Ventajas y Limitaciones de la Representación Intervalar: Una Aproximación a la Propiedad de la Densidad de los Números Reales en el Grado Once.

Un estudio de caso en la Institución Educativa Instituto Técnico.

JENNIFFER ESCOBAR CHOCÓ

Código: 1458330

MARIBEL FERNANDEZ MUÑOZ

Código: 1358899

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEDE NORTE DEL CAUCA

2019

Ventajas y Limitaciones de la Representación Intervalar: Una Aproximación a la Propiedad de la Densidad de los Números Reales en el Grado Once.

Un estudio de caso en la Institución Educativa Instituto Técnico.

JENNIFFER ESCOBAR CHOCÓ

Código: 1458330

MARIBEL FERNANDEZ MUÑOZ

Código: 1358899

Directora:

MG. ADRIANA GARCIA MORENO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SEDE NORTE DEL CAUCA

2019

Dedicatoria

A mi madre Elba Alicia Muñoz por su amor y apoyo incondicional, a mi padre Oscar Fernández, que aunque ya no está presente, fue mi más grande consejero.

A mis hijos por ser mi mayor fuente de motivación.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme culminar esta etapa tan bonita.

A mis hermanos Dairon y Maru por su compañía y palabras de aliento, a Nico que además de su compañía ha sido una persona incondicional.

A mi esposo Rafael Antonio por ser mi soporte y compañero de vida, por su paciencia y amor.

A la profesora Adriana García, directora de este trabajo, por guiarnos de la mejor manera en el desarrollo de este trabajo, por su conocimiento, por depositar su confianza en nosotras y sobre todo por su apoyo y amor en este proceso. Además, por ser la mejor coordinadora, que con su calidez estuvo pendiente de nosotros.

A mi compañera de trabajo de grado Jenniffer Escobar, por su linda amistad, por el esfuerzo y la dedicación que tuvo para culminar este proceso.

A los estudiantes de la institución educativa Instituto Técnico que permitieron que este trabajo se llevara a cabo, por su asistencia y participación en la implementación de la propuesta.

A mis compañeros de pregrado Daniela Quenoran, Adriana Ulabarry, Pauline Sánchez, Liliana Ramos, Ángela Ruíz, Diego Díaz, David Chamizo, Yeison, Sebastián y Raúl por su linda compañía y amistad, por los momentos agradables; que hacen que esta sea una de las etapas más lindas de mi vida.

Maribel Fernández Muñoz

Agradecimientos

Quiero agradecerle primero que todo a Dios, por su fidelidad e infinito amor con el cual pude dar cada paso en este gran proceso.

A mis padres; Luis Hernán Escobar Viveros y María Noralia Chocó Sandoval quienes con su gran esfuerzo, amor y apoyo contribuyeron en mi desarrollo profesional; y cada día me enseñan a dar gracias a Dios por todo y a luchar por mis sueños así se tornen un tanto grises.

A mis dos hermanas Camila Andrea Escobar Chocó y Gabriela Escobar Chocó quienes con su compañía y cariño hacen que mis días sean felices, por hacerme reír cuando estoy triste y brindarme un amor sin condición.

A mi familia Chocó y Escobar, en especial a mis tías Flor María Chocó Sandoval, Celmira Chocó Sandoval y Nerfalia Chocó Sandoval; que aportaron un granito de arena para que este sueño se cumpliera.

A mis primas que de una u otra forma plantaron semillas de amor, bondad, felicidad, y paciencia en mi vida, enseñándome que siempre valdrá la pena proponerse metas para cumplir.

A Maribel Fernández Muñoz, amiga y compañera de trabajo de grado, por su esfuerzo y dedicación, por estar atenta y escucharme cuando lo necesitaba mostrando un corazón noble y dispuesto a dar lo mejor en todo.

A Adriana García Moreno, tutora de este trabajo de grado, por su colaboración y dedicación, también por su apoyo y contribución al desarrollo de esta investigación, una gran persona de admirar me llevo sus grandes enseñanzas de vida de que las cosas siempre saldrán mejor si se hacen con amor y humildad.

A mi gran amiga Andry Carolina Paz Ortiz y demás hermanos en la Fe de la iglesia Alianza Cristiana que con sus buenos consejos me enseñaron a perseverar y creer que con Dios lo imposible se hace posible.

Finalmente agradezco a mis compañeros Juan Sebastián Cortez, Yuri Daniela Quenoran, Julie Pauline Sánchez Campos, Raúl Fernando Mendoza Yela, Yeison Tibeth Velasco, Diego Armando Díaz, David Eduardo Chamizo y Adriana María Ulabarry, por su compañía en toda la carrera, por los buenos momentos compartidos, me llevo los mejores recuerdos de esta gran familia que se construyó y forjo con el tiempo en univalle.

Jenniffer Escobar Chocó

TABLA DE CONTENIDO

Índice de Tablas

Índice de Figuras

RESUMEN

En el presente trabajo se exhibe la elección e implementación de una propuesta de aula; con el fin de acercar a estudiantes de grado 11 de la Institución Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, a la propiedad de densidad de los números reales mediante la representación intervalar.

Esta elección se apoya de una aproximación histórica y epistemológica relacionada con la construcción de los reales y sus propiedades, así como algunas de sus representaciones. Además de las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional, expuestos en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias, Derechos Básicos de Aprendizaje y la Matriz de Referencia; en los que se introducen el concepto de número real.

Posteriormente, se realizó un análisis de los resultados obtenidos después de la implementación de la propuesta de aula; fundamentado en los planteamientos metodológicos de la ingeniería didáctica; finalmente se determinaron algunas conclusiones y observaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de los números reales.

Se espera que las conclusiones y observaciones de este trabajo; orienten otras investigaciones a la vez que generen una reflexión sobre la enseñanza de la propiedad de densidad del número real; a partir de una representación intervalar que no esté alejada de las construcciones formales.

***Palabras clave**:* Números reales, densidad, teoría intervalar, representación, micro-ingeniería didáctica.

ABSTRACT

In the present work of degree the election and implementation of a proposal of classroom is exhibited with the purpose of approaching students of degree 11 of the Institution Technical Institute of Santander de Quilichao Cauca to the property of density of the real numbers by means of representation intervalar . This choice is supported by a historical and epistemological approach related to the construction of real and its properties, as well as some of their representations. It is also used as a guide the approaches of the Ministry of National Education exposed in the Curricular Guidelines, Basic Standards of Competencies, Basic Rights of Learning and the Reference Matrix where the concept of real number is introduced.

Subsequently, an analysis of the results obtained after the implementation of the classroom proposal was carried out, which was supported by the theoretical and methodological approaches; Finally, some conclusions and observations related to the teaching and learning of real numbers were determined.

It is expected that the conclusions and observations of this work serve as a basis for other investigations, oriented to the reflection of the way in which the real number is usually presented, whose attention is centralized in the algebraic structure, leaving aside the topological one.

Key words: Real numbers, density, intervalar theory, representation, didactic engineering, intuition.

INTRODUCCIÓN

Las revisiones históricas evidencian que la consolidación del número real como objeto matemático tardó aproximadamente XXII siglos; su construcción formal deviene de la superación de diferentes obstáculos epistemológicos a lo largo su construcción y tienen su apogeo con matemáticos como Cantor, Bachman y Weiss entre otros. Las estrategias empleadas para la superación de dichos obstáculos; se constituyen en un importante aporte para la Educación Matemática; en tanto que brindan herramientas que posibilitan la construcción de propuestas de aula; de ahí, que estas sea un elemento importante para el desarrollo de la propuesta de este trabajo.

Generalmente la manera en la que se enseña es mediante la “simple” adjunción de los conjuntos numéricos; en los libros de texto se aborda el concepto como la unión de los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, señalando algunas propiedades que tienen que ver con la estructura algebraica y reglas para sus operaciones. Sin embargo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) menciona que para grado Once se hace necesario la introducción de las propiedades que tienen que ver con su comprensión, esenciales para un correcto entendimiento de otros conceptos que dependen de este; sobre esta base se discuten posteriormente los conceptos cruciales del Cálculo: Límite, Continuidad y Derivada.

Sumado a lo anterior, generalmente para las representaciones y operaciones de los números reales se recurre a la aproximación, olvidando algunas décimas importantes que sirven para encontrar un resultado y más aún, la comprensión del infinito potencial que se encuentra en algunos números, como los irracionales, el cual está relacionado directamente con la noción del cálculo infinitesimal que se encuentra a la hora de realizar operaciones con cantidades infinitamente pequeñas.

El desarrollo de este trabajo está inscrito dentro de las líneas de: historia y epistemología de las matemáticas[1], y didáctica de las matemáticas, en éste se proponen algunas alternativas de solución al problema de representación y aproximación a la propiedad de densidad de los

[1] Línea de Historia y epistemología de las Matemáticas, está vinculada al instituto de educación y pedagogía de la Universidad del Valle, Cali - Colombia. Su norte es realizar estudios sobre el principio, evolución y consolidación de un concepto o teoría matemática. El Grupo de investigación de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle, ha adelantado múltiples investigaciones sobre la relevancia de la constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes.

números reales, en grado 11 de la educación media. Para ello se abordaron algunos referentes teóricos desde el punto de vista histórico y matemático (Anacona, Guacaneme, Ferreirós, Euclides, Eudoxo, Platón, Arquímedes, Recalde, Artigue, Cantor, Bachaman, Weiis, García A, García G), que posibilitaron la toma de decisiones importantes para la elección de algunas actividades que conforman las tareas de una propuesta de aula elaborada por (García, 2017), se trabajó con base a ella, ya que no había llegado a ser implementada, este grupo de actividades se efectuaron en un aula de clase, con el fin de acercar a los estudiantes a la noción de número real y su propiedad de la densidad. El aprendizaje de los números reales, se considera un asunto de notable interés para el campo de la Educación Matemática; a partir de esta necesidad surgió la idea de que el trabajo fuera desarrollado en estas líneas, dirigido a la educación media, concretamente para estudiantes de grado Once de la Institución Educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca.

El desarrollo del trabajo se presentó en cuatro momentos, en un primer momento se realizó una aproximación histórica y epistemológica, explorando los componentes más notables en la construcción de los números reales; que comprendieron la crisis de los fundamentos de las matemáticas en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, reconociendo los elementos didácticos que posibilitaron su aplicación en el salón de clases.

En un segundo momento, de acuerdo a los referentes teóricos, se identificaron los elementos conceptuales más relevantes que permitieron la elección de actividades que hicieron parte de la propuesta de aula ya elaborada, la cual no había sido implementada, esta fue diseñada por la licenciada Adriana García Moreno, de la Universidad del Valle, en su trabajo *"Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la Educación Media*" en el año 2017, para optar por el título de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática, para este caso cada actividad seleccionada cuenta con su análisis a priori, con el fin de anticiparse a los posibles comportamientos y acciones de los estudiantes.

En tercer lugar, se implementaron las actividades que componían las tareas de la propuesta de aula de (García, 2017) a un grupo de estudiantes de grado 11.

Por último, se hizo una confrontación entre el análisis a priori y análisis a posteriori que se obtuvo de los resultados de la implementación, lo que permitió identificar algunas ventajas y limitaciones de la propuesta, enfocada en favorecer en los estudiantes una comprensión intuitiva de la propiedad de la densidad, enmarcada en la construcción de los números reales como conjunto de intervalos encajonados[2].

En ese orden, en el desarrollo de este trabajo es importante la palabra intuición, puesto que la propuesta de aula elaborada por García (2017), toma como eje fundamental a la intuición para el acercamiento al concepto de número real y sus propiedades fundamentales lo que lleva a la construcción de un nuevo conocimiento matemático, que aunque le hace falta una construcción formal, puede ser una orientación importante que conduce a ello. Por lo anterior, es necesario presentar una definición que exprese lo que se entendió por este término:

> Según López (2007) "En una intuición generalmente se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley -de un invariante- a través de una realidad particular. Una intuición, entonces, no es una pura teoría. Es una teoría expresada en una representación particular usando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama o una construcción". (p. 32).

Es así, como se generaron algunas estrategias para que el estudiante tuviese mayor comprensión e identificaran el registro de representación usado en la propuesta de aula, cumpliendo los objetivos propuestos.

[2] La teoría intervalar, ciencia de la computación, que por su amplio campo de aplicaciones se convierte en una alternativa importante a la representación del número real, a partir de intervalos encajonados de números racionales, entendiéndose a los intervalos encajonados como el conjunto de números reales comprendidos entre los números racionales a y b.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES

1.1. Antecedentes

Para la elaboración de este trabajo de investigación fue necesario tomar algunas investigaciones nacionales que aportan información relevante para el desarrollo de la misma, (Calderón, 2014; García, Serrano y Díaz, 1999; Martínez, 2014; Puerto, 2011) y una local (García, 2017).

A nivel nacional, Calderón (2014) en su trabajo "diferentes construcciones del número real" hace una revisión histórica a la construcción rigurosa del número real, y utilizó construcciones como la de Richard Dedekind; para plantear una propuesta didáctica que permitía a estudiantes de grado once, diferenciar los números Racionales de los números Irracionales. También hace un recorrido histórico y toma como campo disciplinar los referentes de las construcciones hechas por Richard Dedekind, las sucesiones de Cauchy según Georg Cantor, y las construcciones del número real a partir de intervalos encajados.

De allí la revisión histórica para la construcción del número real, permitió encontrar estrategias para la propuesta didáctica, que potenciaron en estudiantes de grado once de educación media tener argumentos matemáticos para diferenciar los números racionales de los números irracionales, y que estas construcciones de los números reales, pueden ser utilizadas como ayuda didáctica para la comprensión de conceptos como el de continuidad.

Por su parte, García, Serrano y Díaz (1999) con su trabajo, ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real? Analiza cuales son los motivos que dan paso a dificultades de comprensión del concepto de número real desde un enfoque epistemológico, curricular y cognitivo. También presenta estas dificultades desde diferentes perspectivas como; origen epistemológico abordado desde los estudios de Romero y Rigo, lo curricular y desde lo cognitivo del estudiante.

Por otro lado, Martínez (2014) realiza una "Propuesta didáctica para abordar el concepto de número real con estudiantes de undécimo grado" con el objetivo de identificar las características que debe de tener una unidad didáctica, para que los estudiantes de grado undécimo puedan interpretar intuitivamente las propiedades de densidad y continuidad de los números reales. En su metodología realiza una síntesis del desarrollo histórico del concepto con los trabajos de Cantor y Dedekind y expone algunos elementos de la teoría de las fracciones continuas para enriquecer las actividades propuestas en la Unidad Didáctica e introducir otra forma de representación de los números racionales e irracionales. Luego se dedica a los aspectos didácticos, y se discuten algunos aportes de la propuesta del doctor Luis Rico y su equipo de investigación.

Por último, esta autora planteó que todo el análisis histórico-epistemológico que fundamento la construcción de la unidad didáctica, permitió reconocer que las dificultades evidenciadas en los estudiantes a través de la experiencia y en la aplicación de la prueba no son exclusivamente ontogénicas sino didácticas y epistemológicas, propias de la evolución del concepto y de su transposición al aula.

Finalmente, en la investigación "Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo" Puerto (2011), para introducir al estudiante al concepto de número real, así como en el reconocimiento de sus propiedades necesarias en la construcción formal de un sistema numérico apropiado para desarrollos matemáticos rigurosos. Y en su metodología de trabajo expone aspectos disciplinares asociados a la construcción del sistema de números reales bajo la óptica axiomática, las cortaduras de Dedekind y las sucesiones fundamentales de Cantor junto con una exposición de las propiedades que caracterizan a las expresiones en forma de fracción continua simple, finita o infinita para números reales; las actividades de desarrollo se respaldan de dichos contenidos desde un punto de vista teórico consiguiendo el balance entre unos contenidos puramente pedagógicos y didácticos. De esta forma concluye que, efectivamente, la posibilidad de diseñar una unidad didáctica dirigida a estudiantes de los últimos cursos en educación media que cubra las propiedades fundamentales del sistema de los números reales que revisten mayor importancia para el estudio del Cálculo, de una manera sencilla y sin los formalismos excesivos de libros especializados en el tema es esencial para que el estudiante comprenda un poco más la naturaleza de los números reales.

A nivel local, García (2017) en su investigación "Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media", partiendo desde la problemática asociada a la representación y aproximación a las propiedades de los números reales en la educación media, propone alternativas para que estas no estén alejadas o desarticuladas de las presentaciones formales propuestas en la Educación Superior, proponiendo así actividades encaminadas a la representación de los números reales mediante la teoría intervalar. Presento un estudio histórico y una aproximación epistemológica en cuanto a la construcción y desarrollo de los números reales y la teoría intervalar e identifico algunas estrategias que pueden favorecer la construcción de los números reales como conjunto de intervalos encajonados, realizó un análisis a priori a las actividades que propone para que el estudiante tenga un acercamiento de forma intuitiva a este concepto matemático.

Este trabajo es la línea base de la investigación debido a que se hizo posible seleccionar actividades que permitieron un acercamiento de estudiantes a la comprensión de los números reales, relacionadas con la teoría intervalar, sin dejar de lado que el maestros debe realizar revisiones e investigaciones minuciosamente de los referentes históricos, matemáticos y de otros campos de investigación como la teoría intervalar; que le posibiliten orientaciones teóricas, metodológicas y de recursos, para que el maestro pueda atreverse a diseñar y proponer actividades en el aula de clase.

1.2. Planteamiento del Problema

La enseñanza de las matemáticas siempre ha sido un proceso complejo y lento, en parte por el carácter abstracto que ellas poseen, lo que implica todo un proceso de transposición didáctica para construir ciertos conceptos o nociones con los estudiantes (Chevallard, 1998). Existen varias estrategias pedagógicas, que sirven para fortalecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en algunas ocasiones se adaptan ejemplos de la vida diaria para hacer una aproximación a los conceptos matemáticos [3]que pueden llegar a favorecer su comprensión, pero no todas estas estrategias pueden reducirse a ejemplos de este tipo, porque hay conceptos matemáticos como los números reales, que no son tan accesibles e inmediatos a la experiencia y tienen un grado de abstracción más complejo, para el estudiante de educación media e incluso para el universitario; sin embargo, no por ello se deben dejar de lado, pues son fundamentales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por esta razón, es necesario buscar alternativas que orienten este proceso.

Los números reales son la base para la construcción de otros conceptos matemáticos; la comprensión de la matemática, en la mayoría de veces, tiene como base el manejo conceptual y operativo de este conjunto numérico, puesto que, mediante su relación con la recta numérica resulta el entendimiento de conceptos matemáticos, por ejemplo, el de límite, continuidad, entre otros. En este sentido, su enseñanza es de manera axiomática

---

[3] Plantea Duval (2004) que, todo concepto matemático requiere de representaciones y movilizar diversos sistemas semióticos de representación de sus objetos. Lo que lleva a inferir que el concepto matemático es un proceso mental y cognitivo que surge, no propiamente del objeto, sino de las representaciones semiótica de ese objeto, por ejemplo:

> La idea de triángulo no es accesible a través de los sentidos, sino que es de naturaleza puramente mental. Sin embargo, para acceder al concepto de triángulo necesitamos imperiosamente sus representaciones para analizar sus propiedades que hacen que esa figura sea triángulo y no por ejemplo cuadrilátero. (Damisa y Ponzetti, 2015:136)

En este sentido, Chevallard (citado por D'Amore, 2001) un objeto matemático "es un emergente de un sistema de práxis donde se manipulan objetos que se descomponen en diferentes registros semióticos […] es decir aquello que se escribe o se dibuja" (p. 14) dirigiéndose a la estructura algebraica que en algunas ocasiones dificulta el entendimiento de su naturaleza y de la función de sus propiedades, importantes para su comprensión al igual que el de otros conceptos matemáticos (Patiño, 2013). Por tal motivo, se hace necesaria la enseñanza de sus propiedades como la densidad[4].

Ahora bien, con relación a la propiedad de densidad de los números reales, según Calderón (2014), algunos textos para grado once y para los primeros cursos de la universidad, presentan los números reales como la unión de los números racionales e irracionales, clasificándolos según sus cifras decimales y con la representación gráfica mediante la biyección de números reales y puntos sobre la recta numérica, en la que tratan de ubicar números racionales y muy pocos números irracionales. Lo anterior, conduce a que los estudiantes presenten dificultades de tipo conceptual, puesto que, a través de estas representaciones, se impide que haya un análisis u observación de conceptos importantes como el de densidad.

Otra dificultad que presentan los estudiantes en el acercamiento a la propiedad de la densidad es que los estudiantes conciben el conjunto numérico de los reales desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales. En palabras de Broitman, et al. (2003): “Dados dos números decimales, por ejemplo 4,2 y 4,3; los niños suelen afirmar que no es posible hallar otros números entre ellos. Esto es así porque –como ya mencionamos- conciben a este nuevo conjunto numérico desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales” (p. 6).

A la hora de llevar el concepto de número real al aula de clase, algunos profesores no tienen en cuenta su complejidad abordándolo como la unión de conjuntos ordenados (los números naturales, enteros, racionales e irracionales) lo cual hace que los estudiantes no conciban bien su significado y, posiblemente los docentes no tienen claras las dificultades que evidencian sus estudiantes logrando estar relacionadas con la naturaleza del concepto. Como menciona Puerto (2011):

[4] Entre dos números reales por muy cercanos que se encuentren, siempre existe un número real

> La apropiación usual del concepto de número real es escasa, entendida como la simple adjunción de un conjunto de números (a uno preexistente) cuyas propiedades, así como sus características, no son explícitas, por lo que no se identifica su necesidad, tanto en la representación de ciertas soluciones a ecuaciones polinómicas como en la cuantificación de la medida de ciertas magnitudes (longitudes, áreas, pesos) que llevan al concepto de continuidad numérica (p.3).

Por otro lado, la Historia de las Matemáticas, da cuenta que la consolidación de los números reales como objeto matemático, tardó aproximadamente XXII siglos y fue un proceso complejo (García, 2017); por consiguiente, su definición, estructura algebraica, relaciones de orden y sus representaciones en el contexto escolar, presentan dificultades para el acercamiento a su concepción, de modo que, su enseñanza es uno de los grandes retos de los maestros de matemáticas y la educación Matemática en general.

Por otra parte, en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006) se encuentra que los estudiantes de Octavo a Noveno deben: "1) Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos y, 2) Resolver problemas y simplificar cálculos usando las propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos". Sin embargo, García (2017) difiere de estos estándares, al afirmar que "son conceptos especializados que solo puede comprender un matemático con una buena formación, y no necesariamente un estudiante de grado once o en su defecto en grado octavo que es donde se introduce el objeto matemático en mención" (p. 14).

Así mismo, se puede observar en la Matriz de Referencia, basada en los Estándares Básicos de Competencias (EBC), los resultados de aprendizaje que se esperan alcancen los estudiantes en determinado grado, además que sirve como guía para conocer los criterios que evalúa el ICFES. Ahora, en alusión a los números reales,se puede observar que desde grado noveno se inicia con la introducción del concepto de número real, las tablas 1 y 2 muestran de manera mas especifica, las propiedades a las que se le aluden en los EBC para este grado.

Tabla 1.

Matriz de referencia- Razonamiento grado 9

Competencia / Componente	RAZONAMIENTO	
	APRENDIZAJE	**EVIDENCIA**
NUMÉRICO VARIACIONAL	Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación	Analizar situaciones de variación representadas de manera algebraica o tabular, restringidas a funciones lineales, a fines o cuadráticas, mediante el uso de propiedades como: crecimiento, decrecimiento, valores máximos o mínimos... Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones lineales, a fines y cuadráticas.
	Usar representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Justificar a través de representaciones y procedimientos la existencia de una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables.
	Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas.	Utilizar las propiedades de las operaciones para simplificar cálculos. Utilizar propiedades para determinar si un problema, que se representa a través de una ecuación, tiene o no solución Estimar un valor numérico teniendo en cuenta las condiciones establecidas en una situación problema.
	Verificar conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico.	Establecer conjeturas sobre propiedades y relaciones numéricas usando expresiones algebraicas. Evaluar proposiciones abiertas relativas a las propiedades y relaciones de los números reales.

Nota. La tabla 1 es un fragmento de la matriz de referencia para grado 9 basada en los EBC, donde expone de manera un poco más detallada del aprendizaje para este grado (MEN, 2006)

Tabla 2.

Matriz de referencia- Resolución grado 9

Competencia / Componente	RESOLUCIÓN	
	APRENDIZAJE	**EVIDENCIA**
NUMÉRICO VARIACIONAL	Resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.	Aplicar propiedades para solucionar un problema que involucra adición y/o multiplicación en el conjunto de los números reales. Reconocer que diferentes estrategias permiten determinar la solución de unos problemas aditivos y/o multiplicativos en el conjunto de los números reales.

Nota. La tabla 2 es un fragmento de la matriz de referencia para grado 9 basada en los EBC, donde expone de manera un poco más detallada del aprendizaje para cada grado (MEN, 2006)

En la Matriz de referencia de grado 9 se puede observar, que la introducción del concepto de número real se hace a través de la estructura algebraica, utilizando las propiedades de las operaciones para hacer cálculos, las cuales no tienen que ver con su comprensión[5]. Sin embargo, en la Matriz de referencia de grado 11 no se exponen las propiedades a las que se hace alusión. De igual manera, en los EBC de grado 11 no se explicitan las propiedades que tienen que ver con la comprensión del número real, aunque, mencionan que se hace necesario el reconocimiento de la propiedad de densidad de los números racionales, además de la comparación y contraste de las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales), (MEN, 2006).

[5] Comprender en matemáticas: Hiebert y Carpenter (1992) plantean que “las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes” (pág. 67).

Tabla 3.

Estándares Básico de Competencias de Matemáticas Grado Décimo a Once

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS
• Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. • Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. • Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos. • Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. • Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Nota. La tabla 3 es un fragmento de los EBC, donde expone los criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas para cada grado (MEN, 2006)

Con todo y lo anterior, el énfasis, según el MEN debe estar en la representación y en las propiedades analíticas de los números reales. Pero, la manera en la que se expone en los libros de textos y la manera en la que se presenta en el salón de clases, no está en la misma dirección de la que plantea los EBC, por el contrario lo que hacen es privilegiar la estructura algebraica, presentándolo desde su versión más abstracta y axiomática, imposibilitando al estudiante a dar significado al objeto y por ende al uso de sus diferentes formas de representación; conduciéndolo solo a la memorización de propiedades y definiciones. (Martínez, 2014)

Sumado a lo anterior, se pueden evidenciar distintos tipos de obstáculos en la comprensión de los números reales, los cuales puede ser: obstáculos didácticos, obstáculos relacionados a las capacidades cognitivas de los estudiantes y, por la misma naturaleza del objeto. (García, G, Serrano, C y Díaz, H. 1999)

Así mismo, para los estudiantes de educación básica y media es difícil la comprensión de la estructura y características de los números reales, que son parte de su estructura lógica, ya que en las revisiones históricas que se han hecho acerca de los números reales se pudo observar que han sido complejos sus diferentes construcciones, representaciones y desarrollo. (Martínez, 2014).

Por lo anterior, se puede decir que está alejada la idea de que los estudiantes usen las diferentes representaciones y utilicen las propiedades; más bien, el estudiante podría tener un acercamiento al concepto y como él logra entender la propiedad de densidad teniendo una aproximación de forma intuitiva.

Visto de otro modo, intentar articular las concepciones previas de los estudiantes de la educación básica y media con los conceptos formales que se presentan en la universidad del número real, implica enfrentarse con el problema del paso de lo concreto a lo abstracto, puesto que la definición de un número real no tiene mucho que ver con su nombre y menos su representación (García, 2017).

Ahora bien, con el avance de la tecnología, las personas, para hacer cálculos, en su vida cotidiana recurren al uso de las calculadoras, las cuales solo propician los números digitales DI[6], SIGLA, (1999) (citado en García (2017)), el problema es que los números digitales no representan a todos los números reales y menos cumplen sus propiedades.

Por otra parte, los números irracionales no se pueden representar en un ordenador, debido a que esta herramienta tecnológica se caracteriza por representar números racionales. Al no existir una correspondencia biunívoca entre los números digitales DI y el conjunto de números reales, es necesaria la aproximación y el truncamiento de las cifras decimales infinitas, pero sus errores son muy frecuentes, en general cuando se quieren operar dos números reales que contienen expresiones decimales infinitas (suma, resta, multiplicación o división),y al hacer aproximaciones, el resultado se aleja del valor real, cuando se trata de la potenciación el resultado se aleja mucho más. (García, 2017).

Es decir, si se toma como ejemplo el número $\sqrt{2}$, la mayoría de estudiantes no son conscientes de lo que representa, en principio ellos podrían afirmar que $\sqrt{2}$ es igual a 1.41, lo que de entrada es un error, error que puede ser incrementado cuando se opera con

[6] Los números digitales DI, son aquellos que se pueden representar en los ordenadores según el grupo SIGLA (1999)

este número. Si se suman dos veces el valor aproximado $1.41 + 1.41 = 2.82$, en la multiplicación $(1.41)(1.41) = 1.9881$, o en la potenciación $(1.41)^n$ donde $n \epsilon N$, los resultados de las operaciones anteriores arrojan números racionales que están muy alejados del valor real.

Sin embargo, una de las teorías de la computación que se ha venido desarrollando a partir de los años 1950 – 1960, *el análisis intervalar,* ha intentado resolver este problema, que si bien, no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre R y DI, propone representarlos por medio de intervalos. Si se toma nuevamente el ejemplo de $\sqrt{2}$, el cual, no es posible representar en un ordenador o calculadora sin ser truncado, una posible forma de representarlo mediante intervalos sería $\sqrt{2} \epsilon [1.41, 1.42]$, puesto que, esta representación no trunca, ni aproxima y mucho menos excluye al número.

Por lo anterior, se consideró importante analizar el papel de la representación intervalar en el acercamiento a la propiedad de densidad en estudiantes de educación media. En consecuencia a lo anterior surgió la siguiente pregunta:

¿Qué ventajas y limitaciones surgen de la implementación de una propuesta de aula orientada al acercamiento a la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar en estudiantes de grado 11?

1.3. Justificación

Una de las posibilidades para abordar la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la historia, debido a que sirve tanto a profesores como a estudiantes para comprender y darle sentido al pasado y a los acontecimientos que dieron lugar a las matemáticas que hoy en día se conocen, de aquí se puede partir críticamente a construir conocimiento matemático.

La anterior afirmación se evidencia en una publicación de la revista SUMA donde se sugiere que la Historia de la Matemáticas debe ser un elemento importante a considerar en la Didáctica de la Matemática, este argumento lo sustentan con algunos textos de importantes matemáticos, pedagogos e historiadores del siglo XXI: Poincaré, Klein, Toeplitz, Köthe, Bell, Courant, Puig Adam, Lakatos, Kline, Santaló y entre otros, que han ido aportando, en los últimos tiempos, numerosas ideas al respecto. Ellos manifiestan la función didáctica que tiene la historia de las matemáticas como recurso que facilita la comprensión de los saberes matemáticos, además expresan que la historia puede llegar a ser fuente de inspiración, motivación tanto para los docentes como para los estudiantes, además que la herencia histórica otorga enriquecimiento a la enseñanza e integración con otros tipos de saberes que componen la cultura. (SUMA (2004))

Por su parte Anacona (2003) menciona que:

> Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural. Esto significa que las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a la historia, una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales. (p. 32)

Es decir, la historia de las matemáticas permite un mejor acercamiento a los conceptos matemáticos, debido a que se pueden reflejar las necesidades históricas, culturales que impulsaron al desarrollo de esta ciencia, para que los estudiantes puedan darse cuenta del valor utilitario que ellas poseen.

Por lo anterior, se tomó como elección abordar una investigación que está orientada hacia la Línea de Historia y Epistemología de las matemáticas, donde se implementó una propuesta de aula con el fin de movilizar la noción que se tienen de los números reales en la teoría intervalar y su propiedad de densidad, la cual fué dirigida a estudiantes de educación media, específicamente a estudiantes de grado 11.

Es pertinente realizar una breve revisión histórica de las construcciones hechas sobre los números reales, por ejemplo, las construcciones de Cantor que permite hacer un acercamiento a los números reales a partir de la noción de límite de sucesiones de Cauchy, también, la construcción de Bachman que será central para el trabajo a desarrollar, porque permite verificar o comprobar matemáticamente la construcción de los números reales a partir de intervalos encajados de racionales y finalmente la construcción echa por Weiss.

Ahora bien, con referencia a la problemática asociada a las dificultades de las representaciones del número real, una posible alternativa importante para su enseñanza, aproximación, representación y tratamiento de las operaciones, es la teoría intervalar, dado que en la mayoría de los casos cuando se les enseña a operar números reales, se recurre al truncamiento dejando de lado algunas décimas que son importantes para la exactitud del resultado de una operación.

Respecto a las representaciones, Skemp, (1980) (citado en Rico, L. (2000)) manifiesta que el mecanismo para suplir la falta de presencia de un objeto es mediante sus representaciones, la cual crea una dualidad representante representado.

Es posible que a partir de la representación de números reales mediante intervalos, los estudiantes puedan tener un poco más de acercamiento a la propiedad de densidad y su orden, pues mediante esta representación se logra articular algunas aproximaciones que se pueden hacer a las propiedades fundamentales de los números reales en la educación media y su construcción formal en la educación superior. Con esta propuesta de aula, lo que se quiere lograr es que los estudiantes de educación media puedan tener nociones sobre los números reales, que les permitan un acercamiento a ellos, para que cuando se encuentren en la educación universitaria puedan tener un mejor entendimiento. Al obtener los resultados de la implementación de la propuesta se analizará e identificará las ventajas y limitaciones del uso de la teoría intervalar, al acercamiento de la propiedad de densidad.

Se considera este trabajo pertinente, ya que en el ámbito de la enseñanza de los números reales no hay gran variedad de investigaciones que estén dirigidas hacia la conceptualización del número real en la educación media en cuanto a la teoría intervalar, además, que se quiso hacer una confrontación entre el análisis a priori y a posteriori de la implementación de la propuesta de aula.

Como aporte a la educación de las matemáticas y a la institución educativa esta propuesta de aula con sus observaciones se dejará como apoyo para los profesores que quieran iniciar la enseñanza de los números reales en la educación media.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Caracterizar algunas ventajas y limitaciones que surgen de la implementación de una propuesta de aula orientada al acercamiento a la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar en estudiantes de grado 11.

Objetivos específicos

- Especificar los componentes más notables en la construcción de los números reales a través de la historia, que comprenden las crisis de los fundamentos de las matemáticas: en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis.

- Reconocer en la construcción histórica del concepto de número real, elementos didácticos que posibiliten la elección en implementación de una propuesta de aula.

- Analizar los elementos teóricos relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor, Bachman y Weiss para la elección e implementación de una propuesta de aula.

- Articular los elementos conceptuales más relevantes de las revisiones históricas y teóricas, que permitan hacer una aproximación al estudio de la densidad de los números reales en el marco del análisis intervalar, a través de la elección de actividades que componen las partes de una propuesta de aula.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referente Histórico: aspectos históricos en la construcción de los números reales y la evolución de la teoría intervalar

Los estudios históricos y aproximaciones epistemológicas acerca de las matemáticas han contribuido con elementos de gran importancia para la formación y práctica docente. Así mismo, estos estudios juegan un papel supremamente importante en el análisis del proceso de la construcción teórica de un determinado concepto, de esta manera se podría observar cómo evoluciona una noción matemática hasta constituirse en objeto matemático (Anacona, 2003), por ejemplo, los números reales.

Calderón (2014), relata que la idea de número aparece desde el inicio de la humanidad, dado que en 1960, el belga Jean de Heinzelin de Braucourt descubrió un hueso con marcas de conteo, data aproximadamente 20.000 años a.C., lo cual llevó a pensar que los hombres de épocas muy remotas tenían una idea de lo que era el número. A pesar de que no hay mucha información comprobada de la forma en que el ser humano empezó a utilizar un sistema de numeración, se pudo evidenciar que las necesidades sociales y culturales que surgieron de las situaciones cotidianas llevaron al hombre a percatarse de las cantidades que poseían y de todo lo que los rodeaba. Para ello utilizaban algún tipo de conteo, tratando de alejarse de lo concreto a lo abstracto, es decir, para el hombre tener la abstracción mental de un objeto matemático (el número) tomó en consideración los objetos físicos del mundo. Cabe resaltar que grandes culturas fueron participes en la consolidación de los sistemas numéricos, todo ello supliendo las necesidades que en el momento se presentaron.

Ahora bien, para lograr un acercamiento a las diferentes concepciones de número real ($\mathbb{R}$) desde el siglo V a.C hasta el siglo XIX, se tuvo en cuenta las dos crisis de los fundamentos de las matemáticas (magnitudes inconmensurables y la fundamentación del análisis). Para ello, se tomó como referente teórico las investigaciones realizadas por algunos autores como: Anacona, Guacaneme, Ferreirós, Euclides, Eudoxo, Platón, Arquímedes, Recalde, Moore, García A, García G, Calderón y Puerto, que describieron cómo a través de la historia, se hicieron grandes contribuciones a la consolidación del número real y a la aproximación de algunas de sus propiedades fundamentales como la densidad.

A continuación se presentan algunos elementos esenciales en la historia que dieron lugar a la noción del número real y algunas aproximaciones de sus propiedades fundamentales, relacionadas con las construcciones formales de los números reales a partir de sucesiones de intervalos encajonados.

Se conoce que la construcción y aceptación del número real como un objeto matemático tardó alrededor de XXII siglos, durante todo este tiempo se originaron problemas, los cuales marcaron diferentes épocas. Según Recalde (2011), la formación histórica de los números reales hasta consolidarse como un objeto matemático, partieron de las actividades de contar, medir y ordenar; sin embargo, existieron dos hechos de gran importancia que fueron determinantes en la historia de las matemáticas. Estos dos hechos son conocidos como las crisis de sus fundamentos. Una de las primeras crisis se da en la época de los pitagóricos, siglo V a.C. y aparece con las magnitudes conmensurables e inconmensurables; la segunda aparece en el siglo XIX d.C. con la fundamentación del análisis, donde empezaron construcciones del número real por parte de Cantor y Dedekind.

Con lo anteriormente mencionado, el desarrollo este capítulo se conforma de la siguiente manera:

1. Las magnitudes conmensurables e inconmensurables.
2. El método de Exhaución y las aproximaciones al cálculo del número Irracional π, una propuesta hecha por Bárcenas y Porras (2002).
3. La crisis de los fundamentos del siglo XIX.
4. Inicios y consolidación de la teoría intervalar.

Este acercamiento histórico y aproximación epistemológica que se abordará a continuación, se realiza a partir de la caracterización de estos 4 momentos que marcaron la historia. Además, se identificaron algunos obstáculos e implicaciones en la construcción del número real como objeto matemático, relacionados con las dificultades que se reflejan en errores de tipo conceptual y procedimental en los estudiantes, por lo anterior se seleccionaron algunas actividades que componen las tareas de la propuesta de aula para la implementación y análisis de esta.

2.1.1. Las magnitudes conmensurables e inconmensurables:

2.1.1.1. Los pitagóricos, siglo V a.C

De acuerdo con Calderón (2014), el pensamiento pitagórico era que todo par de segmentos eran conmensurables, es decir, que era posible encontrar una unidad de medida que las dividiera de manera exacta. Esta comparación de magnitudes conmensurables permitió el surgimiento de los números racionales, de la forma $\frac{a}{b}$**,** donde **a** y **b** son números enteros y **b** diferente de cero, los cuales representan medidas de magnitudes homogéneas.

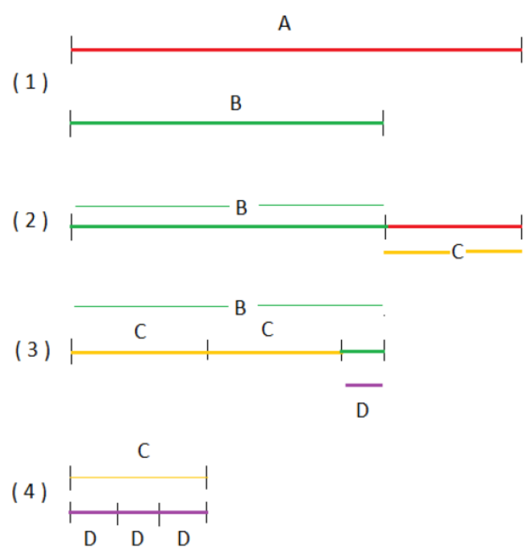


Figura 1. Conmensurabilidad entre segmentos.

(Calderón, 2014. p. 9)

En la Figura 1. se puede observar que el primer segmento **A** es mayor que el segmento **B** y que el segmento **B** no mide al **A**, ya que **B** no cabe un número exacto en **A**, cuando se compara el segmento **A** con el segmento **B** se puede observar que sobra un tramo de segmento, lo cual se denomina segmento **C**, cuando se compara el segmento **C** con el segmento **B** pasa lo mismo que con **A,** sobra un pedazo de segmento, lo cual indica que **C** tampoco divide un número exacto de veces a el segmento **B**, ahora, sea el segmento **D** el residuo de la comparación entre los segmentos **B** y **C**, si nuevamente se toma el segmento **D** y se compara con el segmento **C**, se observa que **D** cabe exactamente tres veces en **C**, no queda parte sobrante, lo cual indica que **D** divide a **C** y si se compara **D** con los otros segmentos se evidencia que el segmento **D** es la medida común entre ellos, ya que en el segmento **A** cabe 10 veces y en el segmento **B** cabe 7 veces, que también se puede expresar como una razón $\frac{10}{7}$.

Sin embargo, hay otros segmentos que no se pueden comparar, es decir, no es posible encontrar una unidad de medida que los divida de manera exacta. De acuerdo con Crespo (2009) en la época de los pitagóricos se anticipa los números irracionales con las magnitudes inconmensurables, este hecho en la historia de las matemáticas se conoce como la primera crisis de sus fundamentos, debido a que aparece una contradicción en la teoría perfecta y armónica que tenían los pitagóricos.

Collette (1993), narra que un miembro de la escuela pitagórica llamado Hippasus de Metapontun (matemático presocrático, teórico de la música y filósofo), nacido en Grecia al sur de Italia en los años 500 a.C., descubrió la existencia de la inconmensurabilidad la cual le costó el exilio de la escuela pitagórica, siendo para los pitagóricos una catástrofe, porque para ellos las razones eran consideradas como el atributo de la existencia, de la realidad y pensaban que todo era medible, con este descubrimiento se eliminó el evento de medir con precisión, lo que generó una alteración en el desarrollo de la geometría griega.

Toledo (1991) y Crespo (2009) argumentan que lo sucedido en esta época evidencia que los números irracionales son desde el inicio un asunto geométrico y no aritmético, hecho que ocasionó la división entre los conceptos de número y magnitud.

Newman (1985), menciona que Eudoxo (matemático, astrónomo, médico y filósofo) nacido en los años 408 a.C., en Cnido actualmente Turquía, resolvió el problema del no poder comparar dos magnitudes, a partir de la teoría de la proporción, replanteando los conceptos de razón y proporción, para así incluir magnitudes conmensurables e inconmensurables, no tuvo en cuenta las medidas, apartando el número que estaba ligado a la magnitud.

Por otro lado, Puertas, citado por Guacaneme (2012) menciona que el concepto de razón para las magnitudes conmensurables aparece en la definición 3 del libro V de Euclides:*“una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”* (p.9). Esta teoría de la proporción se estableció como esbozo para la formulación de relaciones entre magnitudes, sin importar si era conmensurable e inconmensurable y sin pensarse que este método fue la guía para la constitución de los números reales, para ser más precisos esta autor menciona que:

> La proporción eudoxiana que plantea un tratamiento general para las magnitudes geométricas ha sido ampliamente estudiada por los historiadores y filósofos, es esta teoría y no precisamente a la de la proporción numérica tratada en los Libros VII, VIII y IX la que se puede vincular con los trabajos sobre los números reales de Dedenkind y Frege (p.116)

2.1.1.2. Platón y el Menón 427-347 a.C

Según los relatos filósofos Platón quien era discípulo Aristóteles y de pensamientos pitagóricos, comenzó a trabajar las magnitudes inconmensurables en sus célebres diálogos El *Menón o de la Virtud*. Por otra parte, Sócrates quiere lograr en uno de sus esclavos Menón, cuya formación ha sido muy pobre en geometría, que demuestre el Teorema de Pitágoras sin darse cuenta de este método, acorde con la teoría de la reminiscencia. Pues Sócrates le propone lo siguiente: Dado un cuadrado ABCD construir otro con el doble de área.

Para iniciar con la demostración, el esclavo considera pensar que el cuadrado dado ABCD, tiene como medida de su base dos pies y por tanto su área es cuatro pies; lo primero a lo que procede es a duplicar cada lado del cuadrado y construir uno más grande el AEFH sobre el primero, el área del nuevo cuadrado es dieciséis pies, lo cual implica que no arroja el resultado que se esperaba; al ver esto, el esclavo decide buscar otra manera y lo hace construyendo otro cuadrado AKLM con una medida de tres pies, ya que esa medida sería menor que la otra, pero esta forma tampoco llega al resultado que se deseaba, así el esclavo fue incapaz de resolver este problema. Montesinos (1991) menciona que: se evidencia en este hecho la dificultad de una respuesta aritmética a este problema, hoy se puede concluir que no hay un número entero o racional que sea suficiente para dar solución a este problema.

Este problema tiene solución en el campo geométrico de una manera sencilla, Sócrates traza la diagonal del cuadrado dado y partir de allí construye un cuadrado DBIJ que es el doble que la primera superficie *(Figura 2).*

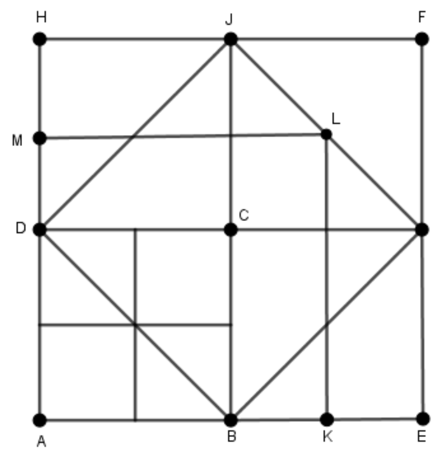


Figura 2. La duplicación del cuadrado.

(García, 2017)

La crisis de los fundamentos de las matemáticas, del siglo V a.C., provocó la demostración por reducción al absurdo, varios de estos argumentos se encuentran en Aristóteles en su obra la Metafísica, y que más adelante se ven reflejadas en los elementos de Euclides. Respecto a esto (Gonzáles, 2008) menciona que:

> La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban

proporciones acarrean la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática (p. 103).

2.1.1.3. Euclides y la Irracionalidad de $\sqrt{2}$

García (2017) menciona que la demostración aritmética de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por reducción al absurdo es un método que en términos pedagógicos inspira al maestro de matemáticas de educación básica y media, retomar la demostración en el aula, puesto que, conduce a que el estudiante se dé cuenta de la existencia teórica de algunos objetos matemáticos, como por ejemplo; los números irracionales; puesto que, la historia hace evidente cómo la demostración por reducción al absurdo bien sea por la vía aritmética (como se ha demostrado en este aparte) o en términos geométricos, se establece en una alternativa importante ante el problema de compresión y apropiación de los números irracionales.

Ahora bien, recreando en términos modernos la demostración de la irracionalidad de $\boldsymbol{\sqrt{2}}$**,** según González, (2008) se tiene que:

Sea p/q una fracción irreducible tal que $(p/q)^2 = 2$.

Se verifica: $p^2/q^2 = 2;\ p^2 = 2q^2$,

de modo que p^2 (y por tanto p) es un número par;

es decir: $p = 2s$, de donde $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$.

Así pues: $q^2 = 2s^2$,

de modo que q^2 (y por tanto q) es un número par;

es decir: $p = 2r$.

El carácter par de p y q contradice la hipótesis de que p/q es una fracción irreducible.

En consecuencia no puede existir ningún segmento cuyo cuadrado sea 2. (P. 106).

2.1.1.4. El método de exhaución de Eudoxo. El área del círculo

En el siglo IV a. C los griegos eran conscientes de la existencia de las magnitudes geométricas inconmensurables, pero no las concebían como número, puestos que, solo utilizaban los números para contar, magnitudes que podían ser medidas mediante números y figuras rectilíneas (polígonos). Por esta razón, el calcular el área de un circulo se convirtió en un gran reto para ellos y llamo la atención de Eudoxo de Cnido quien fué uno de los matemáticos más importantes de la academia platónica encontrando una solución a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable e ideó el método de exhaución.

Gonzales (2008), planteó que la solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables, fue que para determinar el área de una figura curvilínea A "se puede encontrar un polígono con sucesión $\{P_{1,}P_{2,\ldots,}P_{n,\ldots}\}$ cuya área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada, es decir, que la diferencia puede hacerse "tan pequeña como se quiera"; presentado simbólicamente este método se tiene que "Dado $\varepsilon > o$ se debe encontrar un polígono Pn tal que la diferencia $\mathrm{a}(A) - \mathrm{a}(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande" (p.119).

2.1.1.5. La cuadratura del círculo y el método de exhaución en Arquímedes 287 a.C

Uno de los autores por los que se conocen los trabajos de Eudoxo es Arquímedes (287-212 a. C.), Quien también hizo uso del método de exhaución[7], pero en este caso inscribe y circunscribe polígonos perfeccionando el método propuesto por Eudoxo que partió de la idea de agotamiento de una figura curvilínea mediante polígonos o poliedros regulares.

De acuerdo con García y Delgado (1991), para probar que el área o volumen de una figura **S (**mediante el método de agotamiento o "método de comprensión" como lo denomino Dijksteirhuis) es igual a otra **C** del mismo tipo, es necesario inscribir y circunscribir polígonos regulares $\{\mathbf{U_n}\}$ y $\{\mathbf{L_n}\}$ sucesivos duplicando progresivamente los lados de los polígonos iniciales, y a medida que se van duplicando van acercándose o aproximándose a **S**; presentado este método simbólicamente así:

$$\cdots < a(U_n) < a(U_{n+1}) < \cdots < a(S) < \cdots < a(L_{n+1}) < a(L_n) < \cdots$$

[7] El método de exhaución que permite calcular áreas de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia cuya diferencia con el círculo sea tan pequeña como se quiera tal que tienda a cero, servirá de base a la noción de límite al cálculo infinitesimal.

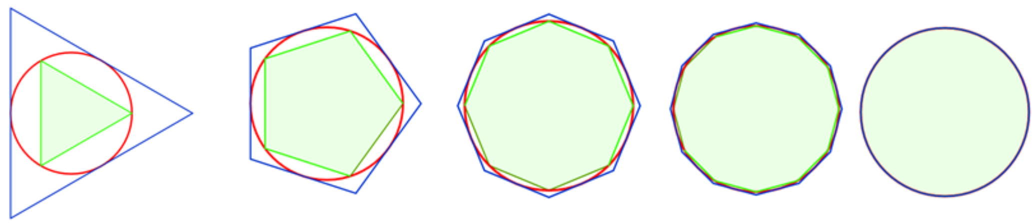


Figura 3. Método de exhaución, duplicación de lados de polígonos inscritos y circunscritos.

Así que la diferencia entre el área **(a)** o volumen **(v)** de los polígonos inscritos $\{\mathbf{U_n}\}$ y circunscritos $\{\mathbf{L_n}\}$ respecto a la figura **S** se hace cada vez menor de forma que se puede aplicar la proposición X 1. La cual determina la demostración doble reducción al absurdo;

(tanto $\mathbf{a}(\mathbf{S}) > \mathbf{a}(\mathbf{C})$ $[\mathbf{v}(\mathbf{S}) > \mathbf{v}(\mathbf{C})]$ como $\mathbf{a}(\mathbf{S}) < \mathbf{a}(\mathbf{C})$ $[\mathbf{v}(\mathbf{S}) < \mathbf{v}(\mathbf{C})]$ será imposibles; entonces este método introduce la idea de encajonar la figura, es decir a cercarse mediante superficies poligonales al área del círculo, dando cabida a la noción de límite. Entonces en palabras de García y Delgado (1991).

> Si en éste Euclides llega al resultado de que el área de un circulo es proporcional al cuadrado de su diámetro, en "La Medida del Círculo", Arquímedes calcula el valor –llamémosla π – de esta razón, comenzando con un hexágono (para algunos un decágono) inscrito y otro circunscrito. Doblando el número de lado obtiene polígonos de hasta 96 lados y calcula sus perímetros para buscar cotas superiores e inferiores de π:
>
> $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. (p.306)
>
> Y expresándolo como un intervalo es 3,1442<π<3,1416

2.1.2. El método de la Exhaución y las aproximaciones al cálculo del número irracional π una propuesta hecha por Bárcenas y Porras (2002)

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), creó el método de exhaución, antecedente del cálculo integral para calcular áreas y volúmenes; los cuales contribuyeron más adelante a realizar cada vez más aproximaciones al número π, siendo una de sus propuestas el método de agotamiento. También propuso como medir el área del círculo inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en este. Se dice que esta demostración fue perfeccionada más adelante por Arquímedes quien aproximadamente hace 22 siglos utilizo el método de exhaución para hallar el área de una circunferencia usando la inscripción y la circunscripción de polígonos regulares.

Barcenas y Porras(2002), mencionan que Arquímedes conocía las fórmulas de área y longitud para el caso de polígonos y por ello también se propuso a conocer formulas análogas para el caso de círculos y circunferencias, Arquímedes planteo que la circunferencia se podría ver como la sucesión de polígonos regulares inscritos y circunscritos en dicha circunferencia donde al aumentar progresivamente los lados de los polígonos, de modo que el perímetro y el área de estos se aproximen al perímetro y el área de la circunferencia respectivamente. Todo esto y el problema de la inconmensurabilidad llevan de una forma intuitiva a la noción de límite.

Mediante este procedimiento de calcular el área y la longitud de círculos y circunferencias, Arquímedes utilizo polígonos regulares de 96 lados con lo cual logro una estimación para el número π de la siguiente manera $3,1416 < \pi < 3,1442$; pero esta aproximación no fue la primera. Según M.Kline y Courant Robbins (1967), (citado en Bárcenas y Porras (2002). P (150)) todas estas aproximaciones también fueron pensadas por los egipcios y babilónicos hace varios siglos. Pues particularmente se aproxima en una circunferencia de radio uno al número irracional π al 3,16 (Garcia, 2017). A partir de esta aproximación que se le dio al número irracional π, a través de la historia se logran encontrar numerosos matemáticos en diferentes épocas, que también trataron de aproximarse cada vez más al número π. Como lo fueron Zu Chong Zhi, Francisco de Vieta, Ludolf, Wallis, Leibnitz, Euler entre otros, que han intentado encontrar la forma de aproximarse cada vez más al número π.

En el 420-500 d.C el matemático Zu Chong Zhi, logra aproximarse a π acertando en siete cifras decimales, representado en el intervalo: $3,1415926<\pi<3,1415927$. En el siglo

XVI, Francisco de Vieta, logra aproximarse a10 cifras de π, mediante la siguiente fórmula:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

Después, en 1609 el matemático alemán Ludolf logro aproximarse a π con un total de 35 cifras, después en el siglo XVII, tres matemáticos se aproximaron aún más a π, con la aparición del cálculo diferencial, utilizaron métodos más efectivos como el producto y las series. Wallis obtiene la siguiente representación mediante el producto:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) \cdots$$

Leibniz con la serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

Y Euler con su fórmula:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Según Bárcenas y Porras 2002, en el año 2001 con las series, productos y la ayuda de ordenadores se hace una aproximación de más de seis mil cuatrocientos millones de dígitos decimales y en la actualidad la capacidad de cómputo de los nuevos ordenadores se mide de acuerdo con su aproximación al número irracional π.

2.1.3. La crisis de los fundamentos en el siglo XIX

El estudio de los fundamentos de las matemáticas ha sido desde hace un siglo competencia de la lógica, Ferreirós (2007), manifiesta que la propia matemática trata de dar cuenta de sus bases, convirtiéndose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada metamatemática, este ha sido un fenómeno muy característico en el siglo xx.

> Durante el XIX, la matemática había dejado de ser una “ciencia de las magnitudes”, sus conceptos habían alcanzado un grado de abstracción sin precedentes, sus teorías se habían desarrollado mucho en extensión y profundidad, y al hacerlo surgía a lo que se le solido llamar “matemática moderna”. (Ferreirós, 2007. p. 410).

En el año1800 el número real, era concebido como un concepto científico impuesto por el entorno, y por la presencia de magnitudes continuas en el mundo físico; pero por lo contrario en el 1900 los números reales se consideraron producto del pensamiento puro. Hilbert en 18 axiomas, cuya firmeza era la lógica, garantizó la construcción del conjunto de los números reales. En palabras de García (2017):

> Esta nueva matemática que parecía alcanzar el propósito de una matemática consistente y sin contradicciones, que se explicaba por sí misma, tuvo sus dificultades ante las paradojas de la teoría de conjuntos y los métodos de demostración basados en el axioma de elección, es decir se presenta una crisis en los fundamentos de una matemática que pretendía ser infalible, consistente y autosuficiente (p. 37).

Matemáticos como Dedekind, Cantor y Hilbert, en sus construcciones mejoraron en términos estructurales los aportes teóricos que dejaron los antiguos griegos. Hilbert, define los números reales como “elementos de un conjunto dotado de estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo” (Ferreirós, 2007, p. 410).

Sin embargo, el paso de una concepción de número real más cercana a las magnitudes continuas a una estructura abstracta y alejada de las intuiciones geométricas, que tardó alrededor de 21 siglos, refleja claramente la presencia y superación de un obstáculo en la construcción del conjunto de los reales.

Grandes matemáticos del siglo XIX fueron pertinentes para darle firmeza y rigurosidad matemática a la consolidación de los números reales como objeto matemático, cabe mencionar que los aportes de los griegos también jugaron un papel importante en dicha construcción, pese a que sus intentos por fundamentar la aritmética fracasaron, estos se convierten en elementos fundamentales que retoman los matemáticos del siglo XIX para avanzar en la fundamentación de la aritmética.

2.1.4. Inicios y consolidación de la Teoría Intervalar.

A lo largo de la historia, el hombre se ha valido de ciertas técnicas o estrategias para realizar cálculos numéricos con el objetivo de expresar en sus resultados un número exacto. A partir de estas necesidades de expresar números sin realizar aproximaciones o truncamiento de sus cifras, se fueron encontrando ciertos métodos para intentar controlar cualquier tipo de medida.

Para definir la teoría intervalar es necesario en primera instancia reconstruir algunos de los momentos más significativos en la historia que hicieron posible la consolidación de esta teoría como teoría de la computación. En los inicios y consolidación de la teoría intervalar, se identificaron problemáticas y alternativas que dieron paso a esta; no obstante, el matemático estadounidense Wiener en 1914, quien fue reconocido por los aportes para la cibernética, utilizó como instrumentos de medida los intervalos para calcular medidas de distancia y tiempo.

Luego en el año 1951, el matemático Dwyer propuso las reglas para la aritmética de los intervalos que contengan números racionales positivos, para la solución de expresiones con racionales. Además, utilizó la aritmética de intervalos para resolver cálculos con matrices.

En el año 1958, el científico japonés Teruo Sunaga con su investigación intentó limitar el rango de una función racional continua con intervalos, introduciendo intervalos vectoriales y algunas operaciones entre estos.

Por otro lado, se tiene que la teoría intervalar es uno de los métodos que permitió una mejor aproximación a magnitudes inconmensurables como π y Raimon Moore en 1959 la presentó como una herramienta de la computación para evitar cálculos con errores. De hecho, este autor plantea que a través de intervalos sucesivos de números racionales se hace una mejor aproximación a este tipo de magnitudes, disminuyendo los errores a los que se han sometidos los cálculos con magnitudes que han sido truncadas.

Según Moore, Kearfott & Cloud (2009) los inicios de la teoría intervalar se evidenciaron en el método de exhaución propuesto por Arquímedes, anteriormente mencionado.

Algunos matemáticos y expertos en la computación crearon algoritmos como los que se han presentado para calcular π, el empleo de estos y el uso de ordenadores han permitido medir lo "inmedible" o aproximarse lo suficiente para evitar errores de redondeo. Solo hasta el año1960, el método intervalar se convirtió en el centro de investigación para varios matemáticos, lo cual produjo un desarrollo impresionante a nivel teórico y de aplicaciones (Jiménez, 2012).

Pero antes de que Moore sistematizara de forma rigurosa la teoría intervalar, algunos investigadores estadounidenses realizaron varios aportes a esta. Después llegó un momento importante en la consolidación de esta teoría, donde el matemático Kulisch en1962, mostró gran interés por los cálculos con intervalos desarrollados por Moore con relación a la aritmética intervalar e incorporó esta teoría a la computación numérica.

Luego de que Europa se interesara e hiciera uso de esta teoría, puesto que los alemanes utilizaban los mejores sensores para medir micro-cantidades mediante el uso de intervalos, Kulisch con ayuda de otros matemáticos integra la teoría intervalar a computadores digitales y así determinar la eficiencia de estos mejorando cálculos algorítmicos.

En este capítulo solo se dan a conocer algunos momentos en la historia en la que esta teoría fue relevante, y como esta ayudo a reducir errores para cálculos, también siendo integrada en la computación para eficacia de ordenadores. Finalmente esta teoría intervalar ayuda a una representación apropiada del número real mediante intervalos, y no visto como "un punto sobre una recta, sino como el límite de sucesiones de intervalos encajado, que evita errores en los cálculos experimentales originados con el redondeo y el truncamiento, y que favorece la comprensión del número real en relación al concepto de número" (García, 2017).

2.2. Referente matemático: Algunas construcciones del número real (Cantor, Bachman y Weiss) y su relación con el análisis intervalar

En este referente se estudiaron las construcciones de los números reales propuestas por: Cantor, Bachman y Weiss y la relación que tienen con el análisis intervalar; para ello, en un primer momento se inició con la revisión de las diferentes construcciones del número real y finalmente se estudió el análisis intervalar. Estas construcciones se tuvieron presentes para el desarrollo de este trabajo, puesto que, según Reis, L. (2006) (citado en García, (2017)), el empleo de sucesiones de intervalos encajonados beneficia la interpretación de la construcción propuesta por Cantor[8], además sirven como base para comprender otras más generales como las propuestas por Weiss. De esta forma, esta construcción está relacionada con la propuesta del matemático alemán Bachman, quien cerca del año 1892 construye de manera formal los números reales y los define como límites de sucesiones de intervalos encajonados. Ahora bien, en el año 2015 el matemático Weiss define los números reales como filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$ retomando la propuesta de Bachman, sin embargo, a diferencia de Bachman, Weiss hace explicita la relación de orden, además es una construcción más general que la propuesta de Cantor. Para la definición de cada una de las construcciones se utiliza el trabajo de (García, 2017)

Además de estas construcciones se exhibe un acercamiento a la teoría del análisis intervalar, el cual es ciencia de la computación y el desarrollo básico de las operaciones aritméticas; pues ofrece una representación de los números reales un poco más comprensible a la intuición y que no se aleja de las teorías matemáticas propuestas.

[8] De las 17 construcciones formales de los números reales que hasta el momento se han propuesto y de acuerdo con García (2017), este trabajo está enmarcado en una construcción intervalar; por ello, se retoma y privilegia sobre las otras demostraciones, la interpretación de la construcción de Cantor a partir de sucesiones de intervalos encajonados propuesta por Reis (2006) (citado en García (2017)); además de las demostraciones de Weiss y Bachmann que se relacionan e incluyen en sus teorías los intervalos encajonados; o bien como bases de filtros minimales de Cauchy o bien como sucesiones de intervalos encajonados respectivamente. De ahí, que es posible afirmar que las intuiciones que se adquieren en las actividades propuestas bajo la representación intervalar, no se aleja de las propuestas formales.

2.2.1 Preliminares

En principio, es conveniente hacer la introducción de varios conceptos fundamentales, para el desarrollo de este capítulo, tales como las relaciones de equivalencia, las particiones y las clases de equivalencia. De acuerdo a la propuesta de los autores Hrbacek y Jech (1999) en su libro *Introduction to set theory (*citado en (García, 2017)) (las demostraciones de algunos teoremas se encuentran en este libro), se sigue en el orden conveniente para reconstruir los conceptos mencionados a partir de las definiciones de producto cartesiano, relación y par ordenado respectivamente.

De manera formal la relación se define como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Esta definición en matemáticas es esencial, ya que permite formalizar ideas intuitivas, como por ejemplo predecesor de y antecesor de, así como la idea natural de fragmentar un conjunto de objetos (materiales, es decir aquellos que conocemos a través de los sentidos, y/o abstractos creados por nuestro intelecto) en clases que cumplen propiedades comunes. De lo anterior, se puede definir o clasificar las relaciones de equivalencia, las relaciones de orden y las relaciones de tipo funcional, entre otras relaciones binarias que se constituyen en la base de diferentes teorías matemáticas. Por ejemplo, para construir los números reales, desde Cantor, Bachman y Weiss**,** es primordial definir la relación de equivalencia, ya que permite determinar las relaciones entre números y proporcionarles el estatus de número. La definición de clase de equivalencia, también se construye a partir de la definición de relación de equivalencia y ésta es fundamental para construir el conjunto de los números enteros a partir de los naturales, los racionales a partir de los enteros y los reales a partir de los racionales (García, 2017).

La relación se introduce a partir de un concepto fundamental el *par ordenado*. Así, (a, b) es un par ordenado, si es un conjunto que está formado por dos elementos a y *b*, formalmente según Hrbacek & Jech (1999), (citado en (García, 2017)) en teoría de conjuntos el par ordenado se define:

Definición 1. Dados A y B conjuntos, y $a \in A$, $b \in B$, entonces se define el par ordenado de a y b por el conjunto:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Esta definición establece que el conjunto (a, b) tiene dos elementos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ y a partir de ella es posible demostrar el teorema:

Teorema 1 Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

A su vez, este teorema le da sentido a la definición, pues dado este, se diferencia el orden entre el objeto *a* del objeto *b*.

2.2.1.1 Producto Cartesiano: se denomina el producto cartesiano de $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados de *A* en *B*, donde los elementos de *A* corresponden a la primera componente y los de *B* a la segunda componente. Formalmente:

Definición 2 $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) : \mathrm{a} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$

Ejemplo 1 Sean *A y B* conjuntos, de modo que $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{5{,}10\}$ entonces,

$$A \times B = \{(-1{,}5), (-1{,}10), (0{,}5), (0{,}10), (1, 5), (1, 10), (2{,}5), (2{,}10)\}$$

2.2.1.2. Relación: Una relación de *A* en *B* es un subconjunto de A × B, formalmente:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \leftrightarrow R \subseteq A \times B.$$

De acuerdo a esta definición, una relación R se entiende como un subconjunto de los pares ordenados en $A \times B$, seleccionados por alguna correspondencia entre los elementos de A y los de B , esto es $(a, \mathrm{b}) \in R$ se puede interpretar como "*a* le corresponde *b*".

Ahora, dado $(a, b) \in R$, se denota aRb, y se lee *a* está relacionada con b, bajo una relación *R*. En el caso de que $A = B$, *R* se dice es una relación sobre *A*.

2.2.1.3. Relaciones de equivalencia: intuitivamente la relación de equivalencia captura las propiedades básicas de la igualdad.

Definición 3. Dada una relación R, en un conjunto A, se dice que ésta es una relación de equivalencia, si se cumple que es reflexiva, simétrica y transitiva:

- La relación *R* es reflexiva, si para todo elemento $x \in A$, *x* está relacionado consigo mismo, es decir:

$$\forall x(x \in A \rightarrow (x, x) \in R).$$

- La relación *R* es simétrica**,** si dados dos elementos cualesquiera *x, y* del conjunto *A*, x está relacionado con *y*, entonces *y* está relacionado con *x*, es decir:

$$\forall x \forall y(x,y \ \in A \to (xRy \ \to yRx))$$

- La relación es transitiva, si dados tres elementos x, *y*, *z*, que pertenecen al conjunto *A*, si *x* está relacionado con *y* e *y* relacionado con *z*, entonces *x* está relacionado con *z*, es decir:

$$\forall x \forall y \forall z \ (x,y,z \ \in A \to ((x,y) \wedge (y,z) \in R \to (x,z) \in R)).$$

Ejemplo 2 Las relaciones de divisibilidad en $\mathbb{Z}^+$. Dados dos enteros positivos *m* y *n*, se define en $\mathbb{Z}$ la relación $m|n \Leftrightarrow \exists \ r$ tal que $mr = n$.

- Ahora esta relación es reflexiva puesto que todo entero positivo *n* es divisible por sí mismo $n|n$.
- No es simétrica pues dados dos enteros positivos *m* y *n* ocurre que $m|n \to n|m$, en particular $2|6$ es diferente de $6|2$.
- Es transitiva pues dados tres enteros positivos $n, m \ , s$ tal que $n|m \wedge \ m|s \to n|s$ puesto que $n|m \Leftrightarrow \exists r \ tal \ que \ nr = m \wedge m|s$ equivale a que $\exists t \ tal \ que \ mt = s$ entonces $n(rt) = s \Leftrightarrow n|s$.

Los elementos $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)$ son pares ordenados pertenecientes a la relación $D = \{(m,n): m,n \in \mathbb{Z}^+ \ tales \ que \ m \ / \ n \ \}$.

Ejemplo 3 Sea *A* el conjunto de personas en la ciudad de Cali, se define en *A* la relación como sigue:

xRy si y solo si x, y tienen la misma edad.

Para determinar si *R* es una relación de equivalencia, es necesario verificar de acuerdo a lo mencionado si es reflexiva, simétrica y transitiva:

- *R* es reflexiva sobre *A* porque, puesto que *x* tiene la misma edad que *x*, para todo $x \in A$, es decir xRx.
- *R* es simétrica, porque si xRy, entonces *x* tiene la misma edad que y, lo cual implica que *y* tiene la misma edad de *x*, por tanto yRx.
- *R* es transitiva, porque si xRy y yRz, es decir si *x* tiene la misma edad que *y* e *y* tiene la misma edad que *z*, entonces *x* y *z* tienen la misma edad por tanto xRz.

Ejemplo 4 La relación de los números enteros aRb si y solo si $a - b$ es múltiplo de tres, es decir para $a, b \in Z, aRb \leftrightarrow \exists\, r\ (r \in Z)\ tal\ que\ a - b = 3r$. Para demostrar que es una relación de equivalencia se tiene:

Es reflexiva, $aRa \leftrightarrow a - a = 3 \cdot 0 = 0$ y $0 \in Z$

Es simétrica, $aRb \rightarrow bRa$ porque $aRb \leftrightarrow \exists r \in Z\ tal\ que\ a - b = 3r \Longrightarrow b - a = 3(-r); (-r) \in Z$

Es transitiva, Si $aRb \wedge bRc$ entonces $\exists\, r, s \in Z / a - b = 3r \wedge b - c = 3s \rightarrow a - c$

$= a - b + b - c = 3r + 3s$

$a - c = 3(r + s)$, tomando $t = r + s$

Se tiene que $a - c = 3t; t \in Z$ entonces aRc.

Por lo tanto, *R* es una relación de equivalencia.

Ejemplo 5 Para $A = \{1, 2, 3\}$, se tiene que dada la relación:

$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ ésta no es una relación de equivalencia porque si bien es simétrica, no es reflexiva en *A*.

Ejemplo 6 Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, y dada la relación

$R = \{(1,1), (2, 2), (1, 3), (3, 2)\}$ no es una relación es transitiva porque $(1, 3), (3, 2) \in R$ pero $(1, 2) \notin R$, por tanto, no es una relación de equivalencia.

2.2.1.4. Partición: Una partición de un conjunto *A* es una colección de sub-conjuntos no vacíos de *A*, disjuntos dos a dos, cuya unión es *A*. Formalmente

$$P = \{A_i : A_i \subseteq A \wedge A_i \neq \emptyset\ ;\ i \in I\}$$

Donde *I* es un conjunto de índices tales que $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Ejemplo 7 Sea $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y sean *B*, *C y D* subconjuntos de A

$B = \{3,6\}, C = \{4\}$ y D= $\{5,7\}$

Se tiene que: $B \cup C \cup$ D= A

$B \cap C \cap$ D $= \emptyset$

La unión de los subconjuntos es igual a *A* y la intersección es igual al conjunto vacío, es decir los conjuntos son disyuntos. Por tanto, la colección de subconjuntos $P = \big\{\{3,6\}, \{4\}, \{5,7\}\big\}$ es una partición de A.

2.2.1.5. Clase de equivalencia: esta definición es fundamental para la comprensión del número real y el concepto de número en general. Formalmente si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, y $a \in A$, al conjunto de los elementos de A que están relacionados con a por la relación R se le denomina como *la clase de equivalencia de a* y se denota de la siguiente manera:

$$[a] = \{x \in A: a\, Rx\}$$

Sí R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A tal que $a, b \in A$ y $[a] \neq [b]$ entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Teorema 2

Una relación sobre un conjunto $A \neq \emptyset$ particiona A en sus clases de equivalencia. Conversamente, toda partición sobre A da lugar a una única relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son justamente los subconjuntos de la partición.

Ejemplo 8 Para la relación de equivalencia de $aRb \leftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{Z}\, /a - b = 3r$, se divide a $\mathbb{Z}$ en tres clases $[0], [1]\ y\ [2]$ para el caso de $[0]$ se tiene:

$[0] = \{\ldots -6, -3, 0, 3{,}6 \ldots\} = \{n: n = 3r; r \in \mathbb{Z}\}$

Ejemplo 9 La relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ determinada por la partición $P = \big\{\{1{,}3\}, \{2{,}4\}, \{5\}\big\}$ es:

$$R = \{(1{,}1), (2{,}2), (3{,}3), (4{,}4), (5{,}5), (1{,}3), (3{,}1), (2{,}4), (4{,}2)\}$$

Ejemplo 10 $R = \{(3{,}3), (4{,}4), (5{,}5), (6{,}6), (7{,}7), (3{,}6), (6{,}3), (5{,}7), (7{,}5)\}$ Sobre A, es una relación de equivalencia, a partir de ella tenemos las siguientes clases de equivalencia:

$[3] = \{3{,}6\} = [6]$

$[4] = \{4\}$

$[5] = \{5{,}7\} = [7]$

Así, es claro que la clase de equivalencia de 3, es diferente a la clase de equivalencia de 4, por ejemplo, $[3] \neq [4]$ entonces se cumple que $[3] \cap [4] = \emptyset$, lo mismo ocurre para las clases de equivalencia del 3 con el 5 y del 4 con el 5.

Definición 4. Al conjunto de las clases de equivalencia es a lo que se le denomina *conjunto cociente*.

Ejemplo 11 El conjunto cociente del ejemplo 3.8 es $\mathbb{Z}/R = \{[0],[1],[2]\}$
La ecuación $x + a = b$, tiene solución en $\mathbb{N}$ si y solo si $b > a$, por lo tanto la solución a esta ecuación para cualquier valores de a y b, crea la necesidad de definir un sistema numérico más amplio que$\mathbb{N}$, denominados los números enteros ($\mathbb{Z}$). Al mismo tiempo, los números racionales se pueden construir a partir de los números enteros y los reales a partir de los racionales.

2.2.2. La construcción de los reales por Cantor (1845-1918).

La construcción de los números reales propuesta por Cantor es difícil su apropiación conceptual pero no tanto técnicamente. Puesto que, los números reales, según Cantor, son Clases de Equivalencia de sucesiones de Cauchy, lo cual, para un matemático que comprenda la teoría de conjuntos, las clases de equivalencia y las sucesiones fundamentales, no le será difícil su construcción. (Ferreirós, 2007).

Por lo anterior, es importante definir las sucesiones de Cauchy, tanto para el acercamiento a la construcción de Cantor, como para la definición de filtros que se desarrolla más adelante. Estas definiciones son tomadas de (García, 2017).

Ahora bien, para definir los números reales ($\mathbb{R}$), Cantor parte de los números racionales, mencionando que los números reales son límites de sucesiones de racionales. Antes de hacer la construcción de $\mathbb{R}$ según Cantor, es necesario retomar de manera breve algunas definiciones asociadas a ésta, tales como, las sucesiones racionales, las sucesiones convergentes y las sucesiones de Cauchy.

2.2.2.1 Sucesiones racionales

Una sucesión de números racionales, es una función *a:* $\mathbb{N} \rightarrow Q$. Se denota *a(n)* o como a_n y es llamado el *n- enésimo término de la sucesión*. Así mismo el conjunto de valores de la sucesión a se denota como $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$
Algunos ejemplos de sucesiones racionales son:

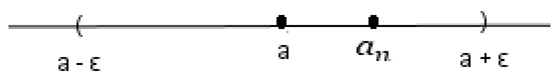
- $a_n = \frac{1}{n+1}$
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$
- $a_n = (-1)^{n+1}$

2.2.2.2. Sucesión convergente

Una sucesión de números racionales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a **a** o tiene un límite **a**, la cual se denota por si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un número natural N tal que para todo $n > N$ implica que $|a_n - a| < \varepsilon$. Se usa como notación la siguiente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N\epsilon\mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite a, entonces par todo $n > N$ se tiene que $|a_n - a| < \varepsilon$ y esto es lo mismo que $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



Es decir, que para un ε tan pequeño como se desee, todos los términos a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $n > N$ están comprendidos en el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Ejemplo 12:

Para las siguientes sucesiones racionales se verifica si son o no convergentes:

1. $a_n = \frac{n+3}{2n+1}$, al calcular el límite de esta sucesión se obtiene $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, lo que implica que el límite existe y la sucesión converge a $\frac{1}{2}$.
2. $a_n = (-1)^n + 2$, en este caso para cada valor de *n* la sucesión toma los valores de 1 ó 3, por tanto a medida que *n* crece no es posible encontrar el límite y por tanto la sucesión no converge.
3. $a_n = \frac{n+3}{n^2+3}$, al calcular el límite de esta sucesión se obtiene $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, para este caso el límite existe y la sucesión converge a 0.
4. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$, al calcular el límite de esta sucesión se obtiene $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$ para este caso la sucesión no converge a un número racional. Falta referenciar el limite $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$e

2.2.2.3. Sucesiones de Cauchy

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y solo sí, para cualquier valor racional positivo ε, existe un número entero *N*, tal que si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Así simbólicamente:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \ \exists\, N \ tal\ que\ \forall\, n, m > N \ \rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Ejemplo 13

La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = \frac{n+1}{n}$, es una sucesión de Cauchy. En efecto, Sea $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, luego $|x_m - x_n| = \left|\frac{n-m}{mn}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{min\{m,n\}}$, si se toma $n_0 \in N$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} + 1$, entonces $|x_m - x_n| < \frac{1}{min\{m,n\}} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon$, para todo $m, n \geq n_0$.

Definición 5. Si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números racionales, se definen las sucesiones suma $x + y = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y multiplicación $xy = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por:

$u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n y_n$.

Claramente, si *x*,*y* son sucesiones de números racionales, entonces también lo son $x + y$ y xy. Es un hecho importante que si x y y son sucesiones de Cauchy de números racionales, entonces $x + y$ y xy son sucesiones de Cauchy. En otras palabras, la suma y la multiplicación son operaciones binarias en el conjunto *C* de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales.

Lema 1.

Si x, y son sucesiones de Cauchy, entonces también lo son las sucesiones suma $\mathrm{x} + \mathrm{y}$, y la multiplicación xy (Hernández, 2003).

Las propiedades básicas de la suma y la multiplicación pueden ser resumidas por la afirmación de que ellas satisfacen las propiedades de los números racionales, donde los módulos de la suma y el producto son la sucesión 0 y la sucesión 1 respectivamente. El opuesto de la sucesión de Cauchy *x* es la sucesión –*x* tal que $(-x)_n = -x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Toda sucesión racional convergente es de Cauchy, sin embargo, en el sistema de los números racionales, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se puede probar que es de Cauchy pero no converge en $\mathbb{Q}$. Es menester mencionar que, lo que dio lugar a la construcción de los números reales fue la necesidad de dar solución a este tipo de sucesiones o encontrar estos límites, Cantor asocia a cada sucesión de Cauchy un número real, es decir hay sucesiones asociadas a números racionales y otras asociadas a números que no lo son (García, 2017).

A continuación se introduce una relación, la cual será simbolizada por $\sim$, en el conjunto *C* de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Y las siguientes definiciones, lemas y teoremas según Hernández, (2003):

Definición 6. Sean $x, y \in C$, definamos una relación $\sim$ en *C* como $x \sim y$ si y solo si para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un $n_0 \in N$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.
Como ilustración, considere las sucesiones *x* y *y* tales que $x_n = \frac{n+2}{n+1}$ y $y_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estas son sucesiones de Cauchy y claramente $x \sim y$ puesto que $x_n - y_n = \frac{1}{n+1}$. Es fácil establecer la siguiente propiedad de esta relación.

Lema 2. La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en *C.*

Definición 7. Una sucesión de Cauchy $x \in C$ se dice *positiva* si existen $\varepsilon \in Q^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$, $x_n > \varepsilon$.

Esta relación de equivalencia en las sucesiones de Cauchy, es compatible con la suma y el producto en C. Y además, todas las sucesiones positivas representan una sola clase de equivalencia. Lo anterior se presenta como sigue.

Lema 3. *Si $x, y, u, v \in C$ son tales que $x \sim u$ y $y \sim v$, entonces $x + y \sim u + v$ y $xy \sim uv$; además, si x es positiva entonces u es positiva.*

Lema 4. *La suma y la multiplicación de dos sucesiones de Cauchy positivas son sucesiones de Cauchy positivas. Además, si $x \in C$, entonces una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera: x es positiva, $x \sim 0$ o $-x$ es positiva.*

Lema 5. *Si x$\in C$ no es equivalente a 0 módulo$\sim$, entonces existe $y \in C$ tal que* $xy \sim 1$.

2.2.2.4. Los Reales

Definición 8: Un *número real* es una clase de equivalencia módulo $\sim$ de sucesiones de Cauchy de números racionales.

El número real determinado por la sucesión de Cauchy *x* lo denotamos como $[x]_{\sim}$.

El conjunto de los números reales es $\mathbb{R} = C/\sim$. Un número real es llamado *positivo* si y solo si contiene una sucesión de Cauchy positiva. Si $[x]_{\sim}$ es positivo, entonces cada uno de los miembros de esta clase es una sucesión de Cauchy positiva. El conjunto de todos los números reales positivos es simbolizado por $\mathbb{R}^{+}$. Se definen las operaciones de suma y multiplicación de números reales como:

$$[x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x + y]_{\sim}$$

$$[x]_{\sim} \cdot [y]_{\sim} = [xy]_{\sim},$$

También se define un orden en $\mathbb{R}$ por:

$$x <_{\sim} y \text{ si } y \text{ sólo si } y - x \in \mathbb{R}^{+}.$$

Es de esperar que este orden preserva todas las propiedades de orden de los racionales, pues si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $\{a\}_{n\in\mathbb{N}} \in C$ y en consecuencia existe un único número real $[a]_{\sim}$ que contiene a $\{a\}_{n\in\mathbb{N}}$; así la función $a \to [a]_{\sim}$ es una inyección y un isomorfismo sobre su imagen. Así entonces el orden $\leq_{\sim}$ que resulta a partir de $<_{\sim}$ es un orden total en$\mathbb{R}$. Por otro lado esta función también preserva las operaciones de suma y multiplicación.

Los números reales correspondientes a los números racionales 0 y 1 son simbolizados por $0_{\sim}$ y $1_{\sim}$.

Teorema 3. El sistema $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0_{\sim}, 1_{\sim} \rangle$ preserva las propiedades de los racionales tanto para la suma como para el producto.

La definición de la función valor absoluto se extiende a los números reales de manera similar. Como se ha ido construyendo $\mathbb{R}$, muestra que es una extensión de $\mathbb{Q}$, así las propiedades fundamentales de los números racionales se preservan en $\mathbb{R}$.

Según Hernández (2003):

Teorema 4. *Entre dos reales distintos cualesquiera hay un número racional.*

Lema 6: *si* $x, y \in C$ *y si existe* $n_0 \in N$ *talque para todo* $n \geq n_0, x_n \leq y_n$, *entonces* $[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim}$, *es decir, no se puede garantizar la desigualdad estricta.*

El siguiente teorema es una generalización de la propiedad arquimediana del sistema de los números racionales para el sistema de los números reales.

Teorema 5. Si $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ $tal\ que\ nx > y$.

Teorema 6. *Todo subconjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior, tiene una mínima cota superior.*

Este teorema es quien proporciona la característica primordial que hace diferente al sistema de los números reales. Puede demostrarse que

$$\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0_{\sim}, 1_{\sim} \rangle$$

Ahora como consecuencia del teorema anterior se muestra, después de dos lemas, que toda sucesión de Cauchy de números reales tiene un límite. Una sucesión *x* de números reales es una sucesión tal que $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Según Según Hernández, (2003) Una *sucesión de Cauchy de números reales* es una sucesión de números reales tal que para cualquier número real positivo ε existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Para todo $m, n \geq n_0$

Ejemplo 14 Toda sucesión constante de números reales tiene un límite.

Lema 7. *El límite de una sucesión de números reales es único.*

Ejemplo 15 Toda sucesión de números reales decreciente (creciente) que está acotada inferiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ con $M \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, superiormente: $x_n \leq M, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$), tiene límite.

Lema 8. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números racionales y sea la sucesión de números reales tal que para cada* $n \in \mathbb{N}, x_n = [\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim}$ *es el número real correspondiente a* a_n. *Entonces x es una sucesión de Cauchy de números racionales. Además, si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una suceción de Cauchy de números racionales y z es el número real que ella define, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Teorema 7. *Una sucesión de números reales tiene un límite si y solo si es una sucesión de Cauchy de números reales.*

En consecuencia, se puede decir que los números reales se pueden representar como límites de sucesiones de Cauchy y estas a su vez están relacionadas con el concepto de intervalo, el cual es utilizado por Bachman como se presenta más adelante y posteriormente Weiss por medio de filtros míniales de Cauchy, los cuales son una generalización de las sucesiones de Cauchy; es decir la construcción propuesta por Cantor es un referente necesario para cualquiera que pretenda entender las construcciones de estos dos últimos autores (García, 2017). Ahora, todas estas construcciones conllevan a los intervalos, por lo cual, se logra deducir que estos juegan un papel muy importante en las construcciones de los números Reales. Sin embargo, en adelante antes de presentar las construcciones de Bachman y Weiss, se presenta un estudio de la teoría intervalar.

2.2.3. Análisis intervalar

En el capítulo 2 (Referente histórico) se ha mencionado que el análisis intervalar tiene sus inicios en Arquímedes, no obstante, toma importancia en el año 1960 convirtiéndose en tema de investigación, lo que conlleva a que se hagan importantes aportes a la ingeniería. Moore, principal autor de esta teoría, buscó alternativas antes el problema de representar números reales como $\sqrt{2}$ ó π, en vista de que estos números tienen un número ilimitado de cifras decimales no periódicas y los ordenadores solo pueden representar un número limitado de estas.

Así como en el campo de la ingeniería se vio esta dificultad, lo mismo, sucede en el salón de clases, ya que, cuando se intenta introducir los números de naturaleza infinita periódica o infinita no periódica se trata de convencer a los estudiantes de la existencia de estos números, lo que lleva que difícilmente puedan comprender su naturaleza.

Por lo anterior, García, (2017) para su trabajo toma como eje central el análisis intervalar, puesto que, a pesar de que esta alternativa no había sido pensada para la Educación Matemática, es una manera de aproximarse a la representación de $\mathbb{R}$ teóricamente válido e intuitivamente más coherente con la práctica, que remedia de alguna manera los errores de aproximación y truncamiento.

Por esta razón, en este apartado se trató de hacer una descripción teórica del análisis intervalar, puesto que trata de representar a los números reales de manera similar al método que usó Cantor.

2.2.3.1. Análisis Intervalar Clásico.

Es imposible trabajar con números reales con cifras ilimitadas en la vida real, sin embargo es viable trabajar con intervalos y como ya se ha mencionado, los intervalos son todos los números próximos a un número real que aunque no lo muestra, lo atrapa y permite intuir su existencia. A estos intervalos se les reconoce como escalas digitales, claro está SIGLA/X (1999) (citado en García (2017)), dice claramente: "se puede plantear el problema de qué marca digital de la escala DI (1,1)[9] sería la más adecuada para representar el valor 1/3. Sea cual sea el valor que se escoja, el valor representado no es exactamente el de 1/3 (…)" (p.2)

Ahora bien, respecto a la Educación Media, el análisis intervalar es una alternativa de resolver el problema de la representación de un número real porque la solución está en atraparlo entre dos números digitales consecutivos. De otro modo, SIGLA/X (1999) (citado en García (2017)), plantea la necesidad de los intervalos de la siguiente manera:

La utilización del conjunto de intervalos sobre la recta real, I(R), permitirá manejar los sistemas físicos con modelos numéricos sin necesidad de hacer abstracción del hecho inevitable de la indeterminación asociada a los procesos de medida y cálculo. En ese orden, los intervalos permitirán:

1. La manipulación de errores de truncamiento. Por ejemplo, el número π se puede representar como $3{,}14159265 \cdots \in [3{,}14; 3{,}15]$.
2. El control automático de errores operacionales en el cálculo digital.
3. El manejo de errores de datos físicos que provienen de medidas experimentales. Por ejemplo, la constante gravitatoria $g = 9{,}807 \pm 0{,}027 m/s2 \in [9{,}780; 9{,}834]$.
4. La utilización de variables de indeterminación o de variación. Por ejemplo, la temperatura de una habitación durante las 24 horas del día varía entre 18 y 25 grados, entonces $T = [18; 25]$ (p.4)

[9] DI (1,1): Esta es una representación que utiliza el análisis intervalar conocida como la escala digital, es decir, el conjunto de números con un único digito $\mathbb{Z}$ y un único digito decimal.

2.2.3.2. El Sistema Numérico Intervalar.

Términos y conceptos básicos: el intervalo cerrado [a, b] es el conjunto de los números reales dados por:

$$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$$

Aunque existen otros tipos de intervalos como el abierto y semiabierto en las matemáticas, este trabajo se centrará principalmente en los intervalos cerrados.

Notación, e igualdad entre intervalos

Para denotar un intervalo se utilizan letras mayúsculas donde la cota superior del intervalo se representa $\overline{X}$ y la cota inferior $\underline{X}$, Así:

$$[\underline{X}, \overline{X}]$$

Dos intervalos de *X*, *Y* se dice que son *iguales* si son los mismos conjuntos. Operativamente, esta sucede si sus extremos correspondientes son iguales:

$$X = Y \; si \; \underline{X} = \underline{Y} \;\; y \; \overline{X} = \overline{Y}$$

2.2.3.2.1. Intervalos degenerados

Se dice que *X* es degenerado si $\overline{X} = \underline{X}$. Este intervalo contiene un solo número real *x*. Por convención, para identificar un intervalo degenerado se denotan así $[x, x]$ para representar el número real *x*. En este sentido, se puede escribir igualdades como:

$$0 = [0,0]$$

La intersección de dos intervalos de *X* e *Y* es vacía si y solo sí $\overline{Y} < \underline{X}$ o $\overline{X} < \underline{Y}$. En este caso $\emptyset$ representa el conjunto vacío así:

$$X \cap Y = \emptyset$$

Lo que indica que *X* e *Y* no tienen puntos en común. De lo contrario, se puede definir la intersección $X \cap Y$ como el intervalo:

$$X \cap Y = \{z: z \in X \; y \; z \in Y\}$$

$$= \left[max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, min\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

Siempre es un intervalo y puede ser utilizado en los cálculos de intervalo.
Para el caso en que $X \cap Y \neq \emptyset$ entonces la unión es un intervalo como sigue:

$$X \cup Y = \{z: z \in X \ o \ z \in Y\}$$
$$= \left[min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, max\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

En general, la unión conjuntista de dos intervalos no es un intervalo. Sin embargo, la unión de dos intervalos, definida por:

$$X \underline{\cup} Y = \left[min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, max\{\overline{X}, \overline{Y}\}\right]$$

Siempre es un intervalo y puede ser utilizado en los cálculos de intervalo. Se tiene

$$X \cup Y \subseteq X \underline{\cup} Y$$

Para cualquiera de los dos intervalos de X e Y.

Ejemplo 16

Si X = [-1, 0] y Y = [1, 2], entonces $X \underline{\cup} Y = [-1,2]$. Aunque $X \cup Y$ es un conjunto que no puede ser expresado como un intervalo, existe un intervalo que lo contiene. Sin embargo cuando se sustituye $X \cup Y$ con $X \underline{\cup} Y$, este último difiere del original, pero sus extremos coinciden, los cuales son los esenciales para los cálculos en esta teoría.

2.2.3.2.2. Importancia de la Intersección

García (2017) menciona que la intersección juega un papel muy importante en el análisis intervalar. Si se tiene dos intervalos que contienen un resultado en común, independientemente de cómo se hayan obtenido, entonces la intersección, lo que puede ser más estrecho, también contiene el resultado. Para explicar la idea anterior García toma el siguiente ejemplo:

Ejemplo 17

Supóngase que dos personas hacen mediciones independientes de una cantidad $\mathbb{Q}$ con las mismas características físicas. Uno encuentra que $\mathbb{Q}$ = 10.3 con un error de medición de menos de 0,2. El otro encuentra que $\mathbb{Q}$ = 10.4 con un error de menos de 0,2. Se puede representar estas mediciones en el intervalos de X = [10.1, 10.5] e Y = [10.2, 10.6], respectivamente. Dado que $\mathbb{Q}$ se encuentra en ambos, también se encuentra en

$X \cap Y$ = [10.2, 10.5]. Una intersección vacía implicaría que al menos uno de las mediciones es errónea. (p. 95).

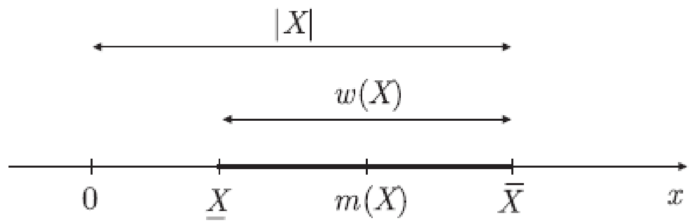


Figura 4. Intervalos – Intersección

Tomada de (García, 2017)

2.2.3.2.3. Longitud, valor absoluto, Punto medio

1. La anchura de un intervalo de X se define y denota por:

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X} \qquad (3.8)$$

2. El valor absoluto de X, denotado $|\ X\ |$, es el máximo de los valores absolutos de sus extremos:

$$|X| = max\{|\overline{X}|, |\underline{X}|\}. \qquad (3.9)$$

Tenga en cuenta que $|x| \leq |X|$ para todo $x \in X$

3. El punto medio de X está dada por: $M(x) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X})$. (3.10)

Ejemplo 18

Sea X = [0, 2] e Y = [-1, 1]. La intersección y la unión de X e Y son los intervalos:

$$X \cap Y = [max\{0, -1\}, min\{2,1\}] = [0,1]$$

$$X \cup Y = [min\{0, -1\}, max\{2,1\}] = [-1,2]$$

Se tiene $w(X) = w(Y) = 2$ y, por ejemplo:

$$|X| = max\{0,2\} = 2$$

El punto medio de Y es $m(Y) = 0$

2.2.3.2.4. Relaciones de orden de los intervalos

Los números reales están clasificados por la relación <. Esta relación se dice que es transitiva: si $a < b$ y $b < c,$ entonces $a < c$ para todo $a, b, y\ c \in R$. La relación correspondiente se puede definir por intervalos, y se continúan utilizando el mismo símbolo acordado:

$$X < Y \text{ Significa que } \overline{X} < \underline{Y} . \qquad (3.11)$$

Por ejemplo, [0, 1] < [2, 3], y ahora Se tiene:

$$A < B \ y \ B < C \Longrightarrow A < C . \qquad (3.12)$$

Observación. Bajo este orden, todo par de intervalos no son comparables. Por ejemplo los intervalos [1,3] y [2,4] no son comparables, sin embargo, cualquier par de intervalos disyuntos si lo son.

Se puede llamar positivo X si $X > 0$ o negativo si $X < 0$. Es decir, Se tiene$X > 0$ si $x > 0$ para todo $x \in X$.

Otra relación de orden transitivo de intervalos se establece por la inclusión:

$$X \subseteq Y \text{ Si y solo si } \underline{Y} \leq \underline{X} \text{ y } \overline{Y} \geq \overline{X} . \qquad (3.13)$$

Por ejemplo, se tiene [1, 3] ⊆ [0, 3]. Este es un *orden parcial*. No todo par de intervalos es comparable en virtud de la inclusión del conjunto. Por ejemplo, si X e Y se superponen los intervalos donde X = [2, 5] y Y = [4, 20], entonces X no está contenido en Y, ni Y está contenido en X. Sin embargo, $X \cap Y = [4, 5]$, está contenido en ambos X y Y.

2.2.4. La construcción de Bachmann (1892).

Una sucesión $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos $I_n = [a_n, c_n]$ en los reales se llaman encajonados, si $I_{k+1} \subseteq I_k$ para todo $k \geq 1$ y $c_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cada sucesión de intervalos encajonados, existe un único número real b, tal que $b \in I_k$ para todo $k \geq 1$.

Una sucesión de intervalos encajonados $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más precisa que otra $\{J_n\}_{n\geq 1}$si $I_n \subseteq J_n$, para todo n ≥ 1. Se dice que dos sucesiones de intervalos encajonados tienen un *refinamiento común* si hay una sucesión de intervalos encajonados más fina que la intersección de ambos. Así pues, dos sucesiones de intervalos encajonados determinan el mismo número real, si y solo si, admiten un *refinamiento* común.

Debido a la densidad de los números racionales en los números reales, los intervalos anteriores se pueden reemplazar por intervalos racionales, es decir intervalos que constan solo de números racionales, al tiempo que conserva la correspondencia con los reales.

2.2.4.1. Los reales. Considere ahora intervalos racionales de la forma $I = [a, c] = \{x \epsilon Q | \, a \leq x \leq c \}$, donde $a, c \in \mathbb{Q}$. Un *racional encajonado* es una familia $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos racionales $[a_n, c_n]$ que satisface $I_{k+1} \subseteq I_k$ para todo k ≥ 1 y $c_n - a_n \to 0$. Un racional encajonado $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más fino que una sucesión del mismo tipo $\{J_n\}_{n\geq 1}$ si $I_n \subseteq J_n$, para todo n ≥ 1. Sea *N* el conjunto de todos los racionales encajonados, luego en él se define la relación ~ donde $\{I_n\}_{n\geq 1} \sim \{J_n\}_{n\geq 1}$ si existe un *refinamiento común* de $\{I_n\}_{n\geq 1}$ y $\{J_n\}_{n\geq 1}$. De ello se puede deducir que ~ es una relación de equivalencia en *N* y el conjunto ℝ de los números reales se define por *N*/~, es decir el conjunto de clases de equivalencia de racionales encajonados.

2.2.4.1.1. Orden. Dos números reales $x = [\{I_n\}]$ y $y = [\{J_n\}]$ satisface $x < y$, cuando existe $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ con $I_{n_0} < J_{n_0}$en el sentido de que $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in I_{n_0}$ y todo $\beta \in J_{n_0}$.

La construcción de Bachmann, se retoma recientemente en la propuesta hecha por Weiss (2015).

2.2.5. Filtros

En este apartado se mencionan de manera general algunos aspectos teóricos que permiten un acercamiento a este tema, por lo que, se considera pertinente desarrollar algunos preliminares relacionados con la noción de filtro que generaliza las sucesiones de números racionales presentada.

Los filtros están en el centro de la construcción de los números reales propuesta por Weiss, y son de singular importancia las bases de filtros de Cauchy dado que es menos complejo trabajar con la base del filtro que con el mismo. Para lo siguiente se toma como referencia el texto *The reals as rational cauchy filters, Weiss* (2015), pp. 17-19. (Ciado en (García, 2017))

2.2.5.1. Filtro: Un filtro sobre X es una familia no vacía F de subconjuntos de X que cumple lo siguiente:

1. $F_1, F_2 \in F \to F_1 \cap F_2 \in F$ (cerrado bajo intersecciones)
2. $F_2 \supseteq F_1 \in F \to F_2 \in F$ (Cerrado hacia arriba)

La segunda condición implica que el único filtro que contiene al conjunto ϕ es el filtro $P(X)$, el cual se le llama filtro impropio. Si F $\subsetneq P(X)$ se dice que F es un filtro propio.

Observación. La intersección de cualquier familia de filtros es nuevamente un filtro.

2.2.5.2. Base de Filtro: $B \subset P(X)$ se dice una base de filtro si $B_1, B_2 \in B$ $\to \exists B_3 \in B$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Luego, para describir un filtro es suficiente con describir la base que lo genera, que por ítem 1 deben garantizar el cierre para intersecciones finitas y por ítem 2 ser cerrado por contenencia hacia arriba.

Ejemplo 19.

Sea $q \in \mathbb{Q}$, entonces los conjuntos son bases de un filtro sobre $\mathbb{Q}$:

a) $B_1 = \{\{q\}\}$. En efecto, $B_1 \subseteq P(\mathbb{Q})$, por otro lado como $\{q\}$ es el único elemento en B_1, se cumple trivialmente que la intersección contiene un elemento de la base.
b) $B_2 = \{q_\varepsilon \subseteq \mathbb{Q}: \varepsilon > 0\}$, donde $q_\varepsilon = (q - \varepsilon, q + \varepsilon)$. En efecto, $B_2 \subseteq P(\mathbb{Q})$, por otro lado dado dos números ε_1 y ε_2, entonces $q_{\varepsilon_1} \cap q_{\varepsilon_2} \supseteq q_k$ donde $k = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, por lo tanto q_k está en B_2.

Observación: Todo filtro es una base de filtro, pero el recíproco no es cierto.

2.2.5.3. Filtro generado por una base de filtro. Dada una base del filtro $\boldsymbol{B}$ la colección: $\langle \boldsymbol{B} \rangle = \{F \subseteq X | F \supseteq B, B \in \boldsymbol{B}\}$ es un filtro sobre X.

De hecho, es el filtro más pequeño que contiene a $\boldsymbol{B}$ y se llama el filtro generado por la base del filtro B.

Ejemplo 20.

Sea $q \in \mathbb{Q}$, no es difícil ver que F_1 es un filtro.

a) $F_1 = \{F \subseteq Q : q \epsilon F\}$. Nótese que $\langle B_1 \rangle = F_1$, para $B_1 = \{\{q\}\}$, donde este último es una base tal como se muestra en el ejemplo anterior.

b) $F_2 = \{F \subseteq \mathbb{Q}: (\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}^+),\ q_\varepsilon \subseteq \mathrm{F}\}$. Nótese que $\langle B_2 \rangle = F_2$, para $B_2 = \{q_\varepsilon \subseteq \mathbb{Q}: \varepsilon > 0\}$, donde este último es una base tal como se muestra en el ejemplo anterior.

Ejemplo 21.

Sea el conjunto $X = \{a, b, c\}$ entonces el filtro generado por X es

$$P(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

2.2.5.4. Filtro de Cauchy. Sea F un filtro sobre $\mathbb{Q}$, entonces F es de Cauchy si y solo si $\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}, \exists\, q \in \mathbb{Q}$ tal que $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \in F$.

2.2.5.4.1. Base de filtro de Cauchy: B es una base de un filtro de Cauchy si y solo si $(\forall \varepsilon \epsilon \mathbb{Q}^+)\ \exists\, q \in \mathbb{Q}$ y $\exists\, B \in B$ tal que $B \subseteq q_\varepsilon$.

Afirmación: Si B es base de filtro de Cauchy, entonces $\langle B \rangle$ es un filtro de Cauchy.

Ejemplo 22.

Sea $q \in \mathbb{Q}$ fijo y se tiene:

$$B_1 = \{\{q\}\}$$

$$B_2 = \{q_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

Y sean F_1 y F_2 los filtros generados por B_1 y B_2 respectivamente, es decir

$$F_1 = \langle B_1 \rangle = \{\mathcal{F} \subseteq Q : \{q\} \subseteq \mathcal{F}\}$$

$$F_2 = \langle B_2 \rangle = \{\mathcal{F} \subseteq Q : q_\varepsilon \subseteq \mathcal{F};\ \varepsilon > 0\},$$

Ahora puesto que B_1 y B_2 son bases, más aún son de Cauchy. En efecto, todo intervalo q_ε contiene a $\{q\}$, por tanto B_1 es una base de Cauchy, luego por otro lado todo intervalo q_ε es un elemento en B_2, entonces B_2 es una base de Cauchy, por lo tanto por la afirmación anterior F_2 y F_1 son filtros de Cauchy.

2.2.5.5. Filtro minimal de Cauchy: los filtros están ordenados por la relación $\subseteq$, luego, por esta razón se puede hablar de la existencia de un mínimo.

Definición 9: $\mathcal{F}$ es un filtro minimal de Cauchy si y solo si $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy tal que si $G \subseteq \mathcal{F}$ es filtro de Cauchy, entonces $G = \mathcal{F}$.

Observación. Todo filtro propio de Cauchy, contiene un único filtro minimal de Cauchy.

2.2.6. La construcción de Weiss (2015).

Weiss construye al conjunto de los reales y explicita una relación de orden total en $\mathbb{R}$, este es su mayor aporte. Se puede pensar que la idea de Weiss es muy singular pues nos va a hacer creer que se pude "Tocar" a los números reales. A continuación, se hará un acercamiento a su construcción. (Weiss, 2015. pp. 4-7). (Citado en (García, 2017)).

Definición 10.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los filtros minimales de Cauchy racionales. Los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman números reales y, normalmente, se denotan por a, b, c. En particular, cada número real a es una colección de subconjuntos de números racionales, y que típicamente se referirá a estos conjuntos escribiendo $A \in a$, mientras que los elementos de A se denotarán por $\alpha \in A$. Así:

$$\mathbb{R} = \{a\colon a\ es\ un filtro\ minimal\ de\ Cauchy\ sobre\ \mathbb{Q}\,\}$$

Es importante enfatizar, en que un número real a es necesariamente un filtro propio, y por lo tanto $\emptyset \notin a$ en consecuencia $A \cap A' \neq \emptyset$ para todos $A, A' \in a$. Por otra parte, si $A \in a$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}\ y\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ con $q_\varepsilon \in a$ y $q_\varepsilon \subseteq A$.

2.2.6.1. Orden. La relación de orden en $\mathbb{Q}$ se extiende universalmente a P($\mathbb{Q}$) de modo que A $<_\forall$ B cuando para todo $a \in A$ y todo $b \in B$ se tiene a $<$ b. Del mismo modo, la relación $<_\forall$ en P($\mathbb{Q}$) se extiende existencialmente a $P(P(\mathbb{Q}))$, de modo que A′ $<_{\exists\forall}$ B′ cuando existan A ∈ A′ y B ∈ B′con A $<_\forall$ B. Ninguna de estas extensiones es una relación de orden, sin embargo, puesto que cualquier filtro en $\mathbb{Q}$ es un elemento en $P(P(\mathbb{Q}))$, entonces la relación $<_{\exists\forall}$ se restringe a una relación en $\mathbb{R}$, es decir $a < b$ si y solo si $a <_{\exists\forall} b$, para $a, b \in \mathbb{R}$, luego $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ *es un orden total.*

2.2.6.2. Aritmética. La suma y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ se extienden a subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$A + B = \{\propto + \beta : \alpha \epsilon A , \beta \epsilon B\}$$
$$A.B = \{\alpha.\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$$

Ahora sean $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\mathbb{Q}))$

$$F \oplus G \coloneqq \{A + B : A \in F \wedge B \in G\}$$
$$F \odot G \coloneqq \{A.B : A \in F \wedge B \in G\}$$

Así pues con lo anterior se definen la suma y producto en los números reales como sigue.

Definición 11: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ se define la suma y la multiplicación como sigue:

$$a + b \coloneqq \langle a \oplus b \rangle$$
$$a.b \coloneqq \langle a \odot b \rangle$$

Por último se tiene que $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ es un cuerpo totalmente ordenado y completo tal como se muestra en la sección 4.5 en Weiss (2015), p.26. (Citado en (García, 2017))

2.3. Referente didáctico: la Ingeniería Didáctica como referente para la elección y aplicación de una Propuesta de aula

En el diseño y elección de tareas para la realización de una propuesta de aula es importante tener en cuenta como se construye y comunica el conocimiento matemático, según Godino et al, (2014), este conocimiento hace referencia a un enfoque teórico que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico.

De acuerdo con Artigue (1995) "la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza."(p.36). estas realizaciones didácticas se evidencian en las 4 fases de desarrollo; siendo la ingeniería didáctica un ente importante para pensarse una clase de matemáticas, tomándose como modelo de apoyo su estructura metodológica de implementación.

Tomado de Godino et al, (2013) (*Artigue, 2011*). Se dice que desde la década de los 80 la ingeniería didáctica estaba principalmente ligada a las mediaciones o intervenciones didácticas en las clases, tomando así un carácter de secuencias de enseñanzas, las cuales permitían colocar a prueba las habilidades y conocimientos adquiridos posteriormente, al haber realizado un breve estudio teórico de algún concepto en particular. Por lo tanto, la ingeniería didáctica en estos tiempos permite la evaluación de secuencias de enseñanzas y a su vez consigue producir medios o recursos que llevan a una mejor enseñanza.

Ahora bien, en la teoría de las situaciones didácticas (TSD), Brousseau (2007) menciona que para enseñar un determinado conocimiento es necesario recurrir a ciertos MEDIOS (materiales, textos, entre otros), estos medios generan en el estudiante un mayor acercamiento a las nociones matemáticas, de hecho la ingeniería didáctica es la que se encarga de estudiar y producir dichos medios, convirtiéndose en un recurso importante al momento de desarrollar o implementar actividades en clases, lo que conduce a que el estudiante pueda interactuar, adquirir e integrar nuevos conocimientos matemáticos, que le permitirán reforzar sus conocimientos previos.

En la ingeniería didáctica se encuentran dos niveles de investigación: la macro-ingeniería y micro-ingeniería, dependiendo de los objetivos propuestos de la investigación y la importancia de la realización didáctica se elige una de ellas; ahora bien, para los intereses del trabajo se tomó la micro-ingeniería, esta permitió la recolección de datos de manera local de los fenómenos que se presentaron en un aula de clase a la hora de implementar la propuesta de aula.

En la metodología de la ingeniería didáctica se encuentran cuatro fases fundamentales a tener en cuenta para la elección o diseño de tareas: en primera instancia se encuentra la **Fase 1** de análisis preliminar, en esta fase es necesario tener en cuenta el marco teórico didáctico, los conocimientos didácticos y los contenidos de enseñanza, sin dejar de lado los objetivos planteados en la investigación previamente.

Seguidamente se encuentra **La Fase 2** de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, pese a que no es posible conocer con anterioridad todas las acciones que puedan ocurrir en el aula, entonces es necesario que el docente a la hora de investigar o diseñar una actividad analice las posibles variables y así se podrá tener cierto control de lo que pueda ocurrir en la puesta en acto de dichas tareas, sin dejar de lado los contenidos matemáticos presentes a movilizar y lo que espera, que los estudiantes alcancen.

Después **La Fase 3** de experimentación, es donde se implementa la secuencia didáctica y se observan las interacciones entre los estudiantes y los recursos utilizados para poder realizar una evaluación de los aprendizajes logrados en el transcurso de su desarrollo.

Y finalmente **la fase** 4 de análisis a posteriori y evaluación. En esta se hace una confrontación entre los datos esperados y los datos recogidos a lo largo de la experimentación de la secuencia didáctica, dichos datos pueden ser recolectados de distintas maneras con el fin de analizar y contrastar las producciones realizadas por los estudiantes, puestos en juego a lo largo del desarrollo del aprendizaje.

2.4. Referente curricular

En este capítulo se determinan las instrucciones de tipo curricular, esenciales para la elección de cada una de las tareas que componen la propuesta de aula;

Orientaciones teóricas y metodológicas de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias (MEN, 1998) y Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2015). En los Lineamientos Curriculares, se explicita la importancia del tener en cuenta tres aspectos fundamentales para el diseño y análisis de situaciones o actividades, que apuntan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de introducirlas al salón de clases, los cuales son : procesos generales de pensamiento, conocimientos básicos y contexto; vale aclarar que, la naturaleza de las matemáticas, los motivos de su enseñanza y aprendizaje, su trabajo en la escuela, sus relaciones con la sociedad y la cultura, y los procesos cognitivos que los estudiantes tienen al comprenderlas son elementos que al resumirlos componen los tres aspectos importantes anteriormente mencionados.

2.4.1. Procesos generales de pensamiento

Este aspecto ocupa como agente principal el aprendizaje, tomando en consideración elementos como: el razonamiento; la resolución de problemas; el planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. De acuerdo a estas orientaciones, es viable concebir y tener claro los propósitos de desempeño de cada una de las actividades encaminadas a la aproximación de la propiedad de densidad de los números reales en grado once de la institución Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, que podrán ser evidenciadas tanto en el análisis a priori como en el análisis a posteriori de la implementación de la propuesta de aula.

De manera general se seleccionan actividades en las cuales los estudiantes tendrán que:

- Recordar conceptos como: número racional y sus propiedades
- Desarrollar estrategias como: predecir, verificar, abstraer, resolver problemas y justificar.
- Usar procedimientos como: calcular, graficar, medir, aproximar, comparar.

- Representar números reales.

2.4.2. Conocimientos básicos

En este aspecto también se centran en el aprendizaje, el MEN (1998) menciona que estos procesos están relacionados con el desarrollo de pensamiento matemático y sistemas propios de las matemáticas, además que, el desarrollo de pensamiento matemático involucra otros tipos de pensamientos y sistemas como, el desarrollo de pensamiento numérico y los sistemas numéricos; el pensamiento espacial y sistemas geométricos; el pensamiento métrico y sistema de medidas; el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; y el pensamiento espacial y los sistemas algebraicos y analíticos.

En la elección de las tareas de la propuesta de aula que está dirigida a estudiantes de grado once de la educación media se concibe como referencia al desarrollo de cuatro tipos de pensamiento, los cuales están especificados en los Estándares

2.4.2.1. Estándares básicos

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas

- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
- Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y limites en situaciones de medición.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos

- Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

2.4.2.2. Derechos básicos de aprendizaje

En el (MEN, 2015) también se propone para estudiantes de grado undécimo lo siguiente:

‘‘Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales”. (P.5.)

2.4.3. Contexto

Es importante mencionar que, para la elección e implementación de las tareas de la propuesta de aula, inicialmente, se deben tener en cuenta aquellas actividades donde se emplee la modelación, ya que, la modelación es un factor importante en las matemáticas escolares, tiene sus fundamentos en la actividad científica del matemático, que se encarga de aplicar y construir modelos para explicar fenómenos, resolver problemas de otras ciencias o para avanzar en una teoría o ciencia, dichos modelos emergen en contextos que comúnmente no han sido abordados o se abordan desde una perspectiva diferente al interior de la ciencia.

El educador en matemáticas promueve la elaboración e interpretación de modelos, con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes. (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemática, 1998)

Como cita los Lineamientos Curriculares de Matemáticas a NCTM

> La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles. (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemática, 1998)

Así mismo, los Estándares Básicos se refieren a la modelación como un modelo en un sistema figurativo mental, grafico o tridimensional que produce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Este modelo es producido para operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones. (MEN, Estándares Básicos en Competencia Matemática, 2006)

Ahora bien, estas actividades deben estar relacionadas con situaciones de la vida cotidiana concernientes con el proceso de medir que tienen que ver con situaciones que fueron relevantes en las construcciones históricas del número real, como por ejemplo; el cálculo de áreas o de situaciones de cálculos comunes en la escuela como lo son el cálculo de volumen de un cilindro o el cálculo del interés simple anual. También se tendrán en cuenta aquellas actividades que conciernen al mismo campo de las matemáticas como lo son la incompletitud de los números racionales, la presencia matemática de los irracionales y la constitución de los reales como un cuerpo ordenado y completo. Por último se consideran otras situaciones relacionadas con otras ciencias como la representación de ℝ en los ordenadores y máquinas especializadas de cálculo; y la función y aplicabilidad de los intervalos en las ciencias experimentales.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Enfoque metodológico:

La metodología empleada para el desarrollo de este trabajo, está enfocada en el método cualitativo, pues se centra en la descripción, la interpretación y análisis de las experiencias de los estudiantes luego de hacer la implementación de una propuesta de aula (Hernández, Fernández & Baptista, M. (2003)).

En consecuencia a lo anterior, está orientado por la Ingeniería didáctica, que según Godino, et al. (2014),” busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico” (p. 1).

La metodología de la Ingeniería didáctica, comprende por lo general dos niveles: el de micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, en este caso se utilizó la micro-ingeniería, puesto que, es un enfoque de tipo local en cuanto a la complejidad de los fenómenos de la clase. Este trabajo se enmarca en las cuatro fases que sugiere este marco metodológico explicado anteriormente.

3.1.1. Desarrollo metodológico:

- Fase 1 Análisis preliminar: En esta primera fase se hizo una revisión de los referentes teóricos. Primero realizo una exploración histórica de los componentes más notables en la construcción de los números reales; que comprende la crisis de los fundamentos de las matemáticas, en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, para reconocer los elementos didácticos que posibiliten su aplicación en el salón de clases y para su posterior análisis. Luego estudio de los referentes matemáticos más relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor, Bachman y Weiss para la elección de algunas tareas de una propuesta de aula ya elaborada, estas tareas estaban encaminadas de acuerdo al objetivo principal de este trabajo. La tareas a elegidas hacen parte de la propuesta de aula elaborada por García, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. Trabajo de maestría. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Finalmente, se hizo un análisis de los referentes didácticos y curriculares con el objetivo de identificar las orientaciones teóricas y metodológicas que propone el MEN para la enseñanza de la densidad de los números reales.

- Fase 2 Análisis a priori: De acuerdo a los referentes teóricos se identificaron los elementos conceptuales más relevantes que permitieron hacer una revisión del análisis a priori de cada una de las tareas que componen la propuesta de aula, esta fase permitió tener cierto control en el desarrollo de la propuesta, además de una visión clara de cada una d las actividades que la componían, con relación al propósito, contenidos matemáticos y los desempeños esperados de los estudiantes. Al mismo tiempo que permite la elección de las tareas de la propuesta de aula.

- Fase 3 Experimentación: Se implementaron las tareas de la propuesta de aula a un grupo conformado por estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, esta institución educativa fue seleccionada porque es una institución que ha tenido buenos resultados en las pruebas de matemáticas del Icfes, cuenta con un grupo de estudiantes que asisten a Olimpiadas de matemáticas y una sala de sistemas bien dotada, e instalado el software Geogebra; se tuvieron en cuenta estas características para la selección del grupo focal porque interesaba determinar si la implementación de la propuesta era factible; dado que hasta el momento no se han implementado en ninguna institución, es decir entre menos variables externas interfieran en su normal desarrollo será más objetiva su validación.

- Fase 4 análisis a posteriori y validación: En esta última fase se realizó una confrontación entre el análisis a priori que se revisó en la fase 2 y el análisis a posteriori que se hace de los resultados de la experimentación, para identificar algunas ventajas y limitaciones de la propuesta enmarcada al acercamiento de la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar.

3.2. Campo de trabajo y contexto de la implementación

Cabe aclarar que, todas las propuestas de aula para su implementación, requieren de unos requisitos o conocimientos previos por parte de los estudiantes. Es pertinente mencionar que esta propuesta a implementar requiere con mayor relevancia de esos conocimientos previos. Por tal motivo la Institución educativa que se seleccionó, debía poseer las siguientes características:

1) Tener resultados medianamente buenos en las pruebas saber en el área de matemáticas, en el municipio de Santander de Quilichao Cauca.

2) Presentar interés por el área de matemáticas

Se necesitaba que los estudiantes pudieran concebir la naturaleza de los números irracionales (I), sin que recurran a hacer aproximaciones, parte de los requisitos previos tiene que ver con un grado importante de afianzamiento de todo lo procedimental y algorítmico en matemáticas.

La teoría intervalar y los números reales son un asunto complejo, incluso, su construcción formal se hace en la universidad, hay pocas investigaciones que integran este concepto matemático a la educación básica y media, aunque han diseñado propuestas; muy pocas se han implementado como las de (Calderón, 2014; Martínez, 2014; Puerto, 2011 y García, 2017); por lo anterior, no se quiere correr con el riesgo de que la propuesta sea un fracaso, no por la propuesta misma, sino por todos los conocimientos previos que los estudiantes se supone deben tener. En la mayoría de las aplicaciones de las propuestas didácticas, se escoge una población intentando remediar ciertas dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de algún concepto matemático, en este caso, lo importante de la implementación además de remediar dificultades, también, es ver el impacto, pertinencia que tuvo la propuesta en estudiantes de grado 11, además que con los resultados obtenidos se pueden hacer futuras investigaciones que estén encaminadas hacia la enseñanza y aprendizaje de los números reales.

Por lo anterior la implementación de las actividades de la propuesta de aula se llevaron a cabo en la Institución Educativa Instituto Técnico, la cual es de carácter público ubicada en la zona urbana del municipio de Santander de Quilichao Cauca. Se encuentra un grupo conformado por estudiantes de algunos grados, los cuales son impulsados por uno de sus profesores del área de matemáticas para prepararse constantemente y así asistir a olimpiadas de matemáticas realizadas por otras instituciones o universidades. Así pues, se seleccionó ese grupo pequeño conformado por estudiantes de grados once.

3.3. Estrategias e instrumentos para la recolección de la información

En el estudio de caso se definen principalmente dos estrategias para la recogida de la información: la entrevista etnográfica, que puede ser hablada o escrita y la observación participante, que puede ser: completa, cuando el investigador se introduce totalmente en el escenario; activa, cuando el investigador intenta hacer lo que otros hacen en el escenario; moderada, cuando el investigador mantiene un equilibrio entre estar dentro y fuera del escenario o pasiva cuando el investigador, aunque está presente no interviene en la escena.

De acuerdo a lo anterior y a los propósitos del trabajo, como estrategia metodológica se empleó la observación participante completa, ya que era necesario examinar y reflexionar la pertinencia de la propuesta de aula. Para ello se realizaron videos, registros escritos (respuestas de los estudiantes) y audios, como medios para la recolección de información.

Por último, como instrumento para la recolección de información, se toma el análisis a priori realizado por García (2017) en su trabajo *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media***,** el cual es presentado más adelante en el ítem 3.4.2.

3.4. Estructura general de la Propuesta de aula

La elección de las tareas se hace de la propuesta de aula tomada del trabajo de investigación de la Licenciada Adriana García Moreno para optar al título de Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática de la Universidad del valle, en el año 2017. El desarrollo de la propuesta de aula se configura en una serie de actividades para introducir la noción de número real como un conjunto de intervalos encajonados y la aproximación a las propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$, como lo son la completez y la densidad; está estructurada de manera que se compone de siete secciones o partes fundamentales así:

PARTE I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.

PARTE II. La aproximación a números racionales mediante encajonamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

PARTE III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de $\mathbb{Q}$, a partir del encajonamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

PARTE IV. Los intervalos cerrados y acotados.

PARTE V. Los números reales como conjuntos de intervalos.

PARTE VI. Relaciones de orden y operaciones básicas con intervalos.

PARTE VII. Revisión de lo aprendido.

En los primeros seis apartes, se busca hacer aproximaciones a las propiedades, noción y estructura de $\mathbb{R}$ (relaciones de orden, operaciones con intervalos) teniendo en cuenta los referentes históricos, matemáticos y de la teoría intervalar; en la parte VII, se propone una actividad evaluativa que ubica al estudiante en otro escenario, con ejercicios y problemas más complejos que permita determinar si en situaciones diferentes a las explicadas en las actividades anteriores y en contextos diferentes, los estudiantes operan y resuelven problemas empleando intervalos y el método de aproximación por encajonamiento a cualquier número real.

La propuesta está estructurada con actividades, lee con atención, practiquemos lo aprendido y revisemos lo aprendido. Cada actividad se desarrolla con el fin de alcanzar el propósito de cada sección; con preguntas orientadoras, problemas propuestos, instrucciones, acciones de medir, comparar, estimar, predecir, justificar entre otros. Los lee con atención son apartes que le permiten al estudiante recordar conceptos previos; informan sobre un hecho histórico importante para el propósito de la sección; permiten conceptualizar y precisar algunas nociones de los objetos matemáticos y dan a conocer algunas de sus aplicaciones.

Ahora bien, para interés del desarrollo del trabajo, se toman las primeras cinco partes que comprende la propuesta de aula puesto que, el objetivo principal del trabajo está orientado hacia Caracterizar las ventajas y limitaciones que posibilita la representación intervalar en el acercamiento de la propiedad de densidad de los números reales, para lo cual, se considera que esta primeras cinco lo propician. Las dos últimas partes de la propuesta de aula elaborada por García están dirigidas hacia la operación con la representación intervalar, lo cual, no es interés de este trabajo.

En la tabla 1 se relaciona la estructura general de las cinco primeras partes que forman la propuesta, con el número de secciones, el número de actividades por sección, el nombre de cada actividad y los ítems por cada actividad clasificados en preguntas o instrucciones.

Tabla 4.

Estructura general de la propuesta.

Sesiones	Número de actividades	Nombre da la actividad.	Número de ítems.
PARTE I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.	Tres actividades.	**Actividad 1.** Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables**.**	Dos
		Actividad 2. Reflexionemos sobre las aproximaciones en contexto.	Dos
		Actividad 3. Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado.	Tres
PARTE II. La aproximación a números racionales mediante encajonamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales.	Dos actividades.	**Actividad 1.** Encajonando a $\frac{1}{6}$, por la izquierda y por la derecha.	Seis

Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.		**Actividad 2.** Practiquemos lo aprendido. Explorando con otros números racionales.	Siete
PARTE III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de $\mathbb{Q}$, a partir del encajonamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.	Dos actividades.	**Actividad 1**. El caso de π.	Quince
		Actividad 2. El caso de $\sqrt{2}$.	Seis
PARTE IV. Los intervalos cerrados y acotados.	Dos actividades.	**Actividad 1.** Acerquémonos a la definición de intervalos.	Uno
		Actividad 2. Los diferentes usos de los intervalos.	Tres
PARTE V. Los números reales como conjuntos de intervalos.	Tres actividades.	**Actividad 1.** Relacionemos los conceptos previos.	Uno
		Actividad 2. Aproximándonos a la definición de los números reales como un conjunto de intervalos encajonados.	Ocho
		Actividad 3. Representación de un número real como intervalo encajonado.	Dos

Nota. En la tabla 4 se describen las actividades y la tareas que componen la propuesta de aula, tomada de (García, 2017).

3.4.1. Conocimientos previos por parte de los estudiantes

Dado que los estudiantes son de grado undécimo es preciso que ellos tengan claros los siguientes conocimientos en matemáticas antes de aplicar las actividades.

- Teorema de Pitágoras.

- Cálculo de área y volúmenes.
- Expresiones algebraicas.
- Razones trigonométricas seno y coseno.
- Definición y propiedades del conjunto de los naturales y los enteros.
- Nociones de la definición de número racional y sus propiedades.
- Ubicación de números racionales en la recta numérica.
- Sucesiones.
- Nociones de conjuntos

3.4.2. Análisis a priori de las actividades

En las siguientes tablas se dan a conocer las cinco partes que componen la propuesta de aula con su respectivo propósito, y las actividades correspondientes, los contenidos matemáticos que se han de movilizar y las expectativas de desempeño esperadas por parte de los estudiantes. Este análisis a priori es tomado del trabajo de García (2017).

Tabla 5.

Análisis a priori Parte I

PARTE I. ERRORES DE APROXIMACIÓN EN LOS CÁLCULOS COMUNES, UN ACERCAMIENTO A LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES.

Propósito: lograr que los estudiantes mediante diferentes estimaciones identifiquen errores de aproximación y redondeo que pueden presentarse en los cálculos comunes.

Actividades	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Actividad 1. Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables.	• Aproximación y redondeo. • Número irracional. • Teorema de Pitágoras. • Volumen de un cilindro.	• Llegar a una repuesta estimada o aproximada de cálculos comunes. • Identificar estimaciones de magnitudes inconmensurables.
Actividad 2. Reflexionemos sobre las aproximaciones en contexto.	• Aproximación y redondeo.	• Decidir cuándo una estimación más que una respuesta exacta es una respuesta apropiada. • Seleccionar o construir

		una comparación de representación correcta.
Actividad 3. Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado.	• Aproximación y redondeo. • Operaciones con cantidades redondeadas.	• Refutar el método de redondeo y truncamiento, en términos de su eficiencia para las operaciones entre estas cantidades.

Tomada de (García, 2017).

Tabla 6.

Análisis a priori Parte II.

PARTE II		
PARTE II: LA APROXIMACIÓN A NÚMEROS RACIONALES MEDIANTE ENCAJONAMIENTO DE INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS POR RACIONALES. HACIA LA APROXIMACIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE Y CONVERGENCIA. **Propósito:** hacer un paralelo desde lo intuitivo mediante el método de encajonamiento de intervalos racionales a la construcción de nociones de límite y convergencia.		
Actividades	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Actividad 1. Encajonando a $\frac{1}{6}$, por la izquierda y por la derecha.	• Representación de números racionales con expresiones decimales infinitas periódicas. • Número racional. • Densidad en los números racionales. • Representación de números racionales en la recta numérica. • Aproximación por encajonamiento de intervalos de racionales.	• Recordar la definición de número racional y su propiedad de densidad. • Verificar mediante el software Geogebra que existen otros números racionales muy próximos a $\frac{1}{6}$. • Seleccionar un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico.

Actividad 2. Practiquemos lo aprendido. Explorando con otros números racionales.	• Distancia de un intervalo.	• Identificar el rango de una buena estimación. • Seleccionar un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico. • Identificar números racionales muy próximo a otros racionales. • Representar a un número racional como un intervalo encajonado.

Tomada de (García, 2017)

Tabla 7.

Análisis a priori Parte III.

PARTE III. APROXIMACIÓN A NÚMEROS IRRACIONALES Y LA INCOMPLETITUD DE $\mathbb{Q}$, A PARTIR DEL ENCAJONAMIENTO DE INTERVALOS CON NÚMEROS RACIONALES. HACIA LA APROXIMACIÓN INTUITIVA DEL CONCEPTO DE LÍMITE Y CONVERGENCIA.

Propósito: lograr que los estudiantes a partir de situaciones particulares y determinantes que dan cuenta de la aparición de los números racionales a través de la historia, logren comprender que números como $\boldsymbol{\pi}$ y $\sqrt{\mathbf{2}}$ son números que si bien no pueden representarse con un número limitado de cifras decimales en el papel o en una máquina, si es posible hacer una aproximación a estos mediante encajonamientos de números racionales, de modo que la diferencia entre los extremos de los intervalos cada vez sea tan pequeña como se quiera y tienda hacia un número en particular.

Actividades	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Actividad 1**.** El caso de $\boldsymbol{\pi}$.	• Método de exhaución. • Límite y convergencia.	• Visualizar y verificar haciendo uso del software Geogebra. el método de exhaución como estrategia para aproximarse al valor real de π mediante la inscripción y circunscripción de polígonos regulares.

	• Representación de π a partir de intervalos encajonados.	• Seleccionar un número cercano en a un número de otro tipo. (Un racional a un irracional).
	• Distancia de un intervalo.	• Identificar el rango de una buena estimación. • Extender un modelo usando una calculadora o un computador para generar los resultados de unas reglas específicas o de una variación sistemática. • Predecir usando el procedimiento de encajonamiento de intervalos racionales en una secuencia que la aproximación por encajonamiento pueda ser tan pequeña que tiende a cero.
	• Número irracional, como número decimal infinito no periódico.	• Identificar a partir de un procedimiento números no racionales a partir del comportamiento no periódico de su cola infinita de números decimales.
Actividad 2. El caso de $\boldsymbol{\sqrt{2}}$.	• Método de Herón de Aznar.	• Estimar mediante el algoritmo de Herón de Aznar un procedimiento iterativo, parte de la cola decimal infinita no periódica del número irracional $\sqrt{2}$, sin el uso de calculadora.

	• Representación de $\sqrt{2}$ y sus múltiplos en la recta numérica. • Aproximación por encajonamiento de intervalos de racionales a números irracionales.	• Predecir usando método de encajonamiento de intervalos la tendencia a cero, producto de las diferencias sucesivas de los extremos de lo intervalos encajonados. • Abstraer elementos comunes entre muchas situaciones relacionadas.
	• Representación de un número irracional mediante un intervalo racional encajonado.	• Identificar el rango de una buena estimación. • Seleccionar un número cercano en tamaño a un número de otro tipo. (Un racional a un irracional)
	• Densidad en los números irracionales.	• Leer e interpretar una representación de los datos y utilizarla para dar respuesta a una pregunta. • Identificar la noción de número Irracional y su propiedad de densidad.

Tomada de (García, 2017)

Tabla 8.

Análisis a priori Parte IV

PARTE IV. LOS INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS.

Propósito: Hacer un acercamiento a su definición y mostrar algunas aplicaciones de los intervalos en la práctica.

Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1. Acerquémonos a la definición de intervalos.	• Intervalo cerrado. • Intervalo degenerado	• Identificar el concepto de intervalo cerrado racional.
Actividad 2. Los diferentes usos de los	• Usos de los intervalos.	• Reconocer algunas aplicaciones de los intervalos

intervalos.		en las ciencias experimentales y la tecnología.

Tomada de (García, 2017)

Tabla 9.

Análisis a priori Parte V

PARTE V. LOS NÚMEROS REALES COMO CONJUNTOS DE INTERVALOS

Propósito: Hacer un acercamiento a la construcción de los números reales como conjuntos de intervalos.

Actividades	**Contenidos matemáticos**	**Expectativas de desempeño**
Actividad 1. Relacionemos los conceptos previos.	• Intervalo racional. • Intervalo encajonado. • Número racional. • Número irracional. • Densidad de los números racionales. • Densidad de los números irracionales.	• Identificar las nociones de número racional e irracional. • Reconocer la propiedad de densidad de los números racionales y los números irracionales.
Actividad 2. Aproximándonos a la definición de los números reales como un conjunto de intervalos encajonados.	• Números reales. • La completez de los números reales. • Densidad topológica del conjunto de los números reales.	• Reconocer a partir de los racionales y los irracionales la propiedad de completez del conjunto de los números reales. • Identificar la densidad del conjunto de los números reales.
Actividad 3. Representación de un número real como intervalo encajonado.	• Representación de un número real, como intervalo encajonado.	• Identificar a partir de diferentes situaciones la representación un número real como un intervalo encajonado.

Tomada de (García, 2017)

CAPITULO 4: ANÁLISIS Y CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula y su respectivo análisis seguido de las conclusiones. Es importante mencionar, que para efectos de la presente investigación se implementaron las primeras cinco partes de la propuesta de aula (García, 2017), puesto que las dos últimas estaban orientadas hacia las operaciones con intervalos.

4.1.Resultados y análisis de la implementación de la propuesta

Para la implementación de la propuesta de aula se contó con la participación de un grupo de 10 estudiantes. El desarrollo de las actividades se realizó por parejas y al finalizar cada actividad, se socializaron los resultados. De esta forma se recogieron cuatro tipos de registros susceptibles de análisis: el escrito, donde se evidencian las respuestas de los estudiantes; la observación, de la que se tomaron notas de campo; registros de video, tomados de manera general y especifica de las interacciones entre ellos; y las imágenes, en las que se muestran a los participantes en la exploración del applet en Geogebra y los procesos realizados mediante el uso de la calculadora.

4.1.1. Estrategias empleadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades

En este apartado se evidencian algunas de las estrategias empleadas por los estudiantes en el desarrollo de las cinco partes que componen la propuesta de aula encaminada a la aproximación de la propiedad de densidad de los números Reales en grado 11 de la Institución Educativa Instituto Técnico a través de la representación Intervalar.

PARTE I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.

Actividad 1. Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables.

En el primero y segundo ítem se solicitó que las parejas realizarán una aproximación a la décima, centésima, milésima y diezmilésima del resultado obtenido, respectivamente, para luego ser consignados en el tablero y ser discutidos en la actividad 2.

Aproximación a la décima

En el momento que se les pide aproximar el resultado en respuesta a la pregunta ¿cuál debe ser la longitud del largo del pasamano? *(ver figura 70)* a la décima, se obtuvo lo siguiente: *(ver figura 5).*

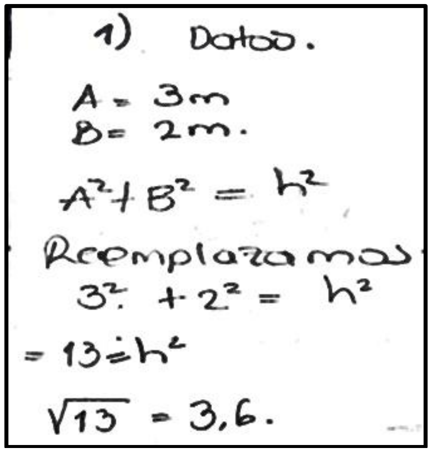


Figura 5. Respuesta-Pregunta 1- Actividad 1- Parte I

Aquí se evidenció que la pareja no tuvo ningún inconveniente al realizar el cálculo y dar con el resultado, como estrategia de solución tomaron primero los datos y los denotaron: **A=3m** y **B=2m** y con **h** a la incógnita; utilizando así el teorema de Pitágoras. Por último, utilizaron la calculadora para hallar el valor de **h** y lo aproximaron a la décima, ya que era lo que se les pedía, llegando así a una respuesta estimada de cálculos comunes.

Aproximación a la centésima

En el momento que se les pide aproximar el resultado a la centésima, en respuesta a la pregunta ¿cuál debe ser la longitud del largo del pasamano?, se obtuvo como resultado lo siguiente: *(Ver figura 6).*

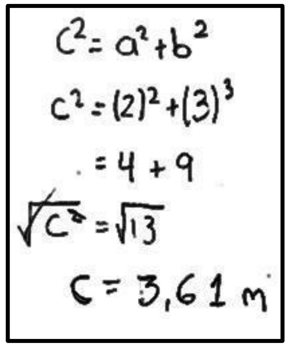


Figura 6. Respuesta 2-Pregunta 1- Actividad 1- Parte I

Utilizaron el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del pasamano, en principio se observó que al escribir el resultado no tuvieron en cuenta lo solicitado, es decir escribieron el valor que les arrojó la calculadora científica, finalmente hicieron la aproximación.

Aproximación a la milésima

En el momento que se les pide aproximar el resultado, ¿cuál debía ser la longitud del largo del pasamano?, a la milésima, se obtuvo como resultado lo siguiente: *(Ver figura 7)*

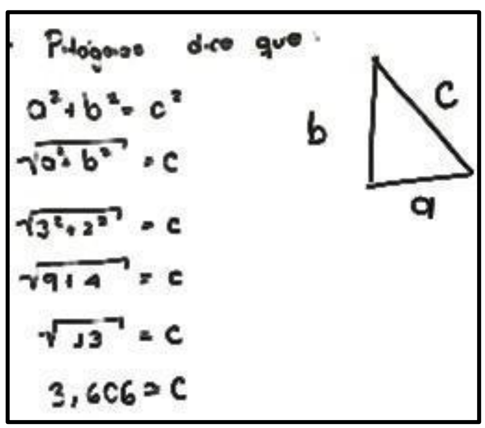


Figura 7. Respuesta3 -Pregunta 1- Actividad 1- Parte I

Al igual que las parejas anteriores utilizaron como estrategia de solución, el teorema de Pitágoras y realizaron su debida aproximación.

Aproximación a la diezmilésima

En el momento que se les pide aproximar el resultado, de cuál debía ser la longitud del pasamano, a la diezmilésima, se obtuvo como resultado lo siguiente: *(Ver figura 8).*

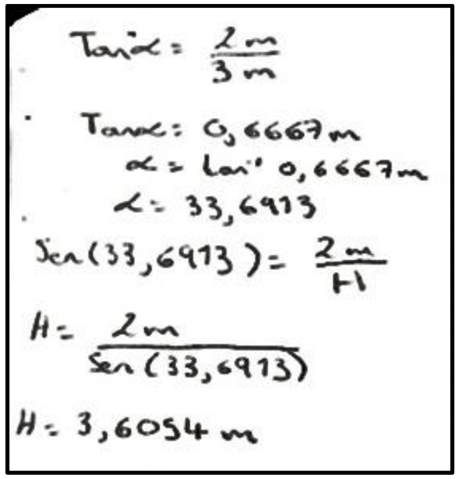

$$\tan\alpha = \frac{2m}{3m}$$
$$\tan\alpha = 0{,}6667m$$
$$\alpha = \tan^{-1} 0{,}6667m$$
$$\alpha = 33{,}6913$$
$$\operatorname{Sen}(33{,}6913) = \frac{2m}{H}$$
$$H = \frac{2m}{\operatorname{Sen}(33{,}6913)}$$
$$H = 3{,}6054\ m$$

Figura 8. Respuesta 4 -Pregunta 1- Actividad 1- Parte I

Los estudiantes se dan cuenta que el largo del pasamano será en este caso la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la base que mide 3m y altura 2m, entonces hallaron la tangente del ángulo α, luego reemplazaron y despejaron para hallar el valor de **H.**

Es de señalar, que en esta actividad las parejas 1, 2, 3 y 5 utilizaron el teorema de Pitágoras como estrategia de solución para calcular la longitud del largo del pasamanos de madera y así empezar a realizar aproximaciones y llegar a una respuesta estimada mediante cálculos; con el uso de la calculadora científica y al mismo tiempo identificar estimaciones de magnitudes inconmensurables como lo es $\sqrt{13}$. Sin embargo, la pareja 4 utilizó razones trigonométricas para hallar la longitud del pasamano llegando a una respuesta estimada de 3,6054m.

En el segundo ítem se les pide calcular la capacidad de almacenamiento de agua en un tanque de forma cilíndrica, en este caso se les da la fórmula para calcular el volumen ($v = \pi r^2 h$). Esta fórmula era muy familiar para la mayoría, y solo debían tener en cuenta los datos de la ***figura (tanque cilíndrico)*** y reemplazar.

La pareja 1 reemplazó y en su calculadora operó $\pi(0,5)^2(2)$, aproximó el valor a la décima *(Ver figura 9)*

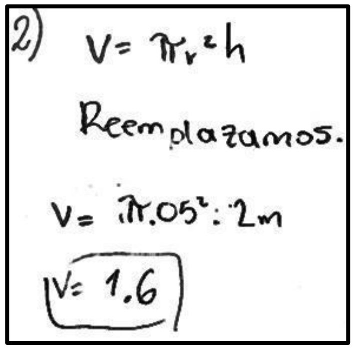


Figura 9. Respuesta-Pregunta 2- Actividad 1- Parte I

La pareja 2 se aproximó a la centésima y la 4 se aproximó a la diezmilésima; ambas realizaron el mismo procedimiento, reemplazando y resolviendo primero el número con exponente al cuadrado, después al resultado obtenido 0,25 lo multiplicaron por 2 y luego para multiplicar 0,5 por π, lo hicieron en la calculadora representando el valor final en metros cúbicos, *(Ver figura 10 y 11).*

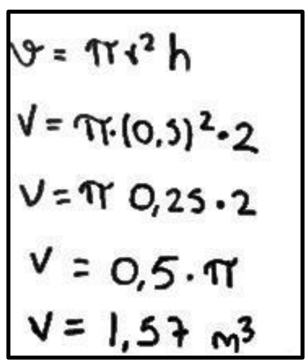


Figura 10. Respuesta 2 -Pregunta 2- Actividad 1- Parte I

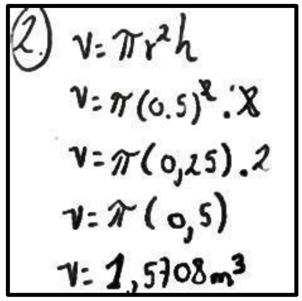


Figura 11. Respuesta 3 -Pregunta 2- Actividad 1- Parte I

Sin embargo, la pareja 3 utilizó el número racional de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números Enteros y $b \neq 0$; entonces en vez de colocar 0,5 realizó la equivalencia donde 0,5= $\frac{1}{2}$

Luego resolvió de la siguiente manera *(Ver figura 12).*

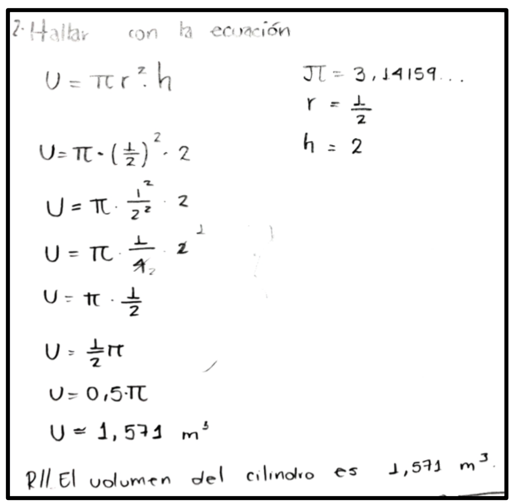


Figura 12. Respuesta 4 -Pregunta 2- Actividad 1- Parte I

Actividad 2. Reflexionemos sobre aproximaciones en contexto.

Ítem a: la distancia del pasamano

Se hace evidente que los estudiantes creen que la mejor manera para medir, es tener en cuenta las unidades de medida que ofrece un metro o una regla; pues se les hace más fácil medir con menos cifras decimales pensando que lo que pueda sobrar o faltar al medir sea poco. En este caso, más de que den una respuesta exacta es dar una respuesta apropiada.

Teniendo en cuenta que lo que se desea medir es la longitud para hacer el pasamano *(Ver Figura 13).*

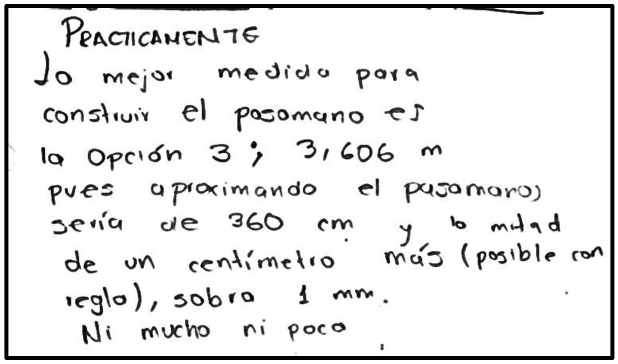
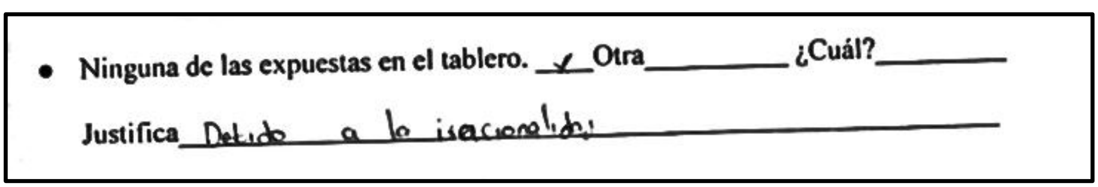

PRACTICAMENTE
lo mejor medida para
construir el pasamano es
la opción 3 ; 3,606 m
pues aproximando el pasamanos
sería de 360 cm y la mitad
de un centímetro más (posible con
regla), sobra 1 mm.
Ni mucho ni poco

Figura 13. Respuesta 2-Pregunta 2- Ítem a- Actividad 1- Parte I

Cabe resaltar, que los estudiantes al dar las respuestas, comprendieron que estos resultados solo eran aproximaciones de cada una de las actividades propuestas, además, de que algunas estimaciones son más pertinentes que otras, dependiendo de si se necesita fabricar un pasamos o 200 pasamos.

Ítem b: la capacidad de almacenamiento de agua en el tanque cilíndrico

En cuanto a la capacidad de almacenamiento de agua en el tanque cilíndrico, tres de las cinco parejas de estudiantes coinciden en la respuesta que se muestra en la figura 14, lo que permite inferir que ellos reconocen la naturaleza irracional de los resultados. (*Ver figura 14)*


- **Ninguna de las expuestas en el tablero.** ✓ **Otra**_________ **¿Cuál?**_________

Justifica Debido a la irracionalidad

Figura 14. Respuesta-Pregunta- Ítem b - Actividad 1- Parte I

Ahora bien, en la figura 15 se muestran algunas operaciones realizadas por algunas parejas de estudiantes con cantidades que se han truncado o aproximado. Aquí se observó una forma de representar un número periódico. Es notorio que en algunos casos presentan el número de la forma p/q antes de identificar su representación decimal; de tal forma que están utilizando la cantidad de cifras arrojadas por la calculadora científica. (*Véase columna* ***a,*** *figura 15.*)

Después realizan cálculos, utilizando la calculadora científica, pero en este caso se le dan los valores aproximados a la centésima. (*Véase columna* ***b,*** *figura 15.*)

a. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica directamente sin aproximar	**b. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica con los resultados aproximados en el ejercicio 1**
$\frac{1}{3}x\frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ ó $0,1111$	$\frac{1}{3}x\frac{1}{3} \approx (0,33)x(0,33) = 0,1089$
$\frac{1}{3}x\frac{1}{3}x\frac{1}{3}x\frac{1}{3} = \frac{1}{81}$ 0,012345679012	$\frac{1}{3}x\frac{1}{3}x\frac{1}{3}x\frac{1}{3} \approx (0,33)x(0,33)(0,33)x(0,33) =$ 0,01185921
$\pi + \pi = 2\pi$ 6,283185307	$\approx (3,14) + (3,14) =$ 6,28
$\pi x \pi =$ 9,869604401	$\pi x \pi \approx (3,14)x(3,14) =$ 9,8596
$\frac{1}{3}x\,\pi =$ 1,047197551	$\frac{1}{3}x\,\pi \approx (0,33)x(3,14) =$ 1,0362

Figura 15. Respuesta 2-Pregunta 2- Actividad 3- Parte I

En el ítem 3, las respuestas a las preguntas **a** y **b** los estudiantes dan cuenta que ellos conocen que operar con números aproximados o truncados tiende a alejar el resultado del valor real de los cálculos obtenidos (*Ver figura 16 y 17).*

A La diferencias son que los numeros aproximados se alejan demasiado del valor real, y la similitud es que las primeras dos o una decima son iguales

Figura 16. Respuesta- Pregunta 3- Ítem a- Actividad 3- Parte I

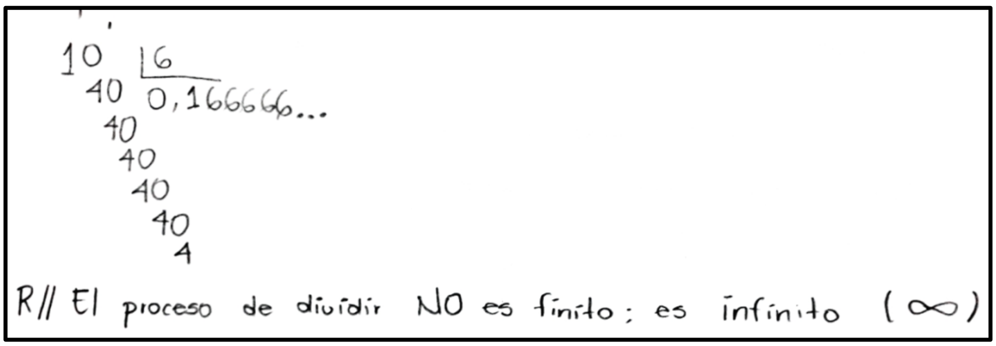
El valor cambia, y se aleja del valor verdadero

Figura 17. Respuesta- Pregunta 3- Ítem b- Actividad 3- Parte I

Parte II: la aproximación a números racionales mediante encajonamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Actividad 1. Encajonando a 1/6, por la izquierda y por la derecha.

Las respuestas dadas por las cinco parejas acerca de 1/6 y su expresión decimal obtenida mediante una división hecha a lápiz y papel, fue que su expresión es decimal periódico e infinito *(ver figura 18).*

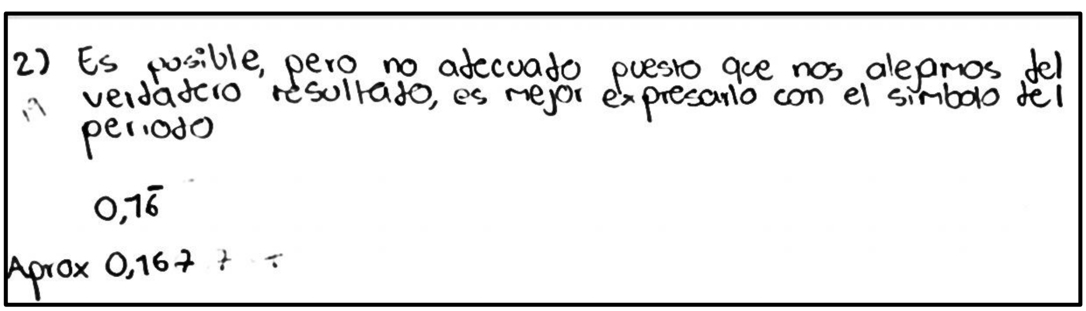


10 | 6
40 0,166666...
40
40
40
40
4

R// El proceso de dividir NO es finito: es infinito (∞)

Figura 18. Respuesta- Pregunta 1- Actividad 1- Parte II

Sin embargo, cuando se les preguntó si era posible expresar el resultado como un número limitado de cifras en su hoja de respuestas, todos respondieron que es posible pero no correcto, puesto que se alejaran del valor real de 1/6 pero lo representaron de esta forma 0,16. *(Ver figura 19)*.



2) Es posible, pero no adecuado puesto que nos alejamos del verdadero resultado, es mejor expresarlo con el simbolo del periodo

$0,1\bar{6}$

Aprox 0,167

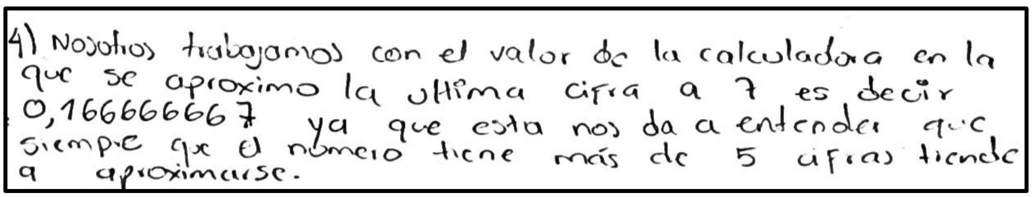
Figura 19. Respuesta- Pregunta 2- Actividad 1- Parte II

También respondieron que la particularidad que tienen estas cifras decimales, es ser periódicas e infinitas (*ver figuras 20).*

Ja particularidad es que los cifras decimales son infinitos, y periodicos.

Figura 20. Respuesta- Pregunta 3- Actividad 1- Parte II

En el momento de realizar el proceso de dividir, pero en este caso ya con la calculadora científica las cinco parejas dieron respuestas muy similares, utilizando un lenguaje más apropiado para justificar su respuesta sobre los errores de aproximación en cálculos y el truncamiento en cifras decimales infinitos periódicos. Sin embargo, una de las parejas argumento que la calculadora aproximó la última cifra a 7 y que si un número tiene más de 5 cifras decimales, la calculadora automáticamente aproxima y deja de lado décimas importantes para su comprensión. (*Ver Figura 21).*



4) Nosotros trabajamos con el valor de la calculadora en la que se aproximo la ultima cifra a 7 es decir 0,16666667 ya que esto nos da a entender que siempre que el número tiene más de 5 cifras tiende a aproximarse.

Figura 21. Respuesta 2- Pregunta 4- Actividad 1- Parte II

Con el software Geogebra se pretendía que los estudiantes con su respectivo grupo pudieran verificar que existen otros números racionales muy próximos a 1/6 *(ver figura 22).*

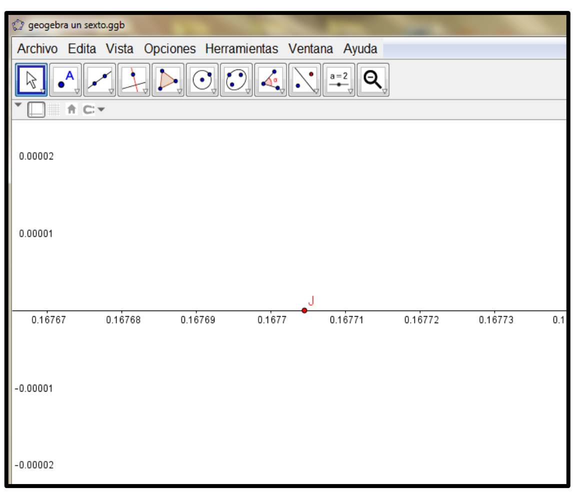


Figura 22. Exploración 1/6 - Actividad 1- Parte II

Los estudiantes concluyeron que siempre habrán valores más cercanos a 1/6 y, que a medida que se van acercando o encajonando irán apareciendo números más próximos a su derecha y a su izquierda (*ver figura 23).*

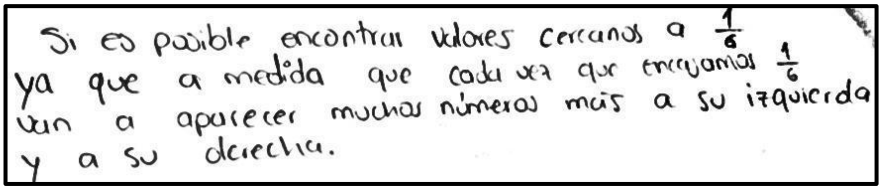
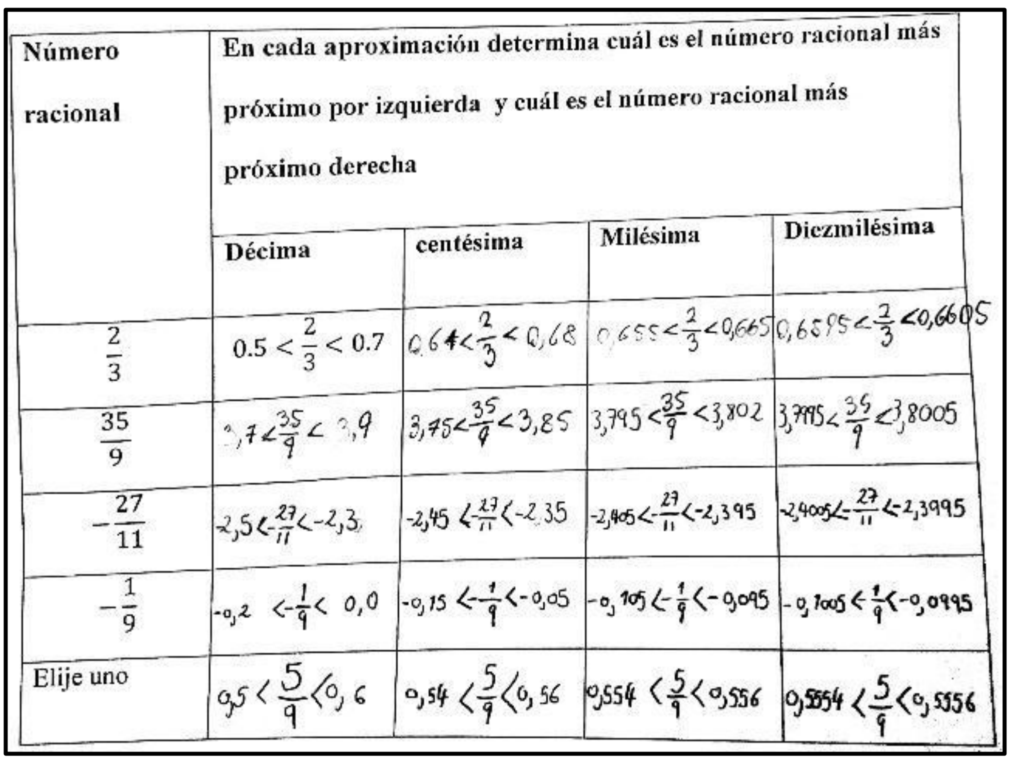

Si es posible encontrar valores cercanos a $\frac{1}{6}$ ya que a medida que cada vez que encajonamos $\frac{1}{6}$ van a aparecer muchos números más a su izquierda y a su derecha.

Figura 23. Respuesta- Pregunta 6- Ítem a- Actividad 1- Parte II

Actividad 2. Practiquemos lo aprendido. Explorando con otros números racionales.

En la tabla que se les pidió completar se notó que no todas las parejas lo hicieron de la misma manera, pues al identificar números racionales muy próximos por la izquierda y por la derecha a otros racionales y representarlos como un intervalo encajonado se encontraron las siguientes respuestas (*ver figura 24 y 25).*



Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	centésima	Milésima	Diezmilésima
$\frac{2}{3}$	$0.5 < \frac{2}{3} < 0.7$	$0,64 < \frac{2}{3} < 0,68$	$0,655 < \frac{2}{3} < 0,665$	$0,6595 < \frac{2}{3} < 0,6605$
$\frac{35}{9}$	$3,7 < \frac{35}{9} < 3,9$	$3,75 < \frac{35}{9} < 3,85$	$3,795 < \frac{35}{9} < 3,802$	$3,7995 < \frac{35}{9} < 3,8005$
$-\frac{27}{11}$	$-2,5 < -\frac{27}{11} < -2,3$	$-2,45 < -\frac{27}{11} < -2,35$	$-2,405 < -\frac{27}{11} < -2,395$	$-2,4005 < -\frac{27}{11} < -2,3995$
$-\frac{1}{9}$	$-0,2 < -\frac{1}{9} < 0,0$	$-0,15 < -\frac{1}{9} < -0,05$	$-0,105 < -\frac{1}{9} < -0,095$	$-0,1005 < -\frac{1}{9} < -0,0995$
Elije uno	$0,5 < \frac{5}{9} < 0,6$	$0,54 < \frac{5}{9} < 0,56$	$0,554 < \frac{5}{9} < 0,556$	$0,5554 < \frac{5}{9} < 0,5556$

Figura 24. Respuesta- Pregunta 1- Actividad 2- Parte II

Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	centésima	Milésima	Diezmilésima
$\frac{2}{3}$	$0.5 < \frac{2}{3} < 0.7$	$0,65 < \frac{2}{3} < 0,67$	$0,665 < \frac{2}{3} < 0,667$	$0,6665 < \frac{2}{3} < 0,6667$
$\frac{35}{9}$	$3,7 < \frac{35}{9} < 3,9$	$3,87 < \frac{35}{9} < 3,89$	$3,887 < \frac{35}{9} < 3,889$	$3,8887 < \frac{35}{9} < 3,8889$
$-\frac{27}{11}$	$-2,5 < -\frac{27}{11} < -2,3$	$-2,46 < -\frac{27}{11} < -2,44$	$-2,455 < -\frac{27}{11} < -2,453$	$-2,4546 < -\frac{27}{11} < -2,4544$
$-\frac{1}{9}$	$-0,2 < -\frac{1}{9} < -0,1$	$-0,12 < -\frac{1}{9} < -0,10$	$-0,112 < \frac{1}{9} < -0,110$	$-0,1112 < \frac{1}{9} < -0,1110$
Elije uno $\frac{3}{9}$	$0,2 < \frac{3}{9} < 0,4$	$0,32 < \frac{3}{9} < 0,34$	$0,332 < \frac{3}{9} < 0,334$	$0,3332 < \frac{3}{9}$ 0,3334

Figura 25. Respuesta 2- Pregunta 1- Actividad 2- Parte II

Las parejas seleccionaron un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico. Una pareja respondió que es posible decir cuántos números racionales existen que se caracterizan por tener expresión decimal periódica. *(Ver figura 26)*

R11 Si, porque hay numeros infinitos, estos son infinitos periodicos

Figura 26. Respuesta- Pregunta 2- Actividad 2- Parte II

Pero en la respuesta, justificaron que siguen siendo infinitos. Por otro lado las otras cuatro parejas afirmaron que no era posible decir cuántos números racionales cumplen con esta característica, sustentando que por su naturaleza nunca se van a terminar de contar *(Ver figura 27).*

No, porque los numeros racionales son infinitos, es decir, nunca se va lograr terminar de contarlos

Figura 27. Respuesta 2- Pregunta 2- Actividad 2- Parte II

Parte III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de$\mathbb{Q}$, a partir del encajonamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia

Actividad 1. El caso de π

Se evidenció que para el desarrollo de la primera actividad, los estudiantes hicieron uso de los conocimientos previos sobre el procedimiento para calcular el área de un círculo y la longitud de una circunferencia y responder las tres primeras preguntas de la actividad 1 *(ver figura 28 y 29).*

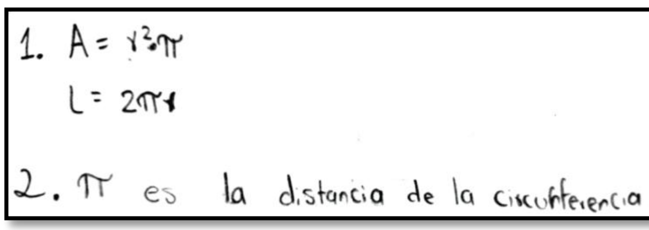


Figura 28. Respuesta 2 – Preguntas 1, 2 y 3- Actividad 1- Parte III

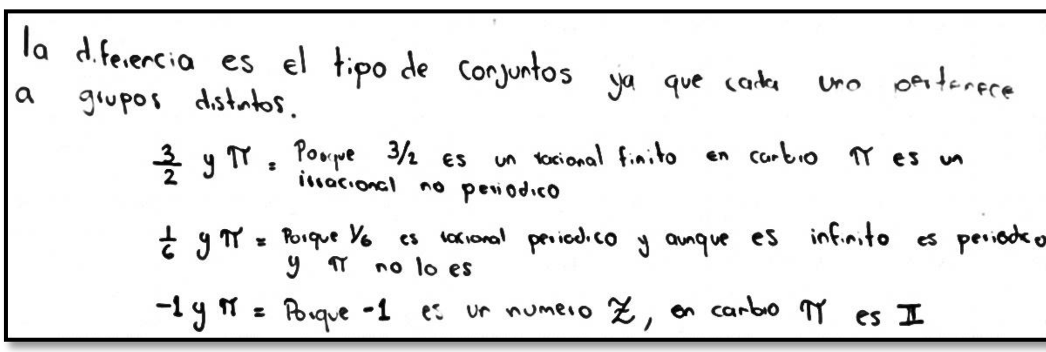


Figura 29. Respuesta 2 – Preguntas 1, 2 y 3- Actividad 1- Parte III

Para la pregunta 4, la visualización a través de lápiz y papel juega un rol muy importante, puesto que los estudiantes deben observar qué sucede cuando aumenta el número de lados de polígonos inscritos y circunscritos; sin embargo, esta observación puede ser limitada, pues no permite una mayor exploración del método de exhaución respecto a ello, los estudiantes contestaron *(ver figura 30).*

4. Entre mas lados se aumenten del poligono se pareceria mas a un circulo disminuyendo el área entre estos

Figura 30. Respuesta – Pregunta 4- Actividad 1- Parte III

Para el desarrollo del siguiente ítem, que consistía en llenar una tabla de acuerdo a la información antes adquirida, los estudiantes recurren al uso de la calculadora para poder consignar los datos y resolver las operaciones allí indicadas. De las cinco parejas, cuatro consignan los datos en la calculadora de la misma manera, es decir, primero hallan el valor del perímetro de los polígonos inscritos, luego el perímetro de los circunscritos y toman estos dos resultados y los restan. Evidenciando las aproximaciones que realiza la calculadora de los valores *(ver figura 31).*

$n = 100\,000$	3,141592653	3,141592655	3,141592653<π<3,141592655	0,000000002
$n = 1000\,000$	3,141592654	3,141592654	3,141592654<π<3,141592654	0
$n =$ 1'000 000.000	3,141592654	3,141592654	3,141592654<π<3,141592654	0

Figura 31. Respuesta - Pregunta 5- Actividad 1- Parte III

En cambio, una de las cinco parejas para hallar el valor de la resta, consignan en la calculadora las dos fórmulas, para hallar los perímetros, restándolas directamente *(ver figura 32).*

$n = 100\,000$	3,141592653	3,141592655	3,141592653<π<3,14159265[illegible]	0,000000001
$n = 1000\,000$	1000000 Sin $\left(\frac{180}{1000000}\right)$	1000000 tan $\left(\frac{180}{1000000}\right)$	[illegible]	0,0000000001
$n =$ 1000 000.000	1000000000 sin ([illegible]	1000000000 tan ([illegible])		0,000000000000000001

Figura 32. Respuesta 2 - Pregunta 5- Actividad 1- Parte III

Para justificar su estrategia de solución el estudiante comenta : “*yo lo hago así, porque digamos uno en la vida real, a veces uno coloca en la fórmula* $r = 0{,}082$ *que es el número ideal de gases y ese es el número indicado para eliminar las unidades de atmosfera(kelvin, mol, nitro) pero entonces r en realidad es* $\frac{22{,}4}{273} = 0{,}0819999999 \ldots$ *por allá con muchos decimales, pero entonces uno lo aproxima a* $0{,}082$ *entonces en la operación cuando uno coloca el* $0{,}082$ *el resultado digamos te va a dar un resultado4,9999999 y un número que sigue o 4,99997 o cuatro coma algo pero en la vida cuando colocas* $\frac{22{,}4}{273}$ *el resultado te va a dar más exacto en vez de darte 4,9999999 el resultado te va a dar 5 o va a ser un resultado más exacto o cosas así, así compruebo que el problema está bien resuelto”*

Para la pregunta 6 y 7, la mayoría de los estudiantes comparan cada uno de los resultados de las tablas con los valores arrojados en la calculadora del número π, observan las décimas, las centésimas, las milésimas de la tabla y de la calculadora

En la pregunta 8, algunos estudiantes se dejan “llevar” por los resultados que arrojó la calculadora, cuando el n es número grande, por ejemplo $n = 1.000.000.000$, el perímetro de los polígonos inscritos lo aproxima arrojando el símbolo del número π, lo mismo sucede con el perímetro de los polígonos circunscritos, por lo cual, en el momento de hacer la resta el resultado es 0 (*figura 31*), por lo anterior, los estudiantes contestaron: *(ver figura 33).*

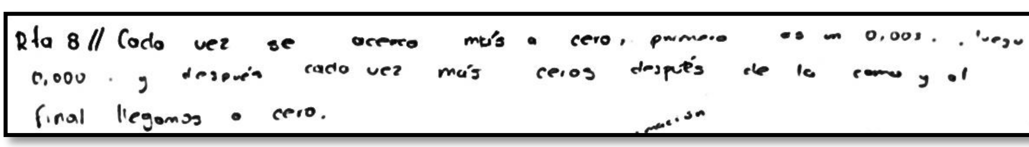


Figura 33. Respuesta – Pregunta 8- Actividad 1- Parte III

Transcripción

Cada vez que se acerca más a cero, primero es un 0,003..., luego 0,000... y después cada vez más ceros después de la coma y al final llegamos a cero

Sin embargo, otras parejas de estudiantes para dar respuesta a esta pregunta recurren al método de exhaución, y otros ingresan los valores en la calculadora del ordenador. *(Ver figura 34).*

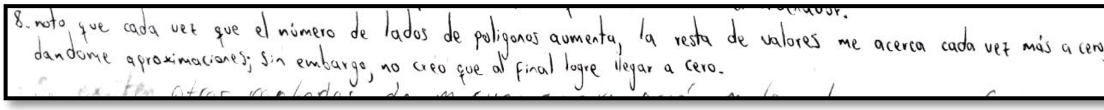

8. noto que cada vez que el número de lados de poligonos aumenta, la resta de valores me acerca cada vez más a cero dandome aproximaciones; sin embargo, no creo que al final logre llegar a cero.

Figura 34. Respuesta 2 – Pregunta 8- Actividad 1- Parte III

Transcripción

Noto que cada vez que el número de lados de polígonos aumenta, la resta de valores me acerca cada vez más a cero, dándome aproximaciones; sin embargo, no creo que al final logre llegar a cero.

Para las preguntas 10 a la 15, es necesario observar el método de Exhaución de manera gráfica en el software de Geogebra, para su desarrollo, la visualización juega un papel importante, ya que, posibilita que el estudiante reconozca la naturaleza del proceso de aproximación al número π, este software, permite que el estudiante pueda tener una mejor exploración que a lápiz y papel, en las siguiente figuras se muestra como el estudiante manipula el software, aumentando los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, además, existe dos botones (ZOOM+ y ZOOM-) que sirven para ampliar o disminuir los polígonos *(ver figura 35, 36, 37 y 38).*

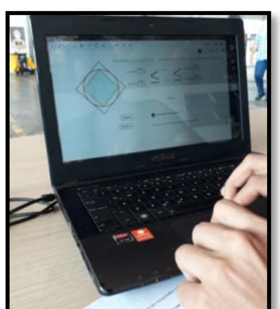


Figura 35. Método de Exhaución Geogebra- Actividad 1- Parte III

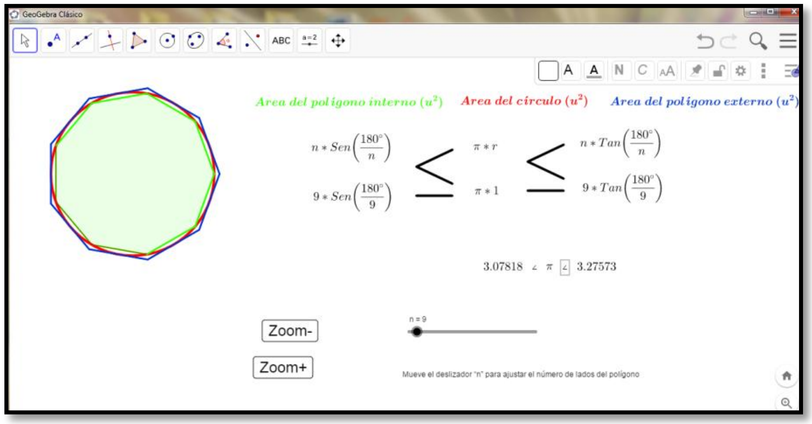


Figura 36. Método de Exhaución Geogebra 2- Actividad 1- Parte III

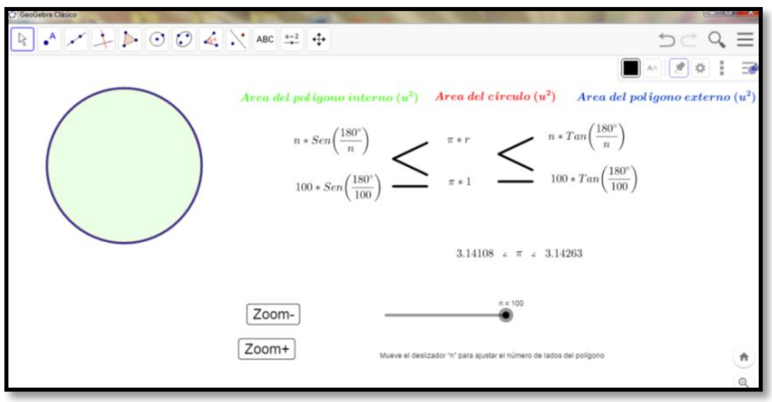


Figura 37. Método de Exhaución Geogebra 3- Actividad 1- Parte III

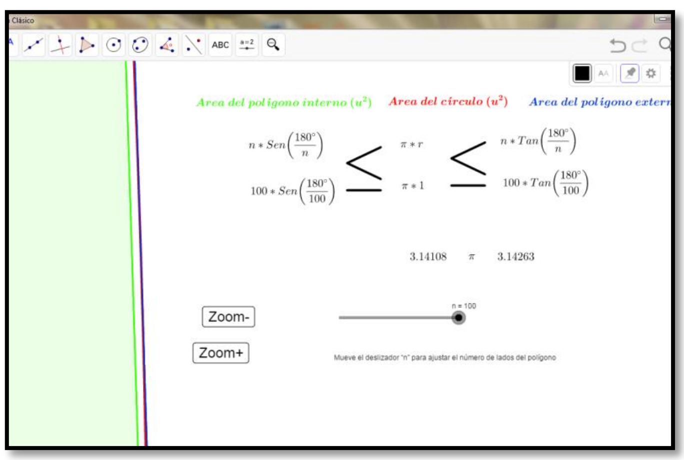
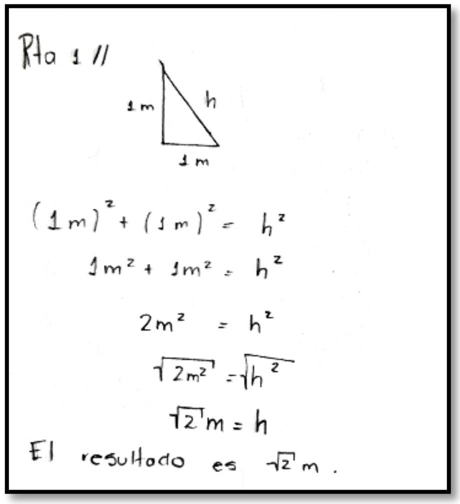


Figura 38. Método de Exhaución Geogebra 4- Actividad 1- Parte III

Actividad 2. El caso de $\sqrt{2}$

Como estrategia de solución para la pregunta, todos los estudiantes usaron el teorema de Pitágoras, este punto lo desarrollaron sin dificultades *(ver figura 39).*


Rta 1 //

1 m

h

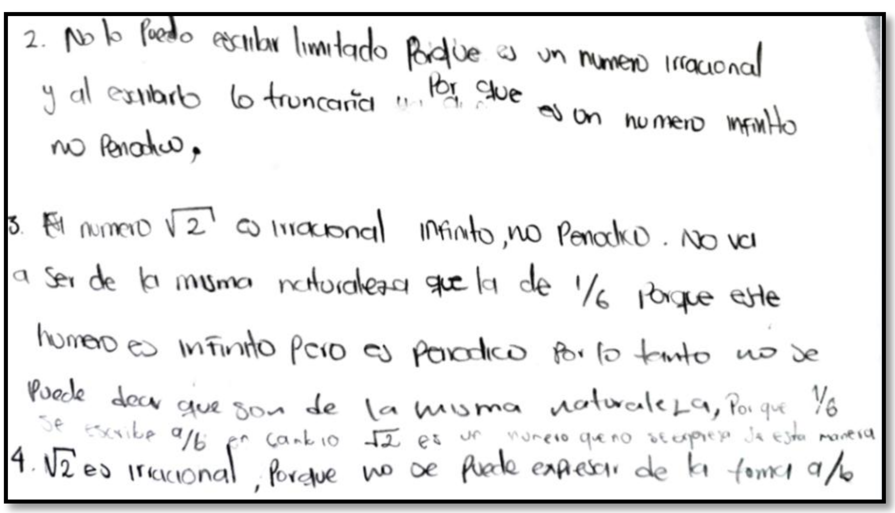
1 m

$$(1m)^2 + (1m)^2 = h^2$$
$$1m^2 + 1m^2 = h^2$$
$$2m^2 = h^2$$
$$\sqrt{2m^2} = \sqrt{h^2}$$
$$\sqrt{2}\,m = h$$

El resultado es $\sqrt{2}\,m$.

Figura 39. Respuesta – Pregunta 1- Actividad 2- Parte III

En la solución de las preguntas 2 a la 4, los estudiantes reconocen que la representación "$\sqrt{2}$ " alude a un número irracional, y manifiestan que no conocen el valor este número. Sin embargo, logran dar respuesta a estas preguntas *(ver figura 40).*


2. No lo puedo escribir limitado porque es un numero irracional y al escribirlo lo truncaría por que es un numero infinito no periodico,

3. El numero $\sqrt{2}$ es irracional infinito, no periodico. No va a ser de la misma naturaleza que la de 1/6 porque este numero es infinito pero es periodico por lo tanto no se puede decir que son de la misma naturaleza, porque 1/6 se escribe a/b en cambio $\sqrt{2}$ es un numero que no se expresa de esta manera

4. $\sqrt{2}$ es irracional, porque no se puede expresar de la forma a/b

Figura 40. Respuesta – Preguntas 2, 3 y 4- Actividad 2- Parte III

Después de hacer la aproximación de $\sqrt{2}$ a través del método de Herón de Aznar, los estudiantes, como estrategia de solución a la pregunta 5, recurren al uso de la calculadora, comparan los resultados y observan que el método de aproximación de $\sqrt{2}$ es un proceso infinito. Ahora bien, en el intento de aproximarse a $\sqrt{2}$, los estudiantes usan el método de encajonamiento antes realizado para $\frac{1}{6}$, para lo cual, siguen la estrategia, descrita en el ítem 6, de representar gráficamente a $\sqrt{2}$ en el plano cartesiano en el software de Geogebra. *(Ver figura 41).*

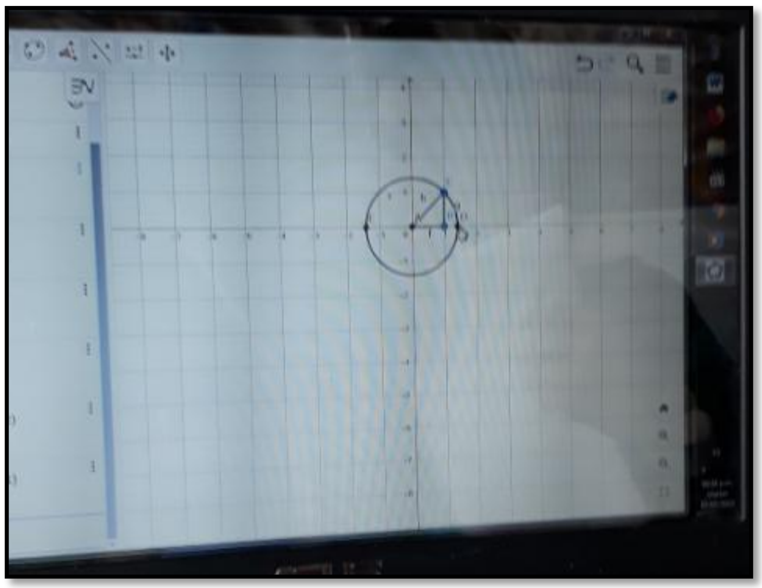


Figura 41. Representación gráfica de $\sqrt{2}$ – Ítem 5- Actividad 2- Parte III

Para desarrollar de los ítems e y f, los estudiantes comparan los segmentos $\underline{AC}$, $\underline{AE}$ y $\underline{AD}$ resultantes de la construcción realizada en el software de Geogebra. Las relaciones las establecen por su longitud. De lo anterior, establecen las medidas de los segmentos $\underline{AC}$, $\underline{AE}$, y $\underline{AD}$ *(Ver figura 42).*

Todos los segmentos tienen igual Longitud que en este caso en la circunferencia sus longitudes es el radio.

sus longitudes son iguales al radio de la Circunferencia

Figura 42. Respuesta 2 – Pregunta 6- Ítem e y f- Actividad 2- Parte III

En el ítem g, los estudiantes hacen uso de la herramienta lupa  de Geogebra, para aproximarse a $\sqrt{2}$ y a $-\sqrt{2}$, de la misma manera como lo hicieron para $\frac{1}{6}$, los datos los consignaron en la tabla *(ver figura 43).*

Número irracional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\sqrt{2}$	$1,3 < \sqrt{2} < 1,5$	$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$	$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$	$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
$-\sqrt{2}$	$-1,3 < -\sqrt{2} < -1,5$	$-1,41 < -\sqrt{2} < -1,42$	$-1,414 < -\sqrt{2} < -1,415$	$-1,4142 < -\sqrt{2} < -1,4143$
	0,2	0,01	0,001	0,0001

Figura 43. Respuesta – Pregunta 6- Ítem g- Actividad 2- Parte III

Los estudiantes para desarrollar el ítem h, calculan las diferencias entre los extremos que encontraron en las décimas, las centésimas, las milésimas y las diezmilésimas, observan los resultados y de acuerdo a lo anterior, algunos mencionaron que este resultado se aproximaba a cero, la mayoría menciono que no *(ver figuras 44 y 45).*

Si, porque entre mas operaciones se hagan su valor se aproximará a cero

Figura 44. Respuesta – Pregunta 6- Ítem h- Actividad 2- Parte III

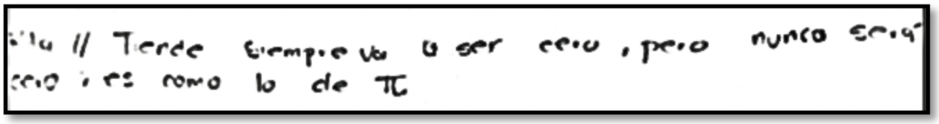
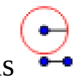


Figura 45. Respuesta 2 – Pregunta 6- Ítem h- Actividad 2- Parte III

Transcripción

Tiende siempre a ser cero, pero nunca será cero, es como lo de π.

Para el desarrollo del ítem i, y del j, los estudiantes, usan la herramienta compás  del software de Geogebra para representar $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$. Lo mismo hacen para representar $-2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$, y $-5\sqrt{2}$ pero con diferente dirección (*ver figura 46).*

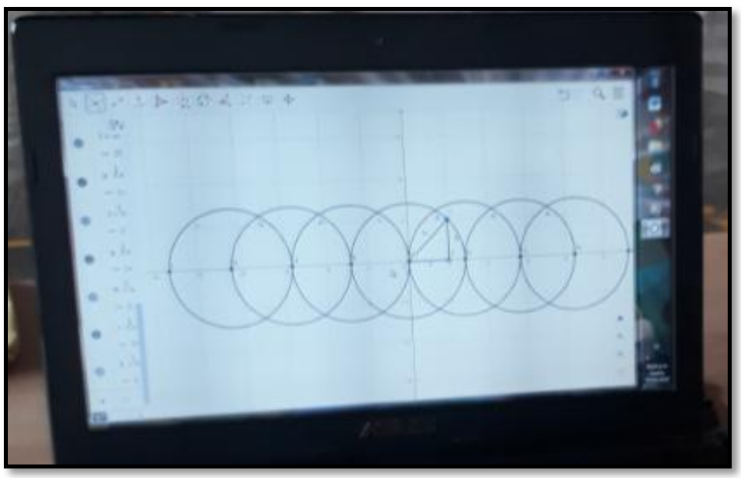
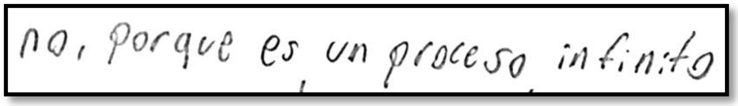


Figura 46. Respuesta – Pregunta 6- Ítem i, j- Actividad 2- Parte III

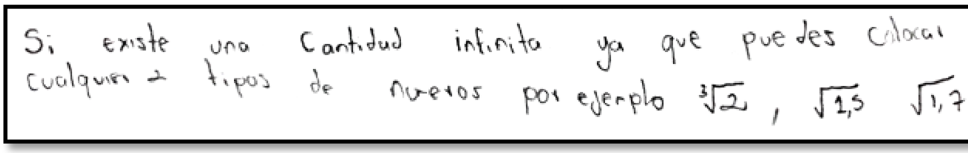
La construcción anterior, sirve de antesala para que los estudiantes respondieran las preguntas de los ítems k, l y m, en relación con la pregunta del ítem k, los estudiantes observaron que el proceso de hallar los múltiplos $\sqrt{2}$ era un proceso infinito, por lo anterior, mencionaron que: *(ver figura 47).*



no, porque es un proceso infinito

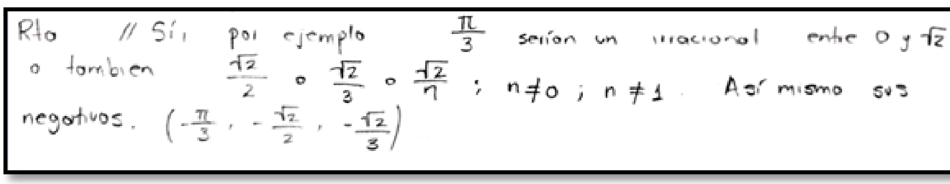
Figura 47. Respuesta – Pregunta 6- Ítem k- Actividad 2- Parte III

En relación con las preguntas, desde el ítem m hasta el p, los estudiantes logran dar respuesta a ellas mediante la manipulación del software de Geogebra *(ver figuras 48 y 49)*



Si existe una Cantidad infinita ya que puedes colocar cualquier 2 tipos de nueros por ejemplo $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{1,5}$ $\sqrt{1,7}$

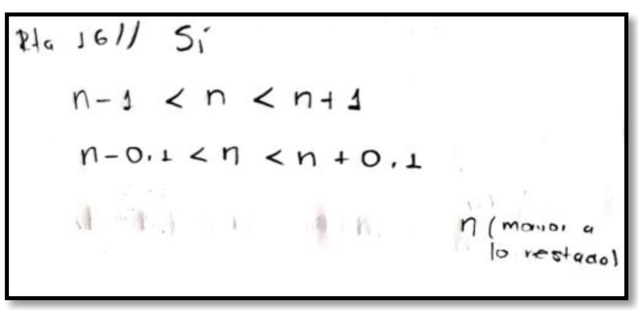
Figura 48. Respuesta – Pregunta 6- Ítem m- Actividad 2- Parte III



Rta // Sí, por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ serían un irracional entre 0 y $\sqrt{2}$
o también $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{3}$ o $\frac{\sqrt{2}}{n}$; $n \neq 0$; $n \neq 1$. Así mismo sus
negativos. $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Figura 49. Respuesta 2 – Pregunta 6- Ítem m- Actividad 2- Parte III

En relación con la última pregunta de la parte III, uno de los estudiantes trata de dar explicación, a que todo número irracional puede ser representando a través del encajonamiento de intervalos y esto es lo que respondió *(ver figura 50).*



Rta 16// Sí

$n-1 < n < n+1$

$n-0.1 < n < n+0.1$

n (mayor a lo restado)

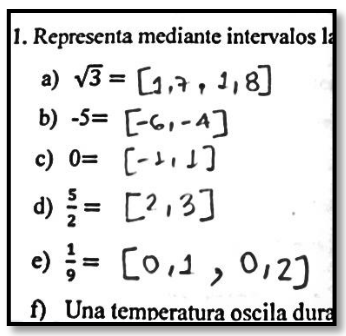
Figura 50. Respuesta -Pregunta 6 -Ítem p -Actividad 2 - Parte III

Parte IV: Los intervalos cerrados y acotados.

Actividad 1. Acerquémonos a la definición de intervalos racionales y de racionales encajonados.

En la actividad 1 de la parte IV se tuvo como propósito acercar a los estudiantes a la definición de intervalo, intervalo encajonado, intervalos degenerados, y dar a conocer algunas de sus aplicaciones en el campo de lo experimental, por esta razón, se inicia con una lectura sobre las definiciones expuestas en la propuesta, cada pareja hace la interpretación de lo leído, para luego ser socializado.

Ahora bien, para el desarrollo del ítem 1, los estudiantes deben representar, mediante intervalos, las magnitudes allí expuestas, por lo que decidieron ingresar algunos números, por su naturaleza, en la calculadora para ver su valor aproximado y representar el número mediante intervalos *(ver figura 51)*


1. Representa mediante intervalos la

a) $\sqrt{3}$ = [1,7 , 1,8]

b) -5= [-6, -4]

c) 0= [-1, 1]

d) $\frac{5}{2}$= [2, 3]

e) $\frac{1}{9}$= [0,1 , 0,2]

f) Una temperatura oscila dura

Figura 51. Respuesta -Pregunta 1 -Actividad 1- Parte IV

Para el desarrollo del ítem f, una pareja de estudiantes pasaron de grados a radianes las magnitudes allí mencionados, posterior a ello, ingresaron el número a la calculadora científica para ver su valor aproximado y así buscaron números para representar mediante intervalos las magnitudes *(ver figura 52)*, por el contrario, las demás parejas, toman la representación del intervalo directamente de las magnitudes *(ver figura 53).*

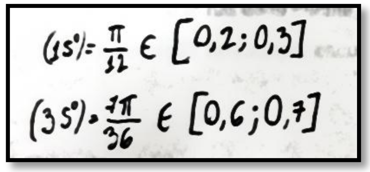


Figura 52. Respuesta -Pregunta 1 –Ítem f -Actividad 1- Parte IV

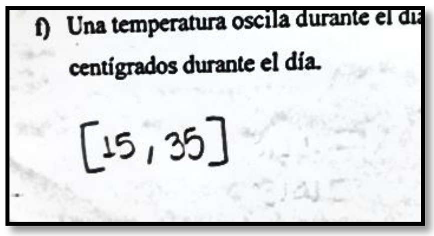


Figura 53. Respuesta 2 -Pregunta 1 –Ítem f -Actividad 1- Parte IV

Parte V: Los números reales como conjuntos de intervalos.

Actividad 1. Relacionemos los conceptos previos.

Para el desarrollo de las preguntas de los ítems del 1 al 8 que conformaban esta actividad, los estudiantes tuvieron en cuenta los procedimientos realizados en las actividades anteriores, en el ítem 1 debían mencionar cuál era la diferencia entre un número racional y un número irracional, además debían mencionar números racionales e irracionales muy próximos de otros números dados, para ello se le das como referencia la recta numérica, sin embargo, se logró observar que algunos presentaron dificultad, para el desarrollo de esta.

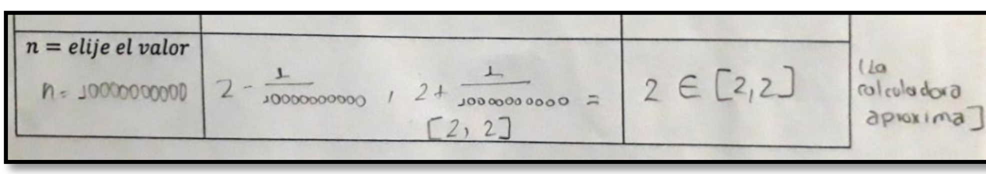
En la actividad 2 se quería que los estudiantes se aproximaran a la definición de número real como conjunto de intervalos encajonados, por lo cual, se dio inicio con una lectura mencionando la problemática que existe en el momento de medir un objeto no siempre se encontraran resultados expresables como números racionales exactos, porque a veces resultan números con una expresión decimal infinita no periódica.

Además se menciona la existencia de infinitos racionales muy próximos a un racional o a un irracional.

También, se hace alusión al descubrimiento, por parte de los estudiantes, que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número racional o un número irracional, y que cada punto está rodeado por infinitos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda.

Por último, se expuso la definición de número real como conjuntos de intervalos encajonados y se realizó una pregunta sobre la densidad de los números reales, en la que la mayoría de estudiantes no presenta dificultad en responder

Por otra parte, para el desarrollo de la tabla 15 *Encajonamiento de 2*, los estudiantes deben elegir un valor para reemplazar en las fórmulas, que intentan representar el número 2 mediante encajonamiento de intervalos, en las que los estudiantes realizan las indicaciones presentadas en la actividad, los resultados de las operaciones los hallaron mediante el uso de la calculadora *(ver figura 54),* lo mismo sucedió para el desarrollo de la tabla 16 *Encajonamiento del número e (ver figura 55).*



$n =$ *elije el valor*			
$n = 10000000000$	$2 - \frac{1}{10000000000}$, $2 + \frac{1}{10000000000}$ = $[2, 2]$	$2 \in [2,2]$	(la calculadora aproxima]

Figura 54. Respuesta -tabla 15- Actividad 2- Parte V

$n \in N$	$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{n},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{1}{n}\right]$	Intervalo
$n = 1$	[1 ; 3]	e ∈ [1;3]
$n = 2$	[1,75; 2,75]	e ∈ [1,75 ; 2,75]
$n = 3$	$\left[\frac{55}{27} ; \frac{73}{27}\right]$	e ∈ $\left[\frac{55}{27} ; \frac{73}{27}\right]$
$n = 10$	[2,49374246 ; 2,69374246]	e ∈ [2,49; 2,69]
$n = 100$	[2,694813829; 2,7148138291]	e ∈ [2,69; 271]
$n = 1000$	[2,715923932; 2,717923932]	e ∈ [2,71; 2,71]
$n = 10\,000$	[2,718045927; 1,718245927]	e ∈ [2,71; 271]
$n =$ *elije el valor* 100000	[2,718258237; 2,718278237]	e ∈ [2,71; 271]

*Figura 55.*Respuesta -tabla 15- Actividad 2- Parte V

4.1.2. Confrontación Análisis A priori y Análisis A posteriori

En este apartado se realizó la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori, éste estuvo guiado de algunos elementos tomados de las aproximaciones históricas, epistemológicas y matemáticos de la construcción del número real.

A continuación se describen cada una de las partes que componían la propuesta, su nombre y su respectivo propósito, junto con las tablas, en las que se mencionan las actividades; en la primera columna se especifican los contenidos matemáticos que se trabajaron en cada actividad. La segunda columna se detallan las expectativas de desempeño (análisis a priori) y por último en la tercera columna se precisa lo que los estudiantes alcanzaron (análisis a posteriori) con la implementación de la propuesta de aula

PARTE I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.

Propósito: Lograr que los estudiantes mediante diferentes estimaciones identifiquen errores de aproximación y redondeo que pueden presentarse en los cálculos comunes.

Tabla 10.

Análisis a posteriori Parte I

Análisis de la actividad 1. . Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables.		
Contenidos matemáticos	**Expectativas de desempeño**	**Desempeño**
• Aproximación y redondeo. • Número irracional.	• Llegar a una repuesta estimada o aproximada de cálculos comunes.	Durante los procesos realizados por parte de los estudiantes, se identificaron algunos factores importantes en el desarrollo de cada ítem; como el uso del teorema de Pitágoras y la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, no obstante, algunos optaron por usar razones trigonométricas que también es válido para el

• Teorema de Pitágoras. • Volumen de un cilindro.	• Identificar estimaciones de magnitudes inconmensurables.	desarrollo del primer ítem; por esta razón, los conocimientos previos de los estudiantes fueron suficientes y pertinentes para el desarrollo del primer ítem. Entre tanto, en el primero y el segundo ítem se trabajaron con magnitudes inconmensurables; con las que los estudiantes realizaron sus cálculos. Así, en el primer ítem se logró lo esperado; pues ellos dieron una respuesta aproximada, tomando solo algunas décimas del resultado. Con respecto al segundo ítem, en el cual se les dio la fórmula y solo tuvieron que reemplazar y operar, no se encontró un modelo de solución diferente o el uso de otro método. Sumado a lo anterior, en los estudiantes se fomenta el trabajo con aproximaciones y redondeo, con números irracionales, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas y volumen de un cilindro. Uno de los procesos realizado en la calculadora (*ver figura 56).*

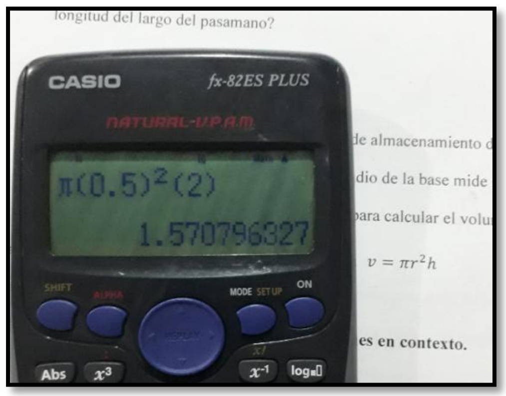


Figura 56. Resultado calculadora

Análisis de la actividad 2. Reflexionemos sobre las aproximaciones en contexto.

• Aproximación y redondeo.	• Decidir cuándo una estimación	Luego de que los estudiantes lograron consignar los datos en el tablero (*ver figura 57*), socializaron sus respuestas; en general en sus argumentos mencionaron

	más que una respuesta exacta es una respuesta apropiada. • Seleccionar o construir una comparación de representación correcta.	con mayor frecuencia la frase "*es la que se puede calcular con el metro"*, lo que permite deducir que tienen la concepción de que toda magnitud es conmensurable o lo que actualmente se traduce a que toda magnitud puede ser expresado de la forma con $\frac{a}{b}$ con b diferente de cero; pues están asociando la actividad de medir con la comparación de las magnitudes con las unidades patrón que ya conocen; como el metro, la regla y los instrumentos que usan en la vida cotidiana; sin embargo, con estos instrumentos sólo pueden representar algunos racionales positivos con una cantidad de cifras decimales finita; de ahí que éstos se constituyen en cierta medida en un factor que limita o desfigura las intuiciones de continuidad que un estudiante puede adquirir en la Educación Media. Por otro lado, en esta actividad no solo se pretendía que los estudiantes reflexionaran respecto de ¿cuál sería la representación correcta? si no que, lograran determinar ¿cuándo una estimación es la apropiada?; se presentaron algunas dificultades para identificar la medida más adecuada para que Juan realizara sus estimaciones. Al finalizar las intervenciones, los estudiantes llegaron a la conclusión de que para hacer cálculos con cantidades aproximadas, se debe considerar un margen de error que está implícito por los instrumentos de medida o por la naturaleza de las cantidades con las que se hacen las estimaciones; además, éste se incrementa a medida que se opera con dichas cantidades. Para este caso, de acuerdo con las expectativas de desempeño, esta actividad permitió encaminar a los estudiantes a la realización de ciertas aproximaciones y que de forma análoga pudieran reconocer los errores que existen al momento de operar con magnitudes aproximadas e identificaran magnitudes inconmensurables.

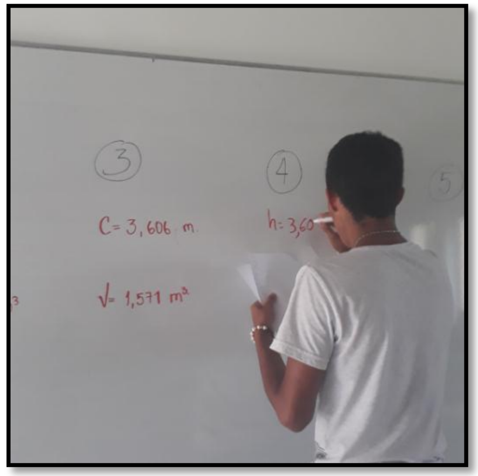


Figura 57. Socialización de resultados

Análisis de la Actividad 3. Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado.

• Aproximación y redondeo. • Operaciones con cantidades redondeadas.	• Refutar el método de redondeo y truncamiento, en términos de su eficiencia para las operaciones entre estas cantidades.	Cómo se había mencionado, cuando se recurre al método de aproximación de cantidades y se operan con ellas, el margen de error incrementa; un ejemplo muy común es el caso de π; puesto que los estudiantes recurren a realizar aproximaciones o truncar sus cifras desconociendo otros métodos en los que cantidades como estas pueden ser representadas sin el uso de estos métodos. En el ítem 2, los estudiantes realizaron operaciones utilizando la calculadora científica sólo algunos comprendieron que las cifras que arroja la calculadora son el resultado de la aproximación o el truncamiento que hace este instrumento cuando se trata de números decimales infinitos, alejándose así de su valor real y de la naturaleza del número. Con esta actividad, las expectativas de desempeño esperadas, fueron alcanzadas porque los estudiantes al hacer cálculos con cantidades que habían sido aproximadas y otras sin aproximar (*ver figura 17*) lograron identificar en el contraste de los resultados, la diferencia entre estos y cómo se alejan del valor real a

	medida que se opera. Es preciso aclarar que los estudiantes, fueron relacionando sus conocimientos previos con los nuevos y lograron dar buenas respuestas e interpretaciones alrededor de la aproximación y el truncamiento. No obstante, el uso de la calculadora científica puede constituirse en un obstáculo para hacer cálculos con cifras decimales infinitas; si no se hace la aclaración de que con ella sólo se pueden representar algunos números racionales con cifras decimales finitas; además, no sólo se trata de la representación, sino que se le confieren a las cantidades representadas por la calculadora, las operaciones y propiedades del conjunto de los números reales, cuando es claro que hay diferencias entre los racionales con un cifras decimales finitas y el conjunto de los reales.

PARTE II: La aproximación a números racionales mediante encajonamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Propósito: hacer un paralelo desde lo intuitivo mediante el método de encajonamiento de intervalos racionales a la construcción de nociones de límite y convergencia.

Tabla 11.

Análisis a posteriori Parte II.

Análisis de la Actividad 1. Encajonando a 1/6, por la izquierda y por la derecha.		
Contenidos matemáticos	**Expectativas de desempeño**	**Desempeño**
• Representación de números racionales con expresiones decimales	• Recordar la definición de número racional y su propiedad de densidad.	Como se ha mostrado en uno de los ejemplos propuestos por el matemático Bachmann, para representaciones de números irracionales o racionales, emplea el método de encajonamiento de intervalos cuyos extremos son números racionales; dada la imposibilidad de representar la cola decimal infinita no periódica en el papel o en el ordenador de dichos números; partiendo del método de encajonamiento, se

infinitas periódicas. • Número racional. • Densidad en los números racionales. • Representación de números racionales en la recta numérica. • Aproximación por encajonamiento de intervalos de racionales. • Distancia de un intervalo.	• Verificar mediante el software Geogebra que existen otros números racionales muy próximos a 1/6. • Seleccionar un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico.	eligió esta actividad, las preguntas orientaron a los estudiantes a proponer estrategias que les permitieron hacer una representación de éstos números sin recurrir al método de aproximación o al truncamiento. Para ello, se propuso el software Geogebra; los estudiantes intentaron encajonar a $\frac{1}{6}$, orientados por las preguntas y sin conocer el método propuesto por Bachmann, fueron encajonándolo por la derecha y por la izquierda a partir de números racionales con un cifras decimales finitas; de tal manera que la diferencia entre los extremos de los intervalos se aproximara cada vez más a cero. A partir de este proceso se empezó a introducir de forma intuitiva la propiedad de densidad de los números racionales. Además, con la ayuda de la herramienta lupa del software; que permite ampliar los intervalos en la recta numérica, facilitó la exploración y la aproximación sucesiva a un número racional mediante el encajonamiento. Si bien es cierto, que no se introduce la propiedad de manera formal; sí es posible hacer una buena aproximación “ *si es posible encontrar valores cercanos a* $\frac{1}{6}$ *ya que a medida que cada vez que encajonamos* $\frac{1}{6}$ *van a aparecer muchos números más a su izquierda y a su derecha”*, es decir encontraron números racionales finitos muy próximos a otros racionales infinitos y en el trasfondo de este argumento, se encuentra implícita una noción de densidad, que no se aleja de la definición formal propuesta por Paul Bachmann y es accesible a un estudiante Educación Media.

Análisis de la Actividad 2. Practiquemos lo aprendido. Explorando con otros números racionales.

	• Identificar el rango de una buena estimación. • Seleccionar un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico.	En esta actividad las preguntas permitieron que los estudiantes se acercaran un poco más a la noción que se tiene de la propiedad de densidad de los números racionales, mediante la representación intervalar. Ellos realizaron aproximaciones con ciertos números, que se les dieron en una tabla *(ver figura 24 y 25)*, en este ítem se les hizo más fácil a las parejas seleccionar un número racional finito cercano a otro número racional infinito periódico y así mismo identificaron números racionales muy próximos a otros racionales, estos procedimientos condujeron a que ellos lograran representar un número racional como un intervalo encajonado, estos procedimientos

	• Identificar números racionales muy próximo a otros racionales. • Representar a un número racional como un intervalo encajonado.	se relacionan con la investigación realizada por Moore de una teoría estructurada, que comprende un sistema numérico intervalar, en torno a la presión que ejerce la aproximación numérica a los problemas de tipo matemático, errores que en cálculos comunes con números reales implican el uso de los irracionales o racionales con decimales infinitos y se presentan cuando se truncan los resultados y peor aun cuando se opera entre ellos; esta teoría no estaba proyectada para ser tomada como un modelo educativo puesto que solo fue diseñada para mejorar la eficacia de los computadores y realizar cálculos en otras ciencias. En esta actividad, una vez que los estudiantes han adquirido una noción de la densidad, se proponen más ejercicios (*ver figura 24 y 25*) para que logren identificar que esta no sólo se cumple para un caso particular, sino para cualquier número racional; es decir cualquier número racional es el límite de una sucesión de intervalos encajonados; que en palabras de ellos sería que para cada número racional hay infinitos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda.

PARTE III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de $\mathbb{Q}$, a partir del encajonamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Propósito: lograr que los estudiantes a partir de situaciones particulares y determinantes que dan cuenta de la aparición de los números racionales a través de la historia, logren comprender que números como π y $\sqrt{2}$ son números que si bien no pueden representarse con un número limitado de cifras decimales en el papel o en una máquina, si es posible hacer una aproximación a estos mediante encajonamientos de números racionales, de modo que la diferencia entre los extremos de los intervalos cada vez sea tan pequeña como se quiera y tienda hacia un número en particular

Tabla 12.

Análisis a posteriori Parte III

Análisis de la actividad 1. (El caso de π.) .		
Contenidos matemáticos	**Expectativas de desempeño**	**Desempeño**
• Método de exhaución. • Límite y convergencia.	• Visualizar y verificar haciendo uso del software Geogebra, el método de exhaución como estrategia para aproximarse al valor real de π mediante la inscripción y circunscripción de polígonos regulares.	El método de exhaución creado por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) más adelante perfeccionando por Arquímedes quien aproximadamente hace 22 siglos utilizó el método de exhaución para hallar el área de una circunferencia usando la inscripción y la circunscripción de polígonos regulares; en su momento fue un método bastante complejo, por ello su nombre. Ahora al recrearlo en el aula a través de esta actividad, en el momento en el que se reconstruyó este proceso con los estudiantes a través del lápiz y papel se hizo evidente que estos recursos limitaban el proceso, es decir; no permitió que los estudiantes se dieran cuenta qué ocurría cuando aumentaban la cantidad de lados de cada polígono, por ejemplo, cuando estos eran mayores a 8 lados o en su defecto 9 lados. Sin embargo, algunos estudiantes infieren que en algún momento los polígonos coincidirían con la circunferencia. Pero, cuando el método de Exhaución fue presentado a través del software de Geogebra, se logró observar que hubo una mejor exploración y visualización de este proceso, ya que permitió una mejor exploración y verificación del método de Exhaución como mecanismo para aproximarse al valor de π, pues, los estudiantes al manipular el software comprendieron que al aumentar el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos, sus áreas se aproximaban al valor real de π , además cuando usaron el botón ZOOM+, la figura se ampliaban, mostrando que por más grande que fuera el n, los polígonos nunca podrían coincidir con la circunferencia. La mayoría de los estudiantes se acercaron a la expectativa planteada para esta actividad *(ver figura 58).*

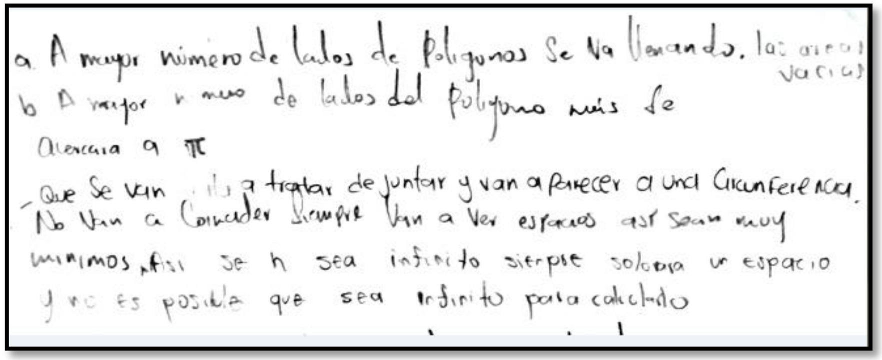


Figura 58. Respuesta- Método de exhaución- Actividad 1- Parte III

• Representación de π a partir de intervalos encajonados.	• Seleccionar un número cercano a un número de otro tipo. (Un racional a un irracional).	El encajonamiento de números irracionales, mediante números racionales, en la actividad 1 de la parte III, se desarrolla a través del método de Exhaución y las fórmulas para hallar los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos. La mayoría de los estudiantes logran completar los espacios vacíos de la tabla de acuerdo a los resultados de las operaciones sin dificultades, puesto que, en esta actividad se permitía el uso de la calculadora científica *(ver figura 59).* Además se evidencia la manera en la que las personas en la antigüedad se aproximaban a π , a través de intervalos de números racionales, como por ejemplo, el matemático Zu Chong Zhi, que en el año 420-500 d.C logra aproximarse a π acertando en siete cifras decimales, representado en el intervalo: 3,1415926<π<3,1415927

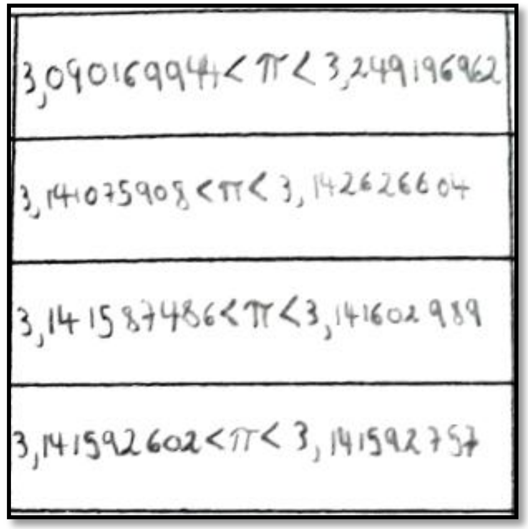
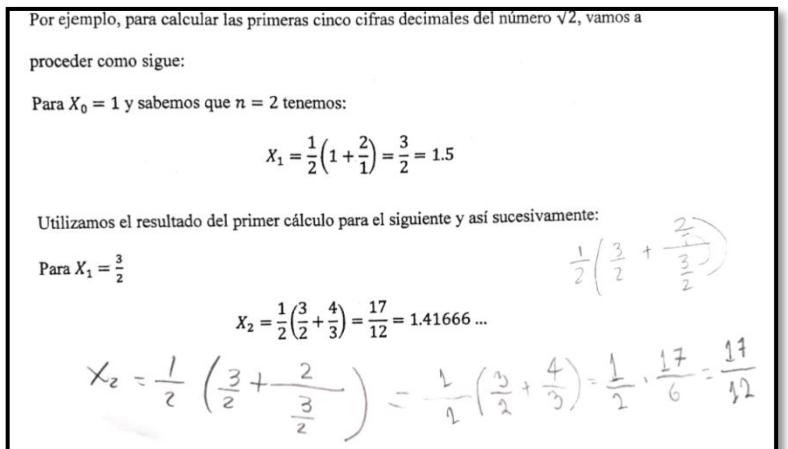


Figura 59. Respuesta – Aproximación a π- Actividad 1- Parte III

• Distancia de un intervalo.	• Identificar el rango de una buena estimación. • Extender un modelo usando una calculadora o un computador para generar los resultados de unas reglas específicas o de una variación sistemática. • Predecir usando el procedimiento de encajonamiento de intervalos racionales en una secuencia que la aproximación por	En la actividad 1, ítem 5, los estudiantes diligenciaron la tabla 14. (Método de exhaución); para ello, primero calcularon el perímetro de los polígonos inscritos y el perímetro de los polígonos circunscritos; utilizando la fórmula que se les indicaba. Luego, restaron los resultados de calcular el perímetro de los polígonos circunscritos y los inscritos (restar el valor mayor del menor). Sin embargo, dos de las cinco parejas de estudiantes mencionaron que en algún momento el resultado de dicha resta sería cero, según el resultado que les arrojó la calculadora, es decir, que en algún momento los polígonos iban a coincidir con la circunferencia *(ver figura 31).* Pero, las otras parejas, infieren que no es posible que el resultado sea cero, pues el número al que se estaban aproximando era un número irracional (ver figura 32), en ese orden un estudiante decidió hacer las resta directamente con las formulas, ingresándolas en la calculadora de esta manera, lo que conducía a que los

	encajonamiento pueda ser tan pequeña que tiende a cero.	resultados fueran diferentes. Ahora bien, cuando realizaron el método de exhaución a través del software de Geogebra validaron lo mencionado anteriormente, porque al aumentar el número de lados, en la gráfica parecía que los polígonos coincidían con la circunferencia, pero si ampliaban la imagen, con la herramienta lupa, se podía observar que esta afirmación no era cierta pues se visualizaban los espacios entre los polígonos y la circunferencia. Con lo anterior, los estudiantes comprendieron que a medida que la resta de los extremos del intervalo se acercaba cada vez a 0, el rango de estimación, de determinado número, era mejor. En este proceso, los estudiantes comprenden que a medida que el número de lados aumenta, el resultado de la resta disminuye, es decir, tiende a 0. Finalmente, lo que hay detrás de esta actividad, es la noción de límite que se prefigura en los estudiantes; pues si bien no es una concepción formal; al menos es una intuición favorable que le permitirá al estudiante comprender una definición formal y mejor aún, entender el número real como un límite.
• Número irracional, como número decimal infinito no periódico	• Identificar a partir de un procedimiento, números no racionales a partir del comportamiento no periódico de su cola infinita de números decimales.	Los estudiantes identificaron la naturaleza de la cola de decimales del número π, a través de la comparación de los resultados que daba la calculadora científica y la calculadora del ordenador mediante el procedimiento de aproximación a π, utilizando el método de exhaución y su desarrollo en el software. Esta actividad fue posible al recrear el método de Arquímedes y perfeccionarlo con el uso del software, en ella se evidencia la importancia de integrar a las aulas de clase, la historia, pues, se puede ver en ella una función didáctica, ya que, los estudiantes van identificando la naturaleza de algunos objetos matemáticos a través de los procedimientos que realizaron algunos matemáticos en su construcción, de ahí que estos procesos son más significativo para su aprendizaje.

Análisis de la Actividad 2. El caso de $\sqrt{2}$.		
• Método de Herón de Aznar.	• Estimar mediante el algoritmo de Herón de Aznar un procedimiento iterativo, parte de la cola decimal infinita no periódica del número irracional $\sqrt{2}$, sin el uso de calculadora.	El desarrollo sin calculadora del algoritmo de Herón de Aznar permitió que los estudiantes conocieran parte de la cola decimal infinita del número irracional $\sqrt{2}$, puesto que, la mayoría, sabía que el símbolo "$\sqrt{2}$" representaba un número irracional, pero, no conocían el valor numérico que representaba, por lo que decidieron, para la comprensión del algoritmo, realizarlo de acuerdo a las indicaciones dadas en las hojas de trabajo. Los estudiantes realizaron el ejercicio solo hasta las primeras cinco cifras decimales del número $\sqrt{2}$, puesto que, a medida que se iban hallando más cifras, era más complejo el desarrollo del algoritmo. Es importante mencionar que, a través del desarrollo los estudiantes observaban que este era un proceso infinito *(ver figura 60).*



Por ejemplo, para calcular las primeras cinco cifras decimales del número $\sqrt{2}$, vamos a proceder como sigue:

Para $X_0 = 1$ y sabemos que $n = 2$ tenemos:

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

Utilizamos el resultado del primer cálculo para el siguiente y así sucesivamente:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)$$

Para $X_1 = \frac{3}{2}$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666\ldots$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{6} = \frac{17}{12}$$

Figura 60. Algoritmo de Herón de Aznar

• Representación de $\sqrt{2}$ y sus múltiplos en la recta	• Predecir usando método de encajonamiento de	A través de la construcción de la representación geométrica de $\sqrt{2}$ en el plano cartesiano, los estudiantes empezaron a aproximarse al número con la lupa de

numérica. • Aproximación por encajonamiento de intervalos de racionales a números irracionales.	intervalos la tendencia a cero, producto de las diferencias sucesivas de los extremos de lo intervalos encajonados. • Abstraer elementos comunes entre muchas situaciones relacionadas.	Geogebra, de la misma manera como lo hicieron con un $\frac{1}{6}$ y así fueron tratando de encajonar a $\sqrt{2}$ y a $-\sqrt{2}$ con números racionales con decimales finitos, estas aproximaciones las hicieron de acuerdo a las indicaciones de la tabla 14. (*Encajonamiento de irracionales a partir de racionales)*, primero determinaron el número racional más próximo por la derecha y el más próximo por la izquierda, aproximando a la décima, la centésima, la milésima y la diezmilésima. Seguido lo anterior, restaron los extremos que encontraron en las décimas, las centésimas, las milésimas y las diezmilésimas, con ello encontraron que la diferencia, entre cada vez más se ampliara la lupa, iba siendo más pequeña, se iba aproximando a 0.
• Representación de un número irracional mediante un intervalo racional encajonado.	• Identificar el rango de una buena estimación. • Seleccionar un número cercano en tamaño a un número de otro tipo. (Un racional a un irracional)	A través de la actividad anterior la mayoría de los estudiantes afianzaron y recordaron la manera de identificar como era el rango de una buena estimación, puesto que, este procedimiento se había realizado en la sesión anterior, este proceso lo realizaban a través de la resta de los extremos, cuya diferencia se aproximara bastante a 0. Ahora bien, el proceso anterior permitió que los estudiantes lograran encajonar cualquier número, puesto que en los últimos ítems de esta parte se le pide a los estudiantes que inventen cualquier número racional y que se aproximaran tanto como se deseara mediante el método de encajonamiento, para lo cual, algunos decidieron hacer uso del plano cartesiano en Geogebra, algunos estudiantes lograron realizar esta actividad sin dificultades. *(Ver figuras 61 y 62*), sin embargo, hubo otros que tuvieron dificultad para llegar a elegir los números más próximos por la derecha y por la izquierda del número que eligieran *(ver figura 63).*

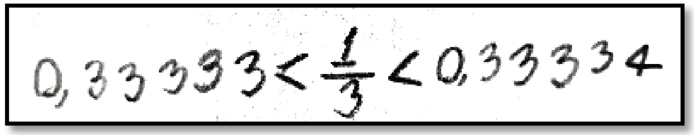


Figura 61. Encojando número racionales

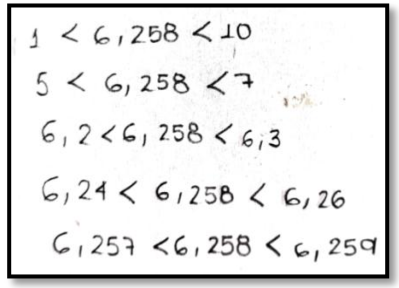


Figura 62. Encajonando números racionales

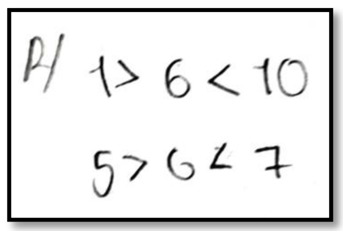
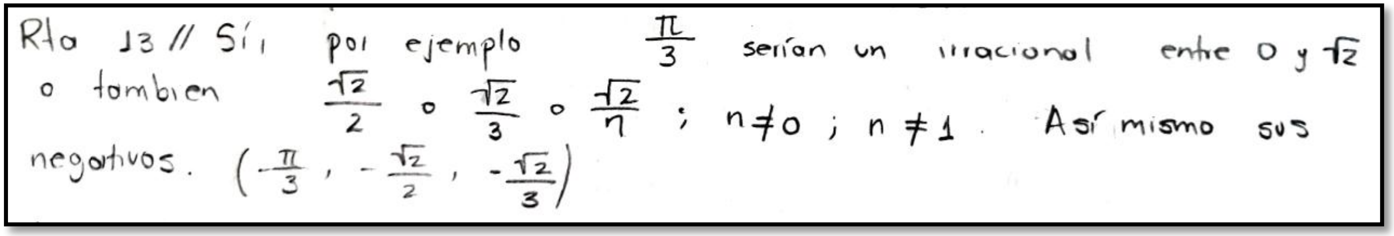


Figura 63. Encajonando números racionales

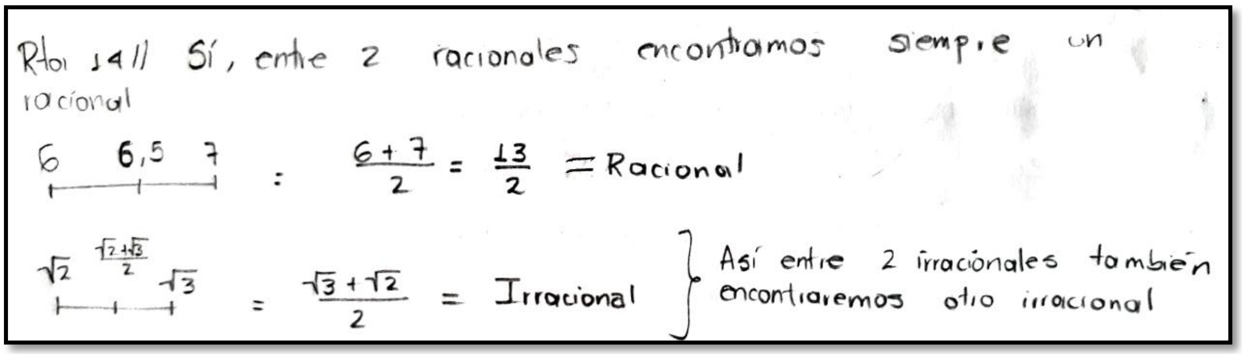
• Densidad en los números irracionales.	• Leer e interpretar una representación de los datos y utilizarla para dar respuesta a una pregunta.	Con la construcción, elaborada para la representación de $\sqrt{2}$ y sus múltiplos en el plano cartesiano, los estudiantes interpretaron e identificaron algunos aspectos que giraban en torno a la construcción, por ejemplo, la cantidad de múltiplos de $\sqrt{2}$ que se pueden representar en la recta siguiendo el proceso de

	• Identificar la noción de número Irracional y su propiedad de densidad.	construcción, para lo cual todos los estudiantes concluyeron que eran infinitos. Otro aspecto que identificaron con la construcción era que entre dos números 0 y $\sqrt{2}$, 0 y $-\sqrt{2}$, existían infinitos números irracionales *(ver figura 64 y 65)*, algunos hacían alusión a la propiedad cerrada de los números irracionales, mencionando que todo número operado con números irracionales su resultado era un irracional, sin embargo no discriminaban la radicación, no tuvieron en cuenta que se cumplía para las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación) excepto la radicación. Con la actividad anterior, los estudiantes iban descubriendo la propiedad de densidad de los números irracionales mediante la exploración del software, además iban identificando la noción de número irracional, es importante mencionar que, esta representación del número $\sqrt{2}$ mediante intervalos, condujo a que los estudiantes dieran cuenta de la propiedad de densidad de los números irracionales, puesto que cuando ellos iban observando que números irracionales habían entre 0 y $\sqrt{2}$ se daban cuenta de que habían infinitos números, uno de los estudiantes propone un ejemplo con dos números irracionales $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{3}$.



Rta 13 // Sí, por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ serían un irracional entre 0 y $\sqrt{2}$
o tambien $\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\frac{\sqrt{2}}{3}$ o $\frac{\sqrt{2}}{n}$; $n \neq 0$; $n \neq 1$. Así mismo sus
negativos. $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Figura 64. Densidad números irracionales



Rta 14 // Sí, entre 2 racionales encontramos siempre un
racional

6 6,5 7 : $\frac{6+7}{2} = \frac{13}{2}$ = Racional

$\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ = Irracional } Así entre 2 irracionales también encontraremos otro irracional

Figura 65. Densidad números irracionales

PARTE IV. LOS INTERVALOS CERRADOS Y ACOTADOS.

Propósito: Hacer un acercamiento a su definición y mostrar algunas aplicaciones de los intervalos en la práctica.

Tabla 13.

Análisis a posteriori Parte IV

Actividad 1. Acerquémonos a la definición de intervalos.		
Contenidos matemáticos	**Expectativas de desempeño**	**desempeño**
• Intervalo cerrado. • Intervalo degenerado	• Identificar el concepto de intervalo cerrado racional.	La propuesta de Moore en el año 1962, partió del interés por resolver problemas matemáticos que involucran la precisión de cálculos numéricos, el análisis a esta y sus diversas aplicaciones permiten aproximarse a ciertas propiedades fundamentales de los números reales, puesto que aún existen limitaciones para expresar ciertos números reales debido a que es imposible representar exactamente números con expresiones decimales como las de e, π y $\sqrt{2}$, su propiedad de densidad y la importancia para realizar cálculos numéricos permiten que esta teoría sea implementada para reducir los errores de aproximación y truncamiento, pues ofrece una alternativa de representación de los números reales a través de la intuición. Ahora bien, en la actividad 1 se les presento inicialmente una breve definición de: intervalo, racional encajonado e intervalos degenerados, estas definiciones ayudan a que los estudiantes tengan una noción, los cuales son de gran importancia y de tener en cuenta para dar respuesta a las preguntas, ya que llevan al estudiante a representar mediante intervalos algunas magnitudes e identificar el concepto de intervalo cerrado racional. Luego, al representar mediante intervalos los valores dados, los estudiantes utilizaron la definición de racional encajonado e hicieron uso de la calculadora para encontrar números de naturaleza finita. En este caso, los intervalos cerrados y acotados posibilitó en el

		estudiante un acercamiento a la propiedad de densidad de los números reales, puesto que, a través de la elección de pares ordenados se dieron cuenta que los extremos del intervalo están acercándose por la derecha y por la izquierda.

PARTE V. LOS NÚMEROS REALES COMO CONJUNTOS DE INTERVALOS

Propósito: Hacer un acercamiento a la construcción de los números reales como conjuntos de intervalos.

Tabla 14.

Análisis a posteriori Parte V

Actividad 1. Relacionemos los conceptos previos.		
Contenidos matemáticos	**Expectativas de desempeño**	**Desempeño**
• Intervalo racional. • Intervalo encajonado. • Número racional. • Número irracional. • Densidad de los números racionales. • Densidad de los números irracionales	• Identificar las nociones de número racional e irracional. • Reconocer la propiedad de densidad de los números racionales y los números irracionales	Las nociones que se tienen acerca de los números racionales e irracionales y sus construcciones a través de la historia dan cuenta de su naturaleza. Una de las teorías propuestas por Moore vista como herramienta de la computación y luego utilizada por el matemático alemán Bachman quien construye de manera formal los números reales y los define como límites de sucesiones de intervalos encajonados, permiten un acercamiento de forma intuitiva a lo que es número real. Ahora bien, después de que se les diera una serie de preguntas, como lo fueron las preguntas 4, 5, 6, y 7 las cuales pedían que el estudiante determinara la existencia de números racionales e irracionales muy próximos a otros racionales e irracionales por la derecha y por la izquierda la pregunta 8, encaminada en el reconocimiento de la propiedad de densidad de los números racionales y los números irracionales, las respuestas que dan para la pregunta #8 son muy similares, y dan cuenta que han comprendido que los

números racionales e irracionales conforman el conjunto de los números reales, en consecuencia llenarán por completo toda la recta *(ver figura 66).*

Entonces, cabe aclarar que las parejas de estudiantes identificaron algunas nociones que se tienen de la naturaleza de los números racionales e irracionales. (ver figura 67)

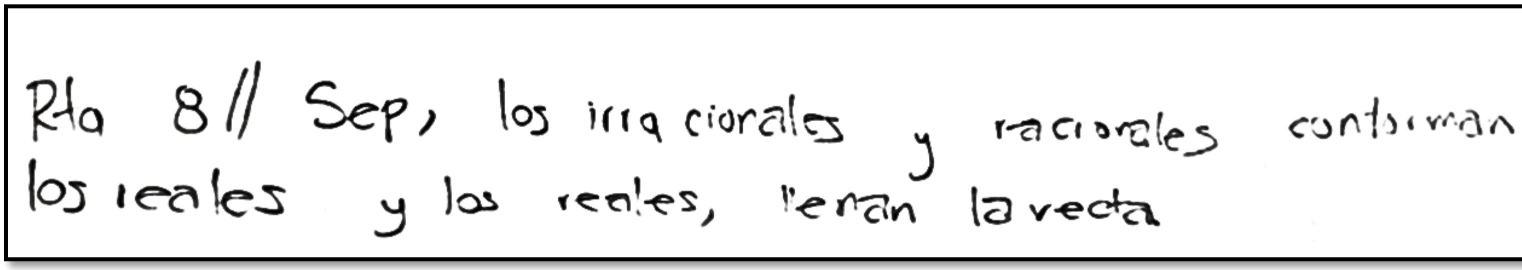


Figura 66. Respuesta- Pregunta 8- Actividad 1- Parte V

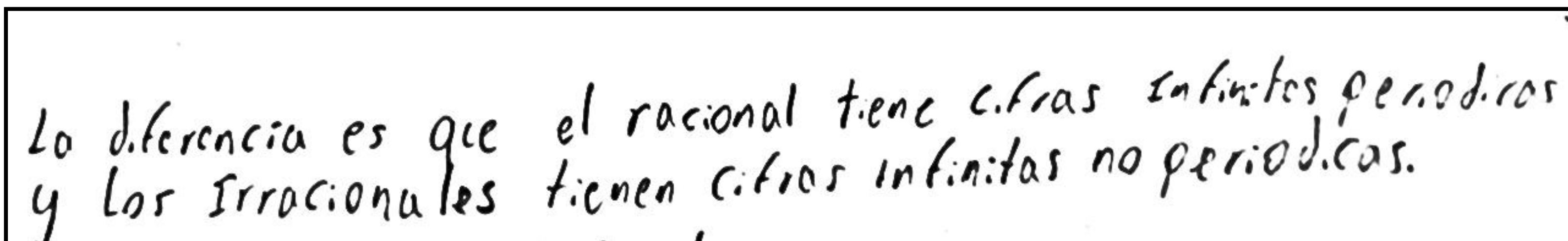
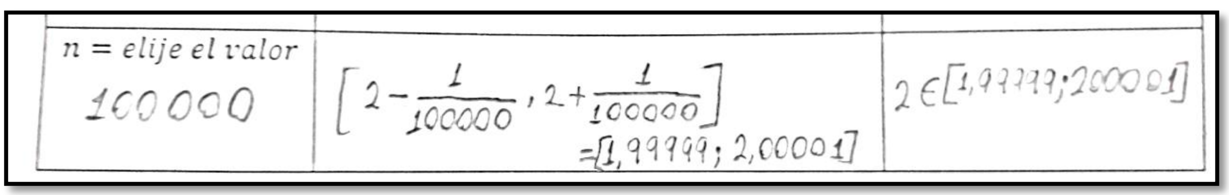


Figura 67. Actividad 1- Parte V

Actividad 3. Representación de un número real como intervalo encajonado.		
• Representación de un número real, como intervalo encajonado.	• Identificar a partir de diferentes situaciones la representación un número real como un intervalo encajonado.	El proceso de encajonar un número real fue evidente en todas las actividades anteriores, pero para esta actividad se utilizaron fórmulas para hallar intervalos de ciertos tipos de números como lo fueron el número dos y el número Euler, primero se tiene que para representar el número 2 mediante un intervalo encajonado *(ver figura 68).* Como se muestra en las figuras anteriores los valores para $n = 10000000000\ y\ n = 100000$, se encuentra que una de las parejas argumento que la calculadora le aproximo el resultado, entonces dudo del valor obtenido, puesto que, ya reconocen y se hacen una idea de la naturaleza de las cifras en cuestión.



$n =$ elije el valor 100000	$\left[2 - \frac{1}{100000}, 2 + \frac{1}{100000}\right]$ $= [1{,}99999; 2{,}00001]$	$2 \in [1{,}99999; 2{,}00001]$

Figura 68. Respuesta- Pregunta -Actividad 3- Parte V

Figura 69. Estudiantes Institución Educativa Instituto Técnico, participantes en la implementación de la propuesta.

Consideraciones acerca de la propuesta de aula: La propuesta de aula diseñada por (García, 2017) en 7 partes, con sus respectivos propósitos y actividades, contribuye en buena medida al profesor en formación y en ejercicio, puesto que brinda alternativas al problema de representación de los números reales a través de la representación intervalar. Ahora bien, fue necesaria la elección de actividades que estuviesen encaminadas hacia el propósito del presente trabajo, además de su implementación en el salón de clases, para ver cuál era el impacto en el acercamiento a la propiedad de la densidad.

Cada una de las actividades fueron seleccionadas y orientadas por los referentes teóricos matemáticos e históricos. Las partes y las actividades elegidas son:

La parte I, elegida, puesto que, fue diseñada en relación a la problemática asociada a errores de aproximación y redondeo en los Cálculos experimentales y la búsqueda de una alternativa de representación que evite este tipo de errores. Una de las razones que da cuenta de la necesidad y la importancia de los intervalos es precisamente el de evitar este tipo de errores.

La parte II, se eligió porque aquí se presenta el intervalo como una alternativa de representación de los números racionales e introduce el método de aproximación por encajonamiento de intervalos racionales; que es retomado de la construcción de Bachman y adoptado a los números racionales. En esta parte, la autora pretendía, introducir de manera intuitiva la noción de número racional como límite de intervalos encajados, además de su propiedad de densidad a partir de diferentes esquemas y representaciones apoyadas en el software Geogebra.

La parte III, menciona la incompletitud de los números racionales, por ello, hace una aproximación a la representación de los números irracionales como límites de sucesiones de intervalos encajonados. Inicialmente se retoman hechos como la aparición de magnitudes inconmensurables, en casos particulares o en el mismo orden en que ocurrió históricamente con la aparición de π y $\sqrt{2}$. Luego, en las actividades se da lugar a estrategias de tipo geométrico presentes en la historia, como el método de exhaución, adaptado a un método moderno y apoyado en el software Geogebra. Respecto a esto, García (2017) menciona que:

> La noción de número real como un límite en términos muy generales, que se prefigura en el método de exhaución y se formaliza con la propuesta de Cantor, permite reconocer la importancia de proponer actividades para calcular la distancia entre los extremos de los intervalos encajonados e intuir que esta puede ser tan pequeña como se quiera. (p. 166).

Las partes IV y V de la propuesta, se eligieron porque aquí se establecen esencialmente la teoría intervalar, desde la definición de lo que ligeramente se ha mencionado en las actividades anteriores como intervalo. La cual favorece la compresión intuitiva del número real como conjunto de intervalos encajados de racionales, así como la aproximación a su densidad

A continuación se menciona algunas recomendaciones para la implementación de la propuesta:

Se considera importante que en el momento de implementar la propuesta de aula se seleccionen las actividades que estén dirigidas hacia los objetivos que tenga el profesor, puesto que para el desarrollo de la propuesta en su totalidad se necesita disponer de un buen tiempo (más de 9 sesiones).

Es menester mencionar que, para la implementación del aula es importante el acompañamiento del profesor de matemáticas, pues debe ser un ente orientador, quien articule los conocimientos que están adquiriendo los estudiantes con la propuesta con el carácter formal de las matemáticas, puesto que la propuesta por sí sola no conlleva a que los estudiantes logren alcanzar los propósitos planteados.

Se recomienda que, se acoten algunas preguntas que suelen ser muy repetitivas durante la propuesta, por ejemplo en el ítem 5 y 6 de la Actividad 2 de la Parte II

Es pertinente revisar las actividades que conducen a ver el número real como un punto sobre la recta, puesto hace que se vea el número como una etiqueta, lo que lleva a una representación no exacta. Respecto a ello Scaglia (2000) menciona:

> En un mundo ideal, es posible asignar de modo 'exacto' el punto de la recta correspondiente a un número dado cuando el número es constructible. Cuando el número no es constructible, sólo cabe admitir una representación en la recta, desde el punto de vista ideal, aproximada. Un número como π, por ejemplo, sólo admite una representación aproximada, estando el grado de aproximación en función de las cifras decimales del número que alcanzan a precisarse en la representación (p. 375).

Esta representación del número real hace que no sea posible analizar conceptos fundamentales del número real, como por ejemplo; densidad, continuidad o completitud, generando dificultades para su comprensión.

A pesar de lo anterior, se considera importante indicar que las recomendaciones realizadas al diseño de algunas tareas elaboradas por (García, 2017) fueron pocas, ya que la implementación evidenció que se cumplen en su mayoría los propósitos planteados.

4.1.3. Conclusiones

El presente trabajo permitió caracterizar algunas ventajas y limitaciones de la representación intervalar en el acercamiento a la propiedad de densidad de los números reales en estudiantes de grado 11. Para la realización de esta caracterización fue necesario elegir algunas actividades que componían una propuesta de aula, en este proceso se identificó que en el momento de implementar una propuesta de aula en el salón de clases, ésta debe tratar de articular de forma coherente los propósitos, los contenidos matemáticos, el contexto, los aspectos metodológicos, los recursos pedagógicos y los criterios de evaluación. En otras cosas, el profesor debe considerar los conocimientos previos de los estudiantes.

Con lo anterior, los referentes teóricos que sustentaron la elección de las actividades de la propuesta de aula se basaron en los aspectos: histórico, matemático, didáctico y curricular; el referente histórico permitió identificar algunas dificultades que dieron paso a la construcción del número real como objeto matemático desde los pitagóricos siglo V a.C y la fundamentación del análisis en el siglo XIX. Lo anterior, dio elementos que beneficiaron a la elección de las actividades, pensadas en recrear esos sucesos históricos, por ejemplo, el Método de Exhaución, el Método de Herón de Aznar, entre otros.

En cuanto al referente matemático, proporcionó algunos elementos teóricos para la comprensión del número real y su propiedad de la densidad y la teoría intervalar, el referente didáctico aporto elementos para la metodología del desarrollo del trabajo y por último el curricular que facilitó las orientaciones educativas nacionales del concepto de número real para grado 11 de educación media.

Estos cuatros referentes se relacionan dando cuenta de los objetivos específicos planteados, aportando a la elección e implementación de la propuesta de aula. A continuación se mencionan las conclusiones por cada uno de los objetivos y por último se caracterizan algunas ventajas y limitaciones de la representación intervalar en el acercamiento de la propiedad de la densidad de los números reales.

Referente al primer objetivo:

Especificar los componentes más notables en la construcción de los números reales a través de la histórica, que comprenden las crisis de los fundamentos de las matemáticas: en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis.

- Las revisiones que se hicieron a las construcciones del número real comprendidas desde las crisis de los fundamentos de las matemáticas: pitagóricos siglo V a.C. y el siglo XIX con la fundamentación del análisis permitieron identificar esos problemas que surgieron a lo largo de la historia en la consolidación del número real como objeto matemático. Además, se considera que las matemáticas son un constructo social que parte de las necesidades de una sociedad o cultura, y que están en constante evolución. Por otro lado, al conocer estos momentos cruciales que marcaron la historia, promueven un cambio sobre la concepción que se tiene de las matemáticas y motivan a reflexionar un poco sobre la importancia de ésta en el campo de la educación, sin dejar de lado que proponen bases para pensarse un modelo de clase más ameno e ingenioso. Es importante retomar a través de la historia las bases que dieron origen a la consolidación del número real como objeto matemático, y que hoy en día, ayudan a comprender un poco más la naturaleza misma de las matemáticas, por esta razón es necesario escudriñar un poco en las crisis de los fundamentos del siglo XIX con la construcción de números reales bajo modelos que implican la idea de límite.

- A través de las construcciones históricas se logró observar que el método de Exhaución creado por Eudoxo como escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, y a su vez dan cuenta que, a partir de estas sucesiones de polígonos inscritos se concibieron los números irracionales los cuales dieron paso a la existencia del límite.

- Fue necesario revisar los motivos que hicieron que la teoría intervalar, se constituyera como ciencia de la computación permitiendo dar una representación apropiada del número real mediante el uso de intervalos, y no condicionándolo a verse como un punto sobre la recta, sino más bien, como el límite de sucesiones de intervalos encajados.

- Tomando como recurso modelos presentados a través de la historia para dar solución a problemas sobre el número real, y que a partir de situaciones no ajenas para el estudiante se pueden pensar ciertos métodos que les permitan comprender que, ciertos números como π y $\sqrt{2}$ no pueden presentarte con un número limitado de cifras decimales en el papel o en un ordenador, pero que, a partir de las construcciones que dieron paso a la teoría intervalar, existe una forma de expresar mediante encajonamiento de intervalos de números racionales y que la diferencia de esta sea tan pequeña como se quiera.

Referente al segundo objetivo:

Reconocer en la construcción histórica del concepto de número real, elementos didácticos que posibiliten la elección de actividades e implementación de una propuesta de aula.

- De algunas construcciones que a través de la historia dieron pasó a la consolidación del número real como objeto matemático, se pueden identificar alternativas para su enseñanza. Por ejemplo, la primera crisis de los fundamentos en el siglo V a. C que fue consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables generó una ruptura en cosmovisión de los pitagóricos, pues ellos consideraban que todas las magnitudes eran conmensurables; es decir lo que actualmente se entiende como las magnitudes que se pueden representar de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}\ y\ b \neq 0$. Este hecho se ve reflejado en el aula, porque para los estudiantes un factor limitante para la comprensión de las magnitudes inconmensurables, es su concepción de que todo es conmensurable; al igual que ocurrió con el pensamiento pitagórico. Por esta razón es importante recurrir a estos problemas históricos e identificar y analizar las estrategias que los matemáticos en la antigüedad emplearon para solucionarlos, y recrearlas en el aula; dándole así una función didáctica a la historia.

- Una estrategia para hacer una aproximación a la propiedad de la densidad de los números reales, en un estudiante de educación media; es a través de la intuición geométrica; pues históricamente se pudo evidenciar que algunos matemáticos y filósofos de la época, la utilizaron para plantear soluciones a diversos problemas, como es el caso de la duplicación del cuadrado que propone Platón en el Menón; pues ante la dificultad que se tenía al no haber una relación entre número y magnitud, para resolver este problema se acude a la geometría.

- La geometría además de considerase un pilar fundamental en el desarrollo de las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas, es una parte esencial para la construcción y consolidación de otros objetos matemáticos como es el caso del número real. Por lo anterior, se consideró importante elegir actividades como el método de exhaución, la aproximación a $\sqrt{2}$ y su representación en la recta numérica entre otros casos, en los que se utilice la geometría.

Referente al tercer objetivo:

Analizar los elementos teóricos relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor, Bachmann y Weiss para la elección e implementación de una propuesta de aula.

- El estudio de las construcciones de los números reales propuestas por Cantor, Bachmann y Weiss permiten acercarse al concepto de número real desde una perspectiva intervalar, y se identifica la concepción de número real como el límite de sucesiones de intervalos encajonados de números racionales, de la misma manera, que lo ha trabajado Cantor a través de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, así mismo permiten un acercamiento a la propiedad de la densidad de los números reales como planteó inicialmente en este trabajo.

Además estas construcciones, permiten inferir, que los elementos teóricos más relevantes para ser considerados en una propuesta de aula que pretenda movilizar una perspectiva intervalar son: el número real como un límite y otros conceptos asociadas como la convergencia, la continuidad, sucesión y el intervalo.

Referente al cuarto objetivo:

Articular los elementos conceptuales más relevantes de las revisiones históricas y teóricas, que permitan hacer una aproximación al estudio de la densidad de los números reales en el marco de la teoría intervalar, a través de la elección de actividades que componen las partes de una propuesta de aula dirigida a estudiantes de grado once de Educación Media.

- Luego de implementar las actividades propuestas a partir de los elementos teóricos más relevantes en las construcciones hechas por Cantor, Bachmann y Weiss de los números reales y su propiedad de densidad mediante una propuesta intervalar; se puede concluir que las estrategias empleadas para introducir la noción de densidad de los números reales lograron que ellos se apropiaran de intuiciones que no están alejadas de las construcciones formales; no obstante, se identificaron algunas ventajas y limitaciones que se mencionan a continuación:

Algunas Ventajas y Limitaciones de la Representación intervalar en el acercamiento a la propiedad de densidad de los números Reales.

Ventajas

- Los elementos fundamentales de la teoría intervalar en términos de problemas y estrategias de solución, para la representación de los números reales, permitió hacer la introducción de la propiedad de la densidad de este conjunto de manera que los estudiantes comprendieron la noción de límite. Pues identificaron que un número real no necesariamente es la representación de un punto en la recta; si no que es aquel que está comprendido entre dos números racionales; o lo que formalmente se interpreta como: si $b \in \mathbb{R}$ y $a, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a \leq b \leq c$. Este acercamiento es crucial, porque al interpretar al número real como ese número que es menor que un conjunto de números racionales y mayor que otro conjunto de números racionales, en el trasfondo lo que quiere decir es que el estudiante comprendió la noción de límite o en su defecto el número real como un límite.

- Existen otros campos en los cuales la teoría intervalar es aplicada, a través de la necesidad de realizar cálculos sin errores de aproximación o redondeo, vista e incorporada también por algunos matemáticos para realizar sus construcciones y resolver problemas que para décadas atrás estaban ligados a pensamientos pitagóricos de que todo era medible. Ahora bien, en relación con la propiedad de la densidad ésta teoría beneficia su acercamiento en los estudiantes, puesto que, en el momento de hallar los valores más próximos, a la derecha y a la izquierda de un número, se observa que, resultan infinitos números a ambos extremos, es decir, a medida en que se va hallando un buen rango de estimación del intervalo se van identificando infinitos números que comprenden el inicial.

- La teoría intervalar que tuvo sus orígenes con el método de exhaución expuesto por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes, se convierte en una alternativa para expresar números racionales e irracionales con naturaleza infinita; mediante intervalos cerrados de racionales y que se acerquen de forma intuitiva y conceptual al número real y sus propiedades como lo es la densidad.

- La representación intervalar conduce a la comprensión de otros conceptos matemáticos, a la hora de presentarles a los estudiantes los números reales como intervalos encajonados, se conduce a que ellos se acerquen al infinito actual y potencial que hay en algunos objetos matemáticos, es decir, en el momento en el que el estudiante trata de encajonar un número de naturaleza infinita periódica o infinita no periódica, estará haciendo uso del infinito actual que hay dentro del conjunto de ese intervalo, ahora bien, cuando intenta hallar un buen rango de estimación restando los extremos del intervalo se dan cuenta que cuando tratan de encajonar al número, la resta de sus extremos cada vez da una cantidad infinitamente pequeña, que tiende a ser cero.

- La representación de los números reales a través de la representación intervalar, permitió que los estudiantes trabajaran con la idea implícita de orden, puesto que; cuando necesitaban construir un intervalo para representar un número necesitaban considerar los números menores y mayores al inicial

- A través de algunas actividades realizadas en el software de Geogebra permitieron que los estudiantes comprendieran la propiedad de densidad en los números irracionales, por ejemplo, la representación de $\sqrt{2}$ y sus múltiplos en la recta numérica, puesto que, mediante su construcción, ellos identificaron que este proceso era infinito.

Limitaciones

- Como se ha mencionado, no se implementaron las actividades que proponen operaciones con intervalos; sin embargo, se considera importante mencionar que una de las posibles dificultades que se pueden presentar el momento de representar los números reales mediante intervalos encajados, es que para cálculos complejos se necesitan del uso de programas especializados como INTLAB o MATLAB, es decir, los estudiantes solo podrán realizar cálculos sencillos.

- Las actividades elegidas no condujeron a que los estudiantes lograran definir los números reales como un límite se sucesiones de intervalos encajados, sin embargo, fue posible que se acercaran a la comprensión intuitiva de una de las propiedades fundamentales, como lo es la densidad.

- Los estudiantes mediante el software de Geogebra reconocieron la propiedad de densidad de los números reales, lo que permitió que ellos lograran representar un número mediante intervalos de números racionales muy próximos a él. Sin embargo, en el momento en el que se les presento la recta numérica a lápiz y papel, se observó que tuvieron dificultades para hallar números muy próximos de otro, puesto que, con el software de Geogebra los visualizaban mientras que a lápiz y papel les costó imaginarlos.

Referencias Bibliográficas

Anacona, Maribel (2003). La historia de las matemáticas en la Educación de las Matemáticas. *Revista EMA*, 8(1). Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf

Artigue, M. (1995) El lugar de la didáctica en la formación de profesores. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 7-23). Bogotá: una empresa docente. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Artigue, M; Douandy, R; y Moreno, L.; (1995), ingeniería didáctica en educación matemática. Ed. Pedro Gómez. D. R. © 1995 una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Bárcenas, D. y Porras, O. (2002) Cálculo del número π mediante funciones Trigonométricas. *Divulgaciones Matemáticas. 10* (2). 149-159. Recuperación de: https://www.emis.de/journals/DM/vX2/art4.pdf

Broitman, Claudia, Horacio Itzcovich y María Emilia, Quaranta (2003), "La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 6, núm. 1, pp. 5-26.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas. (D Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Calderón, N. (2014). *Diferentes construcciones del número real*. Trabajo de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Collette.J.P, Historia de la matemática Ed Siglo XXI. Vol. 1, página 78. España (1993).

Chevallard, Y (1998), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Claudia Gilman (trad.), ed" Argentina, Aique (Psicología cognitiva y educación), pp. 45-66. Recuperado de https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. México. ALME. No. 41.pp. 21-30. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/.

Damisa, C. y Ponzetti, S. (2015). Los objetos matemáticos y sus representaciones: ¿lo que ves es lo que es? En V congreso Uruguayo de educación matemática. *Actas del CUREM 5.* Disponible en: https://semur.edu.uy/curem5/actas/pdf/69.pdf

D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Núcleo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas 27,* 51-76. Disponible en: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/402%20contribucion%20al%20debate%20sobre%20conceptos%20y%20objetos.pdf

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (Vega, M. Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Ferreirós, P. (2007). Kurt Gödel: Revolución en los fundamentos de las matemáticas. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura*. *183* (725). 409-418.

García, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. Trabajo de maestría. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

García, A & Delgado, A. (1991). *Euclides: Los elementos. Teoría de las Paralelas Método de Exhaución*. Historia de Geometría Griega. Recuperado de http://fundacionorotava.org/

García, G.; Serrano, C. y Díaz, H. (1999), ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real? *Revista de la faculta de ciencia y tecnología de la universidad pedagógica nacional,* ***5***-17.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8, WG 16). Turkey, 2013. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf

Godino et al, (2014), ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemática. Recuperado de: http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/70/34

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la Crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de Exhaución. *SIGMA*.No.33. pp. 101-129.

Guacaneme. E.A, Teoría euclidiana de la proporción de los números reales un asunto útil para el profesor? Tecné, Episteme y Didaxix No 31.(2012)

Hernández, F. (2003). *Teoría de Conjuntos*. Segunda edición. Sociedad Matemática Mexicana.

Hernández, R.; Fernández C. y Baptista L. (2003): *Metodología de la Investigación.* México Ed. Mc Graw Hill. Recuperado de: http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf

Hiebert, J., & Carpenter, TP (1992). Aprender y enseñar con comprensión. En DA Grouws (Ed.), *Manual de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un proyecto del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas* (pp. 65-97). Nueva York, Nueva York, Inglaterra: Macmillan Publishing Co, Inc.

Jiménez, C. (2012). *El análisis de intervalos. Aplicaciones en la ingeniería. Universidad Pontifica de Comillas de Madrid.*

López, C. (2007). La intuición y la matemática Universidad de Palermo, pp. 29-36.

Martínez, E. (2014) Propuesta didáctica para abordar el concepto de número real con estudiantes de undécimo grado. Trabajo de maestría. Bogotá, Colombia Universidad Nacional de Colombia Facultad De Ciencias

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas. Recuperado de: http://www.mineducación.gov.co

Ministerio de Educación Nacional. (2006).Estándares básicos de competencias. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co

MEN, Ministerio de Educación Nacional, República de Colombia (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Matriz de referencia Matematicas. Bogotá. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles352712_matriz_l.pdf.

Montesinos, J. (1991). El Continuo y el Infinito en la Matemática Griega. Historia de la Geometría Griega. Recuperado de http://fundacionorotava.org/media/web/files/page83__cap05_web.pdf

Moore, R., Kearfott, B. & Cloud, M (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.

Newman. J, El mundo de las matemáticas Vol. 1 Grigalbo. Barcelona 25-27 (1985)

Patiño, V. (2013).Construcción de los números reales: Completación de la estructura topológica. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Puerto, Y. E. (2011). Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo. Tesis de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Revista SUMA. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Pp. 17-28.

Recalde, L. (2011). Medida, número y magnitud en la antigüedad griega. En Recalde, L. & Arbeláez, G. (Ed.), *Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica*. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Granada, España: Universidad de Granada.

Toledo, S. (1991). *La Geometría Pitagórica.* Historia de la Geometría Griega. Recuperado de http://fundacionorotava.org/media/uploads/files/83/cap04_web.pdf

Bibliografía

Arbeláez, G. & Gálvez, F. (2011). El Conjunto de los Números Reales como Objeto Matemático: La Construcción de Dedekind. En Recalde, L. & Arbeláez, G. (Ed.), *Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica.* (pp. 135-162). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Arboleda, L. (2011). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática. En Recalde, L. & Arbeláez, G. (compl.), *Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica*. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

RICO, L. (1996), Pensamiento numérico, México. Publicado en libro: Investigaciones en matemática educativa, grupo editorial Iberoamericana.

ROMERO I. y RICO L. (1999), Representación y comprensión del concepto de número real, Publicado en Rev. EMA. Investigación e innovación en educación matemática, Vol. 4 núm

ANEXOS

3.4.3. Actividades de la propuesta de aula.

3.4.3.1 Parte I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.

Propósito: lograr que los estudiantes mediante diferentes estimaciones identifiquen errores de aproximación y redondeo que pueden presentarse en los cálculos comunes.

Duración: dos sesiones de dos horas.

Materiales: calculadora, lápiz, papel, borrador, lapicero, copias de las actividades y hojas en blanco para desarrollar las actividades.

Nota: en las hojas requeridas para los cálculos, debes consignar todos los procedimientos y argumentos necesarios para justificar tus respuestas. Para hacer los cálculos pueden usar la calculadora científica.

Actividad 1. Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables

Se organiza a los estudiantes por parejas, a cada una se le pide hacer los cálculos para tres casos presentados a continuación, con la diferencia, que a cada grupo de parejas se le pide hacer aproximaciones diferentes a los resultados. Al grupo número uno se le sugiere aproximar a la décima, al grupo dos a la centésima, al grupo número tres a la milésima y al grupo cuatro a la diezmilésima.

Nota: Consigna en la parte superior el grupo que te corresponde.

1. Se necesita hacer un pasamano de madera, para una escalera, siguiendo el modelo que muestra la gráfica. ¿Cuál debe ser la longitud del largo del pasamano?

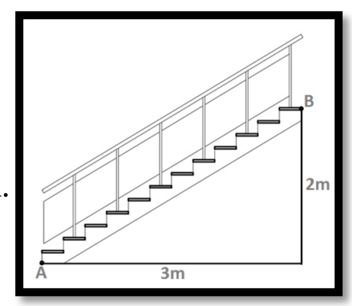


Figura 70. Pasamanos.

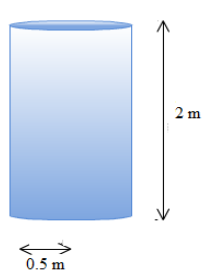


Figura 71. Tanque cilíndrico.

2. Calcula la capacidad de almacenamiento de agua en un tanque de forma cilíndrica, donde el radio de la base mide 0,5 m y la altura 2m. Recuerda que la fórmula para calcular el volumen del cilindro es: $v = \pi r^2 h$

Actividad 2. Reflexionemos sobre las aproximaciones en contexto.

Finalizados estos cálculos vamos a socializar y comparar los resultados de la siguiente manera:

1. Socializar los resultados en el tablero, para cada caso y para cada grupo.
2. Comparar los resultados y determinar: si son iguales, diferentes, correctos y justificar el porqué de sus repuestas.
3. Cada grupo se reúne y responde las siguientes preguntas, con respecto a:

a) **La distancia del pasamano**.

- Si Juan es el encargado de hacer el pasamano, ¿cuál de las cuatro medidas calculadas en el tablero, le recomiendas para que haga sus estimaciones y diseñe el pasamano? Justifica tu respuesta.
- En otro caso, si Juan necesita fabricar doscientos pasamanos ¿Cuál le recomendarías y por qué?

b) **La capacidad de almacenamiento de agua en el tanque cilíndrico**.

¿Cuál crees que es la capacidad de almacenamiento del tanque? Elige una de las siguientes opciones (marca con una x) y Justifica:

- Una de las expuestas en el tablero ____ ¿Cuál?____

Justifica____

- Ninguna de las expuestas en el tablero. ____Otra__________

¿Cuál?_________

Justifica____

Todas las posibilidades son correctas.___

Justifica____

- Otra

respuesta____

____

Socializar las respuestas por grupo.

¿Será posible hacer una representación decimal de los valores que encontraste en los cálculos anteriores, de manera que no se trunque su expresión decimal? Justifica.

Actividad 3. Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado.

En los ejercicios propuestos en la actividad 1, se ha recurrido a la aproximación por la naturaleza de las cantidades que resultan de esos cálculos. Este es el proceso que usualmente hacemos en estos casos, sin embargo, veamos ¿qué sucede cuando operamos con cantidades que se han truncado o aproximado ya sea a la décima o a la centésima?

1. Aproxima los siguientes números a la centésima:
   a. $\frac{1}{3} \approx$
   b. $\pi \approx$
2. Con los resultados aproximados realiza las siguientes operaciones:

Tabla 15. *Compara los cálculos con y sin el uso de la calculadora.*

a. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica directamente sin aproximar	**b. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica con los resultados aproximados en el ejercicio 1**
$\frac{1}{3} x \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{3} x \frac{1}{3} \approx (0{,}33) x (0{,}33) =$
$\frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3} x \frac{1}{3}$ $\approx (0{,}33) x (0{,}33)(0{,}33) x (0{,}33) =$
$\pi + \pi =$	$\pi + \pi \approx (3{,}14) + (3{,}14) =$
$\pi x \pi =$	$\pi x \pi \approx (3{,}14) x (3{,}14) =$
$\frac{1}{3} x\, \pi =$	$\frac{1}{3} x\, \pi \approx (0{,}33) x (3{,}14) =$

3. De acuerdo a los cálculos realizados en el cuadro anterior responde las siguientes preguntas:

a. Compara y establece las diferencias y similitudes entre los resultados de la columna A y la columna B.

b. Qué sucede cuando aproximamos una cantidad numérica y operamos con ella.

3.4.3.2 Parte II: La aproximación a números racionales mediante encajonamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Propósito: una vez que se ha reflexionado sobre los errores de aproximación, es importante iniciar con los estudiantes (mediante un acercamiento intuitivo a la densidad de los racionales) una de las alternativas de aproximación para representar los números racionales, que le permita al estudiante encajonar un número racional a partir de otros racionales dados progresivamente, de modo que la diferencia entre ellos sea cada vez más pequeña y se pueda evidenciar cada vez una mejor aproximación. Este proceso intenta hacer un paralelo desde lo intuitivo de la proximidad a la construcción de nociones de límite y convergencia.

Duración: una sesión de dos horas.

Lee con atención: un número racional se define por la relación de equivalencia $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, donde $a\,, b\ \in Z$. Entre dos racionales siempre vamos a encontrar otro número racional. Sin embargo, números como $\frac{1}{6}$, presentan cierta particularidad en su expresión decimal, veamos cómo hacer una posible representación de este sin caer en errores de aproximación y representación.

Por ejemplo, Sabemos que $\frac{3}{2} = 1.5$. Para obtener esta expresión de derecha a izquierda, basta con hacer la operación $3 \div 2\ = 1.5$ y de izquierda a derecha se representa la expresión decimal como una fracción así: $1.5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Otro ejemplo, sería 0,32851 es racional $0{,}32851 = \frac{32851}{100000}$. Si preguntas cuál es la mejor o la correcta, te pueden responder que tanto la fracción $\frac{3}{2}$, como la expresión decimal 1.5, lo son.

Actividad 1. Ahora, volvamos con $\frac{1}{6}$ y su expresión decimal. Divide 1 entre 6 para obtenerla.

1. ¿El proceso de dividir es finito?
2. ¿Es posible expresar $\frac{1}{6}$ con un número limitado de cifras decimales en tu cuaderno?
3. ¿Qué particularidad tienen esas cifras decimales?
4. Divide 1 entre 6 en la calculadora. ¿Crees que el valor que aparece en la calculadora es el correcto?
5. ¿Será posible hacer una representación decimal de $\frac{1}{6}$ de manera que no se trunque su resultado?

Veamos una forma de aproximarnos a $\frac{1}{6}$ usando el software Geogebra. Ve al computador y abre el programa, Selecciona la herramienta aproximar:

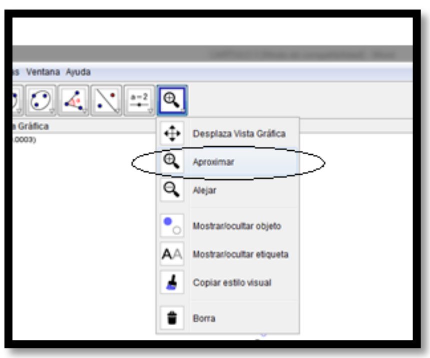


Figura 72. Lupa en Geogebra.

6. Has click izquierdo sobre la recta en varias ocasiones hasta aproximarnos a 1/6, primero a la décima 0,1, luego la centésima 0,16 y por último a la milésima 0,166. Cada vez que hagas estas aproximaciones, describe según lo que observas cuál es la décima, centésima, milésima (según sea el caso 0,1 ó 0,16 ó 0,166) más próxima por la izquierda y la más próxima por la derecha. Consigna tus resultados en la siguiente tabla:

Tabla 16. *Encajonamiento de racionales.*

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**Centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\frac{1}{6}$	$0.0 < \frac{1}{6} < 0.2$			

a. De acuerdo con los valores más cercanos que has encontrado para $\frac{1}{6}$, ¿es posible encontrar otros más cercanos? Justifica.

b. ¿Es posible determinar cuántos números racionales hay alrededor de $\frac{1}{6}$?

Actividad 2.

1. **Practiquemos lo aprendido**, usa el mismo proceso que utilizaste para aproximarte 1/6 con otros números racionales. Puedes usar la recta numérica y debes consignar los valores aproximados en la siguiente tabla:

Tabla 17. *Encajonamiento de racionales*

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**Centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\frac{2}{3}$	$0.5 < \frac{2}{3} < 0.7$			
$\frac{35}{9}$				
$-\frac{27}{11}$				
$-\frac{1}{9}$				
Elije uno				

2. ¿Existen otros números racionales que se caracterizan por tener una expresión decimal como la de $\frac{1}{6}, \frac{35}{9}, -\frac{27}{11}, -\frac{1}{9}$? ¿Crees que es posible decir cuántos son? Justifica tus respuestas.

3. -1, 0, 100 y todos los números enteros son racionales, ¿crees que es posible aproximarnos a estos usando el proceso anterior? Inténtalo con algunos en la siguiente tabla. Puedes usar la recta numérica.

Tabla 18. *Encajonamiento de racionales.*

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha.**			
	Décima	**Centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
-1				
0				
100				

4. ¿Crees que es posible aproximarse a cualquier número racional usando este método?

5. ¿Cuántos número racionales crees que hay entre 0 y $\frac{1}{6}$? Justifica tu respuesta.

6. ¿Cuántos números racionales crees que hay entre -1 y 1? Justifica tu respuesta.

7. ¿Crees que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número racional? Justifica tu respuesta.

3.4.3.3 Parte III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de $\mathbb{Q}$ a partir del encajonamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Propósito: lograr que los estudiantes a partir de situaciones particulares y determinantes que dan cuenta de la aparición de los números racionales a través de la historia, logren comprender que, números como π y $\sqrt{2}$ son números que si bien no pueden representarse con un número limitado de cifras decimales en el papel o en una máquina, si es posible hacer una aproximación a estos mediante encajonamientos de números racionales, de modo que la diferencia entre los extremos de los intervalos cada vez sea tan pequeña como se quiera y tienda hacia un número en particular.

Duración: dos sesiones de dos horas.

Actividad 1. El caso de π.

Recordemos lo aprendido:

1. ¿Cuál es el procedimiento que normalmente utilizas para calcular el área de un círculo y la longitud de una circunferencia de radio *r*?
2. De acuerdo con estos procedimientos responde ¿Qué representa el número π?
3. ¿Qué diferencia hay entre π y números cómo $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{6}$ y -1?

Se deja un espacio para que se escriban las respuestas, se socializan tres respuestas y luego se hace la siguiente reflexión:

Lee con atención: sabemos que el área del círculo se "calcula" mediante la fórmula πr^2 y la longitud de la circunferencia con la fórmula $2\pi r$ y en algunas ocasiones, has aprendido que $\pi = 3.14$ o que se aproxima a ese valor. Pero, ¿sabemos de dónde aparece esta fórmula? O ¿Qué representa π? Se dice que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Hace muchos siglos 390 - 337 a. C, Eudoxo de Cnidos, preocupado por medir el perímetro y el área de un terreno circular , utiliza un método conocido como el método de exhaución, perfeccionado más adelante por Arquímedes y Euclides. Este método, riguroso y complejo, consiste en inscribir y circunscribir polígonos a una circunferencia, aumentando progresivamente los lados de los polígonos, de modo que el perímetro y el área de los polígonos inscritos y circunscritos, se aproximen al perímetro y el área de la circunferencia. Para comprenderlo mejor, vamos a escudriñar un poco en fragmentos de la historia de π.

Muchos matemáticos han intentado encontrar la forma de aproximarse cada vez más a π, pues es un decimal infinito no periódico. Desde hace muchos siglos, Arquímedes, Zu Chong Zhi, Francisco de Vieta, Wallis, Leibnitz, Euler entre otros. Según Bárcena y Porras (2002), hasta el momento con la ayuda de ordenadores hay una aproximación de más de seis mil cuatrocientos millones de dígitos decimales. En la actualidad, la determinación del número de dígitos en la aproximación de π mide la capacidad de computo de los nuevos ordenadores.

Sin embargo, dada la complejidad de lo propuesto por estos matemáticos, adoptaremos un método que proponen Bárcena y Porras (2002), que sin ser tan sofisticado como los de los otros autores mencionados, nos va a permitir aproximarnos a π. Podemos, primero hacerlo manualmente y luego con la ayuda del programa Geogebra para ilustrarlo mejor.

Este método, parte de la idea de Arquímedes de inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia. En este orden, el perímetro de los polígonos inscritos (p_n) es menor que el de la circunferencia, y el perímetro de los circunscritos (P_n) es mayor que este, así:

$$\boldsymbol{p_n < C < P_n}$$

Gráficamente algunas aproximaciones serían:

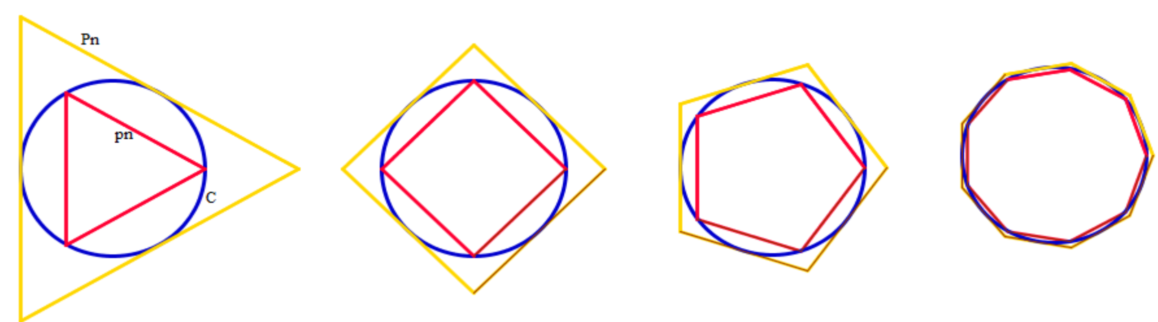


Figura 73. Método de exhaución

Los polígonos circunscritos son de color amarillo, los circunscritos de color rojo y circunferencia es de color azul.

4. A medida que aumentan el número de los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, ¿qué observas?

Ahora, para calcular la longitud de la circunferencia tenemos que $C = 2\pi r$, el perímetro de los polígonos inscritos p_n se calcula mediante la fórmula $2n\sin\left(\frac{180^o}{n}\right)$ y el de los circunscritos P_n mediante la fórmula $2n\tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$. Entonces reemplazamos en $\boldsymbol{p_n < C < P_n}$ y obtenemos lo siguiente:

$$2n\sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < 2\pi r < 2n\tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

Si tomamos la circunferencia de radio uno (r =1) tenemos:

$$n\sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < \pi < n\tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

5. Ahora considerando a la circunferencia de radio 1 y dado que *n* es el número de lados del polígono, vamos a hacer varias aproximaciones a π, variando el número de lados desde el polígono más pequeño de $n = 3$, hasta otros con mayor número de lados. Puedes usar la calculadora para hacer estas aproximaciones, es decir toma los nueve decimales que arroja la calculadora y luego consigna los resultados en la siguiente tabla (al final de esta encontrarás un $n =$?, esto significa que puedes asignar el número de lados que elijas):

Tabla 19. *Método de exhaución.*

Número de lados	**Perímetro de polígonos inscritos:** $\boldsymbol{n\sin\left(\frac{180^o}{n}\right)}$	**Perímetro de polígonos circunscritos:** $\boldsymbol{n\tan\left(\frac{180^o}{n}\right)}$	**Escribe los valores en que $\boldsymbol{\pi}$ está comprendido** $p_n < \pi < P_n$	**Resta el valor mayor del menor.** $P_n - p_n$
$n = 3$	$\boldsymbol{3\sin\left(\frac{180^o}{3}\right)}$ $=$	$\boldsymbol{3\tan\left(\frac{180^o}{3}\right)}$ $=$	$< \pi <$	

$n = 4$				
$n = 5$				
$n = 6$				
$n = 10$				
$n = 100$				
$n = 1000$				
$n = 10\,000$				
$n = 100\,000$				
$n = 1000\,000$				
$n =$				

6. Ahora compara los resultados de la tabla con los valores que te muestra la calculadora científica de tu ordenador. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras?
7. Con respecto a la aproximación de la calculadora científica de tu ordenador ($\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950$) y los resultados que vas obteniendo a medida que el número de lados aumentan de los polígonos inscritos y circunscritos. ¿Qué observas? (Compara las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas…)
8. A medida que haces las restas de los colores que representan a π, en el proceso de inscripción y circunscripción de polígonos, ¿Qué notas en los resultados? ¿Crees que en algún momento el resultado llegará a ser cero?
9. ¿Es posible hacer una mejor aproximación a π? Si tu respuesta es sí, explica ¿cómo es posible hacerlo?

Vamos a observar este proceso de manera gráfica en Geogebra.

En tu ordenador encontrarás en el escritorio un archivo llamado Método_de_exahusión, ábrelo. Arrastra el punto *n* tanto como desees y observa la construcción.

10. ¿Qué observas al hacer el arrastre?, con respecto:
    a. Al número de lados de los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia.

b. La variación en los valores para los que π está comprendido a medida que el número de lados aumenta.

11. Arrastra el deslizador, hasta notar que se superponen los polígonos inscritos y circunscritos sobre la circunferencia (se observa en la imagen que coinciden, los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia). Luego puedes darle Zoom a la pantalla, ¿Qué observas con respecto a los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia? ¿Crees que es posible, que en algún momento los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia coincidan?

12. ¿El valor que nos arroja la calculadora científica, es el valor de π? Justifica tu respuesta.

13. ¿De acuerdo al comportamiento de la cola infinita de decimales que vas descubriendo de π, crees que es posible representar a π de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in Z$ y $b \neq 0$? Justifica

14. De acuerdo a la respuesta de la pregunta anterior ¿π es un número racional? Justifica tu respuesta.

15. ¿Crees que el método de exhaución es un proceso válido para representar a π sin truncar su resultado? Justifica tu respuesta.

Actividad 2. El caso de $\sqrt{2}$

Vamos a calcular la distancia de del punto A al punto B de la siguiente figura:

1. ¿Cuál es la distancia de A hasta B?
2. ¿Lo puedes escribir con un número limitado de cifras decimales?
3. ¿Qué particularidad tienen las cifras decimales de la distancia de del punto A al punto B? ¿Son de la misma naturaleza por ejemplo que las de $\frac{1}{6}$?

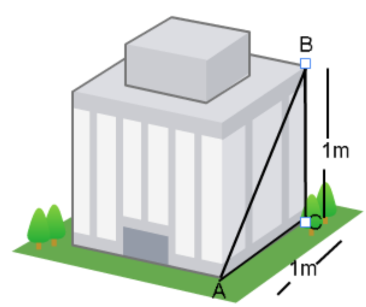


Figura 74. Figura cúbica.

4. ¿$\sqrt{2}$ es un número racional?

Has pensado, ¿cómo hacer sin la calculadora para describir la parte decimal de este resultado? Pues bien, una alternativa es el método de Herón Aznar, es posible hacer una aproximación a la raíz cuadrada de un número $n \in \mathbb{Q}^{+}$, $\sqrt{n}$ mediante el siguiente algoritmo:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$$

Por ejemplo, para calcular las primeras cinco cifras decimales del número $\sqrt{2}$, vamos a proceder como sigue:

Para $X_0 = 1$ y sabemos que $n = 2$ tenemos:

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

Utilizamos el resultado del primer cálculo para el siguiente y así sucesivamente:

Para $X_1 = \frac{3}{2}$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666 \ldots$$

Para $X_2 = \frac{17}{12}$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} = 1.414215 \ldots$$

Luego, con una aproximación de cinco decimales exactos 41421, podemos observar parte del comportamiento de la cola infinita de la expresión decimal de $\sqrt{2}$, pero si continuamos el proceso (que se torna un poco más complicado sin el uso de la calculadora) tenemos:

Para $X_3 = \frac{577}{408}$

$$X_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = 1{,}41421356237468991062629557889 01 \ldots.$$

5. ¿Crees que los valores que nos muestra la calculadora, representan el valor real de $\sqrt{2}$ o son una aproximación? Justifica

6. Ahora, vamos a intentar aproximarnos a $\sqrt{2}$ usando el método de encajonamiento que hemos venido utilizando en las anteriores actividades sin truncar el resultado. Para ello, se emplea la siguiente estrategia:

a) En tu ordenador en Geogebra, representas las coordenadas A= (0,0), B = (1,0), C= (1,1) en el plano cartesiano. Como se observa en la siguiente imagen.

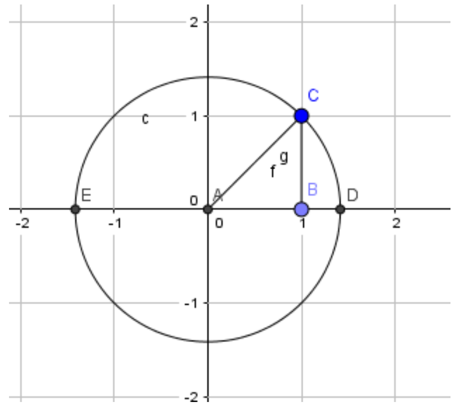


Figura 75. Plano cartesiano.

b) Une los puntos con segmentos en el orden ABCA, de modo que se forma el triángulo rectángulo ABC. (observa que el triángulo rectángulo que has construido tiene las mismas dimensiones que el formado en la imagen que encabeza esta actividad)

c) Traza una circunferencia con centro en A hasta C.

d) La circunferencia se intersecta con el eje X en dos puntos, y los llamaremos D y E respectivamente.

e) Si comparas los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$ ¿Qué relaciones encuentras entre ellos?

f) Si sabemos que tanto la medida de $\overline{AB}$ como la de $\overline{BC}$ es igual a 1, entonces ¿Cuáles son las medidas de $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$?

g) Ahora, en el proceso que has hecho has representado a $-\sqrt{2}\ y\ \sqrt{2}$ en la el eje X del plano cartesiano. Entonces, ahora te ubicas en el punto D y empiezas a aproximarte a $\sqrt{2}$ con la lupa de geogebra, de la misma manera como lo hiciste para aproximarte a $\frac{1}{6}$. Es decir vamos a "encajonar" a $\sqrt{2}$ mediante números racionales con decimales finitos. Luego has el mismo proceso para -$\sqrt{2}$ y vas consignando las aproximaciones que observas a medida que manipulas la lupa, en la siguiente tabla:

Tabla 20. *Encajonamiento de irracionales a partir de racionales.*

Número irracional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\sqrt{2}$	$1{,}3 < \sqrt{2} < 1{,}5$			
$-\sqrt{2}$				

h) Ahora, calcula las diferencias entre los extremos que encontraste en las décimas, las centésimas, las milésimas y las diezmilésimas. ¿Qué observas? ¿Crees que este resultado se aproxime a cero?

i) Con la ayuda del compás del software Geogebra representa sobre el eje X: $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$. Construye la circunferencia con radio $\overline{AD}$ y con centro D, con esto se forma F, luego con radio $\overline{FD}$ y con centro en F y así sucesivamente.

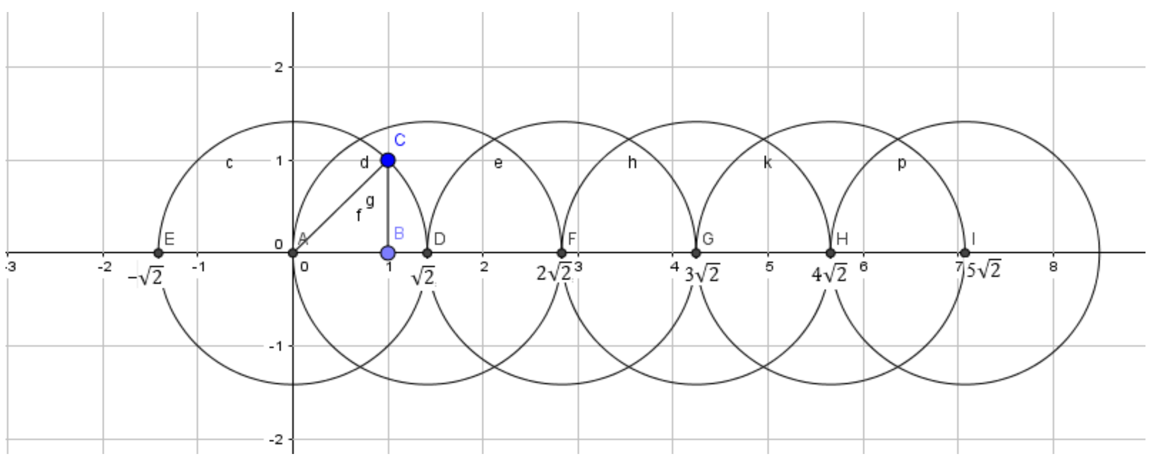


Figura 76. Representación gráfica múltiplos $\sqrt{2}$

j) Luego has lo mismo pero en diferente dirección y representa en la recta a: $-2\sqrt{2}$, -3$\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$ y -5$\sqrt{2}$

k) ¿Crees que es posible determinar cuántos múltiplos de $\sqrt{2}$ puedes representar en la recta siguiendo este proceso? Justifica.

l) Los múltiplos de $\sqrt{2}$ son números racionales o irracionales.

m) ¿Crees que existan más números irracionales entre 0 y $\sqrt{2}$ o entre 0 y $-\sqrt{2}$? Menciona algunos. ¿Puedes determinar cuántos números irracionales hay entre 0 y $\sqrt{2}$ o entre 0 y $-\sqrt{2}$? Justifica

n) En la actividad anterior habíamos concluido que lo números racionales son densos, porque siempre se cumple que dados dos números racionales a y b, puedo encontrar otro número racional entre ellos. ¿Crees que los números irracionales son densos? Justifica.

o) Inventa un número racional cualquiera y aproxímate tanto como desees a este, mediante el método de encajonamiento.

p) ¿Crees que es posible representar a cualquier número irracional mediante el encajonamiento de intervalos? Justifica tu repuesta.

3.4.3.4 Parte IV. Los intervalos cerrados y acotados.

Propósito: Hacer un acercamiento a la definición de intervalo, intervalo encajonados y dar a conocer algunas de sus aplicaciones en el campo de lo experimental.

Duración: Una sesión de dos horas.

Actividad 1. Acerquémonos a la definición de intervalos racionales y de racionales encajonado**s.**

Intervalo: Un intervalo cerrado es un conjunto de números, que se representa comúnmente como un par ordenado. Por ejemplo, un intervalo racional se denota de la siguiente manera:

$I = [a, c] = \{x \epsilon Q \mid a \leq x \leq c\}$, donde $a, c \in \mathbb{Q}$.

Racional encajonado: Un racional encajonado es una colección de intervalos racionales $I_n = [a_n, c_n]$ para $n \geq 1$ que satisfacen:

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$ y $c_n - a_n \to 0$.

Pese a que existen otros tipos de intervalos como el abierto y el semiabierto, para los propósitos de este trabajo se centrará la atención principalmente en los intervalos cerrados. Estos se denotan con letras mayúsculas, así dado el intervalo L, entonces $L = [\underline{L}, \overline{L}]$, donde $\underline{L} < \overline{L}$. Por ejemplo, sea $M = \sqrt{2}$, una representación intervalar de M sería $\sqrt{2}\, \epsilon [1.4, 1.5]$

y la longitud del intervalo se calcula restando los extremos del intervalo, así $1.5 - 1.4 = 0.1$. A medida que se va encajonando este número la diferencia de los extremos tiende a cero.

Intervalos degenerados. Estos son los intervalos de longitud cero, por ejemplo:

$$5 \in [5,5]$$

1. Representa mediante intervalos las siguientes magnitudes:

a) $\sqrt{3} =$

b) -5=

c) 0=

d) $\frac{5}{2} =$

e) $\frac{1}{9} =$

f) Una temperatura oscila durante el día en Cali Colombia entre 15 y 35 grados centígrados durante el día.

3.4.3.5 Parte V. Los números reales como conjuntos de intervalos

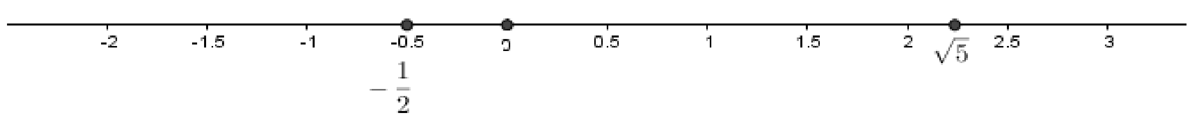
Propósito: Hacer un acercamiento a la construcción de los números reales como conjuntos de intervalos.

Duración: Dos sesiones de dos horas.

Actividad 1. Relacionemos los conceptos previos. De acuerdo con los procedimientos realizados en las actividades anteriores, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la diferencia entre un número racional y un número irracional?

2. Menciona algunos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda a $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, 1 y 0.



3. Menciona algunos números irracionales muy próximos por la derecha y por la izquierda a $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, 1 y 0.

4. ¿Puedes determinar cuántos racionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de un número racional? Justifica tu respuesta.

5. ¿Puedes determinar cuántos irracionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número racional? Justifica tu respuesta.

6. ¿Puedes determinar cuántos racionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número irracional? Justifica tu respuesta.

7. ¿Puedes determinar cuántos irracionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número irracional? Justifica tu respuesta.

8. En las actividades anteriores, concluimos que los números racionales no llena la recta numérica, ¿Sera posible que entre los números racionales y los números irracionales se llene la recta numérica? ¿Es decir a cada punto de la recta numérica le corresponde un racional o un irracional?

Actividad 2. Aproximándonos a la definición de los números reales como un conjunto de intervalos encajonado.

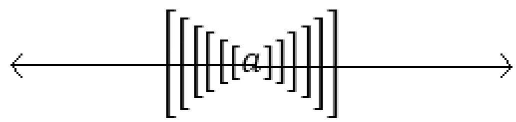
Lee con atención:

Como te has dado cuenta, en el desarrollo de cada una de las actividades, en la acción de medir no siempre encuentras resultados expresables como números racionales exactos, algunos son números racionales con una expresión decimal infinita periódica y en otros casos te has encontrado con números irracionales, es decir con números con una expresión decimal infinita no periódica.

Además has descubierto que existen infinitos racionales muy próximos a un racional o a un irracional y que por esa razón, siempre cada número racional o irracional estará comprendido entre dos números racionales. En otras palabras todo número racional o irracional pertenece al menos a un intervalo.

Ahora, para aquellos números cómo los racionales infinitos periódicos y los irracionales, si bien es cierto que no es posible saber cuántas cifras decimales tienen y mucho menos consíganlas en tu cuaderno, al menos sabes que están comprendidos entre dos racionales y que puedes aproximarte a ellos tanto como quieras por la izquierda y por la derecha.

También has descubierto que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número racional o un número irracional, y que cada punto está rodeado por infinitos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda.



De esta forma, al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales, se le denomina **conjunto de números reales (ℝ)**, que cumple con la condición ser el conjunto de intervalos encajonado.

1. Ya has reflexionado sobre la densidad de los números racionales y los números irracionales. ¿Serán los números reales un conjunto denso?

Actividad 3. Representación de un número real como intervalo encajonado.

¿Cómo se puede representar un número real mediante un encajonamiento de intervalos? Veamos unos ejemplos para intentar dar respuesta a esta pregunta.

$2 \in \left[2 - \frac{1}{n},\ 2 + \frac{1}{n}\right]$ Para todo $n \in N$, veamos lo que sucede en la siguiente tabla si le asignamos valores a n.

Tabla 21. *Encajonamiento de 2.*

$\boldsymbol{n \in N}$	$\left[\mathbf{2} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}, \quad \mathbf{2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right]$	**Intervalo**
$n = 1$	$\left[2 - \frac{1}{1}, \quad 2 + \frac{1}{1}\right] = [1, 3]$	$2 \in [1, 3]$
$n = 2$	$\left[2 - \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2}\right] = [1.5, 3.5]$	$2 \in [1.5, 2.5]$
$n = 3$	$\left[2 - \frac{1}{3}, \quad 2 + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$	$2 \in \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$

$n = 10$	$\left[2 - \frac{1}{10}, \quad 2 + \frac{1}{10}\right] = [1.9, 2.1]$	$2 \in [1.9, 2.1]$
$n = 100$	$\left[2 - \frac{1}{100}, \quad 2 + \frac{1}{100}\right] = [1.99, 2.01]$	$2 \in= [1.99, 2.01]$
$n = 1000$	$\left[2 - \frac{1}{1000}, \quad 2 + \frac{1}{1000}\right] = [1.999, 2.001]$	$2 \in [1.999, 2.001]$
$n = 10\,000$	$\left[2 - \frac{1}{10000}, \quad 2 + \frac{1}{10000}\right] = [1.9999, 2.0001]$	$2 \in [1.9999, 2.0001]$
$n = elije\ el\ valor$		

Como puedes observar cada vez que n es más grande, estos valores se aproximan a 2.

Haz el ejercicio de aproximación para el número de Euler que se representa como e, si sabemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\ para\ todo\ n \in N$ se aproxima a *e* para valores muy grandes de *n*; para ello, habremos de recurrir al proceso que conocemos, aproximarnos a *e* en un conjunto de intervalos encajonados Así:

$$e \in \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}\right]$$

Puedes calcular algunas aproximaciones utilizando los mismos valores de *n* del ejemplo 1.

Tabla 22. *Encajonamiento del número e.*

$\boldsymbol{n \in N}$	$\left[\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right]$	**Intervalo**
$n=1$		
$n=2$		
$n=3$		
$n=10$		
$n=100$		
$n=1000$		
$n=10\,000$		
$n = elije\ el\ valor$		

Retomando los ejemplos anteriores notamos que la aproximación hacia π fue mediante un encajonamiento de intervalos:

$$n \sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{180^o}{n}\right) \text{ Para todo } n \in N$$

1. Al igual que $-\sqrt{2}, \frac{1}{6}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ ... y todos los ejemplos que hemos construido. ¿Crees que sea posible representar cualquier número real mediante un encajonamiento de intervalos? Justifica tu respuesta.