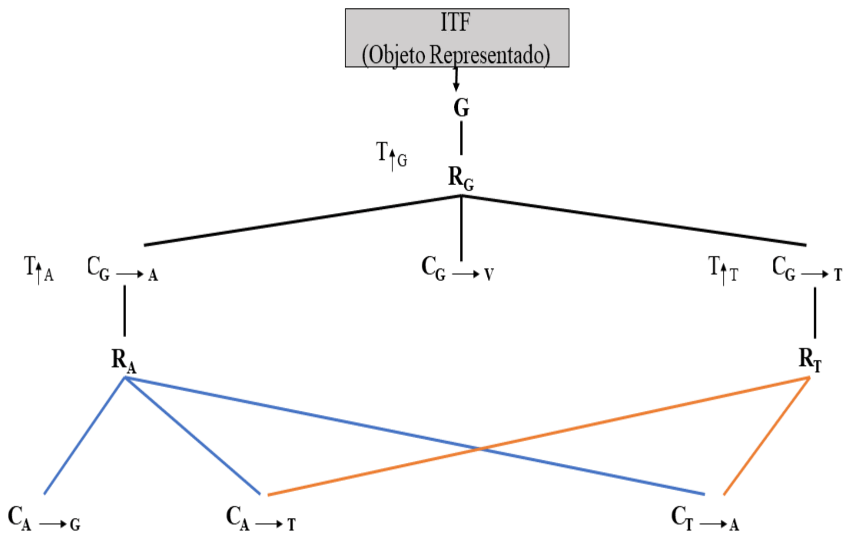
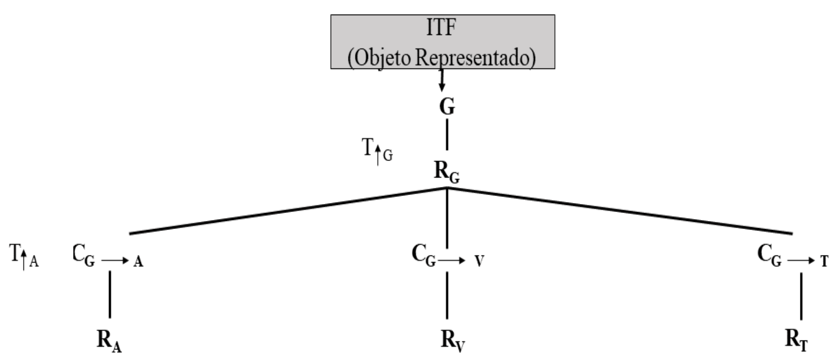


Figura 35

Red de Representación de la Estudiante D



Los estudiantes C y D, aunque lograron algunas conversiones, se encuentran en la categoría B, lo que implica que la construcción del conocimiento referente a las ITF fue muy pobre por la falta de conexiones abundantes en sus redes de representación.

A continuación, este análisis se complementa con una confrontación según lo que se tenía previsto en los análisis *a priori* y los resultados obtenidos:

1. Como se había previsto en el análisis *a priori*, los estudiantes presentaron errores de tipo conceptual y procedimental respecto a algunos objetos matemáticos, principalmente, los relacionados con los conocimientos previos necesarios para cada tarea, por ejemplo: dificultades en el proceso de factorización, operaciones con radicales y potencias (en la fase 3 de las tareas 2 y 3), pues se les dificultó despejar una de las razones trigonométricas en una Identidad (tratamiento).

2. Según lo expuesto en el análisis cognitivo, la estudiante B consideró correcto que la expresión $\frac{AB}{1} = \frac{1}{AB}$, esto le representó un error al momento de determinar las IT Recíprocas.

3. Como se tenía previsto, la medida de r significó una dificultad para los estudiantes en la tarea 2, aunque ellos no fueron conscientes de ello, pues no hubo comprensión del papel de la medida del radio en el círculo y esto hizo que se llegara a conclusiones erradas como $\sin\theta = \overrightarrow{AB}$, cuando la expresión correcta era $\sin\theta = \frac{\overrightarrow{AB}}{r}$, siendo $r \neq 1$.

4. Se tenía previsto que el proceso de visualización matemática fuera una dificultad, pues como se había mencionado, en la escuela no se forma el pensador visual. Sin embargo, se encontró que dos de los estudiantes (A y B) son visualizadores en potencia, mientras en contraste, los otros dos presentan dificultades al respecto. Esto permitió que los estudiantes A y B realizaran unos tratamientos muy similares a los descritos en la tabla 12, por lo que su red de representación presentó fuertes y numerosas conexiones, como la que se muestra en la Figura 11.

Capítulo 4: Conclusiones y recomendaciones

En este último capítulo se presentan las conclusiones en relación con la pregunta, los objetivos, las hipótesis del diseño, el marco teórico, la metodología y las reflexiones y/o recomendaciones que deja este proceso de sistematización:

Con lo anterior, se plantearon un objetivo general y dos específicos que se articularon con un referente teórico para dar respuesta a la pregunta de investigación. Respecto al objetivo general, se concluye lo siguiente:

1) Se diseñaron y pusieron en acto tres Situaciones Didácticas a cuatro estudiantes, donde la geometría del círculo contrarrestó el uso exclusivo de la representación algebraica que se le ha dado a las ITF. En este sentido, el *medio* fue el GeoGebra que permitió articular múltiples representaciones y esto permitió analizar algunos procesos de aprendizaje.

2) Las Situaciones Didácticas favorecieron el aprendizaje de las ITF a dos de los cuatro estudiantes, pues teniendo en cuenta los *Registros Semióticos de Representación*, estos realizaron diferentes transformaciones en más de un registro, encontrándose en el nivel 4 de la matriz de análisis (Ver Tabla 11). Por esto, se considera que dichas Situaciones cumplen con ciertos elementos histórico – epistemológicos, cognitivos y didácticos (descritos en los análisis preliminares y los cuales se expondrán en el siguiente párrafo) que soportan este trabajo. Sin embargo, no sucedió lo mismo con los otros dos estudiantes. Tales resultados no se consideran como un fracaso desde el punto de vista didáctico, por el contrario, en ambos casos se pueden tomar elementos que permitan reestructurar o generar nuevas tareas (o investigaciones) propiciando algunas recomendaciones. Dichas recomendaciones se expondrán más adelante.

Respecto a los objetivos específicos se concluye lo siguiente:

1) Se fundamentaron elementos histórico – epistemológicos, cognitivos y didácticos que debían cumplir las Situaciones Didácticas diseñadas de tal manera que favorecieran la construcción y comprensión de las ITF. Estos elementos se extraen desde los análisis preliminares:

- Análisis histórico-epistemológico: se determina que la *geometría del círculo* es un enfoque que permite la *génesis artificial* del objeto matemático en cuestión. Se consideró la exclusividad del registro algebraico en la enseñanza de las ITF como un obstáculo didáctico ya que no permite una construcción del conocimiento y genera conceptos carentes de significado. El círculo, como elemento articulador, permitió que los estudiantes realizaran más conexiones (red) con otras representaciones siendo esta una propuesta para superar dicho obstáculo.
- Análisis cognitivo: la *visualización matemática* se consolidó como el proceso que permitió una visión global y holística de las ITF desde el punto de vista epistemológico y didáctico, así como el uso de registros semióticos de representación diversos tales como: gráfico, algebraico, tabular y verbal. La *coordinación* de estos registros, expresados en el número y fuerza de las conexiones, permitieron determinar el aprendizaje de las ITF y los errores que cometieron los estudiantes. Esto determinó, en cierta medida, el alcance del objetivo general de la investigación.
- Análisis didáctico: la TSD como marco teórico permitió un proceso constructivista del conocimiento de los estudiantes, esto se dio gracias a las situaciones *a-didácticas,* pues en el diseño se tuvo la intencionalidad que GeoGebra como *medio* brindara las retroacciones necesarias para que el docente-investigador no interviniera en la solución del problema que el estudiante estaba realizando. Dichas retroacciones estaban condicionadas, principalmente, por las acciones que el estudiante realizaba sobre este y el dinamismo que proporciona el AGD, gracias a las acciones de “arrastre” y a la herramienta “Distancia o Longitud”.

2) Se analizó la actividad matemática (transformaciones de registros, construcción, comprensión, resolución de problemas) por medio del proceso de *visualización matemática* de los estudiantes cuando se enfrentaron a construcciones geométricas que pretendían llevarlos a

comprender las ITF. Con esto se determinó la *red de representaciones* que ellos realizaron en este proceso de construcción. Al respecto, se concluye que:

- Se hace indispensable llevar a cabo prácticas de aula que desarrollen el pensamiento geométrico-visual, pues como se ha justificado en este trabajo, las clases de matemáticas enfatizan más en procesos no visuales. Cuando los estudiantes son visualizadores en potencia (Caso A y B), pueden lograr unos avances significativos en procesos constructivistas franqueando algunos obstáculos. Por el contrario, si no son visualizadores potenciales (casos C y D) pueden presentar redes de representación muy pobres cognitivamente. Con esto no se pretende afirmar que el desarrollo de procesos visuales deba ser un fin en el currículo. La Visualización Matemática debe ser un medio que permita una mayor comprensión y capacidad de construcción del conocimiento matemático. En este sentido, se entendió la Visualización Matemática como Hitt (1998, 2000, 2001) y Adame et al. (2019) la proponen, cuando se interrelaciona con los registros representación gráficos usado ambientes digitales (AGD) que son fundamentales para ayudar a la comprensión de los estudiantes cuando se enfrentan a las matemáticas.
- La actividad matemática del estudiante estuvo determinada por las devoluciones del problema que este realizaba en la solución de las tareas (además de la aceptación de la situación, como se menciona en la TSD), sin embargo, también jugó un papel importante la aplicación de conocimientos previos que debían tener los estudiantes como teoremas, conceptos, operaciones, etc., lo que favoreció o dificultó sus desempeños y construcciones (obstáculos epistemológicos).
- La teoría de los *Registros Semióticos de Representación* desde Duval (1999) significó una incidencia relevante para el análisis de la actividad matemática de los estudiantes, ya que por medio de las *transformaciones* que realizaron (*tratamientos* y *conversión*) se pudieron determinar algunos procesos mentales (como la *comprensión* y la *generalización*) a través de las redes de representación desde Adame, (2017) y Adame, et al. (2019).
- Los análisis preliminares permitieron determinar algunos obstáculos didácticos y epistemológicos permitiendo orientar el diseño de las Situaciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede dar razón de las hipótesis del diseño de las Situaciones Didácticas, pues al contrastarlas los resultados obtenidos en el presente trabajo se puede entrever que estas se cumplieron, pero a la vez dejaron unas importantes reflexiones:

1) La construcción geométrica generó procesos de visualización matemática propiciando en los estudiantes una red de representación, determinadas por su capacidad visual y saberes previos que, en dos de los casos, lograron determinar las ITF o construir conocimientos que hicieron menos complejo este proceso en la fase de *institucionalización.* Para dar cuenta de esto, se utilizó la matriz de análisis (Ver Tabla 11), los resultados que arrojaron los estudiantes según los reconocimientos y transformaciones que realizaron (Ver Tablas 24, 25 26 y 27 comparada con la Tabla 12) y su red de representación.

2) Dos de los estudiantes determinaron las ITF desde la construcción geométrica o construyeron conocimientos que permitieron la transmisión de este saber, esto se dio por medio de la transformación de registros, sin embargo, fue más complejo al momento de determinar otras Identidades (aunque determinaron algunas) debido esto a una dificultad en el *tratamiento* y no la *coordinación* de los registros, que de hecho la lograron, pues se clasificaron en la categoría D de la matriz de análisis. Lo anterior permitió superar obstáculos didácticos y epistemológicos en alguna medida.

3) Aunque dos de los estudiantes no lograron determinar las ITF a través de todo lo diseñado, generaron una escasa red de representación que podría ser la base para fortalecer sus procesos de construcción del conocimiento. En estos casos, cabe resaltar el potencial de GeoGebra como *medio*, pues a pesar de lo expuesto, estos estudiantes tuvieron la oportunidad de acceder a varios *registros semióticos de representación* y crear su red de representación, situación que no se presentaría si se abordan las ITF sólo desde el registro algebraico como es costumbre.

A continuación, se exponen algunas reflexiones que podrían mejorar los resultados al respecto y que no hicieron parte de este proceso de sistematización de la experiencia docente. Es importante tener en cuenta que estos dos estudiantes son casos que se eligieron porque no se catalogan dentro un buen desempeño en el área. La intención era determinar cuál sería su actividad matemática dentro de todo el marco que se ha planteado, por lo que para el autor de este trabajo son relevantes para identificar las debilidades o aspectos por mejorar en las tareas y en general, para analizar algunos aspectos que se podrían tener en cuenta en futuras investigaciones, esto, sin menoscabo de los otros dos casos:

1) Como lo sugirieron Zimmermann & Cunningham (1990), la visualización matemática basada en el uso de tecnologías digitales puede usarse de manera eficiente y significativa si el estudiante tiene ciertas capacidades o habilidades fundamentales para este proceso cognitivo (por ejemplo: dibujar una figura para representar un problema matemático, interpretar cifras para comprender y usarlas como una ayuda en la resolución de problemas). En este proceso de sistematización de la experiencia docente no se hizo un trabajo previo para determinar esta cuestión. Se recomienda que para futuras investigaciones o sistematizaciones se profundice al respecto y se puedan diseñar situaciones, guías, encuestas u otras herramientas didácticas las cuales den cuenta de la capacidad visual del estudiante. Una información como esta podría generar un rediseño de las tareas del presente trabajo.

2) El uso de la tecnología *per se* no va a resolver el problema del aprendizaje de las matemáticas (Hitt, 2003), por lo tanto es importante analizar el uso reflexivo de las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3) Se requiere que los errores de los estudiantes, producto tanto de los obstáculos didácticos como epistemológicos, se constituyan en un insumo para nuevas investigaciones o rediseño de las tareas propuestas. Algunos de estos errores fueron determinados en los análisis preliminares, pero no todos fueron franqueables, sin embargo, esta investigación sienta precedentes al respecto en el aprendizaje de las ITF.

4) Se hace necesario proponer investigaciones que atiendan a la coherencia horizontal planteada en los estándares, no sólo en la trigonometría, sino en diferentes objetos matemáticos. Futuras investigaciones deben propender por fomentar la visualización matemática, por lo que requería de hacer uso de la gráfica y otros registros de representación, no sólo el algebraico.

5) Este proceso investigativo ha dejado en el docente, autor de este trabajo, reflexiones pertinentes acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, basadas, principalmente en una posición más crítica de los Lineamientos y Estándares, pero sobre todo en la tarea dispendiosa que es desarrollar el pensamiento matemático. Se hace necesario dar ese “salto” de enseñar sólo contenidos, por el de desarrollar competencias como la resolución de problemas o la capacidad para representar objetos matemáticos en diferentes registros. No se está minimizando la importancia del objeto como tal, pues si se analiza, en esta investigación, las ITF fueron una excusa para orientar los estudiantes por esta actividad matemática.

Referencias

Acosta, M. E., Fiallo, J. E. (2017). *Enseñando Gometría con Tecnología Digital una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas.* 1 ed. Bogotá, D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Adame, A. (2017). *Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior*. (Tesis Maestría en Matemática Educativa). Universidad Autónoma de Zacatecas "Francisco García Salinas", Zacatecas.

Adame, A., Torres, M., Borjón, E., Hitt, F. (2019). Levels of Understanding of the Trigonometric Identity Concept Through Mathematical Visualization in Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*, 364–373.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-49). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamerica.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467–496). Springer, Dordrecht.

Arzarello, F. (2001). *Dragging , perceiving and measuring : physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments.* Proceddings of Cabriworld 2, Montreal, Plenary Lecture.

Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática* (Alianza Ed). Madrid.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación a la Teoría de Situaciones Didácticas*. [*Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study*]. (Fregona, D.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral, R., Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN*, 694–701.

Chamorro, C. (2002). Métodos alternativos de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: la obervación. En *Actas del VI Simposio de la SEIEM: Logroño* (pp. 73–94). Madrid, España.

Chamorro, C. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En: Chamorro, C., *Didáctica de las Matemáticas para primaria*. (pp. 70-93). Madrid, España, Pearson Educación.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, Á. M., Ramirez, A. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría.* México: Pearson Educación.

Dugdale, S. (1989). Building a qualitative perspective before formalizing procedures:graphical representations as a foundation for trigonometric identities. En C. Maher, G. Goldin, & R. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 249–255). New Jersey.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. [Les problemes fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques et les formes supérieures du développement cognitif. Cours donné a lÚniversidad del Valle, 1999] (Vega, M.). Santiango de Cali, Universidad del Valle.

Esparza, A., Torres, M. del R., Borjón, E. (2017). Una propuesta para la enseñanza de la identidades trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista electrónica amiutem*, *5*, 46–57.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica.* (Tesis Doctorado en Matemáticas). Universidad de Valencia, Valencia

Fiallo, J., Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista científica, 20,* 56–71. Recuperado de https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/issue/view/629/112

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville,J. A., Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 109-130. https://core.ac.uk/download/pdf/13319844.pdf

Gutiérrez, Á., Fiallo, J. (2009). *Enseñanza de la trigonometría con ayuda de sgd.* Universidad de Valencia, Universidad Industrial de Santander.

Hitt, F. (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum*. Cinvestav, 10, 23–45.

Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. *Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México* 1–15.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, 165, 178.

Hitt, F., Páez, R., Guzmán, J. (2001). Actas: la notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation. En U. de Montréal (Ed.), *Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques?* (pp. 173–181).

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 213–223.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. (2009). Documento de ayuda de GeoGebra. manual oficial de la Versión 3.2. https://doi.org/https://app.GeoGebra.org/help/docues.pdf.

Ibañes, M., Ortega, T. (1998). Pruebas visuales en Trigonometría. *AULA: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, (1996), 105–118.

Martínez, E., Ruiz, J. F., Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Revista de Investigación y experiencias didácticas*, *3*, 51–71.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia. Panamericana Formas e Impresos.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional (16 abril, 2009). [Decrero 1290]. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-187765_archivo_pdf_decreto_1290.pdf

Miranda, J. Maldonado, E. (2009). Análisis didáctico y cognitivo de los elementos de trigonometría. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Clame.* (Vol. 22). 169-178.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica*. (Tesis Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional, Mexico D.F.

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Clame.* (Vol. 27). 1771-1779

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. *Memorias del Seminario*

Nacional. (pp. 81–86).

Moreno, L. E., Lupiáñez, J. L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En MEN (Ed.), *Memorias del seminario nacional formación de docente sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.* (pp. 248–256). Bogotá, D.C.

Muñoz, L. G. (2013). *El uso de la tecnología en la Trigonometría, en algunos libros de texto, para el Grado Escolar Décimo.* (Tesis Mestría en Educación Mtemática). Universidad de Medellin, Medellín. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11473/1/Muñoz2013El.pdf

Piñeiro, M., Ibañez, M., Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. *Serie Educación Matemática en Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Posada, M., García, E. de J. (2019). *Procesos de enseñanza y eprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de GeoGebra en la clase de matemáticas*. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física). Universidad del Valle, Cali.

Torres, C., Montiel, G., Cuevas, O. (2014). Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 890-898.

Vasco, C. E. (2002). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías.* Conferencia dictada en Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (del 8 al 10 Mayo de 2002). Bogotá, Colombia. Disponible en Internet en: http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

Vásquez, E. (2015). *Identidades trigonométricas con números complejos*. (Tesis Maestría Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization?. En: W. Zimmerman, & S. Cunningham, (Eds.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. (pp. 1-8). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America. http://www.hitt.uqam.ca/mat7191_fich/Zimmermann_Cunningham_1991.pdf