



La función cuadrática: una propuesta para el trabajo en clase usando geogebra y el enfoque del aprendizaje basado en proyectos

Deivi Johan Molina Páez
Código: 1430848

Universidad del Valle
Instituto de Educación Y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Maestría En Educación con Énfasis en Educación Matemática
Santiago de Cali
2019



La función cuadrática: una propuesta para el trabajo en clase usando geogebra y el enfoque del aprendizaje basado en proyectos

Deivi Johan Molina Páez
Código: 1430848

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

Directora de trabajo de grado
María cristina valencia molina
Profesora del área de educación matemática

Universidad del Valle
Instituto de Educación Y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Maestría En Educación con Énfasis en Educación Matemática
Santiago de Cali
2019

DEDICATORIA

Dedicado especialmente a Dios porque me dio sabiduría y perseverancia y que me llevó a cumplir esta meta. A mi madre por ese apoyo incondicional en este proceso de lograr uno de mis sueños, por sus esfuerzos, cariño y apoyo.

AGRADECIMIENTO

A mi directora de trabajo de grado María Cristina Valencia Molina por su orientación, paciencia, apoyo, dedicación, confianza y por ayudarme a culminar este trabajo de grado, sabiendo los inconvenientes y desafíos que tenía la continuación de este trabajo, mil y mil gracias. A mi evaluador: el profesor Jorge Enrique Galeano C. por sus orientaciones, aportes e ideas.

A los estudiantes de grado noveno, padres de familia y directivas de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, Cali - Valle, por su apoyo, participación y creer en esta propuesta.

A todos mis profesores y compañeros que, con sus lecciones y conocimientos, contribuyeron a mi formación profesional. Gracias a todas aquellas personas que siempre estuvieron para brindarme toda su ayuda, a cada uno de ellos les dedico este trabajo de grado.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I.	4
I. Aspectos Generales de la Investigación.....	4
1.1 Presentación de la problemática.....	4
1.2 Objetivos.....	8
1.2.1 Objetivo General.....	8
1.2.2 Objetivos específicos	8
1.3 Justificación	9
1.4 Antecedentes de la Investigación.....	13
CAPÍTULO II.	26
II. MARCO REFERENCIAL Y CONCEPTUAL.....	26
2.1 Perspectiva Didáctica.....	26
2.1.1 Dificultades Del Concepto De Función Cuadrática	27
2.1.2 Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)	30
2.1.3 Orígenes del Aprendizaje Basado en Proyectos.....	31
2.1.4 Beneficios de Trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos.....	33
2.1.5 Reflexiones sobre las limitaciones o dificultades de trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos.....	35
2.1.6 Diferencias entre el Aprendizaje Basado en Problemas y el Aprendizaje Basado en Proyectos.....	36
2.1.7 Fases del ABP	37
2.1.8 Estrategias de Implementación	39
2.1.9 El Papel de la Modelación Matemática.....	40
2.2 Perspectiva Curricular.....	44
2.2.1 Lineamientos Curriculares	44
Propuesta del MEN para la Educación Matemática.....	45
2.2.2 Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	52
2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje.....	59
2.3 Perspectiva Matemática	61
2.3.1 Aspectos Formales De la Función	62
2.3.2 Concepto General Del La Función Cuadrática	69

CAPÍTULO III.....	76
III. Metodología de Implementación	76
3.1 Enfoque de la Investigación.....	76
3.2 Tipo de Estudio.....	77
3.2.1 Descripción de la institución	78
3.2.2 Principios y Fundamentos Institucionales.....	78
3.2.3 Descripción de los Estudiantes	79
3.3 Fases del Diseño	79
3.3.1 Fase 1: documentación de la problemática	79
3.3.2 Fase 2: diseño e implementación	80
3.3.3 Fase 3: análisis y conclusiones.....	81
3.4 Descripción de las Situaciones.....	81
3.4.1 Situación 1	82
3.4.2 Situación 2	84
CAPÍTULO IV.....	86
IV. Análisis y Resultados.....	86
4.1 Análisis de la Situación 1.....	87
4.2 Análisis de la Situación 2.....	105
CAPÍTULO V.....	113
V. CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS	113
5.1 Conclusiones Generales	113
5.2 Reflexiones Didácticas.....	116
BIBLIOGRAFÍA	118
ANEXOS	123
Anexo 1. Presentación del proyecto.....	123
Anexo 2. Presentación de las situaciones.....	132

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Cuadro comparativo entre el Aprendizaje basado en Problemas y el Basado en Proyecto. Fuente: elaboración propia.....	36
Tabla 2 Elementos x, y. Fuente: Azcárate (1996) Funciones y gráficas.....	65
Tabla 3 Matriz de análisis - actividad 1 (a, b, c y d).....	88
Tabla 4 Resultados de las Preguntas a), b), c) y d) en la actividad 1.....	88
Tabla 5 Matriz de análisis - actividad 1 (e, f y g).	90
Tabla 6 Resultados de las Preguntas e), f) y g) en la actividad 1	91
Tabla 7. Matriz de análisis - actividad 2 (a, b, c y d).....	95
Tabla 8 Resultados de las Preguntas a), b), c) y d). en la actividad 2.....	96
Tabla 9. Resultados de las Preguntas e) y f). en la actividad 2.....	98
Tabla 10 Matriz de análisis - actividad 2 (g, h, i y j).	99
Tabla 11 Resultados de las Preguntas g), h), i) y j). en la actividad 2.....	100
Tabla 12. Matriz de análisis - actividad 2 (k).	102
Tabla 13. Resultados de la Pregunta k). en la actividad 2.	103
Tabla 14. Matriz de análisis - actividad 1 (a, b, c y d).....	105
Tabla 15. Resultados de las Preguntas a), b), c) y d) en la actividad 1.....	105
Tabla 16. Matriz de análisis - actividad 2 (a, b y c).....	108
Tabla 17. Resultados de la Pregunta a) en la actividad 2.....	108
Tabla 18. Resultados de las Preguntas b) y c) en la actividad 2	110

ÍNDICE DE ILUSTRACIÓN

Ilustración 1 Estructuración de formulación del estándar. Fuente: (Men, 2006; 77)	47
Ilustración 2 Ejemplo de Resolución y el planteamiento de problemas. Fuente: (Men, 2006; 77)	49
Ilustración 3 Ejemplo de modelación matemática. Fuente: (Men, 2006; 77).	52
Ilustración 4. Cuadro de coherencia vertical y horizontal, con referencia al pensamiento variacional.....	58
Ilustración 5 Plano cartesiano. Fuente: https://www.matematica7.com/plano-cartesiano.html ..	66
Ilustración 6 Relación entre las perspectivas. Fuente: Propia.....	75
Ilustración 7 <i>Reconocen el concepto y su forma algebraica.</i>	89
Ilustración 8 No reconocen el concepto y no forma algebraica.....	90
Ilustración 9. Evidencia de la exploración en GeoGebra.....	92
Ilustración 10. Resultados de los estudiantes.....	93
Ilustración 11. Resultados de los estudiantes.....	93
Ilustración 12. Resultados de los estudiantes.....	94
Ilustración 13. Resultados de los estudiantes.....	97
Ilustración 14 <i>Matriz de análisis - actividad 2 (e y f).</i>	97
Ilustración 15. Resultados de los estudiantes.....	101
Ilustración 16. Resultados de los estudiantes.....	104
Ilustración 17. Resultados de los estudiantes.....	107
Ilustración 18. Resultados de los estudiantes.....	109
Ilustración 19. Resultados de los estudiantes.....	111

RESUMEN

En este trabajo de grado se abordó la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática con estudiantes de la Educación Básica colombiana, en relación a las formas tradicionales de abordar las matemáticas en la escuela como exposición del maestro, ejemplos y ejercicios para los estudiantes. Para afrontar esta problemática se realizó el diseño e implementación de un proyecto escolar, denominado “Haciendo útil los desechos orgánicos de mi restaurante escolar”, conformado por tres situaciones problema de las cuales se desprenden una serie de tareas que involucran la resolución de problemas, la investigación y la implementación del proyecto, en función del aprendizaje de la función cuadrática. Por otro lado, integrando otras áreas del conocimiento tales como biología, química, lenguaje, matemática financiera y el área de emprendimiento. Este proyecto tiene como propósito llevar al estudiante a un acercamiento a las nociones, conceptos y métodos de solución relacionados con la función cuadrática a partir de la elaboración y construcción de una compostera, por parte de estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali. El marco teórico de esta propuesta se aborda desde las perspectivas Matemática, Curricular y Didáctica y fundamenta el diseño del proyecto desde el Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P), su implementación y el análisis de resultados.

Palabras claves: Función cuadráticas, Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P), Compostera, Matemáticas financieras, Emprendimiento y Situaciones problema.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de grado se abordó la problemática referida al aprendizaje de la función cuadrática por parte de estudiantes de 9° grado de educación básica de la Institución Educativa La Esperanza, desde tres aspectos: desde el álgebra en general; desde la enseñanza tradicional, y, desde los procesos de modelación, centrándonos en los problemas que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y en particular de la función cuadrática. Además, se da una real importancia a la contextualización de este concepto en la escuela.

Se pretende dar una nueva alternativa como solución a la preocupación que actualmente tiene Colombia frente al desarrollo de nuevas propuestas curriculares y estrategias metodológicas, la cual permita a los estudiantes una mejor comprensión y fortalecimiento en el campo de las matemáticas.

Como solución a estos problemas anteriores, se han buscado modelos educativos y diseños curriculares para solucionar dicha preocupación; pero, en realidad no se han encontrado las verdaderas estrategias que permitan mejorar la calidad educativa, ni se han definido políticas curriculares claras para enfrentar la problemática en la educación matemática. Una de esas vías de solución, es la utilización del enfoque de Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P) como una metodología, cuyo centro es el estudiante mismo y las actividades que realiza para apropiarse del conocimiento. Este trabajo de grado se apoya en el A.B.P para que el estudiante de grado 9° de educación básica aprenda la función cuadrática, privilegiando para ello los procesos de modelación matemática.

El cuerpo se ha estructurado en cuatro capítulos. En el primero se hace una presentación de la problemática a solucionar: el aprendizaje de la función cuadrática por parte de estudiantes de 9° grado de educación básica; comprende además la formulación de los objetivos (general y específicos), la justificación de la investigación a desarrollar, los antecedentes y por último la metodología a utilizar. En el segundo capítulo, se desarrolla el marco referencial conceptual, en el cual se analizan los aspectos sobre la perspectiva didáctica, curricular y matemática. En el tercer capítulo se presenta el diseño del proyecto y análisis de resultados correspondientes a su proceso de implementación, a partir de los cuales se identifican algunas dificultades y errores de los estudiantes al realizar las actividades propuestas en este proyecto escolar, así como también los avances que logran al desarrollar actividades desde la situación de la compostera escolar.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones finales correspondientes a la realización de este trabajo de grado, además de algunas reflexiones didácticas que surgen en el proceso de diseño e implementación de este proyecto escolar.

CAPÍTULO I.

I. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se describen los elementos generales que resultan importantes para plantear el problema de indagación de este trabajo, posteriormente se presentan la justificación, los objetivos del trabajo y los antecedentes que están relacionados con la problemática planteada.

1.1 PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Actualmente, en el contexto educativo existe una preocupación por los problemas particulares en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; más específicamente, por las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, las cuales se presentan desde la misma naturaleza del álgebra, la transición del pensamiento numérico al algebraico, el lenguaje y las reglas que la rigen. Preocupan además los métodos de enseñanza tradicionales cuando se trata la enseñanza de esta rama de las matemáticas. Algunas de estas dificultades se centran en la comprensión del lenguaje algebraico, tales como lo mencionan diferentes autores: Lins (citado por Kieran, 1989); Kieran & Filloy (1989); MacGregor & Stacey (2000); Pizón & Gallardo (2000); los cuales señalan los siguientes obstáculos: la generalización equivocada de procedimientos aritméticos, la resistencia a emplear ecuaciones, las dificultades en el empleo de los signos y expresiones, la falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas, equivocaciones en la interpretación de las variables, el desconocimiento del significado de la igualdad, la omisión parcial de la incógnita, la diferenciación de la incógnita y de su coeficiente, etc.

Sin embargo, algunos investigadores han tenido como propósito centrarse en los procesos propios de las matemáticas la resolución de problemas y la modelación matemática, lo cual conlleva a la enseñanza más significativa de las matemáticas, situadas en el contexto cotidiano.

Estas dificultades generales de las matemáticas, se concretan de modo particular, cuando se enseña y aprende la Función Cuadrática en la educación básica en Colombia. Hay, pues, problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la Función Cuadrática, especialmente en 9° grado de educación básica.

Si bien la Función Cuadrática, como todos los demás conceptos matemáticos, son objetos matemáticos, pareciera no conseguirse elementos de la realidad cotidiana donde concretarlos o donde pudieran tener un uso práctico. Es decir, la Función Cuadrática no es contextualizada cuando se enseña en la escuela colombiana.

Los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la Función Cuadrática para Kieran (1989), están asociados a las dificultades y fallas que se encuentran cuando se enseña y se aprende la función; en este sentido, algunos de los problemas en torno al concepto de función se deben al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran los símbolos, las expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas y, a su vez, la dependencia entre variables. Hay también una serie de conceptos ligados al concepto de función que no parecen estar presentes en el desarrollo de las prácticas del docente en el aula de clase, como son variable, dependencia, transformación, sucesión o isomorfismo; sin la comprensión de esos conceptos al estudiante se le dificulta el dominio y el manejo práctico de función.

Algunas de las dificultades centradas en el concepto de función son: la definición con que se parte el concepto de función lleva a constantes contradicciones; según, Shuard & Neil (1977) la idea de dependencia funcional ha sido completamente desechada de la definición de función actual. La noción de dependencia ya no existe y, por esta razón, las investigaciones que se presentan son aquellas que hacen énfasis en el aspecto estructural más que en el procedimental del concepto de función. Así mismo, se presentan limitaciones al no poder relacionar el concepto de función con las soluciones de ecuaciones representadas gráficamente. La enseñanza de las funciones incluye representaciones que denotan varios niveles procedimentales y estructurales, sin embargo, como lo demuestran los estudios anteriores, los estudiantes tienden a eludir las definiciones y representaciones más formales y a interpretar las funciones como procedimientos para obtener una magnitud por medio de otra.

Otra limitación que se da es que la escuela olvida, según Azcárate (1996) que el concepto de función se puede observar a partir de diferentes sistemas de representación, y cada una de estas se acerca a su definición permitiendo poner en relieve sus características e interpretaciones; estas son: el modelo físico o simulación, la descripción verbal, las tablas de valores, la gráfica y la fórmula o ecuación, siendo estas dos últimas los dos lenguajes de mayor abstracción y, por tanto, los más difíciles de interpretar, pues permiten tener una visión más completa de la función.

Por otra parte, Kieran (1989) considera que se presenta como un problema el hecho de que los estudiantes usan de una manera rutinaria la generación de tablas que satisface una ecuación algebraica de dos variables, la representación de puntos en un plano cartesiano adecuadamente escalado y que interpreten las coordenadas de los puntos de una gráfica, algunas veces con la intención de resolver un sistema de ecuaciones, hace que los estudiantes pierdan la visión del

significado de los ejercicios, se apoyan únicamente en gráficas que son lineales y sean incapaces de interpretar gráficas en términos de situaciones reales. Así pues, la mayoría de estos procedimientos, se reducen a la aplicación de tan solo dos procedimientos resultando en un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo.

Por otro lado, como se menciona en el texto de Kieran (1989), los principales obstáculos en el desarrollo del concepto de función y sus procesos se encuentran en el rechazo del dominio y el rango, los conceptos de imágenes y pre imágenes son parcialmente comprendidos tanto en la forma gráfica como la algebraica, la variedad de ejemplos de funciones está limitado tanto gráfica como algebraicamente y el paso de la forma gráfica a la algebraica (modelación) es más difícil que la forma inversa y ambos procesos son limitados. Esta problemática y sus elementos que se hacen presente en la escuela, al momento de enseñar función, se repiten cuando también se enseña la Función Cuadrática.

Con base en lo anterior, el presente trabajo de grado se centra en responder la siguiente pregunta:

¿Qué elementos (Concavidad, vértice y representaciones, entre otros) de la función cuadrática se pueden movilizar en estudiantes de grado 9° de educación básica a través de una propuesta en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), en la cual se privilegia los procesos de modelación matemática?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Favorecer en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali, la apropiación de algunos elementos y la noción de la función cuadrática a través del estudio de un fenómeno de variación y cambio, en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

1.2.2 Objetivos específicos

- Documentar la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática desde las perspectivas curricular, didáctica del ABP y las matemáticas.
- Determinar y articular los aportes (elementos) desde las perspectivas anteriores para el diseño de una propuesta de aula centrada en ABP.
- Caracterizar los avances y dificultades de los estudiantes de grado noveno, sobre la función cuadrática a través de la implementación y análisis de los resultados de la propuesta de aula.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Actualmente, en Colombia se ha identificado en los sectores educativos, tanto rurales como urbanos, una gran diversidad cultural en cuestión de estudiantes; así pues, es necesario presentar alternativas y experiencias innovadoras respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje principalmente en la educación básica y media. Uno de los principales problemas mencionados en la problemática, se presenta en la comprensión del concepto de función, y específicamente en los procesos que se realizan en la función cuadrática, por esto, es importante abordar esta problemática, pues el concepto de función, es un concepto fundamental en la formación matemática de los estudiantes, además, porque desde este se permite establecer una relación entre los fenómenos y los objetos matemáticos.

Por otro lado, la educación debe ser vista como una construcción social y no como se ha podido observar durante muchos años como una formación individual; en este sentido, se propone la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), como una estrategia práctica y teórica en la que los estudiantes a través de diversas actividades desarrollarán conocimientos, valores, habilidades y actitudes las cuales van a permitir un aprendizaje más significativo; además, se espera llevar al estudiante a que se convierta en un investigador en formación por medio de la práctica. Así mismo, se pretende poder reevaluar esos modelos tradicionales que se presentan en las clases de matemáticas que conllevan a unas grandes dificultades como son los bajos niveles de motivación, la dificultad en el aprendizaje, la falta trabajo en equipo y principalmente las dificultades que se dan en el desarrollo de los procesos de modelación matemática.

También, en lo que concierne al aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación, se plantea que este proceso matemático, ayuda y facilita en los estudiantes la construcción de

nuevos conocimientos y habilidades durante el proceso de aplicación y socialización de conocimientos previos (Biembengut & Hein, 2004). De este modo, se pone de manifiesto la importancia de la modelación matemática en el ámbito escolar, así como el uso de contextos reales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una metodología de ABP.

Por otro lado, según Sierpínska, (1985), existen en la mente simultáneamente experiencias previas que dan cuenta del concepto de función con algunas propiedades debido al conocimiento deductivo, producto de algún tipo de desarrollo académico, lo cual puede producir una serie de conflictos cognitivos desde lo epistemológico que puede actuar como obstáculo en aprendizaje que repercutan en la enseñanza, pues el concepto de función se concibe como una relación entre magnitudes variables, y una de las dificultades de enseñanza y aprendizaje radica en comprender este concepto a través de sus representaciones.

El ABP es una propuesta que intenta favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje para superar las dificultades mencionadas anteriormente; son muchas las ventajas que esta metodología ofrece al proceso de aprendizaje, pues, este promueve en los estudiantes procesos de pensamiento. También, permite el aprendizaje a partir del trabajo en equipo, porque esta metodología incentiva el trabajo colaborativo, en el cual, los estudiantes aprenden diferentes técnicas para la solución de un problema, es decir que, a partir de trabajar el proyecto con sus compañeros de clase, ellos ayudan a que sus compañeros aprendan al estar en constante contacto y con puntos de vista diferentes, aprenden a aprender el uno del otro y también aprenden a evaluar y retroalimentar las opiniones y el trabajo de sus compañeros, y así mismo en el desarrollo de la actividad. De igual forma, por medio de este trabajo están aprendiendo nuevos conceptos a través del desarrollo del conocimiento.

Además, el Aprendizaje Basado en Proyectos, adicionalmente lleva al estudiante a reflexionar sobre los problemas de la vida cotidiana en relación con un saber, lo cual hace que su interés sea mucho más grande que solo ver teoría sin una base real, con lo anterior, no quiere decir que todos los conceptos matemáticos sean vistos de una manera fácil en el mundo, pero por medio de esta metodología se busca retar al estudiante a que se vuelva el protagonista de su propio aprendizaje mediante la elaboración de proyectos, para así poder alcanzar un aprendizaje significativo¹.

Es por eso, que el proceso de elaborar un proyecto permite y alienta a los estudiantes a experimentar, realizar aprendizaje basado en descubrimientos, aprender de sus errores, enfrentar y superar retos difíciles e inesperados, y más aún que empiecen a incursionar en el campo de la investigación con ayuda de la tecnología, que en este caso va a ser una herramienta la cual nos va a ayudar a visualizar las función cuadrática en situaciones cotidianas en el aula de clase, y a la vez propiciar un ambiente de aprendizaje innovador y que vaya más allá de una simple creación de una gráfica en un programa, es así, que tanto el estudiante como el docente aprenderán juntos a través de la actividad de proyectos y la vinculación con las TIC.

Por medio de este trabajo se pretende mostrar al estudiante que el concepto de la función cuadrática se encuentra inmerso en la vida cotidiana, pero también, se sabe que no todas las matemáticas son aplicables, ya que hay cosas muy abstractas, pero aun así existen unas

¹ Aprendizaje Significativo Según Ausbel. Para D.P. Ausbel el aprendizaje debe ser una actividad significativa para el que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno.

matemáticas, generalmente las escolares, que tiene una muy buena parte que se pueden estudiar en contextos reales.

Por lo anterior, se busca generar un ambiente donde los estudiantes realizan proyectos para hacer construcciones de conceptos y a su vez, fortalecimientos de habilidades matemáticas, a través de esta forma de aprendizaje. Sin embargo, se busca ver qué impacto tiene trabajar a través de proyectos en las actitudes de los estudiantes, si les gusta o si genera una desmotivación en el estudio de esta disciplina, y a su vez, observar el rendimiento de ellos en modelación matemática de problemas de la vida cotidiana, pues muchos tienen dificultad en este proceso.

En este trabajo además de lo mencionado anteriormente, se busca aportar información sobre el desempeño de los estudiantes de grado noveno frente a problemas de la vida cotidiana y cómo estos problemas contribuyen en el desarrollo de los procesos de modelación matemática, mediante el método del ABP; para incentivar el trabajo en equipo y el pensamiento crítico, al igual para brindar herramientas tanto a docentes como estudiantes en la resolución de problema; así mismo, poder mitigar el problema de modelación matemática que se presenta en la mayor población estudiantil de Colombia, en este caso la población a investigar en este trabajo de grado, son estudiantes de grado noveno de una institución de la ciudad de Cali.

En otras palabras, es pertinente presentar la alternativa de ABP como una metodología innovadora que permita integrar distintas áreas del conocimiento y formas de aprendizaje, teniendo en cuenta las necesidades y preferencias que se encuentran en un determinado contexto, permitiendo que todos los estudiantes aprendan matemáticas y desarrollen competencias para pensar matemáticamente. Para ello es importante que se aprenda a diseñar y desarrollar ambientes de aprendizaje centrados en el que aprende, enfocando su práctica a lograr que sus estudiantes

construyan conocimientos con significado a partir del reconocimiento y valoración de sus conocimientos previos y sus formas de pensar, razonar y argumentar en un ambiente de aprendizaje colaborativo.

1.4 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Después de un rastreo bibliográfico, se pudieron encontrar los siguientes documentos con referencia a la función cuadrática y Aprendizaje Basado en Proyectos; siendo investigaciones previas que sirven de marco referencial bibliográfico. Para ello, se realiza una breve descripción de los textos encontrados, pues estos permiten ubicar el problema de investigación en el contexto de aula.

Función Cuadrática

A continuación, se presentan algunos trabajos con referencia a la función cuadrática a nivel local, nacional e internacional.

A Nivel Local

La investigación de Avirama Gutiérrez, L. M. & Gustin Ortega, J. D. (2012), intitulada: *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física), Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

En este trabajo se presenta la ecuación cuadrática como objeto de estudio, abordando algunos aspectos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes de la educación básica en Colombia; por ello, el objetivo general se expresa así: “Propiciar un acercamiento al reconocimiento y soluciones de la ecuación cuadrática en grado noveno de la educación básica a través de actividades que involucran la integración del Puzzle Algebraico.”, (p. 19).

Se cuestiona la forma tradicional de enseñar las matemáticas en la escuela, la cual se enfoca en la exposición del maestro, ejemplos y ejercicios para los estudiantes. Como una solución a esta problemática, los dos autores proponen realizar un diseño e implementación de una secuencia didáctica conformada por tres situaciones problema, en las que se desprenden una serie de actividades que involucran la resolución de problemas y la integración de materiales manipulativos como el puzzle algebraico.

Finalmente, en este trabajo se observó que al momento de realizar actividades con material manipulativo se puede enriquecer las prácticas educativas que se llevan a cabo en el aula de clase y a la vez los estudiantes reciben la atención apropiada para alcanzar su aprendizaje. Además, se concluye que a partir de puzzle se llegó a un acercamiento más efectivo a la resolución de problemas en ecuaciones cuadráticas, pues fue una actividad de mejor agrado para los estudiantes y esto permitió identificar elementos necesarios para dar una solución a un problema.

El problema que encontramos en este trabajo es el ambiente artificial con el que trabaja; es decir, se trabaja solo con seis (6) estudiantes y no con todo un salón de clase, que estaría formado por más de veinticinco (25) estudiantes. Esto hace que se cuestionen sus resultados, porque más bien con muy pocos estudiantes, estos deberían haber tenido una mayor atención personalizada y

así obtener mejor resultados; por lo general, solo la mitad sale bien o tiene correctas las respectivas actividades. Además, no se presentan las fases de comprensión y asimilación que realizan los estudiantes a partir del problema planteado; en otras palabras, del problema se pasa a la solución, sin tener acceso al proceso de comprensión y análisis del mismo.

También, se encuentra el estudio realizado por Hurtado García, A. F. y Zúñiga Patiño, F. Y. (2011), intitulado *La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Esta investigación aborda la Función Cuadrática como objeto de estudio; y se propuso como objetivo general: “Establecer las características curriculares y las Praxeologías Matemáticas de algunos textos escolares colombianos alrededor de la función cuadrática.” (p. 11). Específicamente, se realizó un análisis de textos escolares con el fin de reconocer la coherencia que guarda la propuesta educativa del texto, con la idea que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone sobre la Función Cuadrática.

Es decir, el propósito era buscar y reconocer, el tratamiento que el texto escolar le da al concepto de función cuadrática y para ello se centró en el análisis de dos textos escolares de noveno grado (9°) de la educación básica que han estado dentro del mercado durante los años 2007 al 2009.

En este trabajo, también se reconoce en el análisis de textos escolares la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como herramienta para llevar a cabo el análisis didáctico de la propuesta del texto escolar; esta teoría se centra en el análisis de las *Praxeologías Matemáticas* las cuales se componen de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Los autores concluyen que, al momento de comparar la estructuración del contenido correspondiente a la *función cuadrática* presente en los dos textos escolares, en el primer texto (texto Delta) se observó que el concepto de función se muestra como una caracterización de sus elementos y definen los conjuntos en los que se presentan este tipo de función. Mientras que en segundo texto (texto Espiral) la propuesta del concepto función cuadrática se da a partir de un ejemplo que busca mostrar la forma en que se realiza su gráfica y las características del polinomio que define la función cuadrática.

En cuanto a las Praxeologías Matemáticas, las autoras concluyen que el texto Delta presentan un alto nivel de completitud para este tema, mientras que para el texto Espiral se establece un nivel bajo de completitud debido a que no se destaca en mayor medida un cumplimiento medio o alto de los indicadores mencionados anteriormente.

Dentro la revisión matemática e histórica realizada, los conceptos matemáticos que se utilizaron tienen una relación amplia entre sí, se pudo ver que tanto los elementos que hacen parte de la función cuadrática y los que hacen referencia a la ecuación cuadrática muestran una integración a partir de sus formas de representación, muchos de estos términos son utilizados en los libros de texto analizados y no solamente en estos sino en la mayoría de los libros utilizados para la educación matemática en el grado noveno (9°).

Uno de los elementos que tiene esta investigación que se pudiera cuestionar es la muestra utilizada: solo dos libros; esa muestra no representa todo el mercado colombiano; de tal forma que sus conclusiones no podrían ser generalizadas. Hace falta continuar con el estudio para tener una visión más completa del tratamiento de la Función Cuadrática por parte de las editoriales escolares colombianas.

Así mismo, se encuentra la investigación realizada por Ruiz J. (2011), titulada *Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado noveno de educación secundaria*, trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado busca, bajo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la orquestación instrumental, realizar un diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica; este diseño permite estudiar la función cuadrática de una forma menos tradicional. En este trabajo, en la problemática se menciona el tratamiento que se le da a la función cuadrática y los procesos de enseñanza, los cuales, como en el trabajo lo afirma, son poco efectivos, dado que pueden presentar imprecisiones y dificultan el aprendizaje del estudiante. Se diseñó una situación didáctica en la cual se comprenden tres actividades; además, utilizaron la herramienta Cabri para su desarrollo. La metodología de investigación inspirada en la perspectiva de la micro-ingeniería didáctica ayudó en la realización de la secuencia didáctica.

El autor de este trabajo de grado concluye que el diseño de la secuencia didáctica y la interacción con el recurso (Cabri) permite identificar características de nivel cognitivo, matemático y didáctico en torno a la enseñanza de la función cuadrática. Además, muestra una forma diferente a la tradicional de enseñar la noción de función cuadrática, y al mismo tiempo sirve para que profesores puedan diseñar sus propios métodos de enseñanza haciendo uso de este instrumento.

El trabajo de Ruiz Quiñonez (2011) otorga un papel preponderante al profesor, porque éste “asume un papel central en cuanto a la coordinación de los sistemas de instrumentos en la clase y el saber puesto en juego.” (p. 20); esto pudiera ser una limitante si se toman en cuenta los

postulados de la Psicología Cognitiva que centra el papel activo en el estudiante, dado que es él quien aprende y el profesor pasa a ocupar un rol de orientador y facilitador.

Por último, el estudio realizado por Henao Saldarriaga, S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*. (Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado busca, a través del enfoque de la *Educación Matemática Realista* (EMR), realizar un diseño didáctico que favorezca los modelos cuadráticos y permita estudiar el proceso de modelación matemática de estudiantes de los dos grados de educación media (10° y 11°). El trabajo aborda a los *niveles de matematización* y la incidencia de las tareas diseñadas en el aprendizaje de los *modelos cuadráticos*.

Este diseño se realiza bajo los parámetros de la investigación cualitativa, centrada en un estudio de caso, desarrollándose en el *Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle*. En el estudio participaron 19 estudiantes de los dos últimos años de educación básica. La metodología fue la observación participante.

En dicha investigación, se concluyó que, a través de actividades con relación a la EMR, los estudiantes pudieron tener una mejor comprensión y conexión entre los contextos y los modelos abordados. Además, demostraron ocupar un lugar protagónico en la integración de la modelación matemática para el trabajo matemático y esto se refleja inicialmente en la fundamentación teórica de las tareas diseñadas, que también trascienden al plano de lo práctico al mostrar que este tipo de tareas logran dar un lugar central a los estudiantes, pues en esta investigación, los estudiantes no

están como receptores pasivos, sino como sujetos activos que construyen la matemática mediante herramientas que se basan en consideraciones propias, que paulatinamente se desarrollan y evolucionan. Por otro lado, promueven la interacción y reflexión entre los estudiantes, dando lugar a la creación de diversos modelos con niveles de abstracción diferentes y, por último, crear la necesidad, por parte de los estudiantes, de construir modelos que les permitan comprender la situación dada y en algunos casos resolverla.

Aunque no es fácil cuestionar los resultados obtenidos, los mismos no pudieran ser generalizados y comparados con resultados arrojados en un salón de clase real. La investigación dice realizarse bajo los parámetros del enfoque cualitativo, pero una característica esencial del mismo es trabajar en el ambiente o contexto natural de los hechos investigados, y, cuando se trata de procesos de enseñanza y aprendizaje, el contexto natural es el salón de clase y no un laboratorio.

A Nivel Nacional

La investigación realizada por Mosquera Quintero M. (2015), intitulada *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER YARUMITO*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

En esta tesis de maestría, el autor diseñó una propuesta didáctica la cual posibilita a los estudiantes de grado 9 de la IER Yarumito el aprendizaje de las funciones cuadráticas de variable real, con el fin de fortalecer sus competencias en el pensamiento variacional, con énfasis en la modelación, resolución y el planteamiento de problemas. El trabajo se enfocó en elaborar una

propuesta didáctica de enseñanza, la cual sirvió como carta de navegación y permitió observar las bondades del uso de metodologías de enseñanzas alternativas para el fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje, y en consecuencia el fortalecimiento de competencias en los estudiantes. Mosquera (2015), concluye que, al realizar diversos ejercicios contemplados en las guías de actividades, en muchos de los casos permitió a los estudiantes procesos de autonomía y descubrimiento frente al aprendizaje, así como, la construcción de algunos de los conceptos y aplicaciones de la temática a la vida cotidiana, lo cual hizo que el proceso de enseñanza fuera más ameno.

A Nivel Internacional

En el artículo de Garrigós Sabaté, J. y Valero García, M. (2012), intitulado *Hablando sobre Aprendizaje Basado en Proyectos con Júlia*, publicado en la *Revista de Docencia Universitaria. REDU. Número monográfico dedicado a Innovaciones en el diseño curricular de los Planes de Estudio. Vol.10 (3) Octubre - diciembre. Pp. 125-151.*

En este trabajo, los autores hacen críticas a las metodologías usadas en el currículo español, y para ello hace un diálogo con una alumna ficticia llamada Julia, quien va mostrando su experiencia de clase y destaca la importancia y diferencia de lo aprendido cuando se usa ABP. También señala unas fallas de esta metodología, en cuestión de la forma en cómo es empleada por los profesores; por ejemplo, nunca se muestran proyectos realizados por sus compañeros de los años anteriores; no se hace uso de la modelación. Asimismo, usando ABP los profesores se quedan con lo abstracto en Física o Ingeniería y no con casos reales y prácticos.

Se expone acerca del desarrollo de ciertas habilidades transversales no es tarea fácil, ni siquiera en el caso de que el profesorado se coordine en una cadena de asignaturas pero que sí se puede desarrollar a través de proyectos un acercamiento para resolver múltiples situaciones de la vida real a las que el estudiante se enfrentará al trabajar en equipo. Por lo anterior se puede evidenciar la complejidad de identificar habilidades y actitudes que pueden obtener los estudiantes o que surgen a través de las diferentes actividades que se llevan al salón de clase.

Los autores concluyen que la ABP “mejora la motivación del alumnado, consigue que se esfuerce más en general y contribuye al desarrollo de habilidades transversales que luego son apreciadas en el momento del ejercicio profesional.” (p. 148).

Se encuentra, también, la investigación de López Quijano G. (s/f), intitulada *La Enseñanza de las Matemáticas, un reto para los maestros Del Siglo XXI*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

El estudiante de hoy necesita entornos de aprendizaje diferentes a los tradicionales, que lo motiven constantemente a la construcción del conocimiento matemático, que estén acordes con los cambios tecnológicos y sociales, tendientes a fortalecer en él habilidades y competencias útiles en su desempeño cotidiano, que lo potencien para enfrentar un mundo cada vez más exigente, cambiante y globalizado. Un entorno para el aprendizaje de las matemáticas, donde se conjugan aula especializada, ambiente de estudio colaborativo, aprendizaje basado en problemas y un sistema de evaluación formativa, proporciona al estudiante una amplia gama de posibilidades para que él construya socialmente el conocimiento matemático de manera reflexiva sobre su propio quehacer cotidiano.

Finalmente, López Quijano G, considera que el Aprendizaje Basado en Proyectos es un enfoque integral de la enseñanza y aprendizaje en el aula diseñado para involucrar a los estudiantes en la investigación de problemas autóctonos. En este artículo, representa un argumento de por qué el proyecto tiene el potencial de ayudar a las personas a aprender. Así mismo, como dentro de este marco los estudiantes buscan alternativas de soluciones a problemas no triviales, que conllevan a generar preguntas, debates de ideas, realizando predicciones, diseñando planes y/o experimentos, a su vez, recolectando y analizando datos, estableciendo conclusiones y creando o mejorando productos y procesos. Adicionalmente, los docentes deben buscar crear ambientes de aprendizaje significativos en los cuales se garanticen la motivación y la indagación de diferentes temas aprender dentro y fuera del aula de clase.

Aprendizaje Basado En Proyectos (ABP)

Respecto a la metodología ABP, se encontraron los siguientes trabajos e investigaciones a nivel nacional e internacional que tienen que ver con esta metodología.

En primer lugar, se encuentra la investigación *Ciro Aristizabal, C. (2012), intitulada Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B. Pr) como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.*

La autora muestra que durante la educación secundaria se proponen muchas metodologías de aprendizaje, es por eso que este trabajo recopila lineamientos básicos para la implementación de la metodología ABP como estrategia integradora de teoría y práctica de la asignatura de ciencias

naturales, promoviendo competencias cognitivas, colaborativas, tecnológicas y metas cognitivas. La propuesta pretende brindar un apoyo en el ámbito educativo, para la implementación de una metodología que complemente los temas de las clases teóricas con la aplicación de proyectos diseñados para este fin y a la vez, incentivar mediante su realización, actividades como: investigación, planeación, búsqueda de soluciones, trabajo cooperativo y actitudes como: autorregulación, disciplina y perseverancia, entre otros elementos que benefician la formación integral de los estudiantes.

La metodología propuesta fue aplicada en el diseño y construcción de un proyecto sobre cohetes hidráulicos como método de aproximación a la física mecánica. Como conclusión se llegó a que trabajar con proyectos ofrece unos beneficios invaluable como el trabajo con gusto, la disposición, el cambio de actitud de los estudiantes y los aprendizajes significativos que se generan cuando se les ofrecen metodologías diferentes y activas.

También, se encuentra el artículo realizado por Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015), *Sobre la reflexión de Aprendizaje Basado en Proyectos: estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas*, publicado en la *Revista Métodos* (no. 13), del Colegio Mayor de Bolívar,

Los autores hacen una reflexión analítica de la investigación “Efecto del Aprendizaje Basado en Proyectos mediados con tecnología móvil en la resolución de problemas aditivos con números enteros negativos”. El documento parte del análisis del problema que presentan los estudiantes para desarrollar las competencias matemáticas, aunado a las dificultades que presentan para comprender los conceptos abstractos que les plantean los docentes. Se parte de la propuesta de incorporar en las prácticas pedagógicas de los educadores de matemáticas, una estrategia soportada

en la teoría constructivista, denominada: Aprendizaje Basado en Proyectos -ABP-, como una forma de eliminar la metodología tradicional de enseñanza docente, la cual genera estímulos desagradables y coadyuva a los fracasos en el desarrollo de competencias matemáticas. Finalmente, el documento plantea, de manera suscita que la utilización del ABP mejora el desempeño de los estudiantes en la competencia de resolución de problemas.

Como conclusión Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015), señalan que la implementación de la estrategia pedagógica denominada ABP permite mejorar el desempeño de los estudiantes en la competencia de resolución de problemas, independiente del tipo de mediación que emplee el docente. De igual manera, ésta promueve el trabajo colaborativo, así mismo, promueve a que se conciba la matemática como una actividad que socialmente se debe compartir, estimulando un aprendizaje significativo.

Consideraciones Generales de los Antecedentes

Teniendo en cuenta lo anterior, los trabajos que se realizaron en torno a la función cuadrática concluyen que uno de los principales problemas se encuentra en la comprensión del concepto de función y sus sistemas de representación, así mismo, cómo la enseñanza tradicional tiene efectos en el aprendizaje de los estudiantes, donde el profesor tiene el papel central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, el cual limita la construcción del conocimiento. Por otro lado, proponen situaciones didácticas encaminadas al trabajo en el aula como una propuesta motivadora para el aprendizaje de los estudiantes haciendo de la enseñanza un proceso menos tradicional.

Respecto a la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos, esta aporta a la enseñanza y el aprendizaje de distintas áreas de conocimiento; pues, por medio de esta, se pueden alcanzar las metas propuestas en el aula de clase. En cada uno de estos trabajos y artículos de investigación mencionados anteriormente, muestran que la metodología propuesta (ABP) permite desarrollar habilidades de investigación, actitudes, aptitudes, comunicación y resolución de problemas en los estudiantes, siendo esto beneficioso para la construcción del conocimiento, ya que, por medio de esta metodología se motiva al estudiante a ser partícipe de su propio aprendizaje e incita el trabajo colaborativo. Además, deja a un lado la enseñanza tradicional, cambiando los roles de estudiante y docente, en el cual el docente se vuelve un orientador y el estudiante asume el papel de investigador.

Para efectos de este trabajo de grado, pudimos observar que a nivel local no se ha trabajado la metodología ABP, por el contrario, respecto a la función cuadrática se encontraron varios trabajos los cuales toman la función como el objeto de estudio. A nivel nacional (Colombia), encontramos que muy pocas universidades han trabajado o investigado a partir de la metodología ABP. A nivel internacional, se encontraron diversos trabajos e investigaciones sobre la metodología ABP en distintas áreas del conocimiento, las cuales dieron un aporte teórico en este trabajo, pero ninguno de estos trabajos mencionados anteriormente vincula la función cuadrática con esta metodología. Por ende, se considera este trabajo como un tipo de desarrollo investigativo en el cual se quiere alcanzar una nueva alternativa de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática.

CAPÍTULO II.

II. MARCO REFERENCIAL Y CONCEPTUAL

En este capítulo se presenta el marco de referencia conceptual en el que se desarrolla el trabajo, considerando tres perspectivas: didáctica, curricular y matemática; las cuales orientan el desarrollo de este proyecto como una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, a partir de la identificación de algunas de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la función; interpretación del concepto y los sistemas de representación. Teniendo en cuenta este marco de referencia para interpretar posteriormente los resultados obtenidos en la elaboración del proyecto.

También se analizan aspectos matemáticos con referencia a la función cuadrática y sus sistemas de representación; aspectos curriculares en el que se presentan las orientaciones del MEN referentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra con respecto a la función y un análisis de ciertas dificultades tratadas por investigaciones previas sobre la función cuadrática en secundaria.

2.1 PERSPECTIVA DIDÁCTICA

Como se mencionó en la problemática, algunas de las dificultades que se presentan en la Educación Básica Secundaria en el área de las matemáticas tiene que ver con la comprensión e interpretación del concepto de Función por parte de los estudiantes, a causa de su complejidad por su grado de abstracción, las dificultades por parte de los sistemas de representación y los problemas que se generan al modelar situaciones reales.

Estas dificultades se relacionan directamente con el estudio del Álgebra en la comprensión y tratamiento de las expresiones algebraicas a nivel simbólico y los cambios a otros registros de representación como el gráfico o el lenguaje natural y viceversa.

Algunas de estas dificultades son expuestas en los documentos de Kieran C., Azcarate C., y Serpiska, entre otros, así mismo como en algunos trabajos de grado del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle en los que se trata la función cuadrática.

Estas dificultades involucran implicaciones didácticas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, especialmente el caso de la función cuadrática.

2.1.1 Dificultades Del Concepto De Función Cuadrática

Generalmente, la presentación del concepto de función en la escuela tiene gran complejidad en los estudiantes de secundaria por parte de su interpretación en un contexto real, pues es necesario que los estudiantes relacionen un contenido abstracto y matemático con su entorno. Las dificultades que se presentan en el concepto de función, son generales para los tipos de funciones, tales como:

Según Kieran (1989), algunos de los problemas en torno al concepto de función se debe al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran lo símbolos, las expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas y a su vez la dependencia entre variables.

Según Shuard y Neil (1977), algunas de las dificultades centradas en el concepto de función son: la definición con que se parte el concepto de función lleva a constantes contradicciones, anotan que la idea de dependencia funcional ha sido completamente desechada de la definición de

función actual. La noción de dependencia ya no existe y, por esta razón, las investigaciones que se presentan son aquellas que hacen énfasis en el aspecto estructural más que en el procedimental del concepto de función. Así mismo, se presentan limitaciones al no poder relacionar el concepto de función con las soluciones de ecuaciones representadas gráficamente.

Según Azcárate (1996), el concepto de función se puede observar a partir de diferentes sistemas de representación, y cada una de estas se acerca a su definición permitiendo poner en relieve sus características e interpretaciones, estas son: el modelo físico o simulación, la descripción verbal, las tablas de valores, la gráfica y la fórmula o ecuación, siendo estas dos últimas los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto los más difíciles de interpretar, pues permiten tener una visión más completa de la función. Por otra parte, según Kieran (1989), se presenta como un problema el hecho de que los estudiantes usan de una manera rutinaria la generación de tablas que satisface una ecuación algebraica de dos variables, la representación de puntos en un plano cartesiano adecuadamente escalado y que interpreten las coordenadas de los puntos de una gráfica, algunas veces con la intención de resolver un sistema de ecuaciones, hace que los estudiantes pierdan la visión del significado de los ejercicios, se apoyan únicamente en gráficas que son lineales y sean incapaces de interpretar gráficas en términos de situaciones reales. Así pues, la mayoría de estos procedimientos se reducen a la aplicación de tan solo dos procedimientos resultando en un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo.

Por otro lado, como se menciona en el texto de Kieran (1989), los principales obstáculos en el desarrollo del concepto de función y sus procesos se encuentran en el rechazo del dominio y el rango, los conceptos de imágenes y pre imágenes son parcialmente comprendidos tanto en la forma gráfica como la algebraica, la variedad de ejemplos de funciones está limitado tanto gráfica

como algebraicamente y el paso de la forma gráfica a la algebraica (modelación) es más difícil que la forma inversa y ambos procesos son limitados.

La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro (Hitt, 1998). Varios estudios han propuesto la importancia de los sistemas de representación en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Tal como se ha descrito en el capítulo 1, un elemento común de esas investigaciones, es que los estudiantes de secundaria, en torno a un concepto específico, no son capaces de coordinar varios sistemas de representación. En este sentido, Hitt (1998) menciona que la visualización está fuertemente vinculada con los sistemas semióticos de representación, enfatizando en que la mayoría de profesores privilegian el trabajo sobre los procesos algebraicos sin atribuirle importancia a los procesos visuales. Así pues, el reflexionar sobre el papel de los sistemas semióticos de representación será vital para poder entender la construcción de conceptos matemáticos que los estudiantes realizan.

En particular, el concepto de *función* es uno de los conceptos matemáticos que por excelencia admite la consideración de diferentes sistemas de representación, por lo que la visualización es un proceso de uso constante por parte de los estudiantes, y es común ver que, ante la necesidad de responder a cierta consigna, se acuda a otras representaciones para poder explicar o responder.

Hitt (2003) establece que en lo que al concepto de función se refiere, hay dificultades tanto en profesores como en estudiantes y la causa principal es la consideración y tratamiento de este concepto desde solamente un registro imperante sobre los demás, el algebraico, lo cual produce una limitación en su comprensión. El problema, como se ha mencionado antes, no es el poco

trabajo con otras representaciones, sino la inadecuada articulación entre las distintas representaciones. Justamente, esta articulación no es considerada usualmente por los profesores en la construcción del concepto de función. Así pues, el autor propone que las tareas de conversión promoverán un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización.

Teniendo en cuenta los diversos problemas en torno a la función, y en particular a la función cuadrática, como se ha mencionado anteriormente, diferentes autores han presentado distintas alternativas de tratamiento para la introducción del álgebra en el cual está inmerso el concepto de función, estas son: la generalización de patrones numéricos y geométricos, las leyes que rigen las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la resolución apoyado en el uso de modelos concretos, la introducción de situaciones funcionales y la modelización de fenómenos físicos y matemáticos. De manera particular, y para efectos de este trabajo nos enfocaremos en la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la resolución de problemas a partir de contextos reales, debido a su aporte en el desarrollo del concepto matemático.

2.1.2 Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)

El ABP, que tiene sus raíces en el período greco-romano, para destacar en este periodo, podemos hablar de Confucio y Aristóteles que fueron exponentes de la filosofía de aprender haciendo. Siglos después este enfoque del aprendizaje fue tomado por el filósofo John Dewey, quien propuso una educación de carácter práctico, que se expandió con fuerza en Estados Unidos aproximadamente en el siglo XX, y con el transcurso del tiempo recibió el nombre de Project Based Learning (Boss, 2011). La metodología de ABP consiste en el desarrollo de un proyecto de

cierto tema, pero no quiere decir que sea de un solo tema en particular, ya que esta metodología logra vincular otras disciplinas del saber, es por eso que, el ABP busca incentivar en los estudiantes a que solucionen problemas reales a través del planteamiento de nuevas preguntas, debatiendo ideas, recolectando y analizando datos, reflexionando sobre su proceso de aprendizaje, trazando conclusiones, comunicando sus ideas, creando productos y compartiendo sus aprendizajes con una audiencia real, en este caso sus compañeros.

El ABP es una alternativa formativa que trasciende los principios de la pedagogía activa, pues permite comprender el contexto real de cada estudiante y a la vez de su entorno real mediante la articulación de conocimientos propios de la disciplina o de la relación con otras e intentando lograr un sinergismo que conduzca a una formación integral.

2.1.3 Orígenes del Aprendizaje Basado en Proyectos

El Aprendizaje Basado en Problemas se introdujo a finales de la década de los 60 de las Universidades de Case Western Reserve, en Estados Unidos, y de McMaster, de Canadá. Esta nueva metodología educativa buscaba en los años 60 cambiar el modelo formativo; pasar de estar enfocado en el docente a estar centrado en el estudiante.

Al mismo tiempo, en las Universidades de Roskilde y Aalborg, en Dinamarca, nace otro enfoque pedagógico muy similar, el Aprendizaje Basado en Proyectos. Cuya base es muy similar a la anterior, pero tiene como objetivo lograr o elaborar un producto final con el que se busca fortalecer el aprendizaje y enseñanza de los estudiantes.

Esta nueva metodología del aprendizaje busca que los estudiantes se relacionen con la resolución de un problema auténtico para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, dándoles proyectos abiertos para intentar simular situaciones de la vida real.

Sin embargo, se ha evidenciado que el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), incrementa los conocimientos de los estudiantes y desarrolla en ellos habilidades para hacer personas más competentes. Es por eso que debemos reflexionar sobre las formas de enseñar tradicionales que se vienen desarrollando desde hace muchos años, es por esta razón que esta metodología de ABP, busca realmente que el estudiante comprenda los temas o contenidos curriculares, es así que el objeto de estudio en este trabajo es la función, ya que cumple un papel muy importante. Mediante este tema se busca que los estudiantes de grado noveno, lleguen a una contribución en el desarrollo de la competencia de modelación matemática y a la vez incentivar habilidades de pensamiento, por otro lado, que el docente pueda desarrollar adecuadamente los contenidos con referencia a la función. El ABP, busca que esos contenidos sean motivadores y que provoquen conexiones con anteriores aprendizajes y sobretodo que ese vínculo que se va realizar entre el saber con las situaciones de la vida de los estudiantes, o al menos algo cercano, sean de una forma innovadora para el estudiante y el docente.

Por último, se busca que el propio estudiante establezca planes de mejora y de esta manera, sea consciente de los aspectos en los que debe mejorar y, en definitiva, hacer realidad esa frase tan utilizada que recalca que el estudiante debe ser el protagonista de su propio aprendizaje.

2.1.4 Beneficios de Trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos

Como toda metodología de enseñanza y aprendizaje tiene unos beneficios, en esta en particular busca reconocer beneficios adicionales, de los cuales en muchos casos no son tan visibles para el docente ni para el estudiante, pero a medida que se va desarrollando el proyecto y explorando temas complejos desde diversas perspectivas van emergiendo.

Sin embargo, trabajar por proyectos, se convierte en un puente en el cual las disciplinas se vinculan para dar solución a problemas de carácter social, cultural o académico, entre otros, mediante la obtención de nuevos conocimientos. Continuamente se trabajan proyectos en las instituciones, pero para que un proyecto resulte efectivo se debe equilibrar el nivel de control del estudiante con las estructuras presentadas por docentes y directivos, los cuales enfocan la dirección del proyecto.

Los estudiantes que aprenden con la metodología de ABP, aumentan la motivación y compromiso con su propio aprendizaje (Thomas, 2000; Walker & Leary, 2009).

Según lo expuesto anteriormente, la motivación de los estudiantes con el ABP se vincula con otra de sus características que les ofrece a los estudiantes la oportunidad de resolver problemas reales. Por consiguiente, dicha motivación se verá reflejada en la participación activa del estudiante dentro y fuera del salón de clases, por otro lado, el profesor será un impulsor frente a la curiosidad de los estudiantes mediante la conexión de su realidad que permita estimular la investigación y aprender haciendo.

La metodología del ABP permite que los estudiantes adquieran aprendizajes más profundos, que son retenidos por un mayor período de tiempo, asimismo que los estudiantes además de

aprender los conceptos centrales y aprendizajes esperados de su nivel académico o grado de escolaridad según su marco curricular, por otro lado, fortalecen su comprensión de contenidos, porque son ellos quienes necesitan adquirir y aplicar la información, conceptos y principios en diferentes contextos, de esa manera, el ABP promueve el desarrollo de dos habilidades y muy importantes, unas cognitivas en relación con la resolución de problemas y otra con pensamiento crítico en marcadas desde el saber y el contexto.

En otro sentido, Los estudiantes, mediante el trabajo con proyectos, desarrollan habilidades socioemocionales, tales como la autoconfianza, autonomía y colaboración con sus compañeros (Thomas, 2000; ChanLin, 2008). Trabajar con una propuesta didáctica que promueva los proyectos como forma de enseñanza y aprendizaje, pone a los estudiantes como el centro de aprendizaje, ya que son ellos quienes toman la responsabilidad de aprender, a través de su participación activa en el desarrollo de un proyecto.

La metodología de Aprendizaje Basada en Proyectos constituye una oportunidad para fortalecer el vínculo que debe existir entre profesor-estudiante (Thomas, 2000), generando una relación más cercana con los estudiantes por parte del docente. Los estudiantes aquí no ven al profesor como una persona que dicta una clase, sino como alguien que facilita o guía su proceso de aprendizaje.

Los estudiantes pueden obtener un aprendizaje significativo, es decir, que exista una relación directa entre lo que se aprende dentro y fuera de la escuela, y que además de relacionar lo aprendido en la escuela con la vida cotidiana, los estudiantes se enfrentan a situaciones reales y estos puedan resolverlas por su propia cuenta, los conocimientos que adquieren son más significativos y permanecen durante más tiempo en su memoria. Por otro lado, durante el proceso del desarrollo

de los proyectos los estudiantes están obligados a trabajar en equipo y resolver los distintos problemas que puedan surgir en el proceso, esta iniciativa, es con el fin de incentivar de nuevo el aprendizaje colaborativo.

Por otro lado, los docentes son quienes orientan el desarrollo del proyecto, permitiéndoles participar de forma activa, pero no son el eje principal del proyecto, por ende, refuerzan sus conocimientos y aprenden nuevos conocimientos.

Es necesario recalcar que esta metodología ABP, ayuda a que los estudiantes puedan comprender de una mejor manera el mundo real y tener una mirada más crítica en la sociedad en la que viven. Así mismo, fomenta el trabajo colaborativo y afianza el constructivismo como modelo de aprendizaje.

2.1.5 Reflexiones sobre las limitaciones o dificultades de trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos

A continuación, se presentan algunas de las dificultades al momento de implementar esta metodología en el aula de clase, se puede considerar que en todo trabajo de investigación se puede presentar reflexiones sobre las limitaciones o dificultades, es por esto, que, para nuestro trabajo de grado, se tiene en cuenta los siguientes casos:

- Los grupos son numerosos y por lo tanto se puede perder el control.
- Los estudiantes, sobre todo los más jóvenes, se pueden perder en la tarea y olvidar sus propósitos de aprendizaje.
- Diseñar una evaluación válida resulta complejo.

- El tiempo de discusión del caso debe ser administrado adecuadamente, de lo contrario se puede perder la atención del grupo.
- El caso debe versar sobre una temática que incluya a la mayor parte del grupo, de otro modo algunos alumnos pueden perder interés.
- Los alumnos pueden percibir poca relación del caso con los contenidos de aprendizaje del curso.
- Se puede perder el orden cuando los alumnos se identifican y apasionan con una posición en torno al caso.
- Puede desmotivar a los estudiantes brillantes, en algunos casos, cuando ellos piensan que deben hacer su trabajo y además el del equipo.

2.1.6 Diferencias entre el Aprendizaje Basado en Problemas y el Aprendizaje Basado en Proyectos

Aprendizaje Basado en Problemas	Aprendizaje Basado en Proyectos
El aprendizaje está basado en la búsqueda de los conocimientos necesarios para resolver el problema.	El aprendizaje está basado en la búsqueda de los conocimientos y en la puesta de la práctica de unos conocimientos previos al proyecto.
Los problemas no son de una dificultad muy alta, es decir, que no van a existir explicaciones al respecto, ya que lo aprendido es evaluado a través de un proceso de resolución de problemas.	El problema (proyecto), que se presenta tiene una complejidad, por eso mediante se realiza el proyecto se deben utilizar los conocimientos previos, además, se van ajustando esos conocimientos previos y adquiriendo nuevos conocimientos.
Su énfasis es el proceso que utiliza para resolver los problemas.	Su énfasis es el producto y el trabajo que realizan.

Tabla 1 Cuadro comparativo entre el Aprendizaje basado en Problemas y el Basado en Proyecto. Fuente: elaboración propia.

En la tabla 1. Se puede observar las diferencias que existen entre las metodologías de aprendizaje basado en problemas y proyectos, que en ocasiones causan confusión ya que, el docente al momento de implementar dichas metodologías, a veces no tiene muy claro los énfasis que estas metodologías tienen al momento de implementarse en el aula de clase. Es por esto, que para este trabajo es importante resaltar esas diferencias existentes para poder realizar adecuadamente cada una de las actividades que se proponen en este trabajo de grado utilizando la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos.

2.1.7 Fases del ABP

López (2004) señala que el método del ABP se centra en un conjunto de actividades interrelacionadas y coordinadas entre sí y tiene un objetivo claro: aprender un conocimiento en el caso del ámbito educativo. Este proyecto se hace en grupo (trabajo colaborativo), o, por lo menos, se evita al máximo el trabajo individual del estudiante. Es necesario que el profesor haya analizado el proyecto y ofrezca al alumno las herramientas necesarias para la solución; no se trata que el docente le dé la herramienta, sino que tenga la certeza de que el alumno la ha de conseguir.

Una pregunta generadora (o varias de ellas) es el comienzo del proyecto. Una buena pregunta generadora es aquella que no tiene una sola y única respuesta, y en caso de ser así esta respuesta no puede ser simple y sin valor cognitivo. Una respuesta simple es aquella que se reduce a una mera información o dato enciclopédico; es necesario que para lograr la respuesta o la solución el estudiante haga uso de varios procesos cognitivos y sobre todo del pensamiento crítico. Este se logrará en la medida que se pueda tener varias alternativas y decidir la mejor, que no haya una y única solución, que el estudiante tenga la oportunidad de buscar la vía más expedita y eficiente a su juicio, haga un resumen de sus argumentos y pueda defenderlos.

Las fases del ABP son las siguientes:

1. Presentación de la problemática: el acto de inquirir debe ser real y apoyado en el contexto de vida del estudiante.

2. Planteamiento de una pregunta matriz o generadora.

3. Análisis del problema por parte de los estudiantes: Qué saben (conocimientos previos) y qué necesitan saber para la solución; y también dónde conseguir eso que se necesita. El profesor no les facilita el material, pero sí debe estar seguro que los estudiantes puedan conseguirlo.

4. Se organizan los estudiantes en grupos heterogéneos.

5. Se hacen las diversas actividades para conseguir y presentar a todo el grupo la solución.

6. Si los estudiantes se fraccionaron las actividades por grupo, entonces es necesario que los grupos se reúnan para compartir la información.

7. Cada grupo presenta su solución y sus argumentos.

8. Se hace una evaluación del proyecto. Se hace una recapitulación de lo que se aprendió: qué sabían previo, qué necesitaban, dónde se consiguió el material y qué sabe ahora sobre el tema. También es necesario destacar qué dudas quedaron en el aire y si es posible se destacan nuevas cuestiones sobre el tema o un tema próximo y se inicia un nuevo proyecto (proyecto iterativo).

2.1.8 Estrategias de Implementación

Como se menciona en la tesis de investigación de Ciron Aristizabal, C. (2012), intitulada *Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B. Pr) como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media*. Cada proyecto debe tener por lo menos los siguientes elementos:

- **Situación o problema:** Aquí se empieza a formular el problema a tratar, se debe abordar el tema o el problema el cual se busca resolver con ayuda de este proyecto, la propuesta se da a partir de la percepción individual o grupal sobre una necesidad que se tenga tanto social como académica para ser investigada por los estudiantes, el docente y la institución en general.
- **Descripción y propósito del proyecto:** Se debe explicar y describir de forma explícita el problema que se va a tratar, y los objetivos que se pretenden lograr con la ejecución del proyecto, se explicitan los objetivos generales y específicos en los cuales se va a desarrollar el proyecto.
- **Especificaciones de desempeño:** Se deben indicar los criterios de calidad que se pretenden llevar a cabo por medio de este proyecto. Son criterios que se fomentan de común acuerdo en los que se determina la realización del proyecto.
- **Cronograma:** Se especifican los tiempos, guías, materiales, etc. En los que se va a desarrollar el proyecto. Es de suma importancia hacerlo, pues se definen tareas a corto, mediano y largo plazo dentro del contexto del proyecto.
- **Evaluación:** Este lo define el docente, es quien decide bajo qué criterios va a evaluar al docente y de qué forma lo va a hacer, si realizará una evaluación cualitativa, cuantitativa o mixta los resultados que se obtengan de la ejecución del proyecto.

- **Evaluación del proyecto:** Aunque el proyecto se considera un medio para llegar a un resultado, es importante reflexionar sobre la ejecución del proyecto y sus resultados, pues este permite producir información para el desarrollo, planeación y ejecución de las actividades. Para el éxito del proyecto se debe generar motivación por parte de los estudiantes y entre más involucrados estén, darán mejores resultados en la responsabilidad de su aprendizaje.

2.1.9 El Papel de la Modelación Matemática

Es muy importante que los estudiantes propongan y analicen conjeturas, que modelen matemáticamente diferentes situaciones prácticas y planteen, ajusten y resuelvan diversos tipos de problemas. En este sentido, es necesario hablar sobre la modelación matemática y su papel en la presente investigación.

La incursión de la matemática como una ciencia que manipula variables para el estudio de situaciones de diferente clase, necesita de un sentido de estudio pertinente que debe ser resaltado en el aula de clase. Tal sentido, normalmente atribuido a una necesidad de relacionar a las matemáticas con situaciones reales, no solo se remite a una aplicación práctica de los conceptos matemáticos, sino que trasciende al aporte de ellos para la formación de un razonamiento que permita modelar situaciones que son susceptibles de ese practicismo.

Modelar, entendido como una construcción o sistema de carácter cognitivo, permite aproximarse al comportamiento matemático de determinadas variables involucradas en contextos tanto generales como específicos. De esta manera, un modelo permite caracterizar situaciones

donde la matemática permite describir los patrones que pudiesen estar presentes, y aquellos que no lo están; todo ello, debido a que un modelo también se constituye como un sistema, que está teóricamente solidificado, para utilizar los elementos que lo forman, para describir las situaciones dichas, por medio de unidades referenciales, que permiten a su vez realizar predicciones dentro del mismo sistema. Lo anterior, puede evidenciar una complejidad sobre lo que se debe entender como modelar, debido a que no tiene una sola perspectiva para definirse; sin embargo, le brinda un fuerte sentido de estudio a las matemáticas, para ajustarlo a una realidad que las muestra como cercanas a ella.

Hans Freudenthal (1905 – 1990) fue un matemático neerlandés, de nacionalidad alemana, que realizó aportes significativos al campo de la educación matemática. Uno de ellos, es la perspectiva que aborda la Educación Matemática Realista. Aquella, indica que la matemática debe colaborar a la formación humana, ciudadana y social, de los estudiantes que se aproximan al conocimiento matemático; de tal manera, que tal conocimiento se aproxime en sí mismo a ese contexto y entorno que es próximo a ellos, es decir, aquel en el que se desenvuelven cotidianamente. Esto no afirma que el formalismo deba omitirse, pero si establece principios fundamentales como teoría que pretende relacionar directamente al estudiante con el practicismo de la ciencia que aprende:

En primer lugar, la EMR debe tomar como base situaciones problema, que el estudiante pueda visualizar, reflexionar y que sean susceptibles de inducirlo a estudiarlas; esto con el fin de producir en el estudiante la capacidad de matematizar. Este término, siendo uno de los más emblemáticos en educación matemática, como se indica en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), ya que desde 1977, Freudenthal introdujo el término

“matematización”, y se ha adoptado como un sinónimo de modelación. Sin embargo, es importante puntualizar qué significado tienen tales conceptos, y es que ellos esencialmente funcionan como intermedio entre la situación de estudio, es decir, la situación problema; y la situación ya apropiada por el estudiante, para realizar esquematizaciones, para caracterizar estructuralmente la nueva situación; incluso, motivando a la generación de nuevas conjeturas, teorías u otras formulaciones, que evidencien esa conexión realista de la matemática con el entorno del alumno.

Existen otros principios que describen la EMR de Freudenthal, pero vamos a centrar nuestra atención en la manera como refleja el aprendizaje en matemáticas. Este término, se asocia a una forma de interacción colectiva, que permita comprender los conceptos matemáticos, de forma más eficiente; es decir, por medio de un proceso de construcción social y análisis cooperativo. Por ello, define dos nociones: interacciones sociales verticales (referidas a aquellas que se dan entre el docente y el alumno), y las interacciones sociales horizontales (referidas a aquellas que se dan entre alumnos). Esto indica que los individuos que forman el espacio de aprendizaje, trabajan de forma unánime para estudiar las situaciones elegidas con anterioridad por el docente, de tal forma, que cada uno puede reflexionar de ellas, e inferir elementos que lo ayuden a matematizar.

Otro de los principios relacionados al anterior, está dado por la estrecha correspondencia que hay entre los lineamientos curriculares de la matemática en la EMR. Freudenthal pretende con esta teoría, es facilitar la transición del conocimiento informal, al conocimiento formal, en los estudiantes; teniendo el conocimiento pre formal como un proceso incluido entre ellos. Esto con el fin, de brindar una accesibilidad a tal conocimiento, para quien desee aproximarse, es decir, sin exclusión. Para las pretensiones mencionadas, que constituyen una matematización progresiva, es importante reconocer que esa transición no ocurre de la forma estricta que pareciese, como etapas

generales; sino que, existen procesos específicos que unidos la conforman; esto es, una matematización vertical y una matematización horizontal. Entendidos como conceptos macro, cada uno engloba niveles de comprensión, por los cuales se espera, el estudiante atraviese. Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal.

En primer lugar, la matematización horizontal, se relaciona solamente con el nivel situacional; en éste, el estudiante debe con sus elementos primarios de análisis y de su experiencia previa, entender e interpretar, la situación de estudio que se le ha presentado, utilizando elementos de ella misma para caracterizarla. Este proceso de reconocimiento, ayuda al estudiante a familiarizarse con el desafío propuesto, y le permite entender cómo está percibiendo. Esto incluye, los conceptos matemáticos que identifica, su forma de relación, y su papel en la situación. En pocas palabras, es el proceso de indagar el problema de forma estructural.

En segundo lugar, la matematización vertical, comprende los niveles referencial, general y formal. En lo que se busca esquematizar la situación para establecer una representación sistemática de ella, por medio de un modelo matemático. Esto implica la formulación de conjeturas, la realización de pruebas y la forma como se procede de aquellos casos particulares, a la generalidad de los elementos inmersos en la situación.

En el nivel referencial, se utilizan herramientas de tipo visual, material, y el uso de representaciones para elaborar una esquematización inicial de la situación; haciendo énfasis en las condiciones iniciales del problema. Mientras que, en el nivel general, se comienza a pensar sobre qué elementos de la situación son susceptibles de ser generalizables, es decir, a través de la indagación previa, el estudiante va a comenzar en todos los casos posibles, y en la variación de las condiciones y en cómo afecta a su situación de estudio; esto es, reconocer patrones y manipular

variables propias para estimar qué tan sustanciales son en el problema. Finalmente, en el nivel formal, el estudiante profundiza en los tópicos matemáticos que ha reconocido, sus formas de manifestación en la situación, con qué otros conceptos están implicados, y qué métodos o procedimientos son necesarios para trabajar con ellos. Siendo importante, evidenciar que no es estático este nivel, sino que, gracias a la diversidad de las matemáticas, existen múltiples maneras de abordar el problema, y así mismo, de reflejar en ellas.

2.2 PERSPECTIVA CURRICULAR

Se toma como referencia los aportes que se presentan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los derechos básicos de aprendizaje, como propuestas pedagógicas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales determinan pautas para el diseño curricular en las instituciones educativas y para propuestas de aula en la escuela. Por otro lado, a su vez se pretende tener un panorama curricular en el cual se apoyará el trabajo presentado, ya que nuestro currículo de matemáticas está direccionado por cada uno de los aportes que brindan desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

2.2.1 Lineamientos Curriculares

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se presentan cinco procesos contemplados en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los cuales permiten realizar la actividad matemática; estos son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Para este trabajo de grado, nos centraremos en los procesos de modelación desde el concepto de

función a través de situaciones reales, pues este permite al estudiante no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema. Es importante introducir, en el aula, alternativas que propicien un espacio en el cual se permita la interacción de diferentes procesos, conceptos y disciplinas, para un aprendizaje más significativo.

Propuesta del MEN para la Educación Matemática.

A partir de los Lineamientos Curriculares que expide el MEN se reconoció que la educación matemática debe ir más allá de aspectos académicos, es decir, que involucran otros aspectos importantes como lo social, cultural y político entre otros que actúan en los procesos educativos.

Para efecto de este trabajo de grado se tendrá en cuenta el contexto a partir de los lineamientos curriculares que expide el MEN, el contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (MEN, 1998, p. 36).

En otras palabras la expresión contexto, tal como se expresa en los lineamientos curriculares, no refiere exclusivamente a la recreación ficticia en el espacio escolar de situaciones relativas al entorno social y cultural que rodean a la institución educativa, sino que ante todo, hace referencia a la creación de situaciones tanto referidas a las matemáticas, otras ciencias, el entorno social y

cultural, etc.; como a situaciones hipotéticas a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento. Así pues, la contextualización de los conceptos matemáticos debe ser entendida como el uso de escenarios de las ciencias (naturales y humanísticas), de la vida diaria y las matemáticas, para permitir el desarrollo significativo de la actividad intelectual del estudiante.

Del mismo modo, se reconoció que las matemáticas son una disciplina en constante transformación, pues las matemáticas que se enseñaban años atrás ya no son correspondientes a las necesidades que hoy en día se requieren, ni tampoco a los avances científicos y tecnológicos actuales en términos educativos. Teniendo en cuenta lo anterior el MEN busca aclarar, promover y orientar a las distintas instituciones educativas, en el desarrollo y ejecución de procesos curriculares en el área de matemáticas, partiendo del hecho que las matemáticas deben ser integradas con la vida y las demás áreas de estudio, es decir que las matemáticas deben ser un medio para explorar la realidad.

Por lo tanto, en relación con el quehacer matemático los Lineamientos Curriculares proponen tres grandes aspectos para organizar el currículo; estos son procesos, conocimientos básicos y contextos.

En la gráfica 1, se muestra que estos tres aspectos mencionados anteriormente trabajan de manera transversal, uno relacionado con el otro, y que son aplicados a partir de la elaboración del currículo hasta su ejecución en el aula, así, propiciando un aprendizaje de calidad y, a su vez, ayudando a que no se genere un aprendizaje repetitivo o tradicional de conceptos y procedimientos, sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender.

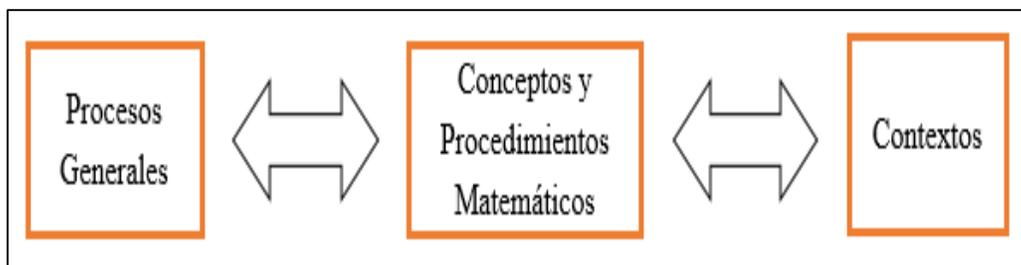


Ilustración 1 Estructuración de formulación del estándar. Fuente: (Men, 2006; 77)

Según la estructuración del currículo de matemáticas en Colombia, los conocimientos básicos se relacionan con los contenidos a enseñar y las habilidades relacionadas con los contenidos matemáticos, al mismo tiempo, con los conceptos y procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático. Por otro lado, los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional. Cada uno de estos pensamientos está estrechamente relacionado con ciertos contenidos matemáticos como se indica en cada uno de ellos, y a la vez el trabajo con procesos que implementen estos pensamientos facilita la enseñanza de los contenidos correspondientes.

Sin embargo, hay que aclarar que los sistemas correspondientes a cada pensamiento no son ni deben ser el medio exclusivo para desarrollarlo.

Según el MEN, los sistemas son aquellos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

Por otro lado, los procesos generales tienen que ver con el proceso de aprendizaje, es decir, es aquel que estandariza el proceso matemático, a través del razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. A continuación, se presentan las definiciones y explicaciones de

cada uno de los procesos en los que se desarrolla este trabajo, correspondientes a los Lineamientos Curriculares para la educación matemática.

La Resolución y el Planteamiento de Problemas

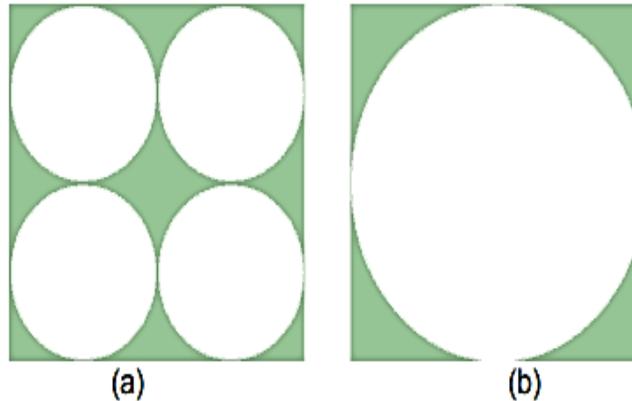
Este proceso es importante, pues en las actividades curriculares se encuentra presente la mayor parte del tiempo y está principalmente como un elemento para lograr un alto grado de comprensión y manejo de los nuevos conocimientos.

Además, involucra e integra contenidos matemáticos presentados en diversas situaciones contextualizadas de diversa índole, pues, a partir del quehacer matemático, se puede llevar a una aplicación en la cual cobra sentido. Este proceso, al abordar situaciones ligadas a experiencias permite que el estudiante pueda llegar a tener interdisciplinaridad para distintas disciplinas y conceptos (no solamente conocimiento matemático), el cual es uno de los objetivos por parte de la resolución de problemas, esto beneficia al estudiante en tanto que permite resolver problemas no únicamente a partir de las matemáticas, sino con la intervención de otras áreas del conocimiento que incluye también simbolismos y representaciones que se necesitan para replantear el problema en términos más manejables. Esto hace que su implementación propicia a que se integren otros procesos como la modelación y el razonamiento que son características propias de la resolución de problemas.

En la resolución y planteamiento de problemas expuesto por los Estándares Curriculares, es importante que los problemas abordados en cada situación sean abiertos, para que sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna alrededor de las cuales se pueda enriquecer el quehacer matemático.

A partir de lo anterior, ilustramos dos ejemplos de Resolución de Problemas Matemáticos:

¿Dónde se desperdicia más material, en (a) o en (b)?



Aparentemente parece que en (a), pero si observa bien, se da cuenta que los cuadrados son de igual área y que el radio del círculo grande es el doble que el de los círculos pequeños y entonces bastaría con calcular el área de las regiones blancas para decidir en cuál de las dos situaciones se desperdicia menos material. Entonces, el área blanca en (a) es $4 \cdot (\pi r^2)$ y en (b) es, $\pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$ es decir, las dos regiones blancas tienen igual área y por tanto, la cantidad de material desperdiciado en ambos casos es la misma.

Ejemplos:

El cuadrado de un número natural impar es impar.

$$1^2 = 1 \text{ impar}$$

$$3^2 = 9 \text{ impar}$$

$$5^2 = 25 \text{ impar}$$

Se afirma que el cuadrado del número n impar, será impar

$$n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \text{ (forma general de los números impares)}$$

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2t + 1 \quad t = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$$

Luego, n^2 es impar.

Ilustración 2 Ejemplo de Resolución y el planteamiento de problemas. Fuente: (Men, 2006; 77)

Modelación

La modelación está integrada en los distintos procesos presentes en el desarrollo cognitivo del estudiante como lo vemos en la resolución de problemas y al razonamiento que a la vez constituyen este proceso, por ende, la modelación es un proceso de gran importancia en la educación matemática y pues su ejecución en una situación problema cuyos datos no revelan cómo proceder para ser resuelta, permite dar una idea de lo que se presenta en dicha tarea.

Por lo anterior, podemos decir que este proceso es donde el estudiante pone en juego sus conocimientos y la destreza para utilizarlos en las diferentes representaciones para crear un modelo matemático que dé cuenta de la situación para ser resuelta matemáticamente. La ejecución y aplicación de este proceso de modelación a situación en términos matemáticos, dan cuenta del éxito que ha tenido el estudiante y como este se ha apropiado del conocimiento y ha creado herramientas valiosas para ver cómo es el funcionamiento del conocimiento en situaciones diferentes. Cuando se habla de la actividad matemática en la escuela se destaca que el alumno aprende matemáticas “haciendo matemáticas”, lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, lo que implica que desde el principio se integren al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes. (MEN, 1998, p. 76)

Por otra parte, el planteamiento de actividades como una situación problema contextualizada, el proceso de modelación que en este se realice permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

Las situaciones problemas utilizadas como puente en la iniciación al álgebra en las escuelas deben permitir el reconocimiento de relaciones entre las variables que intervengan de manera que el estudiante pueda establecer regularidades que den paso a la matematización o modelación de dicha situación como apertura al estudio de las expresiones algebraicas.

En pocas palabras, las políticas educativas y pedagógicas para la enseñanza del conocimiento matemático en Colombia están recogidas en los Lineamientos Curriculares, emanados por el MEN. Se espera que en lo filosófico la Educación Matemática trascienda lo meramente académico y esté más asociada con lo social, cultural y político de la vida del estudiante. En lo curricular, se espera que la educación matemática se vea integrada a las demás áreas del conocimiento como lengua, historia, etc. En lo operativo, se debe tener presente los aspectos de procesos, conocimientos básicos y contextos. Estos buscan una ejecución no tradicional, repetitiva y memorística; se espera que la educación matemática tenga una aplicación útil y provechosa en la vida cotidiana del estudiante. Es precisamente en este nivel operativo-funcional en el que se hacen presentes los procesos generales matemáticos, que están conformados por la resolución y planteamiento de problemas y la modelación.

La estrategia de resolución y planteamiento de problemas aportan tres características básicas: la aplicabilidad y adaptabilidad a la vida cotidiana del estudiante; la transversabilidad curricular, que permite ver el uso de la matemática en las otras áreas de conocimiento; y la libertad en la respuesta, no se puede limitar la resolución del problema a una y única respuesta, porque los problemas de vida cotidiana se pueden abordar y resolver desde diferentes ángulos posibles y coherentes. Este aporte se da gracias a la modelación, en tanto que esta aporta la modelación

matemática, o la representación mental y cognitiva, de planteamiento del problema y su respectiva solución.

A partir de lo anterior, ilustramos dos ejemplos de la Modelación Matemática:

Ejemplo 1

“Una familia de cuatro (4) personas ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?”

Para resolver el problema los niños pueden crear un modelo como el siguiente:

$3 + 4 = ?$, en el que ya han abstraído aquellas partes del problema que son importantes para la solución del mismo. Se ha separado lo esencial de lo accesorio y se abstraen sólo rasgos matemáticos, que nos permiten utilizar un modelo con el cual ya estamos familiarizados. La respuesta a la búsqueda en el modelo matemático es 7.

Ahora, en el sentido inverso, nos devolvemos para validar el resultado, es decir para incorporar este resultado en el dominio físico para dar la respuesta al problema original, así la respuesta es: se deben colocar siete (7) puestos en la mesa.

Se parte de una situación para modelarla matemáticamente.

Ejemplo 2

Ilustra la capacidad de modelación en una situación problemática de distribución. Incluso, sin haberlo aprendido, los niños de 8 ó 9 años saben qué hacer en situaciones en las que deben repartir.

La situación se les puede presentar de la siguiente manera:

Tres niños se reparten 36 dulces. ¿Cuántos le tocan a cada uno?



Ilustración 3 Ejemplo de modelación matemática. Fuente: (Men, 2006; 77).

2.2.2 Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

El propósito de los estándares de competencias en matemáticas debe responder a la estructuración del currículo de matemáticas. Es decir, esos estándares se adaptan al grado del estudiante y según el tipo de pensamiento matemático que se va a estudiar, pero teniendo en cuenta los procesos y contextos, como se observa en la gráfica 1. La génesis de dichos estándares de

competencias en matemática se debe a factores educativos, sociales y políticos. En efecto, en el primer factor se busca una educación de calidad y de excelencia en condiciones de igualdad y equidad para todos los ciudadanos; con el segundo factor, se espera que la matemática tenga un valor social en la medida que dé respuestas a problemas sociales cotidianos y reales de los estudiantes; el factor político pretende que el rol de la educación matemática contribuya en la consolidación de los valores democráticos.

La conceptualización de competencia matemática se asume de forma amplia en tanto que es un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio-afectivas y psicomotoras transversales, integrales, complementarias y relacionadas entre sí, cuyo objetivo general es contribuir con un desempeño matemático que no sea rígido, eficaz, retador y desafiante para el estudiante.

Vista de esta forma, la competencia matemática es un indicador de la formación en matemáticas, concebida como proceso y no como un producto terminado y aislado. Si se asume la formación en matemáticas como un proceso continuo, entonces el aprendizaje de las matemáticas no es inmediato y terminado en cada grado u objetivo enseñado, sino que se da en un progresivo crecimiento de adquisición en cada objetivo impartida, y asociado dicho crecimiento a los contextos institucionales y socioculturales en donde se desarrolla. Pero, hay también un contexto menor e inmediato que propicia el desarrollo de las competencias, como es el aula de clase. El aula debe propiciar y promover un ambiente de aprendizaje que permita ese crecimiento de las competencias en matemáticas; aquí, el rol de profesor es clave, en tanto que este se debe esperar en presentar situaciones problemas significativos, comprensivos y relevantes para el estudiante; así, se posibilita un avance rápido y consolidado a niveles de competencias más y más complejos.

El aprendizaje de las matemáticas se da, pues, de forma gradual, continua e integradamente, porque así se logra la superación de los niveles de complejidad creciente que se plantea en el proceso educativo matemático. Esto necesita e implica una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La coherencia vertical supone la integración y relación de un estándar general con los otros estándares del mismo pensamiento que se imparte en los otros grados. La segunda implica el mismo proceso de integración, pero de un estándar particular.

Así, por ejemplo, la función cuadrática en el nivel de octavo a noveno grado, en la coherencia vertical se da con el pensamiento variacional; mientras que en la coherencia horizontal estará subordinada a la tarea particular asignada al estudiante.

Por otro lado, en el documento de los estándares se da mucha importancia al conocimiento previo del estudiante; es decir, cuando el estudiante va a la escuela ya tiene un saber sobre matemática, que aprendido en su casa y en su vida cotidiana. Este conocimiento matemático, de naturaleza informal, debe ser aprovechado por el docente. En esta medida se alimentan en el estudiante actitudes positivas hacia las matemáticas como el aprecio, la seguridad y la confianza. Se trata de hacer uso mayéutica de este saber informal matemático, que unido con el conocimiento formal, permite la aplicación de las matemáticas en diversos y variados contextos de uso.

Así mismo, el documento de los estándares de competencias en matemáticas se propone orientaciones referidas a la evaluación. Se inclina por la evaluación formativa, más que la acumulativa, que unida con una adecuada presencia y uso de los materiales y recursos didácticos, permiten el progreso en el aprendizaje matemático; por supuesto sin olvidar las actividades tanto individuales como grupales. Todos los elementos didácticos se adaptan al grado en el que esté ubicado el estudiante. A continuación, para efectos de este trabajo, se presenta una breve

descripción del pensamiento variacional, el cual se va a tener en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

El Pensamiento Variacional

Puesto que el pensamiento variacional se vincula directamente con la función cuadrática, se consideró necesario ampliar un poco más lo que se propone en el MEN para su desarrollo, pues se busca mirar la coherencia curricular en las praxeologías didácticas.

El pensamiento variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático del concepto de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Desde lo matemático hay una relación directa con los otros pensamientos, muy especialmente el métrico pues el pensamiento variacional se encarga, fundamentalmente, de la modelación matemática y esto requiere de la activación constante de procesos de medición, elaboración de registros y establecimiento de relaciones entre cantidades de magnitud (MEN, 1998).

Es así como la comprensión de las situaciones provenientes de la observación y la sistematización de patrones y regularidades, tanto numéricas como geométricas, las variaciones proporcionales, las ciencias experimentales, la ingeniería y demás áreas del conocimiento que se basen en los principios de cálculo diferencial, adquieren más sentido cuando se estructuran desde el pensamiento variacional (Universidad de Antioquia, 2007, p. 15).

El pensamiento variacional puede describirse como una manera de pensar dinámica que intenta reproducir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que

covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p. 70)

El MEN (1998) mostró que el desarrollo del pensamiento variacional debe iniciarse desde los primeros años de escolaridad a través de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de variación y cambio, cuyo interés se enfatice a que sean situaciones de la vida práctica buscando propiciar la implementación de estos procesos por parte de los estudiantes y tratar de que los reconozcan, se familiaricen con ellos y le faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos.

Por tanto, el MEN (1998) delega al profesor una gran responsabilidad, ya que le encarga el estudio de los diversos aspectos que intervienen en el aprendizaje del estudiante como lo es el aspecto sociocultural, espacio que le ofrece unas herramientas al individuo desde las cuales él puede abordar o interpretar todo lo que pueda influenciar su formación, el docente debe tenerlo en cuenta y tratar de potenciar este aprendizaje mediante el diseño e implementación de situaciones amplias y diversas que vayan orientadas a que los alumnos puedan establecer relaciones con su accionar cotidiano y sus experiencias escolares. Con esto se hizo evidente que el futuro maestro que vaya a desempeñar la labor de enseñar las matemáticas debe vigilar que su práctica sea coherente con la propuesta del MEN (considerando básicamente el funcionamiento en el ámbito escolar).

Ante lo expuesto, surge la necesidad de considerar el caso del texto escolar, ya que como se mencionó éste tiene una función educativa ayudando al estudiante a acercarse al conocimiento matemático. Sin embargo, este acercamiento al conocimiento que pretende el texto no es fácil de lograr, debido a consideraciones que se destacan en la propuesta del MEN. El texto escolar no

siempre tiene presente los aspectos socioculturales que caracterizan a cada individuo por ser un objeto comercial que depende de su aceptación masiva. También se puede presentar el caso de que la propuesta del texto escolar no considere que los procesos de enseñanza estén encaminados al desarrollo de competencias básicas en Matemáticas.

En fin, el documento de los estándares de competencias en matemáticas muestra las políticas curriculares y pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia; al tiempo que propone orientaciones puntuales en el nivel operativo y funcional del aula, que permitirán el desarrollo continuo, progresivo e integral del pensamiento matemático general. En el caso particular, el pensamiento variacional aporta en la formación matemática una forma de pensar dinámica, cambiante, adaptable y libre para la comprensión y resolución del problema planteado, que dependerá del contexto sociocultural cotidiano y real del estudiante y de su personalidad. Estos elementos son importantes en este proyecto en tanto que va a permitir una mejor propuesta en el marco del Aprendizaje Basado en Proyecto para el aprendizaje de la función cuadrática, centrada en los procesos de modelación matemática.

A continuación, se muestra la gráfica 2, en el cual se relacionan algunos estándares articulados al estudio de la función (ecuación cuadrática), en el grado noveno. Para objeto de este trabajo se hace referencia a la coherencia vertical y horizontal, del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos con los estándares de otros pensamientos y de él mismo.

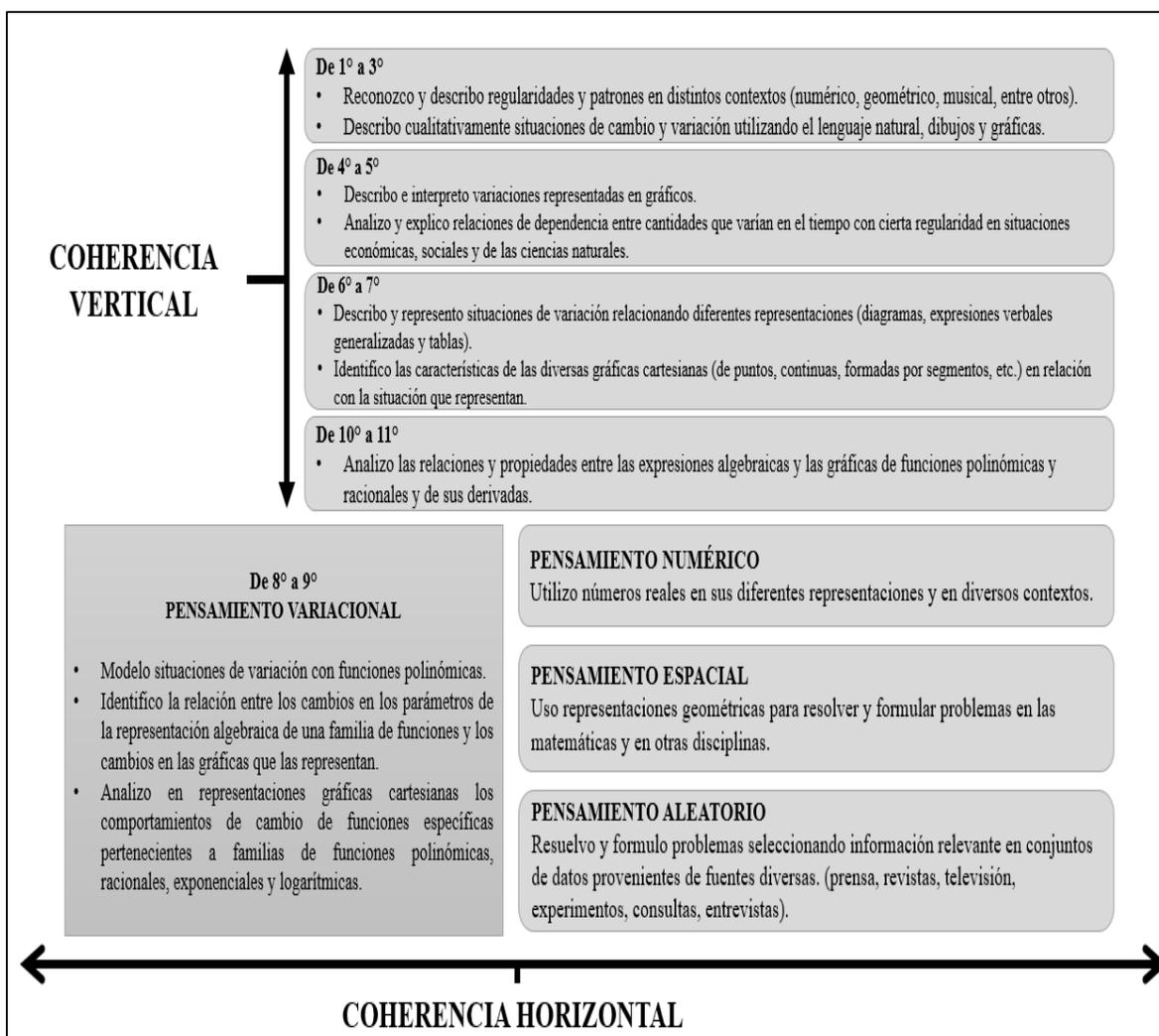


Ilustración 4. Cuadro de coherencia vertical y horizontal, con referencia al pensamiento variacional. Fuente: Estructura obtenida de Estándares Básicos de competencia matemáticas (MEN, 2006).

Como se pudo observar en el esquema anterior, el concepto, la representación y la contextualización de función están presente en diferentes pensamientos, de tal manera que lo dicho por el MEN (2006) en cuanto a la relación que hay entre los elementos conceptuales y los cinco tipos de pensamiento matemático y que a su vez son aprovechados para el diseño de situaciones de aprendizaje. En nuestro caso será un gran recurso para fortalecer y darle base suficiente a la elaboración del proyecto, teniendo en cuenta la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos.

2.2.3 Derechos Básicos de Aprendizaje

En el afán de mejorar la calidad educativa del país, el gobierno, y en particular el Ministerio de Educación, ha venido desarrollando diferentes herramientas para fortalecer las prácticas escolares y así mejorar los aprendizajes de los niños, niñas y jóvenes de Colombia. Por eso han desarrollado Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), como una herramienta dirigida a la comunidad educativa en el cual se identifican los saberes básicos que se pretende deben aprender los estudiantes en cada uno de los grados de escolaridad, de primero a once, y en las áreas de Lenguaje y Matemáticas.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje se relacionan estrictamente con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC) para guardar su coherencia en los contenidos que se enseñan. La diferencia que este documento presenta con los lineamientos, es que en este se plantean elementos para la construcción de rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grado escolar. Pero, no obstante, los DBA se deben considerar como un apoyo para el desarrollo de propuestas curriculares que pueden ser articuladas con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, esto quiere decir, que cada institución de autónoma de generar sus propias estrategias, pero partiendo de estos recursos dados por el ministerio, así mismo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales materializados en los planes de área y de aula.

Sin embargo, esta relación estricta que el Ministerio de Educación plantea en los tres documentos (Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje) solo se da a nivel teórico, pero no en el sentido práctico de aula. Así, por ejemplo,

si se toma el objetivo para la función cuadrática que se indica en los Derechos Básicos de Aprendizaje se puede percibir esta contradicción.

En los Derechos Básicos de Aprendizaje se señala este saber básico para la función cuadrática:

Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e$, o $y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros a , c , d , e , f y g , y su simetría en la gráfica. (Grado 9º, p. 2)

Y luego, se propone un solo y único ejercicio para lograr este aprendizaje, pero este ejercicio solo tiene una única solución, y con ello queda eliminado el pensamiento variacional, que se establecen en los Lineamientos Curriculares; así el proceso de modelación se reduce también a una sola manera de representar cognitivamente el problema que se propone. De igual manera, en relación con los Estándares Básicos de Competencias es imposible que un solo ejercicio para este contenido de función cuadrática contribuya a la adquisición, desarrollo y consolidación de ese conocimiento matemático y al mismo tiempo a las cuatro competencias que se debe poseer, este ejemplo se reduce a utilizar la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes, porque las otras (Resuelvo problemas, Utilizo números reales, Identifico y utilizo la potenciación) no son tomadas en cuenta.

Por otro lado, los conocimientos que se requieren para dar solución al problema planteado para lograr ese objetivo de la función cuadrática están dispersos; es decir, los conocimientos de representación gráfica, resolución de variables, etc.), están algunos antes y después de la función cuadrática. No se ofrecen otros ejercicios que, aunque no sean resueltos en el documento, pudieran

dejar la puerta abierta otras posibilidades y su adaptación a los diversos contextos socioculturales e institucionales de Colombia. La función cuadrática se puede estudiar sin el uso de fórmula matemática, se puede usar para contar colecciones, dar soluciones a problemas en contextos geométricos, entre otros).

La progresividad en el aprendizaje del conocimiento matemático, como señala los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, sugiere que primero se estudia la fórmula canónica de la función cuadrática y luego las distintas escrituras de su fórmula. De tal forma que no es oportuno estudiar esos dos saberes en un solo contenido como plantean los DBA de la función cuadrática. Se puede decir que no hay una estricta coordinación, relación y coherencia pedagógica y educativa entre los tres documentos.

Los saberes educativos básicos de los Derechos Básicos de Aprendizaje, referidos a la función cuadrática, sugieren a esta investigación que la propuesta que se pretende realizar no se puede limitar a un solo y único ejercicio, que tiene la limitante de una sola y única respuesta. La propuesta por realizar se debe abrir como un abanico de posibilidades que permite fortalecer el aprendizaje de la función cuadrática desde diversas maneras de ver su uso en la vida cotidiana del estudiante.

2.3 PERSPECTIVA MATEMÁTICA

En este apartado no se ahondará en el desarrollo histórico del objeto matemático involucrado en el proyecto, como es la función cuadrática; sino que se hará referencia a la teoría matemática formal que acepta o rechaza la manera como se abordan las definiciones de la función en la escuela.

Durante la época escolar los estudiantes se ven enfrentados a diversas definiciones y propiedades en torno a la función, y cómo este concepto tiene diversas variantes a causa del discurso del docente, lo cual afecta la interpretación de los estudiantes. La forma es la que el estudiante adquiere estos conocimientos y el discurso que se maneja, son el resultado del proceso de aprendizaje durante el tiempo y es la forma como él ha entendido dicho tema.

En la perspectiva matemática se tomará en cuenta el concepto de función en general desde Azcárete, C. (1996); pero como este proyecto está centrado en la función cuadrática se realiza un estudio de la misma desde la perspectiva que se brinda en el libro *Matemática, Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*, de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010).

2.3.1 Aspectos Formales De la Función

La introducción, al estudio de la función en la escuela, está mediada por la conceptualización y formalización del mismo concepto, apoyados en la teoría matemática construida a través del tiempo. Tales referentes teóricos sufren cambios en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje por medio del discurso utilizado por el docente y los textos escolares que se utilizan en el aula de clase. A continuación, se realiza un acercamiento del concepto de función en general desde la perspectiva de Azcárete C (1996) presentado en su libro *Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje*

¿Qué es una función?

De manera intuitiva, se puede decir que una función matemática se puede ver como una dependencia entre cantidades u objetos variables. En una función se pueden definir distintos parámetros, los cuales la componen con respecto a su notación matemática.

El Problema de Definir: Diversas Definiciones en los Libros de Texto

El problema de las definiciones encontradas en los libros de texto, son de diverso tipo, cuando son las más intuitivas y básicas en su forma les falta fuerza; cuando son difíciles y rigurosas, causan confusión y problemas en su interpretación pues abarcan un mayor número de casos lejanos a la realidad. En los libros de texto, antiguos o actuales, la metodología que se emplea para introducir el concepto es muy variada, hay libros en los cuales se encuentra la definición seguido de un estudio teórico, hay otros que parten de la definición y siguen con ejemplos concretos y en algunos casos alejados de la realidad, y otros, abordan el estudio de funciones desde ejemplos que luego servirán para llegar a la definición.

En el libro de Azcarate, se presentan algunos ejemplos del tratamiento que se le da a los libros de texto respecto al concepto de función a partir de unos libros de texto observados en la secundaria E. Castelnuovo (1996), en estos se pueden observar las distintas definiciones las cuales clasifica como:

- Correspondencia entre valores de variables.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos.
- Dependencia entre dos variables.
- Conjunto de pares ordenados.

Azcarate menciona que por la gran variedad de definiciones que se presentan del concepto de función, no existe un criterio estándar el cual permita introducir este concepto de la misma manera para todos. También, este diverso tipo de definiciones involucran otros términos como:

variable, correspondencia, relación etc. Los cuales no son definidos para su facilidad de interpretación.

Características de una Función $f(x)$

Para que una función esté bien definida debe cumplir dos condiciones:

- Que todo x (variable independiente) tenga una imagen, es decir, que la función esté definida para todas y cada una de las x del dominio.

- Que cada x tenga una y solo una imagen, es decir, que no que cada x del dominio debe corresponder un solo elemento. Debe estar unívocamente definida.

Como lo menciona Azcárate, una función está formada por:

- Un dominio
- Un conjunto de llegada (codominio)
- Una regla tal que cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio.

Formas de expresar las funciones que son:

- Expresión verbal
- Fórmula
- Tablas

- Gráficas

Tabla, Gráfica y Fórmula de una Función

Tablas

La construcción de las tablas consta de dos filas, o también dos columnas, en una de las casillas se registran los elementos del dominio de la función y en la segunda, se ubican los elementos correspondientes al conjunto de llegada (codominio). Así pues, aparecen explícitamente los pares de origen – imagen, que se suelen simbolizar como x e y .

Ejemplo: “Dado un x arbitrario del subconjunto de Z , $10 < X < 20$, al dividirlo por 7 tiene asociado un resto y , que es uno de los elementos del conjunto S ”. X, Y

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	4	5	6	0	1	2	3	4	5

Tabla 2 Elementos x, y . Fuente: Azcárate (1996) Funciones y gráficas.

Como se observa en el ejemplo anterior, el dominio de la función es un conjunto finito y por tanto se puede expresar todos los pares origen – imagen de la función. Por otra parte, cuando el dominio es un conjunto infinito, solo se puede hacer una representación parcial y se escogen unos cuantos valores que representen la función.

La construcción de la tabla permite observar regularidades en el comportamiento de la función, como son: diferencias constantes, diferencias que crecen o decrecen, productos o cocientes constantes, etc. Además, es de gran utilidad para recoger datos experimentales, tanto para verificar una ley como para averiguarla.

Gráficas Cartesianas

La representación gráfica más clásica y más común es el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la cual está conformada por dos rectas perpendiculares, la horizontal representa el eje x (abscisas), la vertical representa el eje y (ordenadas). El punto de intersección de las rectas se conoce como origen de coordenadas y se representa con O . Cada punto P en el plano tiene asignado dos números, uno x y otro y , las cuales indican la distancia a los ejes respectivamente, y se va a expresar cómo las coordenadas del punto

$P(x, y)$. Ver Ilustración 5.

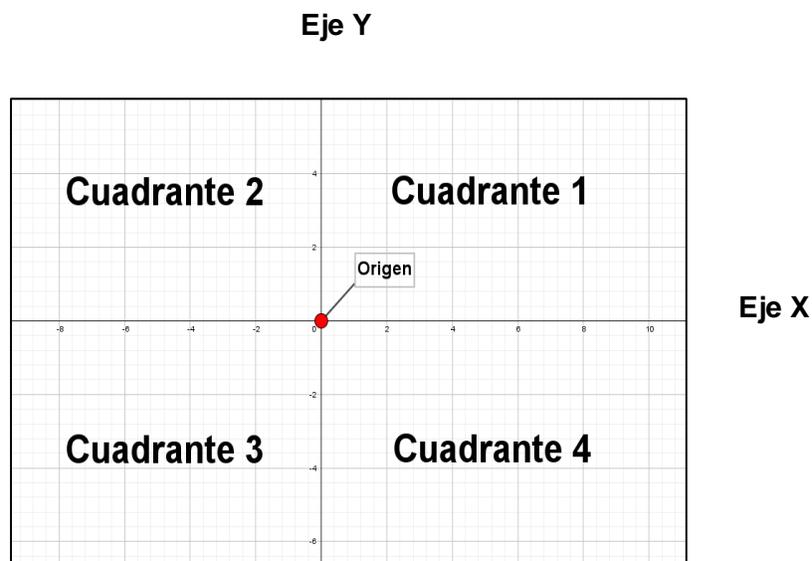


Ilustración 5 Plano cartesiano. Fuente:
<https://www.matematica7.com/plano-cartesiano.html>.

Los problemas que usualmente se trabajan con la gráfica de una función, es su lectura e interpretación. También, se puede construir la gráfica de la función a partir de la tabla con algunos valores (pares), los cuales se trasladarán a los puntos correspondientes en el plano cartesiano.

En la perspectiva matemática se hizo un acercamiento del concepto de función en general desde Azcárete, C. (1996); pero como este proyecto está centrado en la función cuadrática se realiza un estudio de la misma desde la perspectiva que se brinda en el libro *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*, de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010).

A diferencia del libro de Azcárete, C. (1996) que se centra en lo teórico y poco en lo didáctico, el libro de Illuzi, A. y Sessa, C. (2010) pone énfasis en lo didáctico y lo práctico. La teoría surge de ese manejo práctico, mediante ejercicios divertidos y amenos.

En los dos primeros capítulos (*Construcción de fórmulas cuadráticas para contar colecciones* e *Introducción a la función cuadrática a partir de problemas en contextos geométricos*), se estudia la función cuadrática sin el abordar de su fórmula matemática y sin los elementos que esto implica. Así el primero propone situaciones que implican el conteo de ciertos elementos de una figura cuyo “tamaño” varía”, así que puede haber más de una solución y varias formas de dar esa respuesta; esto evidencia la presencia del pensamiento variacional. Mientras que el segundo capítulo propone el análisis del modo de variación de una función cuadrática y la forma de su gráfica. La función cuadrática se puede aplicar en la solución de varios tipos de problemas y esto también plantea que la resolución de puede representar en diversas formas (tabla de valores, gráfica cartesiana, fórmulas, etc.); también se busca que el estudiante puede hacer varias fórmulas equivalentes. Nuevamente, se hace presente el pensamiento dinámico, cambiante y adaptable a varias situaciones de vida.

El tercer capítulo estudia la función cuadrática a partir de la forma canónica de su fórmula. Se observa en este capítulo un proceso de progresividad del aprendizaje matemático, porque solo después de dos capítulos aparecen con propiedad los elementos formularios de función cuadrática. A partir de su fórmula, se expone situaciones geométricas que involucran funciones cuyo gráfico es una parábola. Se usa la expresión canónica de la función cuadrática. En el capítulo siguiente, se usa la forma factorizadas y la desarrollada: $ax^2 + bx + c$. Por eso este capítulo cuarto resuelve problemas usando distintas expresiones algebraicas de una función cuadrática. Se quiere que el alumno comprenda, mediante los distintos ejercicios y actividades, que cada expresión de la fórmula de una función cuadrática aporta una información particular sobre la parábola.

Otro aspecto didáctico de este libro analizado es el uso de actividades grupales e individuales, así como escritas y otras cuyas soluciones se dan de modo oral. Y un mismo tema es estudiado con varios ejercicios y dan más de tres o cuatro posibles soluciones (si es el caso); esto con el fin de advertir al profesor de las diversas maneras que puede ser modelado esos problemas planteados.

Esta visión del aprendizaje de las matemáticas y de modo particular de la función cuadrática que presenta el libro Illuzi, A. y Sessa, C. (2010) es muy orientador cuando se quiere hacer una propuesta que favorezca el aprendizaje de la función cuadrática, privilegiando los procesos de modelación matemática, porque ofrece muchos elementos didácticos y prácticos a ser considerados e imitados; así, por ejemplo, la presencia del pensamiento variacional en la resolución de los ejercicios; también, se centra únicamente en cuatro aspectos básicos de la función cuadrática y no en muchos objetivos que pudieran saturar y agotar al estudiante; presentan varios ejercicios en cada objetivo; se usan colores en las representaciones gráficas o en las otras

respuestas; ofrecen actividades individuales y grupales, cuyas respuestas pueden ser orales o escritas o ambas; brinda orientaciones al docente y permite que los ejercicios pudieran ser modificados y adaptados al contexto de aula.

A continuación, se presenta la teoría correspondiente al objeto matemático de función, en particular el de función cuadrática. Esta teoría matemática fue tomada de los textos académicos de Zill y Dewar (1992).

2.3.2 Concepto General Del La Función Cuadrática

La función cuadrática o polinomio o de segundo grado, es una función definida de \mathbb{R} en \mathbb{R} de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Formas de la función cuadrática

Analizando la forma general de la función cuadrática se observa que tiene tres términos:

Un término donde la variable está elevada al cuadrado (ax^2).

Un segundo término donde la variable está elevada a la potencia 1, (bx).

Un tercer término cuya variable tiene potencia cero y término constante c .

Sin embargo, es posible, que la función cuadrática se presente de otras formas, así:

De la forma $f(x) = ax^2$

De la forma $f(x) = ax^2 + bx$

De la forma $f(x) = ax^2 + c$

De la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Se debe tener en cuenta que si $a > 0$, la curva abre hacia arriba y si $a < 0$, la curva abre hacia abajo.

Ahora miraremos cada una de las formas en que se presenta la función cuadrática:

De la forma ax^2

En este caso la función cuadrática está incompleta, faltan los términos segundo y tercero, es decir, los términos $ab = 0$ y $c = 0$.

Es una función cuadrática porque el grado está dado por el mayor exponente de la variable, es decir 2.

La gráfica de la función $f(x) = ax^2, a \neq 0$, es una parábola y en ella se verifica que:

- Es simétrica respecto al *eje y*.
- El vértice es el origen del sistema de coordenadas $(0,0)$.
- El signo del coeficiente a , de la forma en que se abre la gráfica, de tal manera que si $a > 0$, se abre hacia arriba y si $a < 0$ la curva se abre hacia abajo.
- El punto donde la curva cambia de dirección se llama vértice.

De la forma $f(x) = ax^2 + bx$

Se puede decir que esta función también está incompleta, debido a que le falta el término constante c , es decir, $c = 0$.

Si graficamos la función teniendo en cuenta los signos nos damos cuenta que cuando el término bx es positivo, la curva se desplaza hacia la izquierda y cuando el término bx es negativo la curva se desplaza hacia la derecha.

La gráfica resultante de este tipo de función permite concluir que se trata de una parábola. En este caso:

- Su eje de simetría es el *eje y*.
- La abertura de sus ramas está determinada por el coeficiente x^2 ; esto es, si $a > 0$, entonces, las ramas de la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$, entonces, lo hacen hacia abajo.
- El punto $(0,0)$, origen del sistema de coordenadas, satisface este tipo de funciones.
- El signo del segundo término bx indica la forma en que la curva se traslada sobre el eje de las x .

De la forma $f(x) = ax^2 + c$

Es otra de las formas incompletas de la función cuadrática, donde el término $bx = 0$.

Al graficar esta función notamos que cuando la constante c es positiva la gráfica se desplaza hacia arriba y cuando es negativa se desplaza hacia abajo.

- La representación gráfica de esta función cuadrática es una parábola

- Es simétrica con respecto al eje de las y .
- La abertura de la parábola está determinada por el coeficiente del término x^2
- El vértice de la parábola es un punto de la forma $(0, c)$.
- El término independiente y su signo indican cuánto se desplaza el vértice de la parábola sobre el eje de las y en relación con el punto $(0,0)$.
- Si el coeficiente de x^2 es positivo, la parábola abre hacia arriba y si es negativo, entonces abre hacia abajo.

De la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ahora haremos el análisis de la forma completa de la función cuadrática; para ello se necesita graficar por lo menos dos funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ en un mismo plano, al graficarlas se puede concluir que:

- La gráfica de este tipo de funciones es una parábola.
- Su eje de simetría es paralelo al eje y .
- El coeficiente y el signo del término en x^2 determinan la abertura de las ramas de la parábola.
- El signo del término independiente c indica el punto de corte de la curva con el eje de las y , y su magnitud.
- El vértice de la parábola tiene como coordenadas: $x = -b/2a$; $y = 4ac - b^2 / 4a^2$.
- En éste tipo de funciones se dan las diferentes formas de desplazamiento de la parábola, desplazándose en el eje y , hacia arriba y hacia abajo y en el eje x desplazándose hacia la izquierda y hacia la derecha.

- Cuando en una función cuadrática hacemos $y=0$ se dice que es una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in R, a \neq 0$. Teniendo en cuenta esta consideración si $\Delta = b^2 - 4ac$, se cumple que:

Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y diferentes.
Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales e iguales.
Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene solución en los R, las raíces son complejas.

Finalmente, es necesario unas reflexiones sobre las tres perspectivas analizadas como se muestra en la siguiente ilustración. La perspectiva didáctica advierte que es necesario desarrollar actividades que contribuyan a una mejor comprensión e interpretación del concepto de Función por parte del estudiante; no deben ser actividades descontextualizadas e irreales al mundo del estudiante; y, al mismo tiempo, con un alto grado de abstracción para el grado donde se encuentra el estudiante, de forma tal que este puede tratar con destrezas y habilidad las expresiones algebraicas a nivel simbólico (si es el caso) o su manejo en representaciones gráfica o natural.

Por su lado, la perspectiva curricular hace énfasis en los aspectos sociales, culturales y políticos en el manejo del aprendizaje de las matemáticas; como un saber formal práctico, las matemáticas se introducen en la vida del estudiante y solicita de las autoridades una educación de calidad, enraizada en los valores democráticos y sociales. Un marco de Aprendizaje Basado en Proyecto para el aprendizaje de la función cuadrática debe también tener en cuenta esos valores.

Mientras las dos perspectivas anteriores (didáctica y curricular) se centran en el escenario de la enseñanza, así como en las actividades y los materiales didácticos del aprendizaje, la perspectiva matemática se centra en el que enseñar; es decir, en el contenido teórico y nocional que es oportuno

para estudiantes de grado 9° de educación básica, que van a aprender la función cuadrática, mediante el privilegio de procesos de modelación matemática. De tal forma que la perspectiva matemática obliga a una adaptación de lo teórico al contexto del desarrollo cognitivo y mental del estudiante para así facilitar es modelación matemática de la función cuadrática.

De acuerdo a las perspectivas mencionadas anteriormente, en la siguiente ilustración 6, podemos observar los aportes que realizan cada una de estas perspectivas a grandes rasgos para el desarrollo de este trabajo:

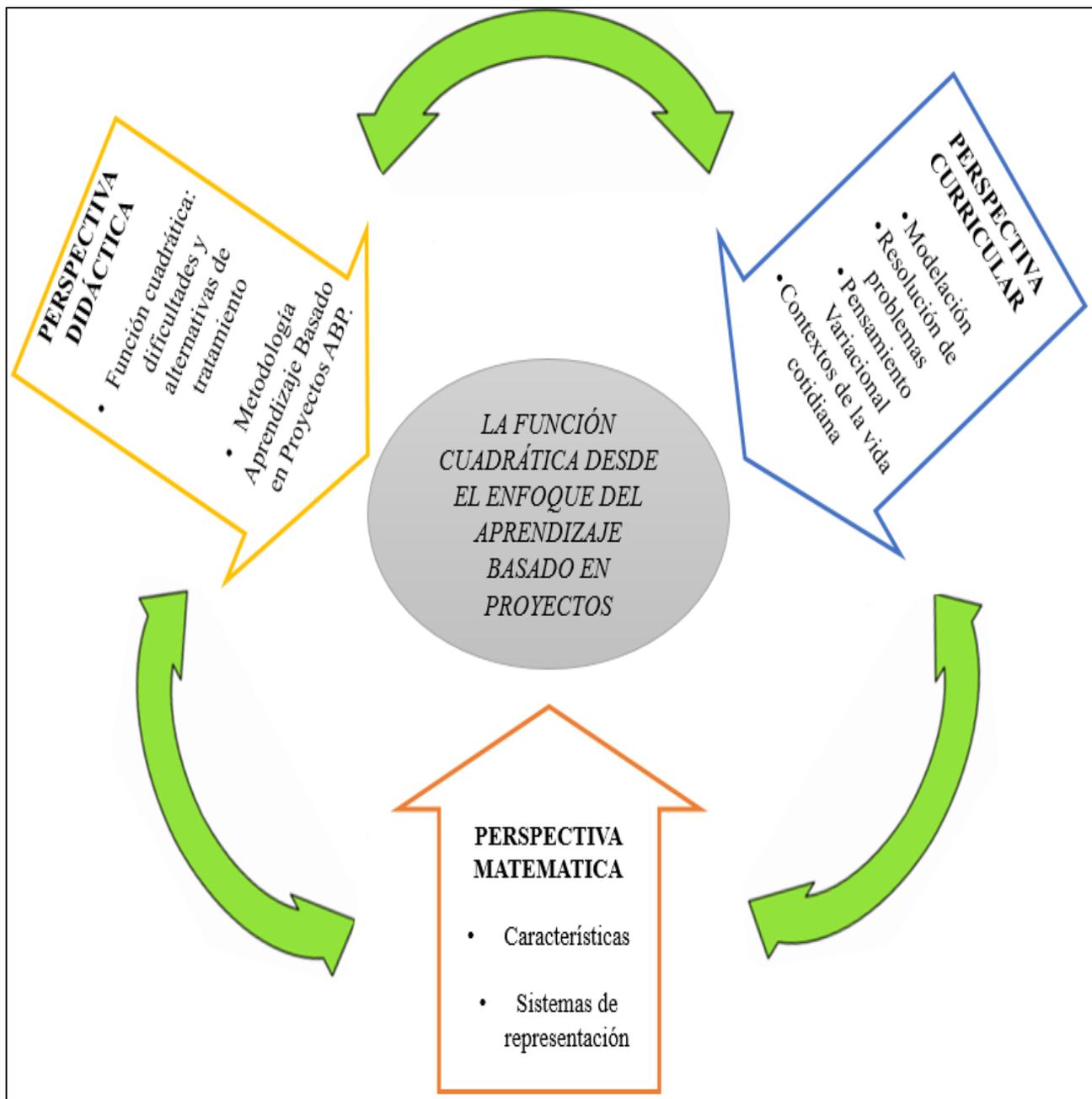


Ilustración 6 Relación entre las perspectivas. Fuente: Propia

CAPÍTULO III.

III. METODOLOGÍA DE IMPLEMENTACIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos relacionados con el diseño de un proyecto escolar sobre la construcción de una compostera, en el cual se busca favorecer el concepto de función cuadrática en estudiantes de grado noveno, tales como la descripción general del proyecto, la estructura de las situaciones. Posteriormente se presenta la metodología la cual permitirá el logro de los objetivos propuestos en este trabajo de grado, se organizará a través de tres fases, en las que se muestra el proceso para terminar la elaboración de la propuesta de aula, los participantes que harán parte del estudio, los materiales, herramientas e instrumentos que serán usados para la recolección de datos que servirán después para el análisis de la información y datos recogidos.

3.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo de grado se busca contribuir al proceso de aprendizaje de la función cuadrática a partir de la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos en estudiantes de noveno grado de educación media, en la cual, se quiere conducir a los estudiantes a que enfrenten situaciones y problemas de su vida cotidiana, que eventualmente puedan dar lugar u origen al uso y reconocimiento de funciones. En el marco este objetivo y en vista de los pocos antecedentes relacionados con este trabajo, es importante reconocer que esta propuesta de enseñanza y aprendizaje a través del Aprendizaje Basado en Proyectos, da un paso muy grande a las acciones que se llevaban dentro y fuera de un aula de clase, es decir, con esto se busca establecer una unión que sea realmente importante entre los conceptos matemáticos y la vida real. En este sentido, se debe buscar un método que permita un acercamiento al escenario de investigación y a los

estudiantes. De esta manera se realizará dicha investigación teniendo en cuenta el tipo de estudio que se llevará a cabo, descripción de la institución y los sujetos participantes en el estudio y fases de investigación.

3.2 TIPO DE ESTUDIO

Se realizará un trabajo de corte mixto, llamado así debido a que se combinarán el método de investigación cualitativo y el método cuantitativo. El método mixto posee varias ventajas según lo afirman Sampieri, Fernández Collado & Baptista Lucio (2006) como son: amplitud en los datos que serán recolectados, diversidad, profundidad, riqueza interpretativa, mayor sentido del entendimiento, de igual manera el poder usar la conversión de datos cualitativos en cuantitativos y viceversa.

En este trabajo de grado se tendrá en cuenta ~~las siguientes~~ herramientas de corte cualitativo y cuantitativo, como son las hojas de trabajo, imágenes fotográficas y videos. Ya que cada método nos ofrece una variedad de beneficios como son el método cuantitativo nos ayuda en la investigación a obtener datos precisos que den fidelidad a los resultados, mientras que el método cualitativo enriquece nuestros hallazgos en las observaciones sobre los comportamientos de los estudiantes frente a las actividades que se desarrollan en luz del ABP, así, proporcionando mayor profundidad, aclarando dudas y brindando mayor comprensión de los resultados encaminados a la pregunta de investigación. Para posteriormente analizar los argumentos, respuestas o justificaciones que dan los estudiantes al resolver problemas referentes al pensamiento variacional, así mismo, observar y analizar qué conocimientos previos o qué obstáculos tienen al momento de resolverlos y en qué conceptos presentan mayores dificultades y mayores fortalezas, lo cual nos ayudará para las conclusiones y reflexiones al final.

3.2.1 Descripción de la institución



Imagen 1. Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal. Fuente: Propia.

La Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, (urbana) de carácter oficial, se encuentra ubicada en la ciudad de Cali del departamento del Valle del Cauca, comuna 18 más específicamente en la Cl. 2C Oe. # 83-30. La institución cuenta con 5 sedes así: Magdalena Ortega De Nariño, Monseñor Luis Adriano Díaz, Sede Principal La Esperanza, Minuto De Dios, Academia José María Cabal.

Actualmente la Institución Educativa La Esperanza cuenta con 3.270 estudiantes en total, atendiendo, de estos a 1.775 en la sede General José María Cabal.

3.2.2 Principios y Fundamentos Institucionales

La Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, bajo su componente filosófico busca favorecer la construcción de seres humanos con valores encaminados hacia la convivencia pacífica y el respeto en la toma de decisiones teniendo en cuenta las dimensiones individual y colectiva orientadas en los procesos cognitivos a partir de principios universales como el desarrollo integral, el espíritu de autonomía, la búsqueda y el posicionamiento en su entorno social, cultural económico y político que responda a la diversidad poblacional de la comunidad. Se debe resaltar que también se procura que exista una interacción entre los padres de familia, los

profesores, estudiantes y directivos, con el fin de ser parte fundamental en la integridad y desarrollo de los estudiantes.

3.2.3 Descripción de los Estudiantes

Para llevar a cabo la implementación de la propuesta, se contó con la participación de 10 estudiantes del grado 9° de la IE la Esperanza; conviene aclarar que estos estudiantes fueron seleccionados de manera aleatoria, pues la aplicación solamente pudo realizarse durante la semana de desarrollo institucional del mes de octubre, y por cuestión de tiempo los estudiantes tuvieron que asistir en días en los que no había actividad escolar. Inicialmente se pensó en trabajar con estudiantes que habían presentado dificultades en el aprendizaje del concepto de la función cuadrática, pues el docente ya había abordado dicho tema, pero finalmente se contó con la participación de estudiantes que manejaban diferentes niveles de información, y que aceptaron participar en la actividad.

3.3 FASES DEL DISEÑO

El desarrollo de cada una de estas fases está estrechamente relacionado con las actividades definidas en los objetivos tanto general como específicos, así mismo, como en las fases descritas en el Aprendizaje Basado en Proyectos. El diseño de este proyecto se dará en tres fases que son:

3.3.1 Fase 1: documentación de la problemática

En la primera fase, se documenta la problemática, se ha identificado el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática en 9° grado; y para ello, se han tenido en cuenta los reportes que los investigadores citados en los antecedentes locales y nacionales identifican como dificultades en el aula cuando se enseña matemática. De igual forma, se tiene en cuenta

las perspectiva didáctica, curricular y matemática para abordar desde estos tres campos las distintas problemáticas que este concepto presenta desde cada uno de estos campos.

Así también, en esta fase se tendrán en cuenta las opiniones de los profesores, con quienes se conversa sobre las falencias que encuentra en el aprendizaje de las matemáticas. además, ver cómo ellos abordan la solución de esos problemas y de modo específico la manera de encontrar una solución a la enseñanza de la función cuadrática.

3.3.2 Fase 2: diseño e implementación

En la segunda fase, se diseñarán las estrategias a ser aplicadas. Se hará uso del Aprendizaje Basado en Proyecto (A.B.P), a través de la modelación de la función cuadrática a explicar iniciando a los estudiantes en un proceso en el cual se relaciona lo aprendido con situaciones de contextos reales en el cual se reconoce el contexto de los estudiantes, el desarrollo del pensamiento variacional y elementos característicos de la función cuadrática. En esta fase se seleccionarán las situaciones problema que serán aplicadas a los estudiantes de grado noveno y estas se organizan en actividades o tareas. De igual forma, se tendrán en cuenta que el proyecto debe estar contextualizado en la realidad, por lo cual se toma como contexto la elaboración de una compostera. También, se recolectarán los datos y esto se llevará a cabo durante un determinado tiempo con estudiantes que cursan noveno grado. Se utilizarán los siguientes instrumentos de recolección de datos: registros de video, fotografías y hojas de trabajo, los cuales servirán para su posterior análisis.

3.3.3 Fase 3: análisis y conclusiones

En la tercera fase, se analizarán los resultados y a partir de esto se determinarán los avances y las dificultades que presentaron los estudiantes, además, se hará una evaluación de la metodología diseñada en el A.B.P; y se darán las conclusiones finales a partir de los resultados y la elaboración del proyecto, de igual forma, se harán reflexiones didácticas y, por último, se presentarán las conclusiones.

Por otra parte, en el anexo 1, se encuentra la descripción del proyecto “Haciendo Útiles Los Desechos Orgánicos De Mi Restaurante Escolar”.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LAS SITUACIONES

Estas situaciones tienen como objetivo construir el concepto de función cuadrática y favorecer la apropiación de algunos elementos de dicha función, a través del estudio de un fenómeno de variación y cambio en el contexto de la elaboración de abono con base en desechos orgánicos. Se han diseñado para el trabajo con estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José Ma. Cabal.

Esta propuesta se caracteriza por tener una problemática real (el mal manejo de los residuos orgánicos del restaurante escolar), que presenta la Institución y que a su vez busca darle una solución a esa problemática a través, del desarrollo de un proyecto escolar, el cual tiene como nombre “Haciendo Útiles Los Desechos Orgánicos De Mi Restaurante Escolar”, dicho proyecto busca mitigar el mal manejo de los residuos y a su vez, tener un acercamiento de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática en la vida cotidiana.

Dicho lo anterior, consta de dos situaciones problema, estas situaciones consta cada una de dos actividades que fueron enumeradas debido al objetivo que buscaban, a continuación, se describe cada una de ellas:

3.4.1 Situación 1

Esta situación busca identificar, el modelo matemático que mejor modela la situación sobre qué cantidad de material orgánico se debe almacenar para producir una cantidad “x” de compost.

ACTIVIDAD 1: Comprendiendo la situación

La actividad consta de 7 preguntas abiertas, dejando un espacio en blanco en cada una de ellas, para que los estudiantes hagan sus observaciones.

La actividad empieza haciendo que los estudiantes recuerden el concepto de función lineal desde su definición, expresión algebraica y su utilidad; además conduce a los estudiantes a explorar la forma gráfica de una parábola y su ecuación cuadrática a través de una serie de tareas que se realizarán con ayuda de GeoGebra.

Por otro lado, el objetivo de esta actividad 1 es que los estudiantes recuerden el concepto de función lineal, reconozcan para qué sirve y a su vez, su utilidad en la vida cotidiana. Así mismo, identificar otra forma gráfica de una función, es decir, pasando de una forma lineal a la forma una parábola, y la expresión general de la función cuadrática.

ACTIVIDAD 2: Explorando los parámetros de la función cuadrática

La actividad consta de 13 preguntas abiertas, al igual que en la actividad anterior se dejan espacios para reflexiones y observaciones sobre las tareas presentes en esta actividad.

El objetivo de la actividad 2, es que el estudiante tenga un acercamiento con los parámetros a , b y c , que se encuentran presentes en la función cuadrática de la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, y a su vez, puedan conjeturar la definición de dicha función, teniendo en cuenta su experiencia con GeoGebra.

La actividad comienza pidiéndole al estudiante que abra el archivo en GeoGebra, en el cual se encontrarán con tres deslizadores correspondientes a los parámetros a , b y c , ya mencionados anteriormente. En las primeras preguntas, se les pide a los estudiantes que reconozcan la parábola, seguido de que interactúen con los deslizadores con el fin de que reconozcan el efecto que tiene cada parámetro con relación a la gráfica.

Una vez que los estudiantes reconocen el efecto que produce cada deslizador, se realiza un acercamiento a lo que es el vértice, cuáles son sus coordenadas y su utilidad.

Como se puede observar en estas dos actividades se busca que los estudiantes tengan un acercamiento con funciones cuadráticas, las conozcan, visualicen el movimiento que presenta gráficamente al variar sus parámetros y conozcan su forma algebraica.

3.4.2 Situación 2

En esta situación se busca encontrar la rentabilidad del proyecto, a través de una serie de actividades que llevan a estudiante a reconocer y analizar los cambios de la gráfica de una función cuadrática, en relación a las ganancias generadas por la compostera.

ACTIVIDAD 1: Analizando la situación a partir de la parábola

La actividad consta de 4 preguntas abiertas, al igual que en las actividades anteriores, se dejan espacios para reflexiones y observaciones sobre las tareas presentes en esta actividad.

El objetivo de la actividad 1, es que los estudiantes puedan analizar e interpretar los cambios que se presentan en las variables y más aún en su representación gráfica, en relación a puntos máximos y mínimos, que representan o evalúan el rendimiento de una situación en particular.

La actividad comienza pidiéndole a los estudiantes que analicen una tabla que representa datos importantes en la situación presentada, con el fin de que puedan identificar, cuál es la variable dependiente e independiente de una función en general. Luego se les pide que realicen las actividades posteriores e interpreten los cambios de la gráfica.

ACTIVIDAD 2: Proyectando las ganancias de la venta la venta de compost

Esta actividad consta de 3 preguntas abiertas, al igual que en las actividades anteriores, se dejan espacios para reflexiones y observaciones sobre las preguntas presentes en esta actividad.

El objetivo de la actividad 2, es que los estudiantes reconozcan-problemas que pueden ser modelados mediante funciones cuadráticas (utilidad, áreas, etc.), con el fin, de identificar variables significativas presentes en los problemas y las relaciones que existen entre ellas.

Con cada una de estas preguntas presentes en esta actividad, se busca que los estudiantes puedan analizar diferentes registros de representación (tabular, gráfico y algebraico).

CAPÍTULO IV.

IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS

A continuación, se reportan y analizan los resultados obtenidos, a partir del desarrollo de las actividades propuestas en las situaciones 1 y 2 del proyecto “Haciendo Útiles Los Desechos Orgánicos De Mi Restaurante Escolar”, las dificultades y avances encontradas en los estudiantes de grado noveno de la sede General José Ma. Cabal, de la Institución Educativa la Esperanza, en relación al aprendizaje del concepto de función cuadrática en situaciones propias del contexto.

Según Azcárate (1996), el concepto de función se puede observar a partir de diferentes sistemas de representación, y cada una de estas se acerca a su definición permitiendo poner en relieve sus características e interpretaciones, estas son: el modelo físico o simulación, la descripción verbal, las tablas de valores, la gráfica y la fórmula o ecuación, siendo estas dos últimas los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto los más difíciles de interpretar, pues permiten tener una visión más completa de la función. Por otra parte, según Kieran (1989), se presenta como un problema el hecho de que los estudiantes usan de una manera rutinaria la generación de tablas que satisface una ecuación algebraica de dos variables, la representación de puntos en un plano cartesiano adecuadamente escalado y que interpreten las coordenadas de los puntos de una gráfica, algunas veces con la intención de resolver un sistema de ecuaciones, hace que los estudiantes pierdan la visión del significado de los ejercicios, se apoyan únicamente en gráficas que son lineales y sean incapaces de interpretar gráficas en términos de situaciones reales. Así pues, la mayoría de estos procedimientos se reducen a la aplicación de tan solo dos procedimientos resultando en un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo.

Teniendo en cuenta los aportes anteriores, que Azcárate y Kieran, mencionan sobre las dificultades y obstáculos que se pueden presentar en el desarrollo de las actividades encaminadas al aprendizaje del concepto de función, realizaron las siguientes descripciones de las situaciones en relación a los objetivos que se buscaban alcanzar con cada actividad y, por consiguiente, su respectivo análisis. A continuación, se presenta las siguientes matrices de análisis y descripción de las actividades:

4.1 ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN 1

Resultados de la actividad 1: Comprendiendo la situación

En las primeras actividades se buscaba que los estudiantes recordaran el concepto de función lineal, y reconocieran para qué sirve y a su vez, su utilidad en la vida cotidiana. Así mismo, identificar otras formas gráficas de una función, es decir, pasando de una forma lineal a una forma parabólica, y la expresión general de una ecuación cuadrática.

Grupos	Reconocen, que es una función lineal.	Reconocen su representación gráfica.	Recuerdan su expresión algebraica.	No reconocen o no recuerdan que es una función lineal.
Grupo 1		X	X	
Grupo 2	X	X	X	
Grupo 3		X	X	

Grupo 4				X
--------------------	--	--	--	---

Tabla 3 Matriz de análisis - actividad 1 (a, b, c y d).

Preguntas a), b), c) y d).

En las primeras cuatro preguntas, se les pidió a los estudiantes que recordaran el concepto de función lineal desde su definición, expresión algebraica y su utilidad. A continuación, se muestran los resultados (ver tabla 4).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
<i>Reconocen, qué es una función lineal.</i>	20%
<i>Reconocen su representación gráfica.</i>	80%
<i>Recuerdan su expresión algebraica.</i>	80%
<i>No reconocen o no recuerdan que es una función lineal.</i>	20%

Tabla 4 Resultados de las Preguntas a), b), c) y d) en la actividad 1.

Como se puede observar sólo el 20% de los estudiantes de 10 estudiantes evaluados, reconocieron el concepto de función lineal, en cambio el 80% de los estudiantes reconocen la función lineal desde su representación gráfica, su forma algebraica. No obstante, el 20% no reconocen el concepto de función lineal, ni su representación gráfica y algebraica.

Consideremos ahora, los resultados obtenidos de la implementación, se evidencio que los estudiantes reconocieron la función lineal desde su representación gráfica y su forma algebraica, pues, según Sierpinska, existen en la mente simultáneamente experiencias previas que dan cuenta del concepto de función con algunas propiedades debido al conocimiento deductivo, producto de algún tipo de desarrollo académico. Es decir, que ellos recordaron algunos aspectos importantes que los acercaron al concepto a través de su representación algebraica y gráfica. No obstante, se constató que algunos estudiantes tuvieron dificultad al momento de reconocer la función lineal desde su representación gráfica y algebraica.

A continuación, se evidencia algunas de las respuestas de los estudiantes al momento de realizar las actividades en grupo (ver lustración 7 y 8):

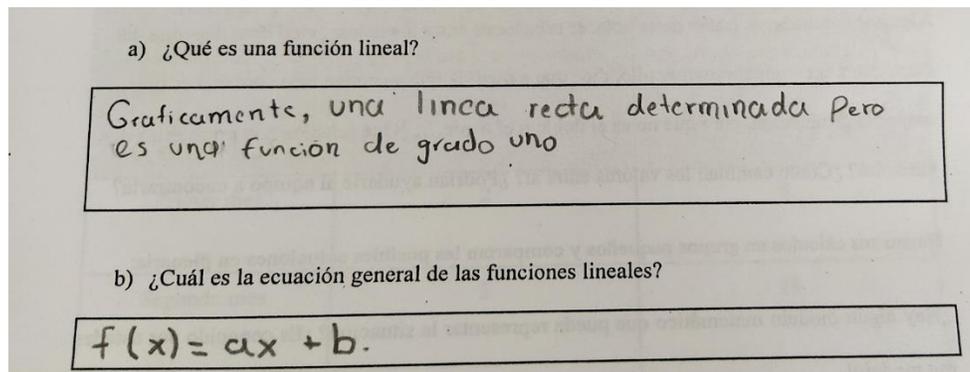


Ilustración 7 Reconocen el concepto y su forma algebraica.

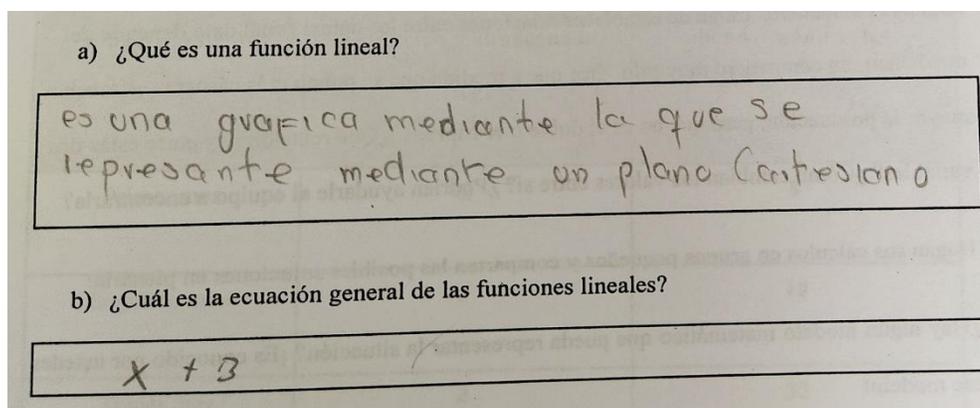


Ilustración 8 No reconocen el concepto y no forma algebraica

Grupos	Reconocen la gráfica de x^2 , como una representación parabólica.	Interpretan la relación que existen entre las variables x y y , cuando el valor de x aumenta en relación a y .	Piensan que el término que acompaña a la letra x , hace referencia a la apertura de la parábola.
Grupo 1	X	X	X
Grupo 2	X		X
Grupo 3	X	X	X
Grupo 4	X	X	X

Tabla 5 Matriz de análisis - actividad 1 (e, f y g).

Preguntas e), f) y g).

El objetivo de las preguntas e), f) y g) era que el estudiante tuviera un acercamiento sobre las diferentes formas gráficas y algebraicas de una función diferente a la lineal, es decir, llevarlos a comprender e identificar una función cuadrática. Enseguida se muestran los resultados (ver tabla 6).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Reconocen la gráfica de x^2 , como una representación parabólica.	100%
Interpretan la relación que existen entre las variables x y y , cuando el valor de x aumenta en relación a y .	80%
Piensan que el término que acompaña a la letra x , hace referencia a la apertura de la parábola.	100%

Tabla 6 Resultados de las Preguntas e), f) y g) en la actividad 1

Como se puede observar, el 100% de los estudiantes reconocen la forma gráfica de una función cuadrática (parábola), gracias a la ayuda de la herramienta de GeoGebra, la cual nos brindó la visualización de cada una de las ecuaciones planteadas en esta situación. Al mismo tiempo, suministro herramientas necesarias para un acercamiento a la concavidad de una parábola, pues lo estudiantes en la exploración con la herramienta pudieron identificar cuando la parábola abre o cierra, dependiendo del signo del parámetro a de la ecuación.

Por otro lado, el 80% Interpretaron la relación que existía entre las variables x y y , cuando el valor de x aumenta en relación a y . En cambio, 10% de los estudiantes tuvieron dificultades en poder interpretar y comprender la relación que existía entre las variables x y y .

Dicho lo anterior, la mayoría de los estudiantes reconocieron la forma gráfica de una parábola, en el apartado de la justificación del capítulo 1 de este trabajo de grado, se menciona que

la utilización de GeoGebra, permite y alienta a los estudiantes a experimentar, realizar aprendizaje basado en descubrimientos, aprender de sus errores, enfrentar y superar retos difíciles e inesperados, y más aún que empiecen a incursionar en el campo de la investigación con ayuda de la tecnología. Si bien, el 10% de los estudiantes tuvieron dificultades en poder interpretar y comprender la relación que existía entre las variables x y y , esto se dio a que según Sierpiska, concibe que en muchas ocasiones los estudiantes interpretan la relación de variables como magnitudes independientes.

A continuación, algunas evidencias de las respuestas de cada grupo (ver figura 9):



Ilustración 9. Evidencia de la exploración en GeoGebra

e) ¿Qué forma tiene la gráfica?

Una parábola

f) Teniendo en cuenta la función anterior, completamos la siguiente tabla:

X	Y
-3	9
-2	-4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$(-3)^2 = 9$

Ilustración 10. Resultados de los estudiantes

g) Interpreten qué relación existe entre la variable x y la variable y. Además, qué sucede con la variable y si se aumenta el valor de la variable x.

Que esta aumentando el doble

Ilustración 11. Resultados de los estudiantes

Evidencia de los estudiantes que tuvieron dificultad en la interpretación de las variables x y

y.

- g) Interpreten qué relación existe entre la variable x y la variable y . Además, qué sucede con la variable y si se aumenta el valor de la variable x .

La relación es que y es igual a x .

Leonardo es uno de los compañeros de Claudia, y también hace parte del grupo, pero él quiere saber, si con la ecuación encontrada en el punto anterior, podríamos suponer que las ecuaciones parecidas a $f(x) = x^2$ tendrán gráficas con forma parabólicas; averiguemos si esa suposición es correcta, grafiquemos las siguientes ecuaciones utilizando la herramienta de GeoGebra anterior:

$$*f(x) = 2x^2$$

$$*f(x) = -3x^2$$

$$*f(x) = -x^2$$

COMENTARIOS:

1 Cuando x es positiva, la parábola se ubica sobre el eje x .
Cuando no, se ubica por debajo del eje.

2 Cuando el coeficiente de x se vuelve cada vez mayor, la parábola se vuelve más angosta.

Ilustración 12. Resultados de los estudiantes

Resultados de la actividad 2: Explorando los parámetros de la función cuadrática

En esta actividad, se buscaba reforzar al estudiante con la forma normal de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que identificara lo que era una parábola, y qué funcionamiento tenían los valores a , b y c en la gráfica. Los resultados obtenidos en esta actividad se presentarán dependiendo de los objetivos que se tenían en cada una de las preguntas.

Grupos	Identificaron que la figura formada era una parábola.	Identificaron que el valor del parámetro a , si a es positivo abría hacia arriba y si el valor de a era negativo abría hacia abajo.	Si a es cero aparece otra figura diferente a la parábola.
Grupo 1	X		X
Grupo 2	X		X
Grupo 3	X	X	X
Grupo 4	X	X	X

Tabla 7. Matriz de análisis - actividad 2 (a, b, c y d).

Preguntas a), b), c) y d).

En las primeras cuatro preguntas, se les pidió a los estudiantes que trabajaran con los deslizadores a , b y c , observarán y contestarán. El propósito de las primeras preguntas era: Identificar la figura que se formaba en el plano cartesiano al mover el parámetro a hacia números positivos y después a números negativos. A continuación, se muestran los resultados (ver tabla 8).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Identificaron que la figura formada era una parábola.	100%
Identificaron que el valor del parámetro a , si a es positivo abría hacia arriba y si el valor de a era negativo abría hacia abajo.	50%
Si a es cero aparece otra figura diferente a la parábola.	100%

Tabla 8 Resultados de las Preguntas a), b), c) y d). en la actividad 2.

Como se puede observar sólo 100% de los estudiantes determinaron que la figura formada en el plano cartesiano al mover el deslizador a , se trataba de una parábola, y que ésta podía tener una abertura hacia arriba si a estaba en números positivos y hacia abajo si a estaba ubicada en números negativos, además el 50% de los estudiantes identificaron que a debía ser diferente de cero para que su característica gráfica no perdiera su forma parabólica.

Según Kieran (1989), algunos de los problemas en torno al concepto de función se debe al análisis y descripción de los elementos matemáticos que involucran los símbolos, las expresiones verbales, gráficos, expresiones algebraicas y numéricas y a su vez la dependencia entre variables.

A continuación, algunas evidencias de las respuestas de cada grupo (ver ilustración 13):

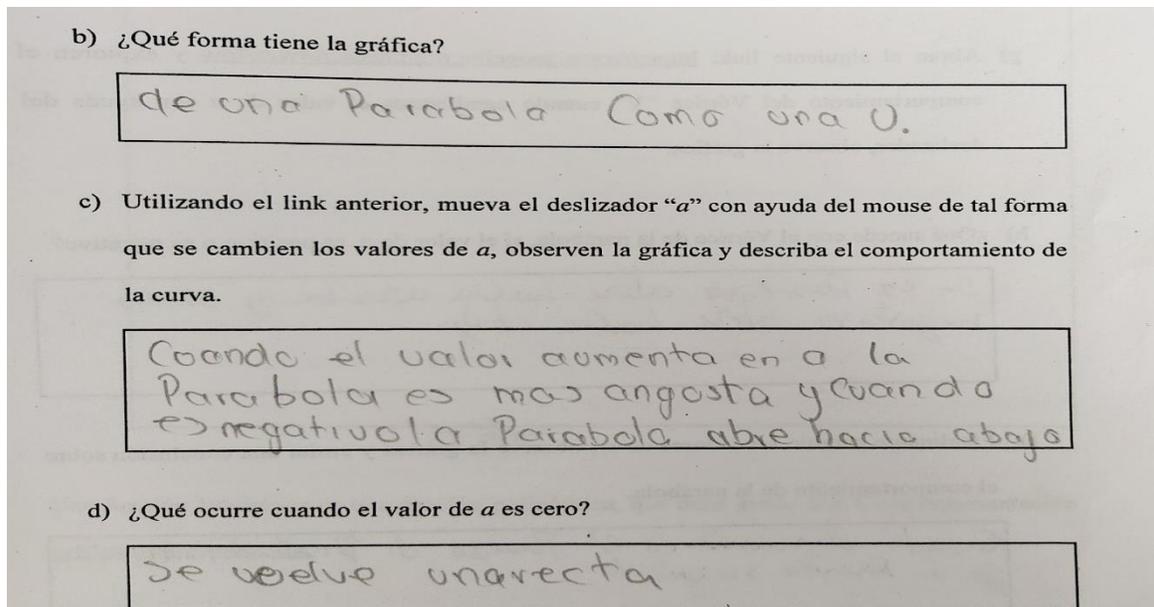


Ilustración 13. Resultados de los estudiantes

Grupos	Identifican que la parábola se mueve hacia la derecha si el valor del parámetro b es negativos y hacia la izquierda si el valor del parámetro b es positivos y trabaja en el eje de las x .	Identifican que la parábola se mueve de izquierda a derecha.
Grupo 1		X
Grupo 2		X
Grupo 3		X
Grupo 4	X	

Ilustración 14 Matriz de análisis - actividad 2 (e y f).

Preguntas e) y f).

El objetivo de las preguntas es conocer el efecto de variar el parámetro b , sobre qué eje coordinado incide, y hacia dónde es el desplazamiento cuando b está en números positivos y cuando está en números negativos. Enseguida se muestran los resultados (ver tabla 9).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Identifican que la parábola se mueve hacia la derecha si el valor del parámetro b es negativos y hacia la izquierda si el valor del parámetro b es positivos y trabaja en el eje de las x .	20%
Identifican que la parábola se mueve de izquierda a derecha.	80%

Tabla 9. Resultados de las Preguntas e) y f). en la actividad 2.

Lo que se pretendía con esta actividad, era analizar la interpretación que los estudiantes le daría al momento de variar el deslizador b y describiera todo lo que ellos estaban observando en la gráfica. Muchas veces los estudiantes están trabajando de manera apresurada y pierden detalles importantes, el aspecto uno estaba con el propósito de ver si algún estudiante notaba que mientras b era positivo se deslizaba hacia el eje de las x negativas y si era negativo, la gráfica se trasladaba hacia el cuadrante positivo de ese eje coordinado. Por lo tanto, se pudo observar que 20% de 10 estudiantes pudieron llegar a ese análisis del aspecto uno. En cambio, el 80% de ellos solo reconocieron que la parábola se desplaza de derecha a izquierda y viceversa. Pero, en consecuencia, se evidencio que los estudiantes pudieron obtener una visión aceptable sobre este parámetro identificando de manera sencilla, cuál era su función.

Grupos	Identifican que la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo si c es positivo o negativo.	Identifican que la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo.	No identificaron, la importancia del parámetro c .
Grupo 1		X	
Grupo 2		X	
Grupo 3			X
Grupo 4			X

Tabla 10 Matriz de análisis - actividad 2 (g, h, i y j).

Preguntas g), h), i) y j).

El objetivo de esta pregunta era conocer la función del parámetro c , identificando qué pasaba con la parábola cuando estaba en valores negativos, en valores positivos, y que mencionan en qué eje coordenado influía dicho parámetro. Así mismo, que el estudiante identificará dónde estaba el vértice, y qué nombre recibía el tipo de concavidad que presentaban, si era cóncava hacia arriba o hacia abajo y tuvieran un acercamiento con sus coordenadas en el plano cartesiano. Los resultados se presentan a continuación (ver tabla 11).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Identifican que la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo si a es positivo o negativo.	0%
Identifican que la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo.	50%
No identificaron, la importancia del parámetro c .	50%

Tabla 11 Resultados de las Preguntas g), h), i) y j). en la actividad 2.

Se puede observar que en esta actividad los estudiantes tuvieron dificultades al comprender e interactuar con la herramienta GeoGebra, lo cual justifica que ellos se hubieran quedado solo en la visualización de la gráfica, pero se debe aclarar que los estudiantes estaban llevando su proceso de manera adecuada con los otros parámetros anteriores, ellos reconocen cual es el vértice de la parábola más no su interpretación en la relación que había entre el desplazamiento c . Como se pudo observar en la tabla anterior, solo el 50% de los estudiantes identificaron que la parábola se movía hacia arriba y hacia abajo.

Una posibilidad de que ellos no avanzaran o profundizaran en este aspecto es que no hubo una buena mediación del maestro o investigador al momento de la implementación, pues, el maestro estaba para orientar y guiar a los estudiantes alcanzar esa competencia.

Hay que mencionar, además que Hitt (1998) menciona que la visualización está fuertemente vinculada con los sistemas semióticos de representación, enfatizando en que la mayoría de

profesores privilegian el trabajo sobre los procesos algebraicos sin atribuirle importancia a los procesos visuales. Así pues, el reflexionar sobre el papel de los sistemas semióticos de representación será vital para poder entender la construcción de conceptos matemáticos que los estudiantes realizan. Es por esto, que el 50% de los estudiantes solo lograron identificar una de las características de ese parámetro en sí.

A continuación, algunas evidencias de las respuestas de cada grupo (ver ilustración 15):

g) Abran el siguiente link: <https://www.geogebra.org/classic/t4wzx4pw> y exploren el comportamiento del Vértice “V” cuando cambiamos el valor de a con ayuda del deslizador, observe la gráfica.

h) ¿Qué sucede con el Vértice de la parábola, si el valor de a es positivo o es negativo?.

no para nada

i) Finalmente cambie los valores de c , observe la gráfica y emita una conclusión sobre el comportamiento de la parábola.

la parábola hacia arriba y hacia abajo

Ilustración 15. Resultados de los estudiantes

Grupos	Aproximación al concepto de función cuadrática.	Reconocen algunos elementos de la función cuadrática.	No reconocen el comportamiento de los parámetros, su forma algebraica y su representación gráfica.
Grupo 1		X	
Grupo 2	X		
Grupo 3		X	
Grupo 4			X

Tabla 12. Matriz de análisis - actividad 2 (k).

Preguntas k).

El objetivo de esta pregunta es llevar a los estudiantes a que lleguen a una aproximación al concepto de función cuadrática, mediante el desarrollo de las actividades anteriores, dicho de otra forma, que el estudiante sea capaz de formular el concepto de función cuadrática, teniendo en cuenta algunas de sus características relacionadas con la gráfica y su ecuación general. Los resultados se presentan a continuación (ver tabla 6).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Aproximación al concepto de función cuadrática.	20%
Reconocen algunos elementos de la función cuadrática.	60%

No reconocen el comportamiento de los parámetros, su forma algebraica y su representación gráfica.	20%
----------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Tabla 13. Resultados de la Pregunta k). en la actividad 2.

Como se puede observar solo el 20% de los estudiantes llegaron a una aproximación al concepto de función cuadrática, a partir de las actividades anteriores, es decir, pudieron utilizar las respuestas anteriores para llegar a concluir el concepto de manera general.

Por otro lado, el 60% reconocieron algunos elementos esenciales de la función cuadrática para llegar a una definición, en cambio el 20% no reconocieron o recordaron ninguno de los parámetros necesarios para llegar a una conclusión sobre el concepto de función cuadrática.

También se puede mencionar que el 60% de los estudiantes reconocieron algunos elementos para llegar a la definición de la función cuadrática, dicho lo anterior, (Álvarez, 2012), menciona que el concepto función admite una gran variedad de diferentes registros de representación, los cuales son el gráfico, tabular, algebraico y el lenguaje natural.

A continuación, algunas evidencias de las respuestas de cada grupo (ver ilustración 16):

- k) Teniendo en cuenta las preguntas anteriores, formule un concepto de función cuadrática y menciona algunas características de su gráfica.

es una función $A = x^2 + bx + c$ a divé ser diferente de 0.

- k) Teniendo en cuenta las preguntas anteriores, formule un concepto de función cuadrática y menciona algunas características de su gráfica.

Ben.
Función cuadrática. es la función de la forma $ax^2 + bx + c$, representado graficamente corresponde a una parabola donde si $a \approx$ Numero positivo. la apertura apuntara hacia arriba, entre más grande sea "a", la apertura sera más angosta. Si a es negativo, la parabola apuntara hacia abajo. "A" no puede ser igual a 0, porque corresponderia a una función lineal. b y c mueve la parabola arriba o abajo o izquierda o derecha.

Ilustración 16. Resultados de los estudiantes

4.2 ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN 2

Resultados de la actividad 1: Analizando la situación a partir de la parábola

Grupos	Identifican en la situación la variable independiente y la variable dependiente.	Identificaron las coordenadas del vértice.	Analizaron e interpretaron de la gráfica que representa la ganancia de la venta de compost.
Grupo 1		X	X
Grupo 2	X	X	X
Grupo 3	X	X	X
Grupo 4		X	

Tabla 14. Matriz de análisis - actividad 1 (a, b, c y d).

Preguntas a), b), c) y d).

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Identifican en la situación la variable independiente y la variable dependiente.	50%
Identificaron las coordenadas del vértice.	100%
Analizaron e interpretaron de la gráfica que representa la ganancia de la venta de compost.	80%

Tabla 15. Resultados de las Preguntas a), b), c) y d) en la actividad 1.

En las primeras cuatro preguntas se les pidió a los estudiantes que identificaran las variables dependiente e independiente y que completaran la tabla usando la función cuadrática que les proporcionaba el problema, además, que analizaran e interpretaran la tabla y la gráfica que representaban la ganancia de la venta de compost y así mismo, determinaran los puntos máximos y mínimos de la situación problema. El 50 % de los estudiantes lograron identificar las variables independiente y dependiente.

Por otra parte, el 100% de los estudiantes reconocieron las coordenadas del vértice y el 80% analizaron e interpretaron la gráfica que representaba la ganancia de la venta de compost y determinaron los puntos máximos y mínimos. En vista de que los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes lograron identificar y analizar en la situación lo que representaba la gráfica y las coordenadas del vértice, esto se soporta desde el capítulo 2 de este trabajo de grado, pues, se menciona que el A.B.P permite que los estudiantes adquieran aprendizajes más profundos, que son retenidos por un mayor período de tiempo, asimismo que los estudiantes además de aprender los conceptos centrales y aprendizajes esperados de su nivel académico, también fortalecen su comprensión de contenidos, porque son ellos quienes necesitan adquirir y aplicar la información, conceptos y principios en diferentes contextos, de esa manera, el A.B.P promueve el desarrollo de dos habilidades y muy importantes, unas cognitivas en relación con la resolución de problemas y otra con pensamiento crítico en marcadas desde el saber y el contexto.

Explorando y aprendiendo con la herramienta de GeoGebra (ver ilustración 17):

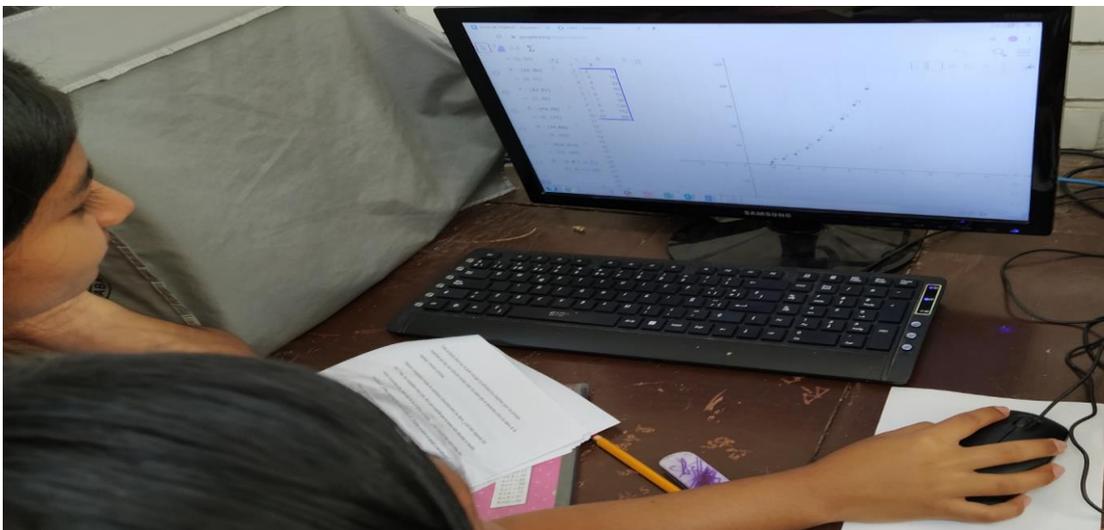


Ilustración 17. Resultados de los estudiantes

Resultados de la actividad 2: Proyectando las ganancias de la venta de compost

En la actividad 2, se le planteó al estudiante un problema sobre la proyección de las ganancias de la venta de compost, en el cual se intenta acercarlo a un contexto diferente, que procede del uso de funciones cuadráticas. El objetivo en general que se tenía con la actividad, era que los estudiantes reconocieran problemas que pudieran ser modelados mediante funciones cuadráticas (utilidad, áreas, etc.), con el fin, de identificar en un problema de la vida cotidiana, conceptos de la matemática que se pueden modelar situación real.

Con cada una de estas preguntas presentes en esta actividad, se busca que los estudiantes puedan analizar diferentes registros de representación (tabular, gráfico y algebraico).

A continuación, se muestran los resultados obtenidos.

Grupos	Completaron la tabla.	Identifican en la situación, cuál sería el precio de venta de compost, para obtener la máxima ganancia.	Interpretaron en la situación que sucede si el precio de compost es de 500 pesos.	Analizaron e interpretaron la gráfica y la tabla, que representa la rentabilidad del proyecto.
Grupo 1	X	X	X	
Grupo 2			X	X
Grupo 3	X		X	X
Grupo 4	X	X	X	X

Tabla 16. Matriz de análisis - actividad 2 (a, b y c)

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Completaron la tabla.	80%
Identifican en la situación, cuál sería el precio de venta de compost, para obtener la máxima ganancia.	50%
Analizaron e interpretaron de la gráfica que representa la ganancia de la venta de compost.	50%

Tabla 17. Resultados de la Pregunta a) en la actividad 2

Pregunta a)

Después de completar la tabla se les pidió a los estudiantes que la analizarán la situación problema de las ganancias de la venta de compost, para que pudieran contestar las preguntas

referentes al precio máximo que tendría el proyecto al vender cierta cantidad de compost. Pero se evidencio que 80% completaron la tabla, el 50% de 10 estudiantes no realizaron la actividad de completar la tabla, ni identificaron el precio de venta para obtener la máxima ganancia y el 50% de los estudiantes analizaron la gráfica que se encontraba en el documento de GeoGebra, en referencia al punto máximo que representaba las ganancias de la venta de compost (ver ilustración 18):

\$ 15	1.005
\$ 17	\$ 1.192
\$ 20	1.192.2
\$ 21	\$ 1.561
\$ 22	1.653
\$ 27	\$ 2.104
\$ 29	\$ 2.281
\$ 30	2.370
\$ 33	\$ 2.632
\$ 35	\$ 2.805

a) Una vez completada la tabla, con ayuda de GeoGebra, grafique la ecuación anterior y analicen ¿Cuál debería ser el precio de venta de cada compost para obtener la máxima ganancia? Justifique su respuesta.

250 mil Pesos

Ilustración 18. Resultados de los estudiantes

ASPECTOS	% DE ESTUDIANTES
Interpretaron en la situación que sucede si el precio de compost es de 500 pesos.	100%
Analizaron e interpretaron la gráfica y la tabla, que representa la rentabilidad del proyecto.	70%

Tabla 18. Resultados de las Preguntas b) y c) en la actividad 2

Preguntas b) y c).

Para las preguntas b) y c), se les pidió a los estudiantes que utilizaran la tabla y la gráfica, para que realizarán las comparaciones y análisis necesarios para que pudieran concluir y dar una opinión concreta para poder evaluar el proyecto y decir si es rentable o no. Los estudiantes se dieron cuenta que en el plano cartesiano se formaba una parábola cóncava hacia abajo. La cual representaba las ganancias de proyecto de la compostera, además evidenciaron en la parábola, el valor referente a la ganancia y como a través del desarrollo de estas dos actividades podrían destacar el valor mínimo a vender para no obtener una pérdida y el máximo valor para una ganancia rentable. Un ejemplo de lo que hicieron se muestra a continuación (ver ilustración 19):

b) ¿Qué sucede si el precio de venta de cada abono es de \$ 500 pesos?

-450 Pesos abriría una
Perdida.

c) Teniendo en cuenta los datos de la tabla y la gráfica, indique que se puede concluir para realizar el informe final del proyecto, en el cual se incluya a qué precio se debe vender el compost para obtener la mayor ganancia y cuál será su valor mínimo para no generar pérdidas. Compare y discuta con sus compañeros su respuesta.

Para que el proyecto tenga
una rentabilidad se debe
vender el compost a 318
Pesos y un valor mínimo a
53.000 pesos.

Ilustración 19. Resultados de los estudiantes

Para concluir, se pudo evidenciar que los estudiantes lograron cumplir con el objetivo no solo de esta situación y sus actividades, si no con el proyecto en general pues, se logró que los estudiantes comprendieran más allá de lo matemático, es decir, que comprendieran y analizaran un problema de la vida cotidiana, algo que motivará al estudiante a comprender en este caso la compostera, fue la herramienta para llevar al estudiante a un aprendizaje más significativo, como

se mencionó en el capítulo 1 de este trabajo, Ausbel define que el aprendizaje debe ser una actividad significativa para el que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno. Por otro lado, los resultados que arrojó la implementación del proyecto, muestra que los estudiantes que se aproximan al conocimiento matemático; de tal manera, que tal conocimiento se aproxime en sí mismo a ese contexto y entorno que es próximo a ellos, es decir, aquel en el que se desenvuelven cotidianamente y al que a que se quiso llevar a través de este trabajo.

CAPÍTULO V

V. CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES

DIDÁCTICAS

A continuación, se presentan algunas conclusiones generales y reflexiones didácticas, las cuales surgen del proceso de diseño e implementación del proyecto escolar y tomando como base los objetivos propuestos para la enseñanza y aprendizaje de la Función Cuadrática a través del Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P), aplicado a los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali.

5.1 CONCLUSIONES GENERALES

Es importante recordar que el objetivo general de este trabajo es favorecer en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali, la apropiación de algunos elementos y la noción de la función cuadrática a través del estudio de un fenómeno de variación y cambio, en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P).

En relación con este objetivo, y como resultado del análisis realizado en el capítulo anterior, se detallarán aspectos relevantes y concluyentes del presente trabajo. Para esto, se citarán conclusiones en términos de cada objetivo específico, lo cual influirá en torno alcance o no, del objetivo general. De esta manera, y en relación al primer objetivo específico, se puede afirmar que la investigación realizada sobre la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática desde las perspectivas curricular, didáctica y matemáticas, favoreció mucho al diseño

de cada una de las actividades propuestas en el proyecto “Haciendo Útiles Los Desechos Orgánicos De Mi Restaurante Escolar”, se pudo tener como referencia autores, trabajos de grados y documentos que sustentaban las dificultades que se pueden presentar al momento de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, lo cual, ayudó al diseño y posteriormente al análisis.

De acuerdo con lo anterior y en alusión con el segundo objetivo específico, relacionado con los aportes (elementos) desde las perspectivas anteriores para el diseño de una propuesta de aula centrada en A.B.P y que involucra situaciones problema de la vida cotidiana, se puede afirmar que los diseños de las actividades estuvieron fundamentados desde los elementos teóricos del marco conceptual. Así mismo, se buscaba que cada actividad tuviera un objetivo en particular, el cual favoreciera el aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes.

Hay que mencionar, además que las actividades propuestas en la situación uno, tenían el propósito de llevar al estudiante a recordar un concepto ya estudiado previamente y que al mismo tiempo fortaleciera ese conocimiento, además, familiarizar al estudiante con los parámetros que se manejan en el registro algebraico de las funciones cuadráticas, para que identificara el efecto que tenían cada uno de éstos en el plano cartesiano. En estas actividades, se usó el software GeoGebra, para que el estudiante visualizara y observara los cambios en la gráfica y así resolviera cada una de las preguntas, elementos como el vértice y los parámetros que conllevaban a la concavidad de las parábolas que se formaba. Los estudiantes cumplieron con el objetivo de la actividad, ya que la mayoría identificó la función de cada parámetro y identificó las coordenadas de los vértices de las diferentes parábolas que se le presentaron y que representaba en la situación.

Consideremos ahora, que las actividades uno y dos de la situación dos, tenían el propósito de acercar al estudiante al tema, mediante un problema de la vida cotidiana, en ambas actividades

se planteaba la situación de la elaboración y construcción de una compostera con la utilización de los residuos orgánicos del restaurante escolar. En la actividad uno, se llegó a la conclusión, que la mayoría de los estudiantes resolvieron cada una de las preguntas hechas, se cumplió con el objetivo que era que los estudiantes analizaran e interpretaran los cambios que se presentaban en las variables y más aún en su representación gráfica, en relación a puntos máximos y mínimos, que representan o evalúan el rendimiento de una situación en particular. Esto conllevó, que los estudiantes pudieron transitar del registro tabular al gráfico, además lograron identificar los elementos de la parábola, alguno de los resultados presentaron dificultad al momento de su análisis, dado que algunos estudiantes no identificaron la diferencia entre variables y el análisis de gráficas, a pesar de que se utilizó GeoGebra como herramienta de aprendizaje para que los estudiantes tuvieran una visualización de las diferentes representaciones gráficas de las parábolas presentes en las actividades y evidenciaran el comportamiento de cada uno de los parámetros de la función cuadrática. Sin embargo, se debe aclarar que los estudiantes al momento de la implementación en el aula, no conocían ni manejaban el software de GeoGebra, en vista de que no conocían el software, se les realizó una pequeña introducción sobre la utilización de la herramienta, teniendo en cuenta que hubo estudiantes que se entusiasmaron mucho al momento de la exploración y causó un ambiente de aprendizaje enriquecedor.

Con respecto a la actividad dos, tenía como objetivo que los estudiantes reconocieran y se familiarizaran con problemas de la vida cotidiana, que se pueden modelar mediante funciones cuadráticas. Con cada una de las preguntas presentes en esta actividad, se busca que los estudiantes analizaran diferentes registros de representación (tabular, gráfico y algebraico).

Podemos concluir de manera favorable, ya que los estudiantes lograron resolver cada una de las actividades propuestas de manera adecuada, sustentando que en el camino se fue construyendo el concepto a aprender, posiblemente, gracias a la utilización del software GeoGebra, así mismo, los estudiantes lograron dar solución a cada una de las actividades.

Finalmente, se observó que la mayoría de los estudiantes lograron modelar las situaciones, a través de la exploración del concepto de la función cuadrática, al identificar, analizar e interpretar en los diferentes sistemas de representación; encuentran el punto máximo, la relación entre las variables, la identificación gráfica de una ecuación cuadrática y una aproximación a la definición de la función cuadrática.

5.2 REFLEXIONES DIDÁCTICAS

En este apartado se mencionan las reflexiones didácticas, producto de la experiencia y resultados de esta investigación, cabe señalar, que se contemplarán reflexiones teóricas y metodológicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de un concepto que ha generado muchas dificultades en el aula de clase como es la función cuadrática. Se concluye lo siguiente:

- Las dificultades que presentaron los estudiantes al efectuar las actividades fue el desconocimiento del software de GeoGebra, por otro lado, identificar que en la escuela están acostumbrados a resolver problemas meramente matemáticos dentro de registros algebraicos y gráficos, lo cual, simplemente se limitan a iniciar con una parábola en el plano o resolver ejercicios, sin embargo, en las actividades presentes en el proyecto escolar, se evidenció una forma diferente de involucrar los problemas matemáticos en relación con problemas de la vida cotidiana donde se podía llegar a

la solución mediante el uso de la función cuadrática, intentando llevar a los estudiantes analizar e interpretar registros gráficos o tabulares.

- Crear ambientes de aprendizaje diferentes, en los cuales se privilegian la autonomía y el trabajo colaborativo, entre pares, se evidencia que entre estudiantes al aprendizaje tiene un significado más profundo, ya que no temen a equivocarse y menos a discutir sobre sus errores.
- Esta investigación aporta al docente algunos elementos didácticos necesarios para construir, aplicar y hacer aproximaciones a conceptos matemáticos, sin embargo, se evidencio que la comprensión de otros contenidos matemáticos que en la escuela son enseñados de manera mecánica, pueden llevar a los estudiantes a un aprendizaje repetitivo y sin sentido, en la realidad del estudiante.
- Trabajar con la herramienta de GeoGebra, motiva a los estudiantes a querer aprender, permite articular y potencializar nuevas heurísticas que en ocasiones por medio del lápiz y el papel no son tan notables, que por medio de la exploración y los registros verbales.
- La metodología del A.B.P, se puede constituir como insumo para el desarrollo de un plan de aula, pues aporta herramientas diferentes para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se evidencio en esta investigación que trabajar por proyectos facilita y motiva, a los estudiantes a querer aprender, investigar y crear nuevos conocimientos articulados con otras áreas del saber.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez-Gayou, J. L. (2005). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Editorial Paidós.

Avirama Gutiérrez, L. M. & Gustin Ortega, J. D. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo*. (Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física), Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle, Colombia.

Ausubel, DP. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. *Matemáticas: Cultura y aprendizaje*.

Azcárate, C. (1996). *Motivating project-based learning: sustaining the doing, supporting the learning*. *educational psychologist*, 26 (3 & 4), 369 – 398.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas*. *Educación Matemática*, 16 (002).

ChanLin, LJ. (2008). *Technology integration applied to Project- based learning in science*. *Innovations in Education and Teaching International*, 45, 55-65.

Ciron Aristizabal, C. (2012), *intitulada Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B. Pr) como Estrategia de Enseñanza y Aprendizaje en la Educación Básica y Media*. (Tesis de maestría en

Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Elliot, John. (2005). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid: Morata.

Garrigós Sabaté, J. & Valero García, M. (2012), intitulado Hablando sobre Aprendizaje Basado en Proyectos con Júlia. Revista de Docencia Universitaria (REDU). Número monográfico dedicado a Innovaciones en el diseño curricular de los Planes de Estudio, 10 (3), 125-151.

García Hernández, E. (2000). Algunas aplicaciones del portafolio en el ámbito educativo. Recuperado de <http://www.quademsdigitals.net/index.php?accionMenu>

Henaó Saldarriaga, S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Hernández, R.; Fernández, C, & Baptista, P. (2012). Metodología de la investigación. México, DF: McGraw-Hill/Interamericana.

Hitt, F. (1998^a). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. (pp. 245-264). En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998^b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. Revista Educación Matemática, 10(2), 23-45.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Hurtado García, A. F. y Zúñiga Patiño, F. Y. (2011). La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica. (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle

Illuzi, A. y Sessa, C. (2010). Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias. 7(3), 229 – 240.

López Melero, M. (2004). Construyendo una escuela sin exclusiones. Una forma de trabajar con proyectos en el aula. Málaga-Colombia: Aljibe.

López Quijano, G. (s/f). La Enseñanza de las Matemáticas, un reto para los maestros Del Siglo XXI. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Mckernan, J. (2008). Investigación-acción y curriculum. Madrid: Morata.

Matos, N. R.; Arias A. F. & Caraballo, P. A. (2015). Reflexión de Aprendizaje Basado en Proyectos: estrategia pedagógica en la enseñanza de las matemáticas. Revista Métodos, (13), 26-38.

Recuperado

de

openjournalsys.colmayorbolivar.edu.co/index.php/Methodos/article/view/12/30

Ministerio De Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio De Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Mosquera Quintero M. (2015), intitulada Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER YARUMITO. (Tesis de maestría). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Quijano G. (s/f). La Enseñanza De Las Matemáticas, Un Reto Para Los Maestros Del Siglo XXI. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ruiz Quiñonez J. (2011). Una secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación instrumental: la función cuadrática en grado noveno de educación secundaria, (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle.

Sierpinskaia, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs á la notion de limite. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 6,1, 1985.

S. M. y Vanegas Díaz, J. A. (2012). La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos. (Trabajo de pregrado). Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad Del Valle.

Thomas, J.W. (2000). A review of research on Project – based learning. *The Autodesk Foundation*. Retrieved from <http://www.autodesk.com/foundation>

Valles, A. (1999). *Estrategias de aprendizaje/1*. Valencia: PROMOLIBRO.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1 – 14.

Walker, A., & Leary, H. (2009). A problema based learning meta-analysis: Differences across problema types, implementation types, disciplines, and assessment levels. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, 3(1). Doi: 10.7771/1541-5015.1061

ANEXOS

ANEXO 1. PRESENTACIÓN DEL PROYECTO.

HACIENDO ÚTILES

LOS DESECHOS ORGÁNICOS DE MI RESTAURANTE ESCOLAR



Ilustración 3. Julio (2013). ¿QUÉ ES EL COMPOSTAJE?

Recuperado de <https://www.concienciaeco.com/2013/07/19/que-es-el-compostaje/>

HACIENDO ÚTILES

LOS DESECHOS ORGÁNICOS DE MI RESTAURANTE ESCOLAR

*“Trabajar en equipo divide el trabajo
y multiplica los resultados” (Anónimo)*

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta es una forma de complementar en los estudiantes la formación académica contribuyendo al trabajo en equipo, al fortalecimiento de las estructuras de conocimiento y razonamiento matemático, fomentando la discusión, el análisis de situaciones y la búsqueda de soluciones apoyados en el método científico. Uno de los elementos fundamentales en este trabajo de grado es el fortalecimiento de las estructuras de conocimiento matemático y se propone como estrategia la producción de abono orgánico y el manejo de los residuos orgánicos que salen del restaurante escolar de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali.

En consecuencia, se busca incentivar en los estudiantes en todo lo relacionado con los procesos cognitivos que se generan de las actividades científicas y tecnológicas al desarrollar proyectos escolares o productivos. Por consiguiente, es una de las principales razones para promover la aplicación de proyectos en el aula, ya que en la realidad educativa se buscan nuevas alternativas para poder enfrentar los obstáculos que los estudiantes pueden encontrar en su proceso de aprendizaje dentro y fuera de un salón de clase.

En otras palabras, respondiendo a una realidad que se presenta en las aulas educativas específicamente en la búsqueda de herramientas para mejorar el desempeño de los estudiantes, por ejemplo en el caso del concepto de función, que para este proyecto se enfocará en la función cuadrática, buscando contribuir a cambiar su percepción y actitud hacia la matemática y dicho concepto, se propone basado en el Aprendizaje Basado en Proyectos (A.B.P), la realización de un proyecto sobre el aprovechamiento de los residuos orgánicos del restaurante escolar de la I.E La Esperanza, sede General José María Cabal aplicado en la clase de función cuadrática, y siguiendo los lineamientos básicos planteados en este trabajo de grado.

PREGUNTA

Como fue mencionado anteriormente, se ha comprobado que algunas de las principales razones por las cuales los estudiantes presentan escasos logros en la matemática, es la falta de interés en comprender los conceptos de esta área y a su vez, el funcionamiento de estos conceptos dentro de un mundo en constante cambio. Por este motivo, se plantea en este proyecto la siguiente pregunta, para llevar a estudiante a comprender el concepto de función cuadrática en la vida cotidiana:

¿Qué elementos de la Función Cuadrática se pueden movilizar u observar al momento de realizar el Proyecto de la compostera y la producción de abono orgánico desde los residuos orgánicos de mi restaurante?

OBJETIVOS DEL PROYECTO

Objetivo General

Favorecer en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, de la zona Urbana de Cali, la apropiación de algunos elementos de la función cuadrática a través del estudio de un fenómeno de variación y cambio, en el contexto de la elaboración de abono con base en desechos orgánicos.

Objetivos Específicos

- Promover en los estudiantes estrategias de aprendizaje y trabajo colaborativo, con el fin de movilizar en ellos la participación, el entusiasmo y el interés por la matemática.
- Modelar situaciones de variación con funciones de segundo grado, identificar y analizar los elementos de la función cuadrática.
- Conducir el aprendizaje del concepto de función cuadrática, sus propiedades y representaciones.
- Evaluar el impacto del proyecto en la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal.

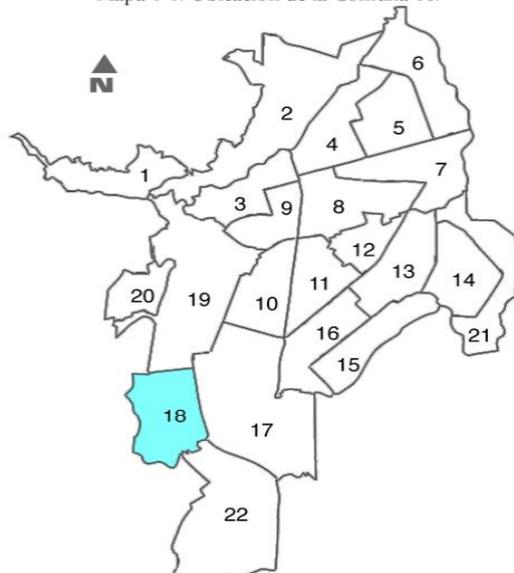
MARCO CONTEXTUAL

La comuna 18 se encuentra en el suroccidente de la ciudad de Cali, limitando por el suroriente con la comuna 22, por el oriente con la comuna 17 y por el norte con la comuna 19. Al sur y al occidente de esta comuna se encuentra el límite del perímetro urbano de la ciudad.

La comuna 18 está compuesta por 14 barrios y seis urbanizaciones y/o sectores:

- Buenos Aires.
- Caldas.
- Los Chorros.
- Meléndez.
- Los Farallones.
- Francisco Eladio Ramírez.
- Prados del Sur.
- Horizontes.
- Mario Correa Rengifo.

Mapa 1-1. Ubicación de la Comuna 18.



Fuente: Departamento Administrativo de Planeación Municipal

- Nápoles.
- Lourdes.
- Colinas del Sur.
- Alférez Real.
- El Jordán.
- Cuarteles Nápoles.
- Sector Alto de los Chorros.
- Polvorines.
- Sector Meléndez.
- Sector Alto Jordán.
- Alto Nápoles.
- Pampas del Mirador.

La Institución Educativa que se ha elegido para la implementación y desarrollo del trabajo de grado “La Función Cuadrática desde el enfoque del Aprendizaje Basado en Proyectos”, es la Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, (urbana) de carácter oficial, con una población estudiantil de estratos 1 y 2.

La Institución Educativa La Esperanza, sede General José María Cabal, está localizada en el barrio Alto Nápoles, Cali - Valle; de acuerdo con bases del censo realizado por el DANE, en el barrio Alto Nápoles habita una población de 12.362 habitantes. La Secretaría de Educación Municipal con apoyo del Alcaldía de la ciudad de Cali, compró el predio de la Academia Militar José María Cabal, Institución de carácter privado, en el sur de Cali, y le dio el reconocimiento oficial como una de las sedes de la Institución Educativa La Esperanza, que atiende a niños y jóvenes en los niveles de preescolar , básica primaria y

media.



Actualmente la Institución Educativa La Esperanza cuenta con 3.270 estudiantes en total, atendiendo, de estos a 1.775 en la sede General José María Cabal. Este sector de la ciudad se caracteriza por ser un escenario vulnerable a problemas socioculturales como lo son el consumo de sustancias psicoactivas, violencia intrafamiliar, y conformación de pandillas. De la misma manera, se puede evidenciar que muchos de los habitantes de esta comuna, cuentan solamente con un nivel de educación de básica primaria, lo que puede ser causa de la falta de compromiso de estos en el apoyo a los niños en cuestiones de tareas o actividades educativas y culturales.

Para la implementación del proyecto de aula, “Haciendo útiles los desechos orgánicos de mi restaurante escolar” se consideró un grupo de estudiantes de grado noveno, pues es en este nivel que los estudiantes realizan procesos de generalización de la aritmética y estudian la variación y el cambio en situaciones reales o contextos matemáticos, tal como se menciona en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas propuestos por el MEN.

PROBLEMÁTICA DE LA I.E LA ESPERANZA SEDE GENERAL JOSÉ MA. CABAL

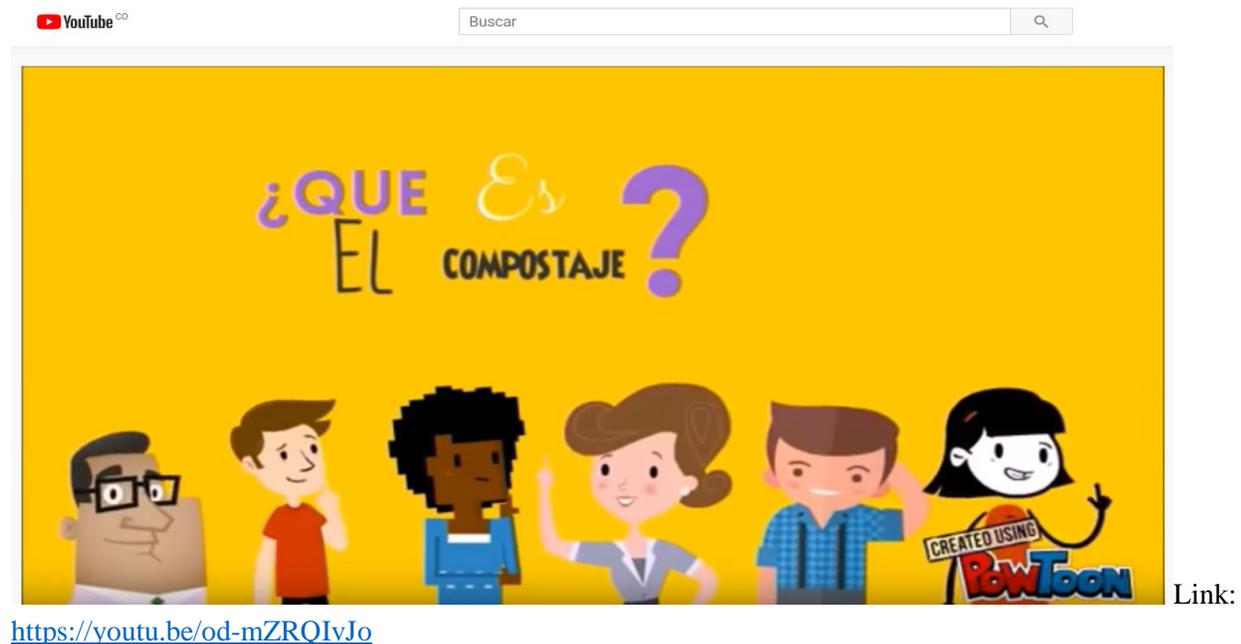
¿Qué podemos hacer con los Residuos del Restaurante Escolar?

Claudia es una estudiante de grado noveno de la sede General José Ma. Cabal, de la Institución Educativa La Esperanza. Ella y algunos de sus compañeros hacen parte del proyecto PRAE de la Institución, y últimamente están muy preocupados porque cada día que llegan a la sede encuentran que hay muchos residuos de las frutas que les entregan en el refrigerio y que los estudiantes dejan tiradas en los patios y pasillos del colegio; además se han dado cuenta que en las canecas de basura que hay en los patios y los salones se revuelven los desechos orgánicos con material reciclable y consideran importante hacer algo que

pueda de alguna manera educar a niños y jóvenes en separación de residuos, pues ya las condiciones higiénicas y la proliferación de mosquitos está casi insoportable.

Ellos han escuchado que en algunas partes se ha mitigado esta situación implementando una compostera, pero no conocen muchos detalles sobre el tema, así que aprovechando una reunión con uno de los asesores del DAGMA, deciden investigar al respecto.

Muy amablemente el asesor les envía un link para que ellos se enteren de qué se trata la implementación de una compostera y los invitó a discutir sus ideas al respecto en la próxima reunión.



<https://youtu.be/od-mZRQIvJo>

Los jóvenes muy animados revisaron la información, además se les proporcionó una pequeña historia del compostaje, con el fin de enriquecer los conceptos necesarios del compost.

HISTORIA DEL COMPOSTAJE



Ilustración 4. Samaniego Juan F. (2018). ¿Te has apuntado a la moda del compostaje? Así te huelen tus vecinos. Recuperado de https://www.nobbot.com/personas/olor_compostaje/

El compostaje era practicado en la Antigüedad. Desde hace miles de años, los chinos han recogido y compostado todas las materias de los jardines de sus campos y de sus casas, incluyendo materias fecales. En el Oriente Próximo, en las puertas de Jerusalén había lugares dispuestos para recoger las basuras urbanas: unos residuos se quemaban y con los otros se hacía compost.

El descubrimiento, después de la Primera Guerra Mundial, de los abonos de síntesis popularizó su utilización en la agricultura. En los últimos años se ha puesto de manifiesto que tales abonos químicos empobrecen la tierra a medio plazo. En Baleares, existía asimismo la práctica de "sa bassa" como forma tradicional de producir compost, que desgraciadamente se ha perdido.

De forma tradicional, durante años, los agricultores han reunido los desperdicios orgánicos para transformarlos en abono para sus tierras. Compostar dichos restos no es más que imitar el proceso de fermentación que ocurre normalmente en un suelo de un bosque, pero acelerado y dirigido. El abono resultante proporciona a las tierras a las que se aplica prácticamente los mismos efectos beneficiosos que el humus para una tierra natural.

El desarrollo de la técnica de compostaje a gran escala tiene su origen en la India con las experiencias llevadas a cabo por el inglés Albert Howard desde 1905 hasta 1947. Su éxito consistió en combinar sus conocimientos científicos con los tradicionales de los campesinos. Su método, llamado método indore, se basaba en fermentar una mezcla de desechos vegetales y excrementos animales, y humedecer periódicamente. La palabra compost viene del latín componere, juntar; por lo tanto, es la reunión de un conjunto de restos orgánicos que sufre un proceso de fermentación y da un producto de color marrón oscuro, es decir, que en él el proceso de fermentación está esencialmente finalizado. El abono resultante contiene materia orgánica, así como nutrientes: nitrógeno, fósforo, potasio, magnesio, calcio y hierro, necesarios para la vida de las plantas.

Fue en el año 1925 cuando en Europa comenzó a estudiarse la posibilidad de descomponer a gran escala las basuras de las ciudades con la puesta en marcha del método indú Indore. En la ciudad holandesa de Hanmer se instaló en 1932 la primera planta de compost hecho con las basuras urbanas. A principios de la década de los 60, había en Europa 37 plantas. Dicho número aumentó considerablemente durante dicha década, y a principios de los 70 se llegó a 230 plantas, destacando el Estado Francés y el Estado Español, instalándose en este último sobre todo plantas de compost en el Levante Y Andalucía. Sin embargo, a partir de mediados de los setenta la evolución se estancó y se cerraron numerosas plantas. Una de las causas de este estancamiento fue la deficiente calidad del compost producido (no se hacía separación previa en origen de la materia orgánica de los residuos sólidos urbanos) y el poco interés de los agricultores en utilizarlos.

En la actualidad, según el Ministerio de Medio Ambiente, las plantas de compost existentes en España son 24, que tratan 1.770.061 Toneladas (Tn) y el compost producido es de 365.239 Tn/año, con lo cual el rendimiento compost/RSU, (Residuos Sólidos Urbanos), es de 21,98%. La calidad del producto es variable, pero puede afirmarse que su tendencia es a mejorar por la implantación de modernas -instalaciones de refino y por la mejora de las condiciones de fermentación. En general, según datos de los antiguos ministerios MAPA y MOPTMA, difícilmente se puede absorber la actual producción de compost de R.S.U., sin hacer un esfuerzo serio por mejorar la calidad del producto (con la creación de modelos mínimos de calidad), y por establecer todo ello con las necesarias campañas de promoción.

Esencialmente, se trata de enriquecer la tierra del jardín o del huerto y, al mismo tiempo, defender el medio ambiente. El jardín se enriquece y aporta un suelo más vivo en microbios e invertebrados y más rico en

minerales, si reproducimos racionalmente el ciclo de degradación de los elementos vegetales que tiene lugar en la naturaleza.

Defenderemos el medio ambiente si aprovechamos el 30% de las materias orgánicas que contienen los residuos sólidos urbanos o basuras domésticas, éstos se transformarán en minerales y humus (sustancia marrón resultante de la descomposición de vegetales y animales microscópicos). La base esencial del suelo fértil consiste en la mezcla de arcillas y humus. Sus partículas en la superficie llevan cargas eléctricas que retienen los elementos nutrientes y el agua. Evitaremos también que la parte más pesada de la basura sea enterrada en vertederos o incinerada. Todo ellos, con el consiguiente despilfarro de energía y generación de gases, causas principales del cambio climático.

En la actualidad los cultivos requieren mayor intensidad, lo que conlleva a un aumento en las dosis de fertilizantes.

La utilización de fertilizantes orgánicos está disminuyendo, en contra de lo que ocurre con los inorgánicos por algunas causas como pueden ser:

- Sustitución de los animales de carga y tiro por medios mecánicos.
- Aumento de explotaciones ganaderas estabuladas, desapareciendo o reduciéndose las camas de ganado.
- Aumento de la demanda de residuos agrícolas principalmente madera y paja para la fabricación de pasta de celulosa.
- Una nueva fuente de materia orgánica es el compost de RSU o de residuos ganaderos. El compost tiene muchas similitudes con el humus del suelo.

PARA DISCUTIR EN GRUPO.

Para ayudar a Claudia y sus amigos a preparar la próxima reunión con el DAGMA, en grupos de tres (3) estudiantes discutan las preguntas que se presentan a continuación, y luego compartan con el resto de compañeros del salón.

- 1) ¿Qué es el compost?
- 2) ¿Qué materiales sirven para el compost?
- 3) ¿Cuáles no sirven?
- 4) ¿En su barrio es fácil conseguir estos materiales?
- 5) ¿Desde su perspectiva como estudiante o ciudadano cómo creen que beneficia este proceso al medio ambiente que los rodea y cómo lo afectaría si no se hace un buen manejo de estos recursos?

Una vez realizada la reunión con el asesor, los estudiantes del comité estuvieron de acuerdo en que implementar una compostera podría ayudarles a solucionar la situación presentada con los residuos orgánicos, y decidieron designar a Claudia como líder del proyecto, para hablar con el Rector de la Institución a fin de que les financie el proyecto; ella y sus amigos tienen claro a su vez, que producir abono orgánico y venderlo a un buen precio les ayudaría a conseguir algunos “pesitos” para el desarrollo de futuros eventos y proyectos de la Institución.

Después de escuchar la propuesta de los estudiantes, el Rector le pidió a Claudia, que junto con el comité ambiental se encarguen de investigar los costos de la producción de la compostera y la cantidad de abono orgánico que se puede producir, a fin de evaluar la factibilidad del proyecto, de manera que Claudia y sus amigos se pusieron en esta tarea para lo cual decidieron realizar una visita de campo.

APRENDIENDO Y EXPLORANDO SOBRE EL PROCESO DE COMPOSTAJE DESDE UNA EXPERIENCIA DIRECTA.

Los estudiantes del PRAE pudieron dedicar la tarde del viernes siguiente a realizar la visita de campo y quedaron maravillados con el proyecto; tuvieron la oportunidad de conocer más detalles del proceso de transformación de la materia orgánica y decidieron compartir con los compañeros de grupo de Claudia la información de la visita para lograr así colaboración de todo el grado 9° y liderar el proyecto pensando en que a partir de grado 10° estos iniciarán sus estudios de Media técnica en Medio ambiente el próximo año lectivo allí en su Institución.





Imagen 2. Experiencia sobre el compostaje. Capacitación del DAGMA.

ANEXO 2. PRESENTACIÓN DE LAS SITUACIONES.

APRENDIENDO LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL CONTEXTO DE PRODUCCIÓN DE ABONO.

A continuación, se encontrarán dos situaciones problema, las cuales tienen diferentes actividades que se desarrollarán en grupo y con asesoría del docente.

En la situación 1, se decide realizar el proyecto de la compostera escolar, pero se necesita recolectar la información necesaria para darle estabilidad y rendimiento a este proyecto, por esto, se busca ayudar a Claudia y sus compañeros a encontrar la ecuación que mejor represente o modele el problema de la cantidad de material orgánico almacenado en la compostera para producir cierta cantidad de compost.

En la situación 2, se debe analizar y evaluar la factibilidad del proyecto y así realizar el informe final que le entregará al Rector. Tanto la situación 1 y 2, se desarrollarán a partir de unas múltiples tareas que se encuentran en el desarrollo de este proyecto de la construcción y producción de compost.

SITUACIÓN 1

La decisión de iniciar la compostera en la sede es un hecho, pero los estudiantes necesitan entregar al Sr. Rector la información solicitada, y aprovechando los conocimientos de la comunidad, los coordinadores organizaron una reunión de los estudiantes con Don Marcelo, un vecino del barrio quien tiene experiencia en el tema.

Don Marcelo les recomendó a los estudiantes que primero hicieran una experiencia piloto con una compostera pequeña, propuso organizarla a partir de un modelo que dibujó en una hoja de papel; les dijo

que sería bueno organizar cuatro compartimentos para ir moviendo los residuos y les compartió la lista de materiales requeridos para el montaje:

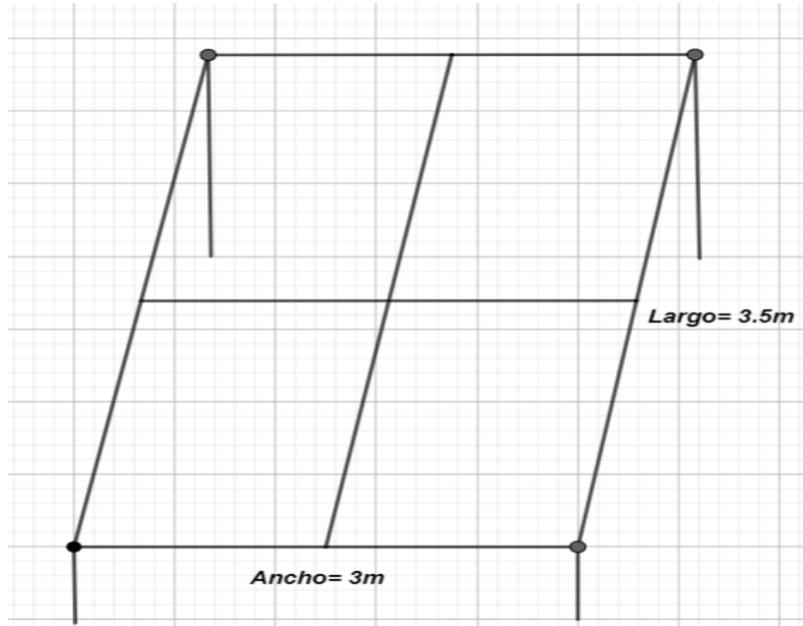


Ilustración 3. Modelo de la compostera. Fuente: Propia.

Los muchachos muy animados hicieron las averiguaciones del caso y consignaron los datos en la siguiente tabla, pero necesitan hacer algunos cálculos para poder entregar al rector el presupuesto total del montaje de la compostera “piloto”. ¿Podrían ayudarles a completar la tabla?

Materiales	Cantidad requerida de material	Costo por material "Pesos"	Costo total "Pesos"
Hojas de Zinc de 3.44 m de largo x 80 cm de ancho.	4 láminas	\$ 16.000	
Guaduas de 3 m de largo x 10 cm de radio.	4 unidades	\$ 9.000	
Alambre de amarre.	1 kilo	\$ 6.000	
Tablas de madera de 1.20 m.	12 tabla	\$ 60.000	
Mano de obra mensual.	3 meses	\$ 480.000	

Costo total de producción. "Pesos"	
Área de la compostera. "m ² "	

Tabla 3. Datos para la realización de la compostera.

¿Será suficiente conocer el costo total de la producción para saber si el proyecto es rentable o no? ¿Se requieren otros datos? Discutan la situación con sus compañeros y justifiquen sus respuestas.

Surgieron muchas preguntas para el equipo gestor del proyecto; por ejemplo, ¿cómo sabemos cuanta cantidad de compost se produciría en la compostera? ¿Cuál es la capacidad productiva de la misma? ¿Qué relación hay entre la cantidad de cáscaras que inicialmente se pone en la compostera y la cantidad final de compost?

Frente a estos interrogantes, Claudia y sus amigos se acordaron que había algunas señoras en el sector que tenían composteras en sus casas y que podrían tener información. Dedicaron algunos días a visitar y encuestar algunas viviendas, al final decidieron que la compostera de la Sra. Mariela, era la indicada, pues Sra. Mariela era una mujer muy organizada y dedicada a su compostera, Claudia le explico a Sra. Mariela de qué trataba el proyecto y su visita.

Sra. Mariela, después de escuchar las ideas del proyecto, recuerda que ella tiene registros de cada cosecha de compost, que ha registrado durante nueve meses, muy amablemente le da una copia de ese registro - como se puede observar en la siguiente tabla- con el fin de ayudar a Claudia a recoger la información necesaria para empezar su proyecto escolar:

Meses de almacenamiento	Material orgánico producido y almacenado (Kg)	Cantidad de producción de abono orgánico (Kg)
Primer mes	2	8
Segundo mes	3	18

Tercer mes	4	32
Cuarto mes	5	50
Quinto mes	6	72
Sexto mes	7	98
Séptimo mes	8	128
Octavo mes	9	162
Noveno mes	10	200

Tabla 4. Registro de cosecha de compost, durante nueve meses.

Como se puede observar, se pudo recoger la información completa, pero los jóvenes sospechan que hay una relación común entre los datos que se presentan entre los datos de la segunda y tercera columna.

Algunos compañeros tratan de establecer relaciones entre los datos; ¿cuál dato depende del otro? Juan, un compañero muy pilo, dice que a medida que se ponen más cáscaras es mucho mayor la producción, pero que no es el doble o el triple... ¿Qué relación hay entre estas dos variables? ¿Cómo cambian los valores entre sí? ¿Podrían ayudarle al equipo a encontrarla?

Hagan sus cálculos en grupos pequeños y compartan las posibles soluciones en plenaria:

¿Hay algún modelo matemático que pueda representar la situación? ¿Es conocido por ustedes ese modelo!

El grupo aún no completa los datos que el Rector solicita para saber si es rentable o no el proyecto y se requiere calcular la cantidad de cáscaras que deben echar en la compostera y saber cuánto les puede producir la misma, pero sospechan que el modelo matemático bien usado puede arrojar la información que buscan, el problema es que hasta el momento apenas han visto ecuaciones sencillas y este modelo que construyeron al llenar la tabla no lo conocen, de manera que deciden preguntar al profe de matemáticas por si les puede ayudar.

El profesor Diego les dijo que la producción de compost está dada por una función que no es de tipo lineal y que con gusto les puede ayudar a resolver este problema, pero que es necesario desarrollar la siguiente

actividad, con el fin de poder identificar y desarrollar las competencias necesarias para llegar obtener la ecuación que representa esta situación.

ACTIVIDAD 1: Comprendiendo la situación

En equipos de tres (3) estudiantes lean las siguientes preguntas dadas y contesten.

a) ¿Qué es una función lineal?

b) ¿Cuál es la ecuación general de las funciones lineales?

c) Den dos ejemplos de la utilidad de las funciones lineales en la vida real diaria.

d) Pero no todas las funciones son lineales. ¿Puedes describir una función que no sea lineal?

Sabemos que una función se puede definir de varias maneras: dando la lista de parejas que la forman, trazando la gráfica o escribiendo la ecuación.

Teniendo en cuenta el comentario que el profe Diego le hizo a Claudia, al decir que la producción de compost no está dada por una función lineal, entonces podemos deducir que Claudia necesita una función

cuya gráfica no sea una línea recta; también que esa función no tenga como ecuación la forma $f(x) = ax + b$. Entonces el profe Diego para darle una ayuda a Claudia, le sugiere utilizar GeoGebra, link: <https://www.geogebra.org/classic/exggtkdf> y tratar de representar con dicho software la expresión $f(x) = x^2$.

e) ¿Qué forma tiene la gráfica?

f) Teniendo en cuenta la función anterior, completamos la siguiente tabla:

X	Y
-3	9
-2	
-1	1
0	0
1	1
2	
3	

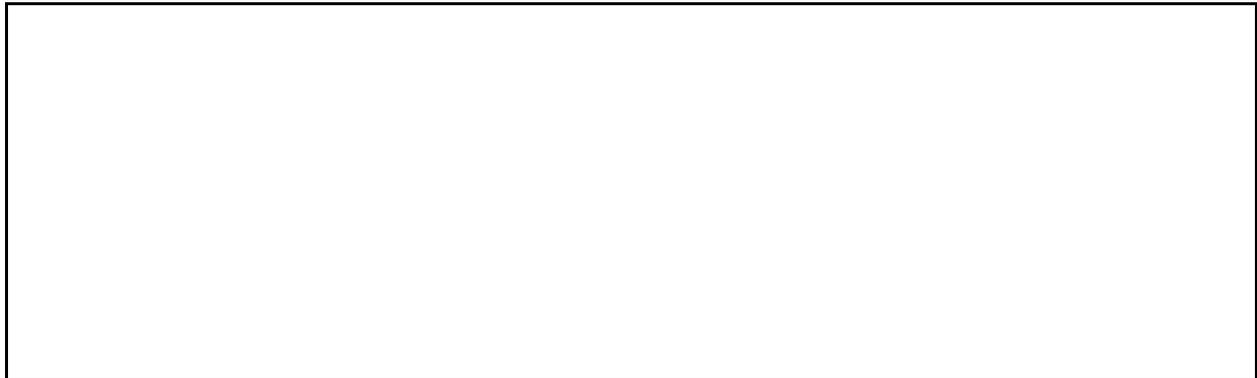
g) Interpreten qué relación existe entre la variable x y la variable y . Además, qué sucede con la variable y si se aumenta el valor de la variable x .



Leonardo es uno de los compañeros de Claudia, y también hace parte del grupo, pero él quiere saber, si con la ecuación encontrada en el punto anterior, podríamos suponer que las ecuaciones parecidas a $f(x)=x^2$ tendrán gráficas con forma parabólicas; averigüemos si esa suposición es correcta, grafiquemos las siguientes ecuaciones utilizando la herramienta de GeoGebra anterior:

- $f(x) = 2x^2$
- $f(x) = -3x^2$
- $f(x) = -x^2$

COMENTARIOS:



Como se pudo observar el valor de a influye en la apertura de la parábola, entre más pequeño sea el valor absoluto de a las ramas de la parábola son más abiertas. El signo de a determina si las ramas se abren hacia arriba o hacia abajo.

ACTIVIDAD 2: Explorando los parámetros de la función cuadrática

a) Ingresen al siguiente Link: <https://www.geogebra.org/classic/ygbjger>

b) ¿Qué forma tiene la gráfica?

c) Utilizando el link anterior, mueva el deslizador “ a ” con ayuda del mouse de tal forma que se cambien los valores de a , observen la gráfica y describa el comportamiento de la curva.

d) ¿Qué ocurre cuando el valor de a es cero?

e) Nuevamente con ayuda del deslizador “ b ” cambien los valores de b , observen la gráfica y describan el comportamiento de la curva al variar b .

f) ¿Qué ocurre cuando el valor de b es cero?

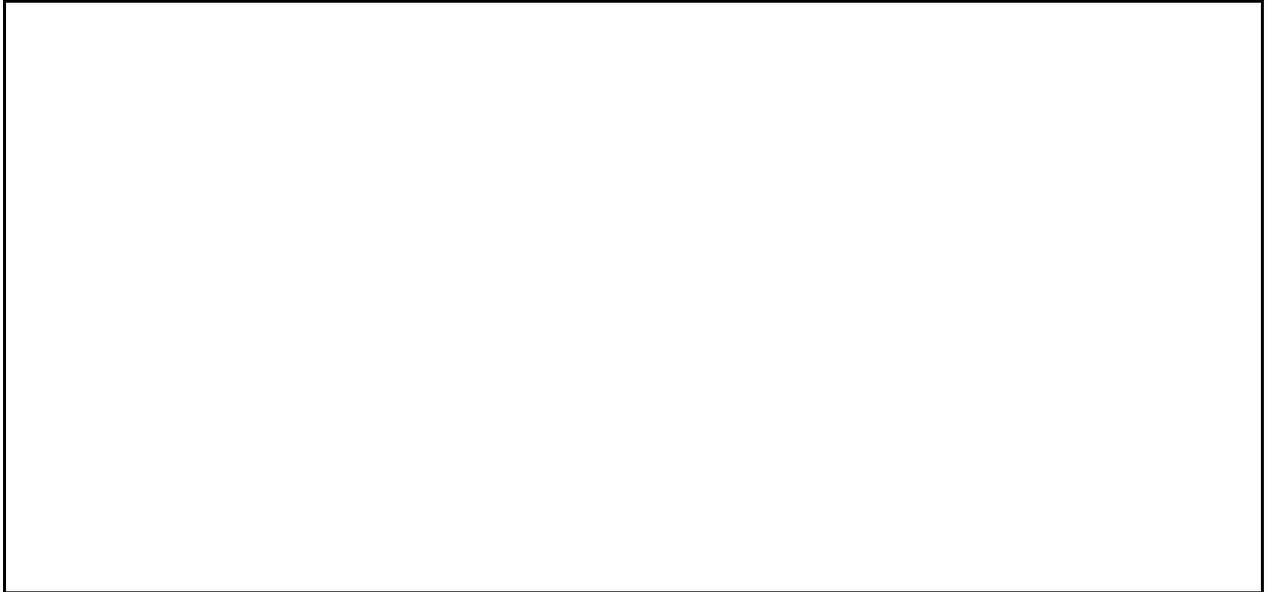
g) Abran el siguiente link: <https://www.geogebra.org/classic/t4wzx4pw> y exploren el comportamiento del Vértice “V” cuando cambiamos el valor de a con ayuda del deslizador, observe la gráfica.

h) ¿Qué sucede con el Vértice de la parábola, si el valor de a es positivo o es negativo?

i) Finalmente cambie los valores de c , observe la gráfica y emita una conclusión sobre el comportamiento de la parábola.

j) ¿Qué ocurre con el vértice de la parábola al variar c ?

- k) Teniendo en cuenta las preguntas anteriores, formule un concepto de función cuadrática y menciona algunas características de su gráfica.



Una función cuadrática es una función polinómica, que tiene grado dos. Cuya representación gráfica es una parábola.

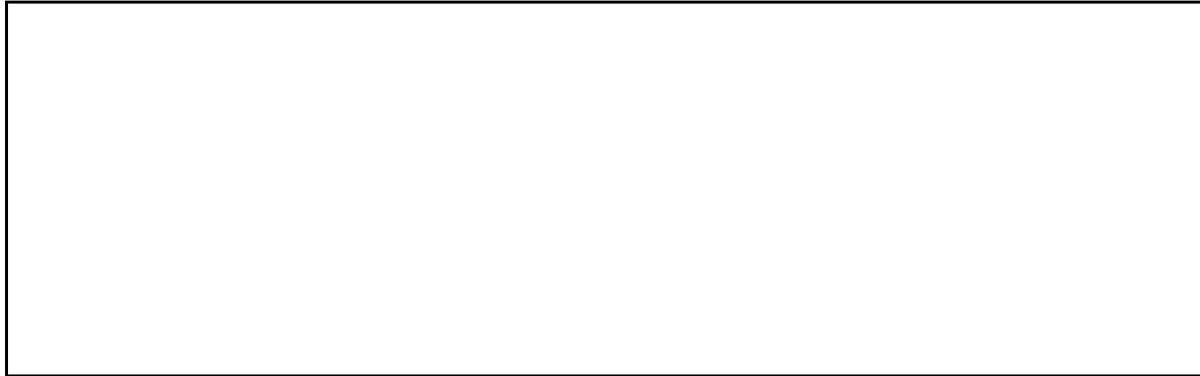
Una función cuadrática tiene la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, Su forma depende exclusivamente del coeficiente a de x^2 .

- Los coeficientes b y c trasladan la parábola a izquierda, derecha, arriba o abajo.
- Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba y si $a < 0$, hacia abajo.
- Cuanto más grande sea el valor absoluto de a , más cerrada es la parábola.

Para desarrollar más destrezas, analicemos las siguientes gráficas utilizando en siguiente link de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/exggtkdf>

- $f(x) = -x^2 - 1$
- $f(x) = -x^2 + 1$

¿En qué se parecen y en qué se diferencian las dos gráficas?



Ahora teniendo en cuenta todas las actividades que hemos desarrollado con ayuda de la herramienta GeoGebra, podemos llegar a la conclusión de que la ecuación que mejor nos modela el problema que tiene Claudia, para saber que a una cierta cantidad de material orgánico que se almacene en la compostera se va producir una cantidad “x” de compost, está modelada por una función cuadrática y su gráfica es una parábola, cuya ecuación está representada por las parejas ordenadas en la tabla 1, ubiquen dichas parejas ordenadas en la siguiente tabla que se encuentra en GeoGebra, utilizando el siguiente link: <https://www.geogebra.org/classic/repagvnj>.

a) Una vez ubicadas las parejas ordenadas en la tabla, con ayuda de GeoGebra analicen cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a la gráfica y la función, que mejor modela la situación problema sobre la cantidad de compost, ayudemos a Claudia a resolver este problema:

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = -2x^2$
- $f(x) = 3x^2$
- $f(x) = -x^2$
- $f(x) = 2x^2$

¿Qué gráfica y ecuación tiene?



SITUACIÓN 2

En la situación anterior, Claudia y sus compañeros estaban preocupados por encontrar la ecuación que mejor representaba o modelaba el problema de la cantidad de material orgánico almacenado en la compostera para producir cierta cantidad de compost. Dicho problema fue solucionado gracias a la ayuda del profe Diego y el compromiso del grupo al desarrollar todas las actividades anteriores, ahora ellos deben analizar y evaluar la factibilidad del proyecto y así realizar el informe final que le entregará al Rector.

Por otra parte, en el informe final debe incluir la siguiente información:

- Los materiales a utilizar y sus costos.
- El costo de producción.
- El área a utilizar.
- Finalmente, la rentabilidad del proyecto en relación a las ganancias que se puede generar.

ACTIVIDAD 1: Analizando la situación a partir de la parábola

Para calcular las ganancias y poder observar la rentabilidad del proyecto, se necesita saber cuánto será el precio de venta de compost. Para esto Claudia, con ayuda de sus compañeros seleccionaron uno de los viveros del barrio, “El senderito”, con el fin de registrar los diferentes precios de venta de abono orgánico en dicho vivero. Don Manuel el dueño del vivero les comento la experiencia de vender compost por kilo y cómo obtener buenas ganancias, es así, como les comentó su experiencia, los primeros tres meses fueron de producción y empaquetamiento del producto y calcular cuánto le constaba todo ese proceso y posteriormente, cómo a partir de esa información pudo establecer un precio por kilo del compost y así obtener una ganancia. Claudia organizó toda esa información que Don Manuel les suministro en la siguiente tabla, sabiendo que estos datos le podrían servir a futuro:

Precio de venta X kilo de Compost en miles de pesos (\$)	Ganancias (\$)
\$ 53	\$ 5.400
\$ 106	\$ 10.400
\$ 159	\$ 14.200
\$ 212	\$ 16.900
\$ 265	\$ 18.500
\$ 318	\$ 18.900
\$ 371	\$ 18.250
\$ 424	\$ 16.500
\$ 477	\$ 13.500
\$ 530	\$ 9.500
\$ 583	\$ 5.350

Tabla 6. Precio de venta de compost versus Ganancias.

- a) ¿Analice la tabla anterior y escriba qué variable representa la variable dependiente e independiente, el precio de venta o la ganancia?

- b). Ahora observen la parábola obtenida de la ecuación que representa las ganancias de la venta de compost $f(x) = -0.2x^2 + 125x - 600$ en el siguiente Link: <https://www.geogebra.org/classic/r9ttsk76>

, atreva-se a dar las coordenadas del punto máximo de ella. ¿Que representaría ese punto en términos de la situación estudiada?

- c. ¿Qué sucede con la gráfica que representa las ganancias por la venta de compost, cuando el valor de a cambia de signo pruebe con algunos valores específicos, utilizando el deslizador? Realice algunas conclusiones y discuta las con tus compañeros.

- d. ¿Cuál es el precio mínimo al que se debe vender cada abono orgánico para no obtener pérdidas? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 2: Proyectando las ganancias de la venta de compost

Siguiendo en este razonamiento, las ganancias del proyecto “Haciendo Útiles Los Desechos Orgánicos De Mi Restaurante Escolar”, está dada por la siguiente función $f(x) = -0.2x^2 + 100x - 450$, además se conoce que el costo de producción de un kilo de compost es de \$ 50 pesos y se puede vender cada kilo aproximadamente a \$ 10 mil pesos.

Claudia juiciosamente ha realizado las acciones necesarias para poder hacer una proyección a treinta y seis meses, para poder dar un acercamiento de la utilidad o rentabilidad del proyecto y así poder entregar todos los anexos exigidos en el informe final, como se puede observar en la siguiente tabla:

Mes Analizados	Cantidad de Compost producida por mes	Costo de producción por kg “pesos”
3 MESES	1 kg	\$ 50
6 MESES	2 kg	\$ 90
9 MESES	3 kg	\$ 130
12 MESES	4 kg	\$ 170
15 MESES	5 kg	\$ 210
18 MESES	6 kg	\$ 250
21 MESES	7 kg	\$ 290
24 MESES	8 kg	\$ 330
27 MESES	9 kg	\$ 370
30 MESES	10 kg	\$ 410
33 MESES	11 kg	\$ 450

Por otra parte, haciendo uso de la ecuación que representa las ganancias de la venta de abono orgánico, complete la siguiente tabla utilizando siguiente link: <https://www.geogebra.org/graphing/y5bmzrzc>, la cual representa las ganancias de proyecto escolar:

Precio de venta por kilo “miles de pesos”	Ganancias “pesos”
----------------------------------------------	----------------------

\$ 10	\$ 530
\$ 15	
\$ 17	\$ 1.192
\$ 20	
\$ 21	\$ 1.561
\$ 22	
\$ 27	\$ 2.104
\$ 29	\$ 2.281
\$ 30	
\$ 33	\$ 2.632
\$ 35	\$ 2.805

- a) Una vez completada la tabla, con ayuda de GeoGebra, grafique la ecuación anterior y analicen ¿Cuál debería ser el precio de venta de cada compost para obtener la máxima ganancia? Justifique su respuesta.

- b) ¿Qué sucede si el precio de venta de cada abono es de \$ 500 pesos?

- c) Teniendo en cuenta los datos de la tabla y la gráfica, indique que se puede concluir para realizar el informe final del proyecto, en el cual se incluya a qué precio se debe vender el compost para obtener la mayor ganancia y cuál será su valor mínimo para no generar pérdidas. Compare y discuta con sus compañeros su respuesta.