



LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CUADRADOS Y CÚBICOS PERFECTOS EN
UN PROCESO DE APRENDIZAJE MEDIADO POR GEOGEBRA Y MATERIAL
CONCRETO

Adriana María Ulabarry Zapata

Código 201458229

Yeison Tibeth Velasco Velasco

Código 201458149

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
2019

La factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos en un proceso de aprendizaje
mediado por Geogebra y material concreto

Adriana María Ulabarry Zapata

Código: 201458229

Yeison Tibeth Velasco Velasco

Código: 201458149

Requisito parcial para optar por el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en
Educación Matemática.

Director:

Doctor David Benítez Mojica

Profesor del Área de Educación Matemática

Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

2019

***Dedicatoria de
Adriana María Ulabarry Zapata***

*A Dios por darme la vida, por hacer de mí la persona que soy, porque cada día traza con
tinta indeleble el camino que debo recorrer, para él sea la honra y la gloria.
A mi esposo por su Amor, dedicación, apoyo incondicional en cada uno de los propósitos y
metas que me he trazado
A mi Asesor el Doctor David Benítez Mojica por su orientación, apoyo, paciencia,
compromiso, motivación, amistad y dedicación que me permitieron cumplir con este sueño de
avanzar en mi vida profesional*

“El tiempo de Dios es perfecto, nada se mueve sin su consentimiento y aprobación”

***Dedicatoria de
Yeison Tibeth Velasco Velasco***

*A Dios en primera instancia por darme la sabiduría y fortaleza para sobreponerme a cada
dificultad y poder seguir adelante con cada una de las metas que me he propuesto.
A mi familia por brindarme todo su apoyo e impulsarme cada día a ser mejor.
A mis padres Ana María Velasco y Marco Antonio Velasco por darme la vida y el mejor
ejemplo.
A mi novia Stephania Santana por acompañarme en el transitar de este camino lleno de
tantos momentos difícil que fueron insignificantes comparados con todos los momentos
maravillosos que construimos
Al Dr. David Benítez Mojica por su apoyo, aporte, motivación y enseñanzas que me
permitieron culminar esta etapa tan importante de mi vida profesional.
A mis amigos y compañero por hacer de este caminar uno de los procesos más maravillosos
de mi vida.*

“lo urgente no soluciona lo importante, pero lo importante si lo urgente”

Agradecimientos

Adriana María Ulabarry

A Dios por darme la vida, por hacer de mí la persona que soy, porque cada día traza con tinta indeleble el camino que debo recorrer y me mantiene en sus caminos, porque en su inmenso amor no escatima ningún detalle con tal de que mi vida se perfeccione y pueda prepararme para su pronto regreso, solamente la honra y la gloria sea para él.

A mis padres por haberme enseñado a luchar por cada una de mis metas y darme la oportunidad de conocer de Dios.

A mi esposo por su Amor, dedicación, apoyo incondicional en cada uno de los propósitos, metas y decisiones que debo tomar.

A Danielita y Nicolás porque son la razón de mi existir, me inspiran con su cariño y ternura, con un abrazo y un te quiero me recordaban que no estoy en esta vida por casualidad, que Dios tiene grandes cosas para mí, los Amo niños con todo mi corazón

A mi Asesor el Doctor David Benítez Mojica por su orientación, apoyo, paciencia, compromiso, dedicación durante la elaboración de la tesis, la motivación para la culminación de mis estudios de maestría y por la amistad incondicional que me brindo durante todo este tiempo.

A nuestros evaluadores Hendel Hacker y Diana Ximena Ortiz por cada uno de sus aportes, sugerencias y tiempo dedicado.

A la coordinadora Adriana García por su apoyo, paciencia y comprensión durante este proceso
A mis profesores, compañeros del programa de licenciatura y amigos que cada día me enseñaron a ser mejor, a luchar por cada uno de mis sueños sin importar los obstáculos y dificultades que se me presentaran en el camino.

Al Instituto Técnico Agropecuario e Industrial Juan Tama, por haberme dado la oportunidad de realizar mis estudios de bachillerato y ahora abrir nuevamente sus puertas para la implementación de la tesis de grado.

Al centro de escritura Unicauca, especialmente al Profesor Cristian Acosta, por el apoyo y enseñanza en la corrección de la tesis

A toda mi familia por su apoyo y respaldo en los buenos y malos momentos, porque aunque el camino muchas veces es difícil de transitar y las fuerzas parecen acabar cada uno de ustedes me recuerda que vale la pena seguir luchando.

Agradecimientos

Yeison Tibeth Velasco Velasco

A Dios primeramente por regalarme la vida y una familia tan maravillosa.

A mi familia por brindarme su infinito amor y apoyarme en cada uno de mis proyectos.

A mi novia por brindarme su apoyo incondicional y regalarme lo más maravilloso de la vida, (**mi hija**) las adoro.

A mi compañera de trabajo por su gran apoyo, confianza, comprensión y compromiso con este proyecto.

Al Dr. David Benítez Mojica, por la dedicación, esmero, orientación y ayuda que nos brindó para la realización de este trabajo.

A la coordinadora Adriana García por su apoyo, paciencia y comprensión, a los evaluadores por cada uno de los aportes.

En general a toda la comunidad educativa de la Universidad del Valle en especial a los profesores por brindarme en cada uno de los espacios lo mejor para mi construcción personal y profesional.

A todas esas personas que me brindaron una idea, un abrazo o una palabra de aliento en momentos de dificultad, pues fueron de gran ayuda para que se construyera este gran sueño. No ha sido fácil este caminar, pero gracias al apoyo, bondad, aportes y amor incondicional de todas estas personas se ha logrado llegar al lugar que hace cinco años parecía imposible.

Mi sinceros respeto y cariño para todos, les agradezco, y hago presente mi gran afecto hacia ustedes, mi hermosa familia.



Programa Académico Lic. en educación Básica con
énfasis en matemáticas.

Fecha

Código del programa: _____

Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
11	06	2019

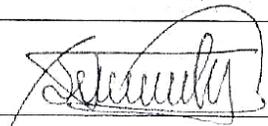
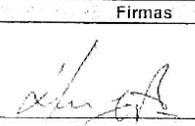
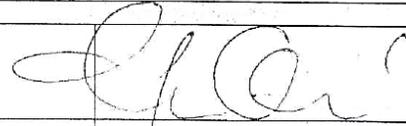
Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
FACTORIZACIÓN de Polinomios Cuadráticos y cúbicos con la mediación de Geogebra				
Se trata de:				
Proyecto <input type="checkbox"/>		Informe Final <input checked="" type="checkbox"/>		
Director				
David Benítez Mojica				
Nombre del Primer Evaluador				
Hendel YAKER				
Nombre del Segundo Evaluador				
Diana ortiz				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Yerson Velasco	1458149	3469	Yerson.Velasco@correounivalle.edu.co	320 7060185
Adriana Ulabarry	1458229	3469	Adriana.Ulabarry@correounivalle.edu.co	315 871 9753
Evaluación				
Aprobado <input type="checkbox"/>	Meritorio <input checked="" type="checkbox"/>	Laureado <input type="checkbox"/>		
Aprobado con recomendaciones <input type="checkbox"/>	No Aprobado <input type="checkbox"/>	Incompleto <input type="checkbox"/>		

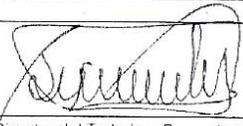
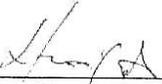
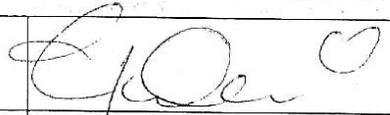
En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado Primer Evaluador Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones <input type="checkbox"/>	Observaciones <input type="checkbox"/>	Razón de desacuerdo - Alternativas <input type="checkbox"/>
Si se considera necesario, usar hojas adicionales		
1) discurso fluido con apropiación conceptual desde varias líneas		
2) se felicita a los estudiantes y al tutor por el diseño y la escritura del trabajo		
3) se observó un orden y la secuencia		
4) Existe una riqueza cultural por la diversidad étnica con la cual se trabajó. Esta parte debe ser resaltada.		
5) se destaca que es un trabajo que tiene en cuenta la formación en valores.		
6) se justifica la evaluación como mérito por lo siguiente:		
a) LAS CINCO OBSERVACIONES ANTERIORES		
b) se presentó el trabajo en dos congresos internacionales		
c) diseño de material didáctico original		
Firmas:		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Resumen analítico.

Título	La factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos en un proceso de aprendizaje mediado por Geogebra.
Investigadores	Adriana María Ulabarry Zapata Yeison Tibeth Velasco Velasco
Asesor del trabajo de grado	David Benítez Mojica
Evaluadores	Hendel Hacker Diana Ximena Ortiz
Palabras Claves	<i>Factorización, Mediación, representaciones, educación por competencias, GeoGebra</i>
Objetivos	<p>General Caracterizar un proceso de aprendizaje que favorezca los conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.</p> <p>Específicos</p> <ul style="list-style-type: none">• Identificar el impacto que tiene el uso de diferentes representaciones en la construcción de conocimiento y el desarrollo de ^{habilidades} sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo.• Documentar las características que debe tener las actividades de aprendizaje para propiciar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.• Analizar las características de un proceso de aprendizaje con base a la mediación instrumental y cómo este promueva la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.• Identificar el impacto del uso de las tecnologías, como mediadoras de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

Metodología:

La propuesta metodológica de este proyecto se estructura a partir de tres fases:

La primera fase concierne a la delimitación del problema de investigación, a través de la contextualización, antecedentes históricos, de investigación y curricular, el planteamiento de la pregunta de interés, los objetivos y la justificación, los cuales constituirán el capítulo uno del reporte final.

Las fases dos y tres están orientadas al desarrollo de los objetivos específicos. De esta manera, la segunda fase concibe la sustentación teórica para tratar la problemática de interés. Se construyen dos referentes teóricos: didáctico y matemático. En el primer referente, se discute a grandes rasgos la propuesta en torno a la Educación por Competencias (Castellanos, Morga y Castellanos (2003)) teoría de las representaciones (Fernando Hitt (2002)) la mediación Instrumental (Moreno (2001, 2002)) y la integración de las Tecnologías de la información y a comunicación (Ministerio de educación nacional MEN 2014) En el segundo referente se aborda los conceptos matemáticos de interés en la investigación que servirán de sustento para diseñar las hojas de trabajo y las actividades en el software sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos. Esta fase representa un eje central en este proyecto puesto que también pretende identificar y reconocer los elementos teóricos necesarios para construir la categoría de análisis necesaria para interpretar las producciones de los estudiantes.

Finalmente, la tercera fase estará delimitada por los aspectos que se requieren para la implementación y gestión de los instrumentos diseñados (hojas de trabajo, el uso de material concreto y GeoGebra). Además, en esta fase se espera reunir la información necesaria para dar respuesta a las preguntas de investigación, evaluar los objetivos alcanzados y señalar nuevas rutas para seguir investigando.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA	4
1.1 CONTEXTUALIZACIÓN.	4
1.2 ANTECEDENTES.	5
1.2.1 <i>Históricos</i>	5
1.2.1.1 Surgimiento del álgebra	5
1.2.1.2 Álgebra retórica	5
1.2.1.3 El álgebra sincopada	7
1.2.1.4 El álgebra simbólica.....	8
1.2.2 <i>Investigaciones.</i>	9
1.2.3 <i>Curriculares.</i>	13
1.2.3.1 Los lineamientos Curriculares.....	13
1.2.3.2 Estándares básicos de competencias en Matemáticas	15
1.2.3.3 Derechos Básicos de Aprendizaje	16
1.2.4 <i>Legales</i>	17
1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	17
1.4 JUSTIFICACIÓN	19
1.5 OBJETIVOS	22
1.5.1 <i>Objetivos generales</i>	22
1.5.2 <i>Objetivos específicos</i>	22
1.6 PREGUNTAS	23
1.6.1 <i>Pregunta Central</i>	23
1.6.2 <i>Preguntas Auxiliares</i>	23
2. REFERENTES TEÓRICOS	23
2.1.1 <i>Educación por Competencias</i>	24
2.1.2 <i>Teoría de las representaciones</i>	27
2.1.3 <i>Mediación Instrumental.</i>	29
2.1.3.1 Representaciones Ejecutables.....	30
2.1.3.2 De la amplificación a la Reorganización conceptual.....	31
2.1.3.3 De las herramientas a los instrumentos	32
2.1.4 <i>Integración de las TIC.</i>	33
2.2 DIMENSIÓN MATEMÁTICA	35
2.2.1 <i>La factorización</i>	35
3. DISEÑO METODOLÓGICO	38

3.1	TIPO DE ESTUDIO.....	38
3.2	SUJETOS.....	38
3.2.1	<i>Principios y fundamentos Institucionales.</i>	38
3.3	FASES DE ESTUDIO	39
3.3.1	<i>Fase de Diseño</i>	40
3.3.2	<i>Fase de Validación</i>	40
3.3.3	<i>Uso de la Tecnología</i>	41
3.3.4	<i>Fase de recolección</i>	41
3.3.5	<i>Fase de Procesamiento</i>	42
3.3.6	<i>Fase de Análisis</i>	43
4.	DISEÑO Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES.....	44
4.1	ANÁLISIS DEL DIAGNÓSTICO.....	44
4.1.1	<i>Presentación de la actividad.</i>	44
4.1.2	<i>Objetivos</i>	45
4.1.3	<i>Condiciones de aplicación</i>	46
4.1.4	<i>Análisis cuantitativo.</i>	46
4.1.5	<i>Análisis cualitativo.</i>	51
4.1.6	<i>Consideraciones Finales</i>	54
4.2	HOJA DE TRABAJO 1, REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA	55
4.2.1	<i>Propósito</i>	55
4.2.2	<i>Descripción de la hoja de trabajo No1</i>	56
4.2.3	<i>Condiciones de aplicación.</i>	56
4.2.4	<i>Análisis de la hoja de trabajo No1.</i>	58
4.2.5	<i>Comentarios finales</i>	70
4.3	HOJA DE TRABAJO 2, REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA.....	71
4.3.1	<i>Propósitos</i>	71
4.3.2	<i>Descripción de la actividad</i>	71
4.3.3	<i>Condiciones de aplicación</i>	72
4.3.4	<i>Análisis de la hoja de trabajo No 2. (Tablas y gráficas).</i>	73
4.3.5	<i>Consideraciones finales</i>	84
4.4	HOJA DE TRABAJO 3, REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA CON LA MEDIACIÓN DE MATERIAL CONCRETO. .	85
4.4.1	<i>Propósito</i>	85
4.4.2	<i>Descripción de la actividad</i>	86
4.4.3	<i>Condiciones de aplicación</i>	86
4.4.4	<i>Análisis de los resultados de la hoja de trabajo 3.</i>	89
4.4.5	<i>Consideraciones finales</i>	97
4.5	HOJA DE TRABAJO 4, REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA.....	98

4.5.1	<i>Propósito</i>	98
4.5.2	<i>Descripción de la actividad</i>	98
4.5.3	<i>Condiciones de aplicación</i>	99
4.5.4	<i>Análisis de la hoja de trabajo No 4.</i>	101
4.5.5	<i>Consideraciones finales</i>	108
5.	CONCLUSIONES	110
5.1	RESPUESTA A LA PREGUNTA CENTRAL DE INVESTIGACIÓN	110
5.2	RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	113
5.3	SUGERENCIAS	115
5.3.1	<i>Sugerencias para los profesores de matemáticas</i>	115
5.3.2	<i>sugerencias a los estudiantes</i>	115
5.3.3	<i>Sugerencias para directivos escolares</i>	116
6.	BIBLIOGRAFÍA	117

Índice de Figuras

Figura 1 Representación de la proposición II.4.	6
Figura 2. Representación geométrica de la proposición II.	7
<i>Figura.3</i> Campos de las competencias.....	24
Figura 4 Dimensiones de las competencias.	26
Figura 5 Construcción de un rectángulo con geometría dinámica Geogebra.	31
Figura. 6 Construcción en GeoGebra la suma de un binomio al cuadrado $(A + B)^2$	33
<i>Figura. 7</i> Fases de investigación.....	40
<i>Figura 8</i> Representación geométrica de suma de cubos.....	48
Figura 9 Representación de un cubo de la a.....	50
<i>Figura. 10</i> Actividades Propuestas en geogebra 2d y 3d para factorizacion	99

Índice de graficas

Gráfica 1. Resultados prueba diagnóstico.....	46
Gráfica 2. Pregunta No 1, prueba diagnostico.....	51
Gráfica 3. Resultados hoja de trabajo No 1.	59
Gráfica 4. Resultados pregunta No 1, conocimientos, hoja de trabajo No 1.....	59
Gráfica 5. Resultados pregunta No 2, conocimientos, hoja de trabajo No. 1.....	60
Gráfica 6 pregunta No 3, hoja de trabajo No 1.	62
Gráfica 7. Resultados pregunta No 4, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No 1.....	64
Gráfica 8. Resultados pregunta No 5, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No 1.....	65
Gráfica 9. Resultados pregunta No 6, habilidades de control, hoja de trabajo No 1.	67
Gráfica 10. Resultados pregunta No 7, patrones, hoja de trabajo No 1.	69
Gráfica 11. Resultados pregunta No 1, conocimientos, hoja de trabajo No 2.	74
Gráfica 12. Resultados pregunta No 1, conocimientos, hoja de trabajo No 2.	74
Gráfica 13 Resultados pregunta No 3, habilidades de control, hoja de trabajo No 2.	77
Gráfica 14. Resultados pregunta No 4, habilidades heurísticas hoja de trabajo No 2.	78
Gráfica 15. Resultados pregunta No 5, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No 2.	80
Gráfica 16. Resultados pregunta No 6, hoja de trabajo No 2.....	81
Gráfica 17. Resultados pregunta No 7, hoja de trabajo No 1.....	83
Gráfica 18 Resultados hoja de trabajo No 3.	89
Gráfica 19 Resultados pregunta No 1, hoja de trabajo No 3.....	90
Gráfica 20. Resultados pregunta No 2, hoja de trabajo No 3.....	91
Gráfica 21. Resultados Pregunta No 3, hoja de trabajo No 3.....	92
Gráfica 22, Resultados pregunta No 4, hoja de trabajo No 3.....	92
Gráfica 23. Resultados pregunta No 5, hoja de trabajo No 3.....	94
Gráfica 24. Resultados pregunta No 6, hoja de trabajo No 3.....	95
Gráfica 25. Resultados pregunta No 7, hoja de trabajo No 3.....	96
Gráfica 26 Resultados hoja de trabajo No 4.....	102
Gráfica 27 Pregunta No 1, hoja de trabajo No 4.	102
Gráfica 28 Pregunta No 2, hoja de trabajo 1.....	104
Gráfica 29 resultados pregunta No 3, patrones, hoja de trabajo No 4.	105
Gráfica 30, resultados pregunta No 4, hoja de trabajo No 4.	107

Índice de Imágenes

<i>Imagen 1</i>	Manuscrito Prueba Diagnóstico Estudiante No 7	52
<i>Imagen 2</i>	Manuscrito Prueba Diagnóstico Estudiante No 7	52
<i>Imagen 3</i>	Manuscrito prueba diagnóstico, estudiante 14	52
<i>Imagen 4</i>	Manuscrito prueba diagnóstico, estudiante No 6	53
<i>Imagen 5</i>	Manuscrito prueba diagnóstico, Estudiante No 6	53
<i>Imagen 6</i>	Manuscrito prueba diagnóstica, Estudiante No 7	53
<i>Imagen 7</i>	Manejo básico vista CAS en GeoGebra, hoja de trabajo No 1	57
<i>Imagen 8</i>	Estudiante No 14 , hoja de trabajo No 1.	60
<i>Imagen 9</i>	Estudiante No 20, hoja de trabajo No 1	61
<i>Imagen 10</i>	Estudiante No 15, hoja de trabajo No 1	62
<i>Imagen 11</i>	Estudiante No 8, hoja de trabajo No. 1	63
<i>Imagen 12</i>	Estudiante No 9, hoja de trabajo No 1	64
<i>Imagen 13</i>	Estudiante No 3, hoja de trabajo No 1	64
<i>Imagen 14</i>	Estudiante No 7, hoja de trabajo No 1.	66
<i>Imagen 15</i>	Estudiante No 4, hoja de trabajo No 1.	66
<i>Imagen 16</i>	Estudiante No 4, hoja de trabajo No 1.	67
<i>Imagen 17</i>	Estudiante No 18, hoja de trabajo No 1.	68
<i>Imagen 18</i>	Estudiante No 1 Hoja de trabajo No 1.	69
<i>Imagen 19</i>	Estudiante No 12, hoja de trabajo No 1.	70
<i>Imagen 20</i>	Estudiante No hoja de trabajo No 2.	76
<i>Imagen 21</i>	Estudiante No 17 , hoja de trabajo No 2.	76
<i>Imagen 22</i>	Estudiante No 14, hoja de trabajo No 2.	77
<i>Imagen 23</i>	Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2.	78
<i>Imagen 24</i>	Estudiante No 13, hoja de trabajo No 2.	79
<i>Imagen 25</i>	Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2	79
<i>Imagen 26</i>	Estudiante No 19, hoja de trabajo No 2.	80
<i>Imagen 27</i>	Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2.	81
<i>Imagen 28</i>	Estudiante No 18, hoja de trabajo No 2.	82
<i>Imagen 29</i>	Estudiante No 11, hoja de trabajo No 2.	82
<i>Imagen 30</i>	Estudiante No 4, hoja de trabajo No 2.	83

<i>Imagen 31</i> Estudiante No 5, hoja de trabajo No 2.	84
<i>Imagen 32</i> Uso de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera).	87
<i>Imagen 33</i> , Estudiante No 5, hoja de trabajo No 3.	90
<i>Imagen 34</i> , Estudiante No 20, hoja de trabajo No 3.	91
<i>Imagen 35</i> Estudiante No 6, hoja de trabajo No 3.	92
<i>Imagen 36</i> Estudiante No 17, hoja de trabajo No 3.	93
<i>Imagen 37</i> Estudiante No 2, hoja de trabajo No 3.	94
<i>Imagen 38</i> Estudiante No 18, hoja de trabajo No 3.	95
<i>Imagen 39</i> Estudiante No 20, hoja de trabajo No 3.	96
<i>Imagen 40</i> Estudiante No 17, hoja de trabajo No 3.	97
<i>Imagen 41</i> implementación de actividades hoja de trabajo No 4.	100
<i>Imagen 42</i> , Estudiante No 6, hoja de trabajo No 4.	103
<i>Imagen 43</i> , Estudiante No17, hoja de trabajo No 4.	103
<i>Imagen 44</i> Estudiante No 6, hoja de trabajo No 4.	104
<i>Imagen 45</i> , Estudiante No 6, hoja de trabajo No 4.	105
<i>Imagen 46</i> Estudiantes No 3, hoja de trabajo No 4.	106
<i>Imagen 47</i> Estudiantes No 5, hoja de trabajo No 4.	106
<i>Imagen 48</i> Estudiante No 2, hoja de trabajo No 4.	107
<i>Imagen 49</i> , estudiante No 10 hoja de trabajo No 4.	108

Índice de Tablas

Tabla 1 Algunos problemas de la aritmética de Diofanto.....	8
Tabla 2 Coherencia horizontal	16
Tabla 3 Coherencia vertical	16
Tabla 4 Resultados promedio de las pruebas saber 9° del año 2015, 2016 y 2017	21
Tabla 5 Porcentaje por estratos pruebas saber 9° 2017	22
Tabla 6 Resultados de las pruebas saber 9° de acuerdo a la estratificación.	22
Tabla 7 Calendario de aplicación de las actividades.....	42
Tabla 8 Distribución de los resultados de menor porcentaje en la prueba diagnóstico	47
Tabla 9 Distribución de los resultados con mayor porcentaje en la prueba diagnóstico	49
Tabla 10 Distribución de resultados prueba diagnóstico	50
Tabla 11 Fases de ejecución Hoja de trabajo No1.	56
Tabla 12 Distribución de los resultados en la hoja de trabajo No 1	58
Tabla 13 Fases de ejecución hoja de trabajo No 1.	72
Tabla 14 Distribución de los resultados de los estudiantes en la hoja de trabajo No 2.....	73
Tabla 15 Fases hoja de trabajo No 3	86
Tabla 16 Resultados obtenidos de hoja de trabajo No 3.	88
Tabla 17 Fases hoja de trabajo No 4	100
Tabla 18 Resultados, hoja de trabajo No 4.	101

Índice de Anexos

Anexos 1 Prueba Diagnóstico.....	122
Anexos 2 Hoja de Trabajo No 1.....	124
Anexos 3 Hoja de Trabajo 2.....	126
Anexos 4 Hoja de Trabajo No 3.....	128
Anexos 5 Hoja de Trabajo No 4.....	130
Anexos 6 Applet.....	132

Resumen

La investigación que se presenta en el siguiente documento, contiene un proceso de enseñanza-aprendizaje que busca favorecer las competencias y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de Geogebra y material concreto en estudiantes de octavo grado.

Uno de los objetivos que plantea el MEN a través de los lineamientos curriculares es promover y favorecer el desarrollo de procesos centrales de pensamiento matemático. En este sentido se destaca y se alienta a los estudiantes a desarrollar habilidades de control, heurísticas y metacognitivas mediante procesos de visualización, comparación, búsqueda de patrones, ejercitación, formulación y generalización.

En cuanto a los sistemas de representación se destacó el geométrico, algebraico y lenguaje natural, a su vez el uso del software GeoGebra, el material concreto como cubos y paralelepípedos de madera desempeñó un papel muy importante en todo el proceso de aprendizaje, puesto que favorecieron la comprensión de la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, además de permitir a los estudiantes adoptar un rol activo en la construcción de su conocimiento.

Este trabajo es un aporte a las investigaciones que se han llevado a cabo sobre factorización en estudiantes de secundaria.

Palabras clave: Factorización, Mediación, representaciones, Geogebra, educación por competencias.

Abstract.

In the research presented in the following document, it contains a teaching-learning process that seeks to favor skills and the development of skills on the factorization of perfect square and cubic polynomials with the mediation of Geogebra and concrete material in eighth grade students.

One of the objectives that the Men proposes through the curricular guidelines is to promote and favor the development of central processes of mathematical thought. In this sense, students are stressed and encouraged to develop control, heuristic and metacognitive skills through visualization, comparison, pattern search, exercise, formulation and generalization processes.

In terms of representation systems, the geometric, algebraic and natural language were highlighted, in turn the use of GeoGebra software, the concrete material such as wooden cubes and parallelepipeds played a very important role in the whole learning process, since they contributed in a significant way what favored the understanding of the technique of factoring perfect cubic and cubic polynomials, besides allowing students to take an active role in the construction of their knowledge.

This work is a contribution to the research that has been carried out on factoring in high school students.

Key words: Factoring, Mediation, representations, Geogebra, education by competences.

Introducción

En el presente trabajo de investigación se propone aportar a la solución de uno de los problemas que se presentan en la educación matemática, relacionado con la escasa comprensión y falta de significado que tienen los estudiantes de secundaria en el aprendizaje del álgebra y más específicamente en la factorización de polinomios. Se reconoce que el problema en gran parte es debido a la práctica actual de enseñanza que se caracteriza generalmente por desarrollarse dentro de un solo sistema de representación, la mayor preocupación se centra en dedicar mucho tiempo y esfuerzo a que los estudiantes desarrollen procedimientos dentro del lenguaje formal simbólico y relativamente se dedica poco espacio al empleo de otras representaciones del mismo concepto (Goldemberg, citado por Santos & Benitez, 2003).

A su vez, investigadores en educación matemática como Gallardo & Rojano (1988); Kieran & Filloy, (1980, 1989, 1996); (Booth, 1984); Butto, (2011) dan cuenta de algunas de las dificultades u obstáculos que se evidencian en la comprensión y el aprendizaje del álgebra, entre las que se destacan: uso de varios sistemas de representación, el tránsito entre representaciones equivalentes, aprendizaje bajo un simbolismo desprovisto de significado, el valor que se le da al signo igual, uso de variables y el establecimiento de generalización.

Por tanto es necesario que se planteen diversas estrategias en los procesos de enseñanza-aprendizaje a través de instrumentos de mediación que integren diferentes representaciones, se promueva el uso de la tecnología y se trascienda de los procesos rutinarios con el objetivo de ir cambiando creencias que poseen los estudiantes, en las que se concibe la idea que factorizar se reduce a ejecutar mecánicamente procedimientos algorítmicos o a manipular símbolos que permiten solucionar ejercicios y problemas simples; pero no se logra comprender el significado de la técnica matemática e interpretar, plantear y solucionar situaciones problemas que generen verdaderos retos, les permita aplicar las matemáticas en diferentes contextos y por tanto superar errores y dificultades en el proceso de aprendizaje.

Considerando lo expuesto, emerge una investigación que tuvo como propósito caracterizar un proceso de aprendizaje que favorezca los conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de GeoGebra y material concreto en estudiantes de octavo grado. En conclusión con este objetivo se proponen tres objetivos específicos: en primer lugar, identificar el impacto que tiene el uso de diferentes representaciones en la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de Geogebra y material concreto en estudiantes de grado octavo. En segundo lugar, documentar las características que debe tener las actividades de aprendizaje para propiciar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos. En tercer lugar, analizar las características del proceso de aprendizaje con base en la mediación instrumental y cómo este promueve la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos. Finalmente, detallar cuál es el impacto del uso de las tecnologías, como mediadoras de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

La intervención (hojas de trabajo) se llevó a cabo en el Instituto Técnico Agropecuario e Industrial Juan Tama, ubicado en el Resguardo Indígena de Canoas Municipio de Santander de Quilichao, departamento del Cauca. Para ello se tuvo en cuenta al grado octavo, integrado por 20 estudiantes, de los cuales 8 son mujeres (40%) y 12 hombres (60%), con edades que oscilan entre los 13 y los 14 años.

En cuanto a la organización el documento se dividió en cinco capítulos: definición del problema de investigación, marco teórico, diseño metodológico, presentación y análisis de resultados y conclusiones

El primer capítulo corresponde: definición del problema, tiene como propósito generar una contextualización y definir las preguntas que dieron origen a la investigación. Se presenta en seis secciones: contextualización, antecedentes (históricos, investigación, curriculares y legales), definición del problema, justificación, objetivos y las preguntas de investigación

En el segundo capítulo se aborda el marco teórico, en el cual se presentan los elementos teóricos que permitieron fundamentar la problemática, diseñar los instrumentos, realizar el análisis e interpretación de los datos obtenidos y la construcción de las preguntas de investigación. Se dividió en dos secciones: la dimensión didáctica desarrollada desde la educación por competencias, la teoría de las representaciones, mediación instrumental y el uso de las Tics y la dimensión matemática, asociada al álgebra: las técnicas de factorización, específicamente para los polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

El tercer capítulo tiene como propósito describir el diseño metodológico del estudio. Está dividido en tres secciones: tipo de estudio, sujetos y fases en que se divide la investigación. En las fases se describen los criterios y las actividades emprendidas para realizar el diseño de instrumentos, la validación de las mismas, los talleres de manejo del software GeoGebra, recolección de los datos, el procesamiento y análisis de los datos obtenidos

El cuarto capítulo presentación y análisis de los datos, se divide en cinco secciones, una por cada actividad: diagnóstico, representación algebraica de factorización de cuadrados perfectos con la mediación del CAS en GeoGebra, representación algebraica de factorización de cubos perfectos con la mediación del CAS en GeoGebra, representación geométrica con la mediación de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera), representación geométrica con la mediación de GeoGebra 2d y 3d. En cada sección se describe la actividad, los propósitos que se plantearon para implementarla, las condiciones bajo las cuales se llevó a cabo la toma de datos, el análisis y resultados de los datos obtenidos a partir de los manuscritos de los estudiantes y las grabaciones, y se finaliza con unas consideraciones en las que se realiza un contraste entre los resultados obtenidos en la prueba diagnóstico y los obtenidos en las hojas de trabajo.

El último capítulo conclusiones y sugerencias, se divide en dos secciones: la respuesta a las preguntas de investigación, y las sugerencias; se resaltan los principales resultados obtenidos y se anexan algunas sugerencias para los profesores. A su vez se realizan sugerencias para que futuras investigaciones tengan en cuenta a raíz de los interrogantes que emergen del presente estudio.

En los anexos se presentan las hojas de trabajo aplicadas a los alumnos participantes en la investigación.

Este tipo de investigación puede resultar de mucha utilidad para las personas que se forman como licenciados de matemáticas, profesores en ejercicio, investigadores educativos y autoridades administrativas de las instituciones educativas.

1. Antecedentes y planteamiento de la problemática

1.1 Contextualización.

Por lo general, en la enseñanza de las matemáticas predomina, en nuestro tiempo, las clases magistrales, donde el profesor se esmera por explicar diferentes conceptos, algoritmos y ejemplos, llevando a los estudiantes a tomarlos como modelo para la solución de diversos ejercicios y que comprendan lo planteado en el aula. Con todo y lo anterior el profesor termina olvidando o quizás dejando de lado diversos recursos, como por ejemplo, el uso de las tecnologías, que pueden servir de puente entre los estudiantes y los objetos matemáticos.

El objeto de estudio de esta investigación es la factorización de Polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, que en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas vigentes, son una manera de construir expresiones algebraicas o generar expresiones equivalentes dentro de contextos de variación y cambio MEN, (1998; 2006) Ahora bien, el problema estudiado es que en la práctica tradicional de enseñanza se sobrevalora los algoritmos, las representaciones simbólicas y se omite el uso de algunos recursos, que permiten acceder fácilmente a la comprensión, mediante diversas representaciones.

Existen diversos autores que han estudiado el álgebra y específicamente la factorización de polinomios, tales como, Arenas , (2016), Avalos, (2004), Butto, (2011), Booth, (1984), Gallardo & Rojano, (1988), Garcia, (2012), Mejia, (2004, 2011), Ballen, (2012), Sessa, (2005), Sandoval, (2014), Tangarife, (2003), entre otros. Por tal razón, el trabajo de investigación se fundamenta en un marco teórico que aborda elementos curriculares, matemáticos, didácticos, tales como, la educación por competencias de Castellanos, Morga , & Castellanos , (2013), la teoría de las representaciones de Hitt, (2003); la mediación instrumental de Moreno, (2002); el uso de las Tecnologías, (Men, 2013), que permiten el diseño y la aplicación de un recurso adecuado para los intereses de una población específica, como lo son los estudiantes octavo grado del Instituto Técnico Agropecuario e Industrial Juan Tama en adelante I.T.A.I Juan Tama, de Santander de Quilichao Cauca.

Hoy día sabemos que el uso de la tecnología computacional en el salón de clase, ya que permite, ampliar el campo de acción de tal forma que las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en realidades al poderlas manipular y transformar, lo que posibilita que el estudiante pueda evidenciar tendencias y abordar los problemas desde diversas representaciones como en el lenguaje natural, algebraico y geométrico, etc.; de manera que se facilite y potencialice la construcción de conceptos y propiedades, es decir, que se razone matemáticamente.

En este primer capítulo se define el problema de investigación, tomando en cuenta: algunos aportes históricos, antecedentes de investigación, aspectos establecidos por el Ministerio de

Educación Nacional y los resultados de las pruebas saber 9º; insumos que le dan validez e importancia a este trabajo.

Ahora bien, abordar la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos puede resultar complejo; por este motivo fue necesario, acotar dicha problemática a los polinomios cuadrados (trinomios cuadrados perfectos) y los cúbicos (suma y diferencia de cubos perfectos) a través de preguntas (General y auxiliares) y objetivos (general y específicos), los cuales se encuentran al final de este capítulo.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Históricos

En este apartado se hace un breve recorrido alrededor de algunos de los momentos más relevantes en la historia del álgebra, ya que a partir de la búsqueda de métodos para hallar las soluciones a ecuaciones de diferentes grados es cuando se determina la factorización de polinomios; en este camino, se evidencian algunos trabajos relacionados con la factorización de polinomios de segundo y tercer grado, interpretaciones geométricas para este proceso, que serán los dos temas centrales sobre los cuales se abordara el contenido de este capítulo y que posteriormente serán vinculadas en el diseño de las actividades planteadas en la propuesta, el inicio de este recorrido, parte desde los babilonios (1800 a.C a 1500 a. C) hasta los aportes de Galois (1811 – 1832).

1.2.1.1 Surgimiento del álgebra

El desarrollo del álgebra se presenta en tres etapas en la consolidación del sistema simbólico: primera, el álgebra retórica, denominada así, debido a que los problemas y sus soluciones se describían mediante lenguaje natural, sin incluir ningún símbolo, ni siquiera de las operaciones, segundo, el álgebra sincopada, caracterizada por utilizar abreviaturas de las palabras para las incógnitas, aunque los cálculos se describían totalmente en lenguaje natural y por último, encontramos el álgebra simbólica, aquella en la que todas las formas y operaciones posibles se representan en un sistema de signos. Estas etapas de la evolución del simbolismo algebraico se marcan en el tiempo, la etapa retórica se determina antes de Diofanto (III d. C), la etapa sincopada desde Diofanto hasta el siglo XVI y la etapa simbólica que comienza desde Viète (1540-1603) (Malisani, 1999).

1.2.1.2 Álgebra retórica

En esta época se encuentra el punto de partida para el inicio a la solución de ecuaciones, los problemas algebraicos se resuelven con métodos aritméticos o geométricos, cada cultura utilizaba diferentes maneras de resolverlos; sin embargo, no se llega a la utilización de expresiones algebraicas para encontrar la solución.

Los Babilonios (1800-1530 a.C) utilizaban un álgebra retórica al resolver ecuaciones cuadráticas, empleando el método conocido actualmente como “completar el cuadrado y algunas

ecuaciones bicuadráticas y cúbicas; de acuerdo a los métodos que utilizaban, caracterizados por su carácter aritmético y por manejar las propiedades conmutativa y distributiva, se logra obtener las siguientes identidades presentadas en la notación actual: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (College, 2000)

El registro más antiguo descifrado por Neugebaveren 1930, son las tabillas mesopotámicas, estos elementos proporcionan una valiosa información sobre los métodos de cálculo que utilizaban los babilonios para resolver ecuaciones específicamente de segundo grado, aunque no contienen dibujos, algunos historiadores sostienen que estas podrían ir acompañadas de disertaciones que explicarían como apoyarse en dibujos para aplicar dichos métodos (Sessa, 2005)

Los babilonios resolvían problemas como hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado, este tipo de problema lleva a considerar la ecuación $x^2 + bx + 1 = c$, para encontrar la solución seguían algunos procedimientos aritméticos en relación a las expresiones:

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} \quad \text{y} \quad \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} \quad (\text{Kline, 1994}).$$

Así mismo, en el libro II de Euclides (300 a. C), se evidencia, que en la resolución de ecuaciones cuadráticas se usan principalmente dos métodos: “el de proporciones y el de la aplicación de las áreas” Collette, (2000, P.80) Las primeras 10 proposiciones de este libro pueden ser vistas como identidades algebraicas, las cuales son demostradas geoméricamente.

Interpretar las proposiciones de Euclides en términos algebraicos y presentar la noción de equivalencia, es posible, mediante la conversión, es decir el paso de una representación a otra.

Esto se puede notar, en la proposición II.4 “ Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos”.

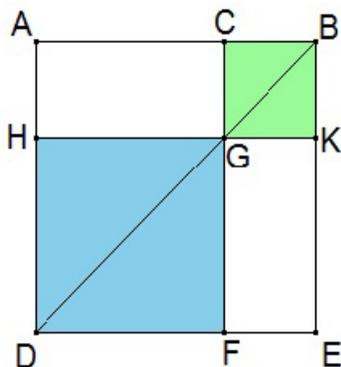


Figura 1 Representación de la proposición II.4, tomado de Jiménez y Salazar, 2013, pág. 31.

La anterior proposición es interpretada como el cuadrado de la suma, o lo que en lenguaje simbólico sería $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donde a representa la longitud del HD y b representa la longitud del BK.

De igual forma, sucede en la proposición II, los griegos y los árabes desarrollaron un procedimiento para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Por ejemplo Encontraron

un número x tal que $x^2 + 4x = 140$, de la siguiente manera: x como un lado de un área x^2 y a $4x$ como el área de un rectángulo de lados 4 y x respectivamente, en consecuencia $X^2 + 4X$ es el área de la figura, luego cambiaban la figura como se muestra a continuación:

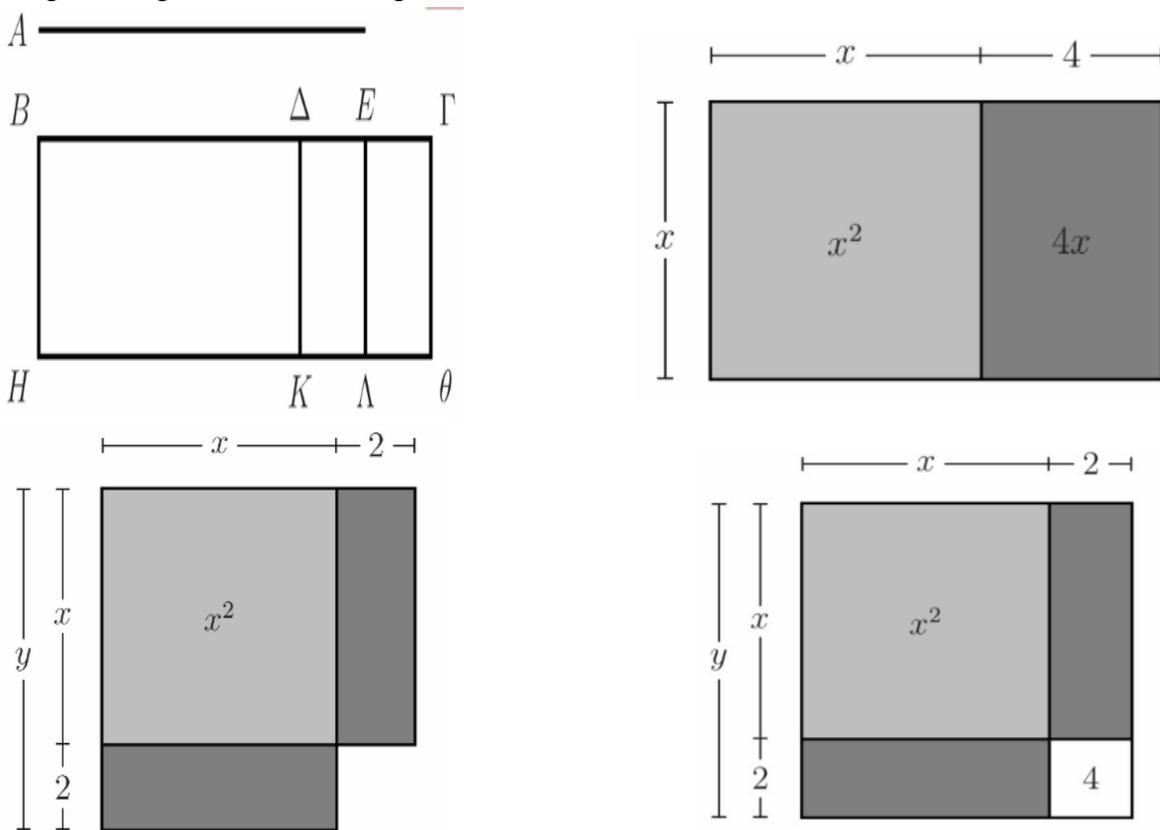


Figura 2. Representación geométrica de la proposición II.

De esta manera, el área de la región sombreada equivale a 140 (pues corresponde a $X^2 + 4X$) unidades cuadradas y el área del cuadrado en blanco es 4 unidades cuadradas, es así como el área total corresponde a 144. Luego el lado del cuadrado grande llamémoslo Y es $= 12$, de donde $X = 10$ unidades.

1.2.1.3 El álgebra sincopada

Algunos de los trabajos de los griegos se encuentran en la Aritmética de Diofanto (Siglo III a.C). Uno de los aportes más relevantes que se le atribuye, es que introduce un símbolo para la incógnita, además de permitir con sus contribuciones el paso del lenguaje natural a un *lenguaje sincopado*, es decir, cuando empiezan aparecer símbolos que abrevian la escritura de los cálculos (Sessa, 2005). Su obra más importante está plasmada en un tratado de 13 libros del que solo se conocen los 6 primeros, En ellos se dan soluciones particulares, enteras o racionales a ecuaciones algebraicas determinadas o indeterminadas; trabaja las ternas pitagóricas, que se resolverían luego con el Teorema de Pitágoras. A continuación, se relacionan algunos de los problemas planteados por Diofanto.

Tabla 1
Algunos problemas de la aritmética de Diofanto

Libros de la aritmética	Problema
I	Problema 8: dividir un número cuadrado dado en dos cuadrados
II	Problema 9: dividir un numero dado que es la suma de dos cuadrados en la suma de otros cuadrados distintos de los anteriores
III	Problema 6: encontrar tres números tal que una suma de dos cualquiera de ellos sea un cuadrado perfecto.
IV	Problema 1: dividir un numero dado en dos cubos tales que la suma de sus lados es un numero dado
	Problema 29: expresar un número dado como la suma de cuatro cuadrados más la suma de sus lados.

Nota: Se muestran algunos problemas del libro de la aritmética de Diofanto (Elaboración Propia)

Los métodos de solución por radicales de ecuaciones de tercer y cuarto grado surgen en el siglo XVI. Algunos de estos métodos fueron desarrollados por Cardano, Ferrari, Ferro y Tartaglia. Al respecto Casalderrey (citado por Mejía 2011) presenta algunos de los problemas que resolvía Tartaglia (1500- 1557) en la que se involucraban ecuaciones de tercer grado.

Aunque el enunciado de cada problema es distinto, todos ellos se reducen al capítulo del cubo y la cosa igual a un número $X^3 + PX = q$ Uno de estos problemas es: “Determina por dónde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en la tierra sea la raíz cúbica de la parte superior”. (pág. 75)

1.2.1.4 El álgebra simbólica

Algunos de los aportes que se consideran relevantes en el siglo XVI, son los realizados por el francés Francoise Viète (1540 -1603). Fue el primero en utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado (distinción entre parámetro e incógnita). Su notación algebraica fue denominada *logística speciosa* en contraposición a la logística numerosa de sus predecesores; este cambio de lenguaje, que luego se conocería como álgebra simbólica, permitió más adelante el desarrollo de la geometría analítica y posteriormente el cálculo infinitesimal.

Descartes (1596 – 1650), transforma el álgebra de magnitudes de Viète en un cálculo de segmentos, usa las últimas letras del abecedario para las incógnitas y las primeras para los coeficientes como se utiliza actualmente. En su famoso libro *La Geometrie (1637)* presenta el tratamiento de las ecuaciones y plantea que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado de la ecuación. Esta es una primera formulación del Teorema Fundamental del Álgebra.

El siglo XVI fue el siglo de la solución de la cúbica ($x^3+bx^2+cx+d=0$), y la cuartica por medio de radicales; los italianos Scipione del Ferro (1465 – 1526) y Niccolo Fontana Tartaglia (1500 – 1557) resuelven la ecuación de tercer grado, Ludovico Ferrari (1522 – 1565) la de cuarto y Jerónimo Cardano (1501 – 1576) publica ambas soluciones en su libro *Ars Magna*, en 1545 en medio de una gran polémica.

La búsqueda de la solución de la ecuación algebraica general de grado superior al cuarto por medio de radicales fue el tema dominante del álgebra hasta finales del siglo XVIII y principios del XIX. Uno de los trabajos que corroboran lo anterior, es el de Ruffini (1765-1822), quien en 1799 demuestra la imposibilidad de solución de ecuaciones de grado quinto por radicales sirviéndose de la teoría de permutaciones; sin embargo la demostración para ecuaciones de grado sexto y superior no logró completarlas.

Un avance muy significativo en el desarrollo del álgebra se da a principios del siglo XIX cuando el matemático Noruego Niels Abel (1802 – 1829) demostró que no hay fórmula general para la solución por medio de radicales de ecuaciones de quinto grado o superior. Por su parte el francés Évariste Galois (1811 – 1832) presentó las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación polinomial tenga solución por radicales.

Novoa (2012) menciona que se puede identificar las bondades que puede llegar a tener el álgebra geométrica para visualizar y acercar al estudiante en el proceso de factorización; sin embargo no resuelve por completo los inconvenientes que se pueden presentar, por ejemplo cuando las raíces del polinomio no sean enteras o racionales como anotamos.

1.2.2 Investigaciones.

En el marco del desarrollo de este trabajo, se realizó un bosquejo de escritos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la factorización de algunos polinomios cuadráticos y cúbicos, teniendo en cuenta bases de datos como; Eric, TCO, Dialnet, Redinet y utilizando palabras claves como Geogebra, factorización y secuencias didácticas. Los trabajos que se encontraron a partir de estos medios, fueron publicaciones de conferencias, de grupos de educación matemática, tesis de pregrado, posgrado y doctorales, etc. Debido a que se encontraron muchos trabajos durante la exploración bibliográfica realizada, para desarrollar esta sección, se decidió tomar solamente los más influyentes a nuestra investigación.

- ***A nivel local.***

Mejía, (2011) presenta la integración de las Calculadoras simbólicas en el estudio de la factorización de polinomios de una variable real, por medio de un conjunto de tareas para estudiantes de noveno grado de la Educación Básica Secundaria en Cali Valle del Cauca-Colombia, con el objetivo de constituir praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas en el estudio de la factorización de polinomios al integrar un ambiente de L/P y CAS; uno de los ejes centrales de esta investigación gira en la complementariedad entre las técnicas habituales y la integración de la tecnología de tal forma que se aporte en la generación de técnicas instrumentadas que permitan establecer una relación entre las tareas y la teoría.

- ***A nivel regional***

Arenas , (2016) en su propuesta de investigación propone una serie de actividades que permita a los estudiantes del grado 8° del Colegio Manuel Germán Cuello Gutiérrez, jornada de la tarde, de Valledupar (Cesar), abordar la factorización de polinomios, en este trabajo evidencia las características que debe tener una estrategia didáctica que permita a los estudiantes comprender y aplicar la factorización de polinomios, aplicando las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) como herramienta de enseñanza, analiza el efecto que tiene usar las TIC para la enseñanza de la factorización, concretamente plantea una serie de actividades implementadas en un sitio web, donde el estudiante encuentra herramientas, tales como, videos tutoriales, foros, chat, simulaciones, libros digitales y juegos, todo esto acompañado por el trabajo del docente en el aula, para profundizar e ilustrar estos conceptos, orientando a los estudiantes en el uso de los recursos en las diferentes clases y en los laboratorios digitales con Tablet de la Institución. Como resultado se encontró que el uso de las herramientas tecnológicas educativas en las clases es de gran ayuda para la motivación y el interés de los estudiantes.

Sandoval , (2014) en el trabajo realizado con estudiantes de algunas instituciones educativas de Palmira Valle del Cauca, se diseña, implementa y evalúa una secuencia didáctica para el aprendizaje de la factorización de trinomios, que integre el uso del origami, en grado octavo de educación básica. Se concluye que, mediante un esquema experimental basado en la concepción, realización, observación y análisis del aprendizaje, a través del estudio dentro del aula de clase y la manipulación del papel, se fortalece el aprendizaje de la factorización de trinomios. Este trabajo dio cuenta de la importancia de que en futuras investigaciones se profundice o amplíe en el campo del origami como herramienta para enseñar matemáticas, debido a que puede ser muy efectivo; además, este trabajo de investigación de una manera tácita, también busca fomentar en el lector el deseo de integrar nuevas secuencias didácticas a su praxis docente en el proceso de aprendizaje, abriendo el camino a nuevas y buenas experiencias innovadoras, que contribuyan al mejoramiento de la calidad de la educación, mientras promueven el desarrollo del pensamiento matemático.

- ***En el marco Nacional***

Jimenez & Salazar, (2013) desarrollan una propuesta educativa orientada a la innovación en el aula, relacionando el concepto de factorización con la geometría mediante el diseño e implementación de un material didáctico (tabletas algebraicas); el objetivo que se tiene con esta propuesta, es promover el razonamiento, la comunicación e integración de los diferentes tipos de pensamientos matemáticos, favoreciendo mediante una serie de tareas recopiladas en un folleto la conversión del lenguaje simbólico-algebraico, además de prever ciertas dificultades en los estudiantes. Estas tareas aportaron a la innovación de las clases de álgebra escolar, y les permitieron a los estudiantes encontrar relaciones con objetos que facilitaron la conexión entre conocimientos y con ello, promover la recordación.

Tangarife, (2003) implementa una estrategia didáctica con material concreto algeblocks con el ánimo de que los estudiantes de la institución educativa Estambul del grado octavo de la ciudad de Manizales transformen la lógica del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Ballen, (2012) en su trabajo propone usar el álgebra geométrica como un recurso para factorizar polinomios (con raíces enteras y racionales) de segundo grado, apoyándose en el uso de la geometría como alternativa didáctica, a través de una serie de actividades, juegos y problemas que ponen en evidencia nociones de área y longitud con el propósito de construir en los estudiantes ideas algebraicas a partir de situaciones geométricas, fortaleciendo así las competencias de traducir del lenguaje algebraico al lenguaje natural. Trabajo con 38 estudiantes con edades que oscilan entre 12 y 14 años los cuales se encontraban cursando grado Octavo o Noveno de Educación Básica Secundaria, y pertenecían a la Institución Educativa Departamental las Villas del Municipio de Cogua, Cundinamarca. Las actividades propuestas fueron exitosas pues los estudiantes lograron desarrollarlas motivados por la estructura presentada, logrando entender el concepto de factorización desde la perspectiva geométrica.

Daza, (2012) a través de la propuesta pretende describir, analizar e interpretar el proceso de factorización desde la mirada de la geometría, acompañado por un medio didáctico mediante un instrumento de mediación tecnológico (ambiente de geometría dinámica, AGD Geogebra) seleccionado para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, desarrollar habilidades y actitudes para la construcción de conceptos y procedimientos matemáticos, a partir de los procesos cognitivos como la visualización, la interpretación y la representación. Esta propuesta permitió a los estudiantes observar desde otra perspectiva el proceso de factorización

García, (2012) propone una secuencia didáctica mediada por las TIC para mejorar las competencias básicas a través del uso del GeoGebra, a través de actividades para construir el concepto de número irracional y modelar productos notables.

- ***En el ámbito internacional***

Avalos, (2014) en su investigación presenta un recurso didáctico con el cual los educandos y educadores se puedan auxiliar en la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el tema de productos notables y factorización; su propuesta se realizó en la universidad pedagógica nacional México D.F. Esta propuesta implica la aplicación de juegos con materiales flexibles y económicos, que responde a los planteamientos de la propuesta de la reforma de educación Media Superior, que se realizó en el año 2004, aplicadas a las escuelas de bachillerato tecnológico, las situaciones propuestas permitieron reafirmar que mediante la aplicación de actividades lúdicas en un ambiente de aprendizaje se puede llegar a cumplir mejor el objetivo de aprender significativamente un objeto matemático, además se logra evidenciar la importancia de crear un ambiente que motive a los actores del proceso educativo ya que si se logra mejorar su actitud mejorarán los procesos de enseñanza y aprendizaje.

López, (2008) presenta el diseño de una propuesta didáctica tomando como base el programa de estudios de matemáticas I, que se imparte en el primer semestre, para el bachillerato del colegio de ciencias y humanidades en la universidad nacional autónoma de México, busca con esta propuesta encontrar la manera de reducir al máximo el índice de la reprobación que se da de manera alarmante en el bachillerato y evitar la deserción de los alumnos.

Vara, (2010) plantea que, el objetivo de la investigación en educación matemática se centra en conocer cómo enseñar los contenidos de una área específica y los problemas de aprendizaje que los estudiantes puedan tener; por esta razón el estudio de la geometría será analizado en la educación magistral haciendo uso de la visualización, habilidad que según algunos autores está en el centro de la comprensión matemática.

Además, menciona que el estudio de la geometría es importante porque desarrolla ciertas habilidades en el estudiante tales como: la visualización y su capacidad para explorar, representar y describir su entorno.

Tamayo, Fernandez, Torres, Ortiz, & Solano,(2009) en su ponencia “Herramientas Semióticas y currículo de Matemáticas” en la cual resaltan la importancia del uso de la tecnología y los registros de representación y afirman que: “Para el desarrollo curricular de las matemáticas, las herramientas semióticas se convierten en amplificadores y reestructurantes del currículo. A sí mismo la tecnología computacional (caso de las calculadoras graficadoras TI-92 Plus y/o Voyage-200), enfatiza la exploración semántica de la actividad matemática”, agregan también: “La representación de registros semióticos posibilita la construcción del conocimiento en lo referente a la comprensión de los objetos matemáticos porque los estudiantes superan la simple manipulación de expresiones y se detienen en observar el procedimiento analítico –simbólico comunicando significados y razonando sobre las expresiones”.

Sessa, (2005) evidencia en su investigación la forma aislada en que se trabaja en la escuela el álgebra y la geometría y propone pensar la geometría como una herramienta para validar leyes y resolver problemas algebraicos y concebir el álgebra como herramienta para resolver problemas geométricos. Esta perspectiva, según la investigadora permitiría a los alumnos construir sentido para ambos campos.

En síntesis, los antecedentes mencionados son fundamentales en la configuración de la presente investigación, en primera instancia, brindan características específicas para el tipo de preguntas, el diseño y análisis de las actividades propuestas que favorezcan la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, permitan establecer estrategias de aprendizaje en las que se empleen diferentes representaciones que puedan ser implementadas en el aula de clases; de igual forma, permiten evidenciar el tipo de materiales y recursos a utilizar que facilitan la comprensión de la factorización. En segunda

instancia, permiten justificar la importancia que tiene la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos para el desarrollo del pensamiento variacional.

1.2.3 Curriculares.

1.2.3.1 Los lineamientos Curriculares.

El Ministerio de Educación Nacional MEN (1998), en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas hace gran énfasis en uno de los aspectos fundamentales como propiciar aprendizajes que tengan mayor alcance y sean más relevantes que los tradicionales, de acuerdo con el MEN, es importante trabajar en los procesos de pensamiento y no solamente quedarse en los conceptos y procedimientos (algorítmicos). A razón: los procesos de pensamientos pueden ser ampliamente contextualizados y útiles en el medio en que se desenvuelven, permitiéndoles a los estudiantes aprender de una forma diferente.

Se debe agregar que uno de los objetivos fundamentales de la Educación Matemática es promover la formación del pensamiento matemático. Con el fin de obtener este propósito, se establece una organización curricular a través de tres ejes articulados entre sí, denominados procesos generales de pensamiento, contextos y conocimientos básicos, según MEN (1998).

- ***Procesos generales***

Dentro de los procesos generales de pensamiento (MEN, 2006) se encuentra el razonamiento, la comunicación, la modelación, la resolución y planteamiento de problemas, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. A continuación, se explicará cada uno de ellos:

El razonamiento da cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a concluir, justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, explicar usando hechos y propiedades e identificar patrones utilizando argumentos para exponer ideas.

La Comunicación consiste en expresar, construir, relacionar, formular y evaluar ideas presentadas en formas diversas (oral, escrita, gráfica- visual).

La modelación ayuda a identificar las matemáticas específicas en un contexto general, posibilitando la formulación y visualización de problemas diversos, identificando relaciones y regularidades, con el fin de, a través de una fórmula o relación, solucionar, verificar y validar la solución.

La resolución y planteamiento de problemas contribuye a formular y plantear problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, con el fin de desarrollar y aplicar diversas estrategias de solución, verificando, interpretando y generalizando soluciones.

La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, permite calcular, (efectuar una o más operaciones), predecir el efecto de una operación, graficar y transformar funciones, rotando y reflejando, así mismo, permite la medir y seleccionar unidades y herramientas apropiadas.

- ***Contexto***

En cuanto a los contextos, se puede decir que son aquellas situaciones problemáticas de la vida diaria, de otras ciencias y de las mismas matemáticas, hacen referencia a los ambientes que rodean a los estudiantes, dándoles sentido a las matemáticas que aprenden. Para el diseño y ejecución de experiencias didácticas se debe tener en cuenta las condiciones sociales, culturales, económicas, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, y las creencias del grupo social al que se hace alusión (MEN, 2006)

- ***Conocimientos básicos***

De acuerdo al MEN, (2006) se plantea la importancia del desarrollo del pensamiento matemático junto con los sistemas propios de los pensamientos: el numérico y los sistemas numéricos, el métrico y los sistemas de medida, el espacial y los sistemas geométricos, el aleatorio y los sistemas de datos y el variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos hacen alusión a la comprensión y uso de los significados que tiene una persona de los números y la numeración, es decir, que se centran en la comprensión del sentido y significado de las operaciones y las relaciones entre números, al igual que en el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

El pensamiento métrico y los sistemas de medidas se relacionan con conceptos y procedimientos como: construcción del concepto de magnitud, comprensión de los procesos de magnitudes, estimación de la medida (“capturar lo continuo con lo discreto”), apreciación del rango de las magnitudes, selección de unidades de medidas, diferencia entre unidad y patrones de medición, asignación numérica y la comprensión de la función del trasfondo social de la medición.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos se entienden como el conjunto de los procesos cognitivos, mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones o representaciones materiales; estos procesos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio, tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento.

El Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos se fundamentan en la teoría de probabilidad, estadística descriptiva, inferencial y combinatoria, las cuales permiten la toma de decisiones frente a ciertas situaciones (incertidumbre, de azar, de riesgo, o ambigüedad); para las cuales, por falta de información confiable, no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar.

Para el desarrollo de esta investigación se tendrá en cuenta el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, los cuales tienen que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como la descripción, modelación y representación en distintos sistemas y registros simbólicos, ya sean, verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Se asume aquí la relevancia que este pensamiento tiene dentro de los procesos de aprendizaje en el grado octavo de la educación básica secundaria; para ello se toma como referente un objeto de investigación, que está orientado hacia el favorecimiento

de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en el tema de la factorización de algunos polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, ubicados dentro de este pensamiento.

1.2.3.2 Estándares básicos de competencias en Matemáticas

Los estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, son publicados por el MEN en el año 2006, en ellos se plantea que uno de los objetivos de la educación Matemáticas es responder a las nuevas demandas globales y nacionales, con el objetivo de desarrollar en el estudiante las competencias necesarias para desempeñarse en la vida diaria y que puedan ejercer sus derechos y deberes democráticos. Además, distingue dos facetas del conocimiento matemático:

- La práctica expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno y contribuye a mejorar la calidad de vida al igual que el desempeño como ciudadano.
- La formal constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, expresadas a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación.

De igual forma, los estándares proponen la estructuración del conocimiento matemático a partir de dos tipos básicos: el conceptual y el procedimental. El primero, caracterizado por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva relacionado con el saber qué y el saber por qué; y el segundo, es asociado al saber cómo y a la acción, esta última se vincula con las técnicas y estrategias para representar conceptos y transformar dichas representaciones.

Se plantea que al ser matemáticamente competente el estudiante es capaz de:

Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de diferentes contextos, utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas, usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración y dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. (MEN, 2006, págs. 50-51)

Para estructurar la propuesta de trabajo, se toma en consideración lo que plantea el MEN, tanto para los lineamientos, como para los estándares básicos de competencias en matemáticas, dado que los contenidos que se desarrollen durante el proceso educativo, deben presentar la coherencia horizontal y la coherencia vertical, todo esto con el objetivo de alcanzar la gradualidad del aprendizaje tomando en cuenta la complejidad conceptual de las matemáticas.

- ***Coherencia horizontal***

Está dada por la integración que tiene determinado estándar con los estándares de los otros pensamientos dentro del mismo conjunto de grados, para este caso, se considera la siguiente coherencia:

Tabla 2
Coherencia horizontal

Coherencia horizontal	
8° a 9°	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en matemáticas y en otras disciplinas
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos	Pensamiento numérico
	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos
Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión dada	Pensamiento métrico y sistemas de medidas
	Cálculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos

Nota: Se muestra la coherencia horizontal del estándar del pensamiento variacional de los grados 8° a 9° y los pensamientos en los mismo grados.

- **Coherencia vertical**

Hace referencia a los conocimientos alcanzados por el estudiante en años anteriores que son la base para la adquisición de los nuevos, es decir, se relaciona con el conjunto de estándares pertenecientes a un pensamiento específico, cada uno de ellos presenta un grado de complejidad, el cual es creciente en cada año, para este caso, se considera la siguiente coherencia:

Tabla 3
Coherencia vertical

Coherencia vertical	
8° a 9°	1° a 3°
	Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual.
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
	4° a 5°
Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
	6° a 7°
	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

Nota: Se muestra la coherencia vertical de estándar del pensamiento variacional de los grados 8° a 9° y los estándares relacionados de grados anteriores (elaboración propia)

1.2.3.3 Derechos Básicos de Aprendizaje

Para el desarrollo de este trabajo, no se tomarán en cuenta los Derechos básicos de Aprendizaje (DBA), debido a que se considera que es un documento relativamente prematuro que puede presentar diferentes ambigüedades en su comprensión, pues se centra en los temas para cada curso, como un fin y no como un medio.

1.2.4 Legales

A continuación se presentaran algunas resoluciones, artículos y leyes que se encuentran en la constitución nacional de Colombia que enmarcan la reglamentación que existe respecto a la educación y las TIC en el país.

En el orden Nacional, se halla la Constitución Política de 1991, en la cual el artículo 44 del capítulo 2 está contemplada la educación como un derecho fundamental de los niños y niñas en el país. Al mismo tiempo, se cuenta con la ley General de Educación 115, del 8 de febrero de 1994, que además de consagrarle expresamente a la educación varios artículos, también menciona los derechos del niño y del adolescente, y la formación de los grupos étnicos.

En el artículo 5 de la ley 115 del 1994 se habla de los fines de la educación y se relaciona con el artículo 67 de la Constitución Política, en la que refiere que la educación se desarrollará atendiendo trece fines, los cuales conciben al estudiante como una persona en formación integral, incluido el conocimiento y promoción de la propia cultura, el patrimonio y la soberanía nacional; se destacarán los siguientes:

Adquisición de conocimientos (científicos, tecnológicos, históricos, humanísticos, estéticos, sociales, geográficos).

Desarrollo de capacidad crítica, reflexiva y analítica, creación de hábitos intelectuales para la producción de conocimientos, fomento del pensamiento científico y de la creación artística. Promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo. (Ley 115, artículo 5, 1994).

Por otro lado nos encontramos con El Plan Nacional Decenal de Educación (PNDE) el cual, es el conjunto de propuestas, acciones y metas que expresan la voluntad educativa del país en estos 10 años 2016-2026. Entre los diez retos que propuso el plan decenal de educación (2016-2026), se destacan: la renovación pedagógica desde el uso de las Tecnologías de la Educación y la comunicación en educación y ciencia y tecnología integradas a la educación, los cuales se refieren a las TIC como un elemento indispensable para lograr una educación más integral.

Con todo esto, se hace notar que desde el Gobierno y el (MEN), tienen una prioridad para la educación y que este sea bien aplicada con las TIC.

1.3 Planteamiento del problema

El conocimiento algebraico es importante para la estructuración de razonamientos y la construcción de modelos matemáticos. Este conocimiento se inicia en los primeros años escolares con la aritmética y se fortalece en la educación básica con el álgebra, pues a partir de este inicio se cimentan las bases de todo el quehacer matemático (Valoyes, 2013).

La aritmética constituye la fuente fundamental para la construcción de significado de los objetos y conceptos algebraicos. En este sentido, tanto los procesos de aprendizaje como las dificultades que surgen durante dicho proceso se explican en términos de una supuesta continuidad conceptual entre la aritmética y el álgebra. (pág. 16)

Algunas investigaciones como las de Gallardo & Rojano (1988); Kieran & Filloy, (1980, 1989, 1996); (Booth, 1984); Butto, (2011); dan cuenta de las dificultades u obstáculos que se evidencian en la comprensión y el aprendizaje del álgebra, entre ellas:

- Aquellas que se relacionan con el uso de varios esquemas de representación y el tránsito entre representaciones equivalentes de los conceptos.
- La introducción al álgebra dentro de un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, lo que significa que no se toma en cuenta que se viene trabajando con la aritmética, donde todos los símbolos poseen significados y la manera de desarrollar los problemas usualmente es dada por el contexto.
- Las experimentadas por los estudiantes al avanzar a un sistema de representación más abstracto, en el que no solo aumenta el poder del lenguaje simbólico, sino también, el grado de generalización; esto se puede notar cuando las letras comienzan a sustituir números como elementos concretos que han sido básicos en el trabajo matemático hasta el momento y pasan a ser representados por letras como incógnitas, números generalizados, parámetros o variables. Así mismo, se puede ver en la mala interpretación que se hace del signo igual, olvidando que este signo, inicialmente, en aritmética se entiende como operacional; luego, al iniciar el álgebra se trabaja como una relación de equivalencia y, más adelante con la factorización se debe entender como una identidad.

Estas dificultades, generalmente, son manifestadas por medio de errores que le impiden al estudiante acceder a la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades en el álgebra.

La enseñanza del álgebra ha sido y sigue siendo tema de preocupación para la educación matemática. Muchos investigadores consideran que la enseñanza del álgebra no es adecuada y señalan la falta de comprensión que ponen de manifiesto los alumnos en su aprendizaje algebraico, así como la escasa conexión existente entre la enseñanza del álgebra y la del resto de las ramas de la matemática (Castro & Molina, 2007, pág. 68).

Situación que no es ajena para el caso específico de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, donde predomina el método de enseñanza tradicional de clase expositiva, donde el papel del estudiante es pasivo, limitado a la recepción y repetición de conceptos mediante la memorización y el cálculo. Algunos investigadores como Goldemberg, (citado por Santos & Benitez, 2003) afirman que:

En la práctica actual, gran parte de la enseñanza tiene lugar dentro de un solo sistema de representación. Se dedica mucho tiempo y esfuerzo a que los estudiantes desarrollen habilidades para operar el lenguaje formal simbólico, y relativamente poco tiempo se dedica al empleo de otras representaciones de la misma idea. (pág. 25)

Por tanto, se hace necesario que el docente guíe, motive, innove y busque diferentes estrategias para llevar al aula de clases, con el objetivo de no limitar a los estudiantes a que solamente desarrollen actividades donde escasamente tratan la parte operacional o numérica (simbolización numérica) que, si bien es cierto es importante conocerlo en muchos casos se presenta a partir de fuentes desprovistas de significado, dejando de lado algunas ideas o medios de representación que se relacionan con otros dominios matemáticos que le permitirían, de una manera más fácil, pensar

matemáticamente. Sobrevalorar las representaciones simbólicas y los algoritmos, como única técnica de enseñanza y obviar otras representaciones, puede generar diversas dificultades, no sólo a los profesores sino también a los estudiantes, cuando se aborda el tema de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos como técnica de resolución de problemas en el aula.

Ballen, (2012) menciona que:

En el estudio del álgebra elemental en la educación básica secundaria se detecta el problema del paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico del álgebra; debido a que, poco se potencia el uso de otros sistemas de representación como el gráfico, que permite visualizar ciertos procesos de resolución de problema. (pág. 6)

Trabajar el álgebra en los primeros años de la educación secundaria, sin un campo de problemas y fenómenos que modelan los conceptos y la carente transmisión de un saber a un contexto diferente en el que se han construido, conducen a la falta de significado en el aprendizaje de los diferentes procedimientos algebraicos (Mejia, 2004; 2011) donde los estudiantes no logran realizar una conexión entre los conceptos aprendidos y su realidad, pierden total interés en el estudio del álgebra, tomándola como una simple memorización de algoritmos.

La mayoría de los profesores universitarios y de educación media manifiestan que los estudiantes no logran crear una articulación coherente entre varios sistemas de representación relacionados a conceptos propios de ese nivel; aunque logran manipular coherentemente las transformaciones de representaciones en un mismo sistema, sobre todo el algebraico, presentan una carencia de articulación cuando se trata de pasar de una representación a otro, por ejemplo de la gráfica a la algebraica o de la algebraica a la geométrica. Por lo tanto es importante promover el uso de varias representaciones y el uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas.

1.4 Justificación

Algunas investigaciones (Edsource, 2009; Godino & Font, 2003; Palarea & Socas, 1994) resaltan el papel fundamental que desempeña el aprendizaje del Álgebra, específicamente la factorización, en la educación básica secundaria, por brindar métodos para sintetizar algunas ecuaciones muy grandes y complejas.

Entre los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), podemos destacar:

- “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas”
- “Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada”, (pág. 87)

Estos dos estándares, ubicados dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos para los grados octavo y noveno, resaltan el papel de la factorización, en dos aspectos: primero como técnica que permite realizar transformaciones de expresiones algebraicas; segundo, como método de simplificación algebraica usada para resolver problemas en diversos contextos.

En el primer estándar señalado rescata la relación existente entre el álgebra y la geometría, lo que significa que la geometría puede ser una herramienta y a la vez una alternativa didáctica que logra potenciar y favorecer los conocimientos y el desarrollo de habilidades en el aprendizaje del álgebra, específicamente la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, para nuestro caso. Relación que se hace más notoria en el pensamiento espacial y sistemas geométricos a través del siguiente estándar: “Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas”. (MEN, 2006, pág. 86)

Lastra, (2005) menciona que:

La geometría como cuerpo de conocimientos permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural. Como también estimular en los niños la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas y en los profesores utilizar estrategias que usen el plegado, la construcción, el dibujo, modelamientos, software, actividades variadas que enriquezcan los procesos en el aula. (pág. 2)

La geometría se constituye entonces como punto de partida que promueve la integración de algunos recursos a través del uso de la tecnología en los procesos de aprendizaje. Al respecto, Hitt (2003) reconoce y evidencia cuán importante resulta integrar la tecnología en el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, abordados con metodologías distintas a las tradicionalmente utilizadas, es decir, las metodologías no solo influyen en la forma como se enseña sino también en el aprendizaje de los estudiantes.

La propuesta planteada se apoya en la integración del software de matemática interactiva Geogebra, visto como una herramienta auxiliar importante para la adquisición de conocimientos de la factorización, pues permite representar de manera dinámica y accesible polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, con la intención de superar las dificultades del modelado clásico con lápiz y papel.

Se pretende que los(as) profesores(as) de matemáticas, a través de la estrategia planteada anteriormente, favorezcan el desarrollo de capacidades de sus estudiantes, tales como: esquemas de pensamientos, visualización gráfica y modelación de situaciones en un contexto cotidiano, manejando los contenidos de una manera creativa.

1.4.1 Resultados de las pruebas saber.

Para poder realizar un comparativo entre los estudiantes del I.T.A.I Juan Tama y los estudiantes del resto del País, se tuvo en cuenta, el informe de los resultados de las pruebas Saber presentado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior (ICFES).

Tabla 4
Resultados promedio de las pruebas saber 9° del año 2015, 2016 y 2017

	Nivel Avanzado			Nivel Satisfactorio			Nivel Mínimo			Nivel Insuficiente		
	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017	2015	2016	2017
Establecimiento	0	0	0	3	0	8	59	39	58	39	62	3
Municipio	3	3	3	17	23	14	55	50	58	26	24	25
Cauca	1	1	1	10	13	10	53	52	56	35	34	32
Colombia	4	6	6	20	24	20	53	50	53	23	20	22

Nota: se comparan los resultados obtenidos en pruebas saber de 9° en el periodo 2015, 2016,2017a nivel local, municipal, departamental y nacional (Elaboración propia)

De los resultados expuestos en la tabla 4, se puede mencionar que para el año 2017, en el nivel avanzado, el porcentaje de rendimiento es nulo para los estudiantes del grado noveno del T.T.A.I Juan Tama y relativamente inferior para los estudiantes del resto del país; al mismo tiempo, en los resultados históricos se puede observar que, tanto a nivel local, municipal, departamental y nacional, el rendimiento académico de un año a otro es supremamente bajo en las pruebas saber.

Se puede evidenciar que existen dificultades en los estudiantes de noveno grado de la institución; los resultados reportan una fuerte debilidad en el componente geométrico-métrico, representación y modelación, según la matriz de observación de las pruebas saber noveno en donde se tienen en cuenta la ubicación de los estudiantes en cada nivel de desempeño. Estas debilidades presentan mayor incidencia en el aprendizaje de la factorización, dado que, ninguno de ellos muestra la capacidad de establecer equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas, hallar áreas y volúmenes a través de descomposiciones y recubrimientos, evaluar la correspondencia entre una forma de representación y los datos, entre otras; es claro además que esta dificultad no solo se presenta a nivel local, sino también, a nivel municipal, departamental y nacional. (De acuerdo a la guía de resultados de icfes, 2017).

Cabe mencionar que el nivel socio económico (NSE) influye en gran manera en el rendimiento académico de los estudiantes, aspecto que se puede evidenciar en la siguiente tabla:

Tabla 5

Porcentaje por estratos pruebas saber 9° 2017

	Nivel Avanzado				Nivel Satisfactorio				Nivel Mínimo				Nivel Insuficiente			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
NSE																
Mpo.	2	1	7	ND	7	9	27	ND	63	57	55	ND	28	33	12	ND
Cauca	1	2	10	18	9	13	31	41	56	57	48	37	34	28	11	4
Col.	1	3	7	26	10	15	26	39	54	56	53	31	34	26	15	4

Nota: se muestran los resultados promedio (porcentajes) de las Pruebas Saber 9 en el periodo 2017 y se evidencia la brecha existente en el rendimiento académico, de acuerdo al nivel socio económico (elaboración propia)

La tabla No 5, muestra que existe una relación entre el rendimiento en las pruebas Saber y el nivel socioeconómico de los estudiantes. Así mismo, se puede encontrar cierta correlación de acuerdo a la zona en el que están ubicados los establecimientos, ya sea una institución oficial urbana (OU), oficial rural (OR) y/o privada (P):

Tabla 6

Resultados de las pruebas saber 9° de acuerdo a la estratificación de establecimientos.

	Nivel Avanzado			Nivel Satisfactorio			Nivel Mínimo			Nivel Insuficiente		
	P	OU	OR	P	OU	OR	P	OU	OR	P	OU	OR
Municipio	11	3	1	26	17	6	49	57	61	14	23	32
Cauca	5	2	1	21	12	9	54	55	57	21	31	33
Colombia	4	2	17	18	13	32	55	56	40	23	30	11

Nota: se muestran los resultados promedio (porcentajes) de las Pruebas Saber 9 en el año 2017, de los estudiantes de grado noveno de acuerdo a su estratificación (elaboración propia).

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Caracterizar un proceso de aprendizaje que favorece la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, con la mediación de Geogebra y material concreto en estudiantes de grado octavo del Instituto Técnico Agropecuario Juan Tama.

1.5.2 Objetivos específicos

- Identificar el impacto que tiene el uso de diferentes representaciones en la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de GeoGebra y material concreto en estudiantes de grado octavo.

- b. Documentar las características que debe tener las actividades de aprendizaje para propiciar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.
- c. Analizar las características del proceso de aprendizaje con base en la mediación instrumental y cómo este promueve la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.
- d. Detallar cual es el impacto e importancia del uso de las tecnologías y el material concreto, como instrumentos mediadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

1.6 Preguntas

1.6.1 Pregunta Central

¿Cuáles son las características del proceso de aprendizaje que favorece la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de Geogebra en estudiantes de un grado octavo del Instituto Técnico Agropecuario e industrial Juan Tama.?

1.6.2 Preguntas Auxiliares

- a. ¿Qué impacto tiene el uso de diferentes representaciones en la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo?
- b. ¿Qué características debe tener las actividades de aprendizaje para propiciar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo?
- c. ¿Qué impacto tiene el uso de las tecnologías, como mediadoras en la construcción y el desarrollo de habilidades de la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos perfectos?

2. Referentes Teóricos

En el presente capítulo se desarrolla el marco teórico que fundamenta el problema de indagación y a su vez será el punto de partida para el diseño de los instrumentos de investigación y el análisis de los resultados obtenidos mediante los mismos; consta de dos dimensiones teóricas: dimensión didáctica y dimensión matemática.

2.1 Dimensión didáctica

Se desarrolla a partir de la educación por competencias, la teoría de las representaciones, la mediación instrumental, la integración de las TIC (Software de matemática interactiva GeoGebra) y material concreto (cubos y paralelepípedos de madera)

2.1.1 Educación por Competencias

Castellanos, N., Morga, & Castellanos, A., (2003) mencionan que la educación por competencias tiene como finalidad el desarrollo de las capacidades complejas que permiten a los estudiantes pensar y actuar en diversos ámbitos, lo cual posibilita la adquisición del conocimiento mediante la acción; además, prepara al ser humano para enfrentar y responder adecuadamente a las nuevas necesidades de un mundo globalizado. Este tipo de educación se puede visualizar como un complemento de la educación tradicional, puesto que, para saber hacer y para poder intervenir es necesario partir de aspectos cognitivos.

Así mismo, proponen cuatro pilares fundamentales que cimientan y favorecen el desarrollo de la educación por competencias:

1. Aprender a conocer, este pilar permite ampliar y profundizar los conocimientos, además, abarca el proceso de aprender a aprender.
2. Aprender a hacer, hace referencia a la adquisición de la capacidad que se tiene para hacer frente a las diversas situaciones que se enfrentan, esta capacidad incluye tanto la habilidad motriz como las habilidades sociales, (trabajo en equipo).
3. Aprender a ser, a través de los valores se busca fomentar la autonomía y la responsabilidad personal, lo que lleva a fortalecer y potenciar la personalidad del ser humano.
4. Aprender a vivir juntos, con este pilar se fomenta el reconocimiento de los demás al desarrollar proyectos que sean comunes, en los que asuma el respeto por el otro, se adquieran habilidades como el manejo de conflictos y se busque la comprensión y la paz para todos.

Hay que mencionar que estos pilares se consideran fundamentales, puesto que amplían el ámbito de intervención de la educación, debido a que no solo tienen en cuenta la parte conceptual sino que abarcan todas las áreas cognitivas del ser humano y reconocen la importancia de los conocimientos teóricos y la necesidad de darles significado y utilidad, con el fin de lograr que las personas con una actitud crítica puedan tener un mejor desempeño en todos los ámbitos a lo largo de su vida a nivel escolar, profesional, laboral, social y personal. (Castellanos, N., Morga, & Castellanos, A, 2003, p.16).

Cada uno de los pilares fundamentales coincide con los campos de competencias de los saberes del ser humano, estos son: el campo conceptual, el procedimental, el actitudinal y el de convivencia (Ver fig. 3).

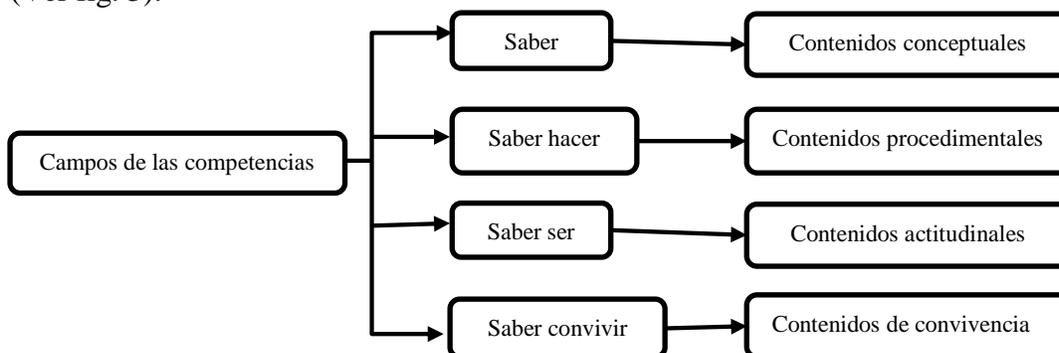


Figura.3 Campos de las competencias

Castellanos, N., Morga , & Castellanos, A., (2003) plantean que la educación basada en competencias se apoya en la teoría conductista para proponer que la adquisición y desarrollo de competencias pueda medirse mediante la observación del progreso de los estudiantes durante el proceso formativo a través de los resultados que presentan, comparándolos con las mínimas acciones que ejerce un profesional para desempeñarse como tal; así mismo, se fundamenta en esta teoría para plantear que las competencias no solo dependen de los comportamientos de las personas, sino, de las organizaciones, es decir, que se debe hacer énfasis en metas organizacionales y no únicamente en metas personales.

Por otra parte, la educación por competencias también la fundamenta la teoría funcionalista, así lo mencionan Castellanos, N., Morga , & Castellanos, A., (2003):

Establece que el proceso de enseñanza y aprendizaje parte de un estándar, es decir, de un referente homologado, el cual es el parámetro que debe alcanzar el estudiante, estos estándares se desprenden del ámbito laboral. Desde este enfoque se conceptualiza a las competencias como un conjunto de atributos para responder a los requerimientos identificados a partir de un análisis de las funciones relacionadas con la profesión. (pág. 18)

A su vez, estos autores señalan una tercera teoría, la constructivista, debido a que propone centrar el proceso educativo, en el aprendizaje (el estudiante), con el objetivo de alcanzar conocimientos significativos a través del análisis y la solución de problemas, dicho de otro modo, la meta es lograr que los estudiantes construyan conocimientos mediante contenidos que tienen un significado integral para la vida, lo cual genera cambios en la realidad o contexto vivido. Esta teoría lleva a los estudiantes a aplicar aquellos conocimientos desarrollados en las aulas a través de estrategias de aprendizaje colaborativo al considerar elementos cognitivos, motores y socio afectivos; también se estima necesario procesos de meta cognición para que logren independencia, autoaprendizaje, responsabilidad y protagonismo en su propio aprendizaje permitiéndoles una construcción personal.

Tobón , Rial, Carretero, & Garcia, (2006) además, hacen alusión a un enfoque de educación que supera la perspectiva tradicionalista, para darle sentido y significado a los conocimientos adquiridos en un contexto determinado y no solo a la memorización, (que dejaba el aprendizaje en el plano declarativo, al limitar la comprensión, construcción y aplicación), Benitez, Londoño, Mederos, & Ruiz, (2010) mencionan que,

Competencia se refiere a un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos como la motivación y los valores. Es decir la competencia apunta a la capacidad que desarrolla el individuo para poner en práctica de manera articulada conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar y resolver problemas (p. 7).

Al respecto, el MEN (1998) define las competencias como el conjunto de conocimientos, actitudes y habilidades (cognitivas, socio-afectivas y comunicativas) que desarrollan las personas y que les permiten comprender, interactuar y transformar el mundo en el que viven, es decir, “saber hacer en contexto”, esto implica conocer, ser y saber hacer.

Para fines de este trabajo y en coherencia con los planteamientos mencionados, la competencia se entenderá, desde un enfoque constructivista, como un elemento que integra aspectos relacionados con conocimientos, habilidades, destrezas, prácticas y valores, que se evidencian en el desempeño, situaciones concretas y contextos específicos; comprende aspectos de tipo cognitivo, procedimental y actitudinal, con el objetivo de alcanzar mejores rendimientos a nivel personal, laboral y social.

Tobón (citado por Torres, N., Rodríguez y Torres, A., 2013) identifica 3 dimensiones de las competencias: cognitiva, actitudinal y afectivo motivacional. (Ver figura. 4)

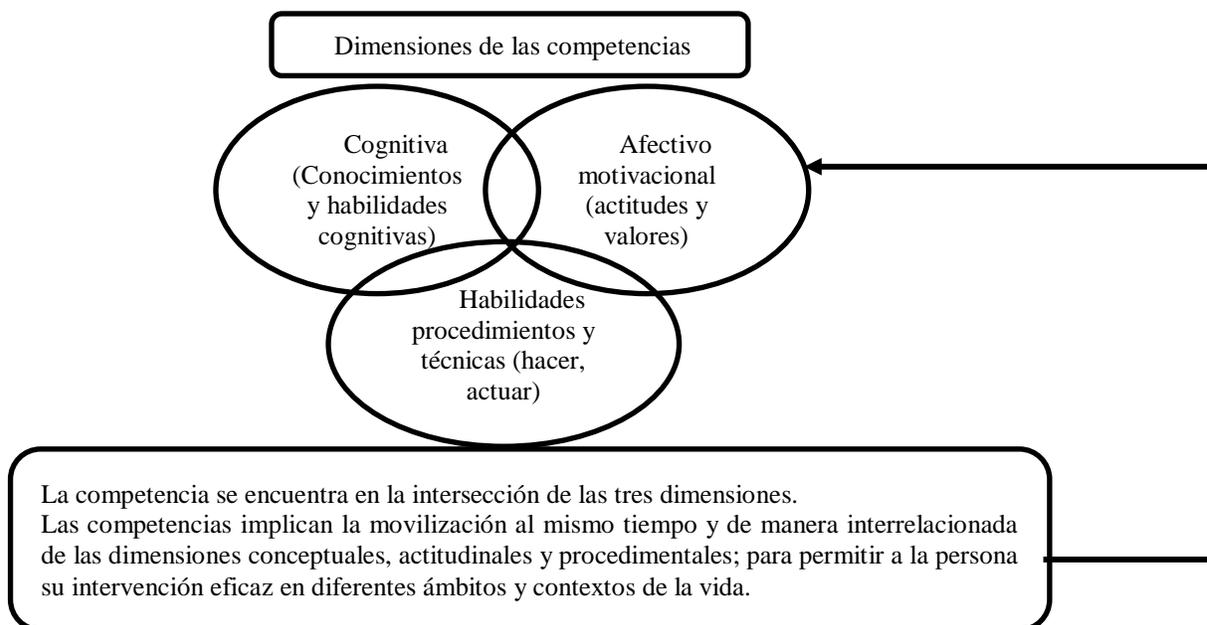


Figura 4 Dimensiones de las competencias. Tomado de Torres, N., Rodríguez y Torres, A. (2013)

Puede agregarse que las competencias se clasifican en:

- Básicas, se desarrollan en la educación básica y permiten adquirir conocimientos más complejos
- Genéricas, son comunes a una rama profesional, relevantes en todas las disciplinas académicas y actividades extracurriculares aplicables a contextos académicos, sociales y laborales, además, permiten mayor movilidad al estudiante mediante la capacidad de análisis, síntesis y abstracción
- Específicas, son propias de cada profesión, implica un nivel de dominio, puesto que, describen los conocimientos, habilidades y actitudes asociados a los diferentes saberes de índole técnico, vinculados a una ocupación o actividad productiva.

Al lado de ello, es necesario considerar ciertas implicaciones, para lograr la implementación de la educación por competencia en el ámbito educativo, tales como:

- i. A nivel institucional, se espera que el servicio que brinde sea la formación integral de la persona, para esto se requiere que los conocimientos adquiridos ya no sean declarativos, ni memorísticos, sino que se comprendan, transfieran y se apliquen.
- ii. En relación con el diseño curricular, el gran reto es que sea integral, es decir, que además de los contenidos temáticos, se incluya todos los tipos de saberes que conforman las competencias básicas (conceptuales, procedimentales y conductuales) así mismo, se integren las competencias específicas sin dejar de lado las genéricas; para lograr su implementación es necesario propiciar ambientes escolares que generen aprendizajes significativos mediante estrategias de enseñanza contextualizadas a la realidad del estudiante.
- iii. En cuanto al docente, pueda ser un facilitador y generador de aprendizajes, capaz de diseñar e implementar estrategias que permitan en los estudiantes el análisis, el pensamiento crítico, la inquietud de generar su propio conocimiento, que investiguen y sean autónomos, y socialicen sus conocimientos.
- iv. Respeto al estudiante, pueda ser responsable de su aprendizaje; su rol es ser protagonista principal de su proceso de formación; y busque conocimientos a partir de su interés, contexto y su propio desarrollo.
- v. Acerca de la evaluación de Aprendizaje, debe ser continua y constante para dar seguimiento a la evolución de la adquisición de competencias, se basa en evidencias de desempeño.
- vi. Finalmente, se espera que las instituciones cuenten, con acreditación y titulaciones, para que los estudiantes sean reconocidos en cualquier Institución educativa o ámbito laboral y así permitan la movilidad del ser humano.

En síntesis, la implementación de la educación por competencias con el objetivo de establecer mejoras, requiere de una evaluación continua, lo que permite que las instituciones puedan responder positivamente, tanto a las exigencias políticas y sociales, como a las tendencias mundiales, posibilitando de esta manera, no solo la vigencia de los programas de estudio, sino la de las instituciones educativas.

2.1.2 Teoría de las representaciones

En esta investigación se hará énfasis en la importancia de considerar las diferentes representaciones, la percepción y la visualización en la construcción de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, en particular de los conceptos de polinomios cuadráticos y cúbicos perfectos, desde el punto de vista de la teoría de las representaciones de Hitt (2003), y se intenta comprender de una forma significativa el proceso de factorización de los mismos, a través de un recurso tecnológico, ya que, por lo general en la enseñanza del algebra los profesores continúan privilegiando el sistema de representación algebraico sin considerar que las investigaciones en torno al aprendizaje apuntan al equilibrio que se le debe otorgar al uso de las diferentes representaciones en la construcción de conceptos.

Como es sabido los objetos matemáticos, debido a su naturaleza abstracta, no pueden ser percibidos directamente por medio de los sentidos y solamente se puede tener acceso a estos objetos a través de las representaciones, por tal motivo, es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Tal como afirma, Skemp (citado por Hitt, 2003)

Cada uno de estos conceptos por su naturaleza está dentro de una estructura con otros conceptos. Cada uno de estos se deriva de otros anteriores y contribuye a la formación de nuevos conceptos, o sea, forman parte de una jerarquía. Comprender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado. (p. 35, 45).

Por ello es importante tener en cuenta que en el momento de construir un concepto matemático se pone en acto toda una red de conocimientos, al igual que las diferentes representaciones del objeto en cuestión, lo cual en el sistema tradicional de enseñanza es limitado.

Ahora bien, las representaciones de un concepto matemático solo representan una parte del mismo, por lo que se hace necesario el paso de una representación a otra y su correcta manipulación, debido a que es lo que permite construir el concepto. Al respecto, Duval (como se cita en Hitt, 2003) afirma que: “dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (p.8)

Además, es importante tener en cuenta que los avances tecnológicos tienen una gran influencia en el desarrollo de nociones teóricas como: la visualización, mediación y orquestación instrumental, entre otras; dado que, actualmente, les ha dado mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas, por lo que antes, a pesar de tenerlas en cuenta, no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Gracias a estos avances, las nuevas tecnologías, se han convertido en una base importante para que los estudiantes logren entender las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos, aspectos que en otros espacios eran de mayor complejidad.

Con el uso de la tecnología hay mayor facilidad para lograr comprender una situación problema que nos permita la construcción de un objeto matemático, pues es bien sabido que la capacidad de graficar de las computadoras y demás artefactos tecnológicos ha impulsado la comprensión de las diferentes representaciones, posibilitando la solución de situaciones problema a través de la visualización matemática.

En el momento de la construcción de los conceptos matemáticos es importante introducirlos a través de actividades que proporcionen el trabajo con las diferentes representaciones; es fundamental tener en cuenta dos procesos que intervienen en la comprensión:

- La visualización, entendido como la acción que tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo, es decir el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento. Así mismo la visualización es entendida como una habilidad que permite transformar, representar, comunicar, generar, documentar y reflexionar frente a una información visual.

- La percepción, hace referencia a la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, es decir que la percepción se da cuando el estudiante es capaz de organizar en su mente la información y genera a partir de ella, una representación mental o interna.

Es necesario resaltar la importancia de promover el desarrollo de habilidades de la visualización matemática en los estudiantes, para facilitar la construcción de conocimiento matemático, la comprensión y la resolución de problemas. Entendiendo la comprensión como la manera en que la información es representada y estructurada, pues, un concepto matemático es entendido por el estudiante solo si, su representación mental se ha generado a partir de una red de representaciones, además el nivel de entendimiento se logra gracias al número de conexiones y la fuerza con que estas se presenten. (Hitt, 2003, cap.11, p, 169)

Desde esta orientación teórica se puede decir que el conocimiento de los estudiantes acerca de un concepto es estable solo si él, o ella, desarrolla la capacidad de articular diferentes representaciones del concepto trabajado sin ningún tipo de contradicción..

2.1.3 Mediación Instrumental.

Según Moreno, (2001, 2002) toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos; este principio plantea la relación indisoluble entre el instrumento de mediación usado y el conocimiento producido. Puede tratarse de un lápiz, un transportador, un compás, un texto o una calculadora; en todos los casos, la naturaleza del conocimiento construido depende de los instrumentos de mediación que se pongan en juego para su construcción y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno socio cultural. La mediación hace referencia a aquellos procesos por los cuales el hombre se vale utilizando diferentes medios para darle solución a un problema, conseguir un fin determinado o adaptarse a una situación. Para el caso de las matemáticas consiste en ejecutar acciones concretas, simbólicas o abstractas mediante instrumentos como las calculadoras, las computadoras, las Tablet y los iPod, entre otros. Este tipo de instrumentos permiten realizar un sin número de procesos que difícilmente podrían realizarse mediante el uso exclusivo del lápiz y papel.

Un ejemplo claro en las matemáticas donde se puede evidenciar el principio de mediación es en las operaciones entre números o entre polinomios; estas operaciones, exigen el empleo de sistemas de notación numérica y algebraica, sin los cuales sería imposible realizarlas, constituyéndose estos sistemas en instrumentos simbólicos de mediación. Las destrezas con los cálculos algorítmicos no son independientes, por lo tanto no pueden confundirse con capacidades matemáticas puras al margen de éstos. El funcionamiento del sistema cognitivo no es inmune a las herramientas mediante las cuales se despliega la actividad intelectual, por lo que los sistemas de representación usados en matemáticas afectan de manera sustancial el conocimiento producido.

Hay que agregar que, este principio de mediación instrumental permite entender el efecto estructurante de los instrumentos computacionales sobre el aprendizaje de los estudiantes, permitiendo, por ejemplo, identificar nuevas estrategias de solución de problemas o acercamientos conceptuales diferentes que se movilizan gracias a la presencia de dichos instrumentos; es por ello

que, la actividad cognitiva ha sido objeto de estudio en los últimos años, debido, en gran parte, a la presencia de las herramientas computacionales en la educación; si esto es así, es necesario que puedan llegar a entenderse como herramientas de mediación de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

2.1.3.1 Representaciones Ejecutables

Cuando se reconoce la pertinencia del principio de mediación, se admite también que al estudiar los objetos matemáticos es inevitable la mediación de recursos representacionales. Cada sistema de representación subraya diferentes características de un procedimiento que es representado y la síntesis de la información obtenida de los diferentes sistemas, da origen a nuevos conceptos y procedimientos matemáticos. Si a un concepto matemático sólo se accede por medio de una representación se tendrá una imagen muy limitada de este. Es lo que ocurre cuando se inicia el estudio de un nuevo tema en matemáticas: entre más representaciones se articulen, el concepto generado será más rico e incluyente.

Al respecto, Moreno (2001, 2002) menciona que los sistemas de representación pueden verse como herramientas de mediación, como es el caso de las versiones informáticas, las cuales tienen la característica principal de ser ejecutables, es decir, son representaciones dinámicas, pues se pueden procesar y manipular una vez son instalados en el lenguaje del ambiente computacional; además agrega, que esto se puede notar en las construcciones que se realizan en los ambientes de geometría dinámica (AGD) como es el caso de GeoGebra, cuando se desplaza una figura y esta conserva sus propiedades; en este caso la forma de manipulación y de ejecución de las representaciones, permiten actuar directamente sobre los objetos geométricos contribuyendo al realismo de los mismos.

El desarrollo tecnológico ha permitido tener herramientas que generan representaciones dinámicas de objetos matemáticos, en otras palabras, suministran un amplio abanico de representaciones y relaciones, situación que puede ser contrastada con las representaciones estáticas tradicionales en las que resulta casi imposible visualizar ciertas propiedades de los objetos matemáticos; las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en realidades con el uso de las herramientas computacionales, al poderlas manipular y transformar; si se logra redefinir un objeto matemático en términos de construcciones ejecutables, se podría inferir que se ha dado el inicio a la mediación instrumental.

A modo de ilustración, si se construye un rectángulo utilizando lápiz y papel se observa su forma general plasmada en la representación estática que tiende a confundirse con el objeto geométrico representado, de manera que la idea de rectángulo se asocia con la percepción visual que se obtuvo; pero si se construye haciendo uso de un programa de geometría dinámica es posible variar su posición y su tamaño haciendo evidentes las propiedades geométricas específicas de cualquier rectángulo. La idea del rectángulo trasciende la percepción visual, para pensar en él como un objeto con propiedades geométricas particulares. Tanto la actividad cognitiva como el conocimiento son diferentes cuando se emplean estos recursos de mediación. (Ver figura 5)

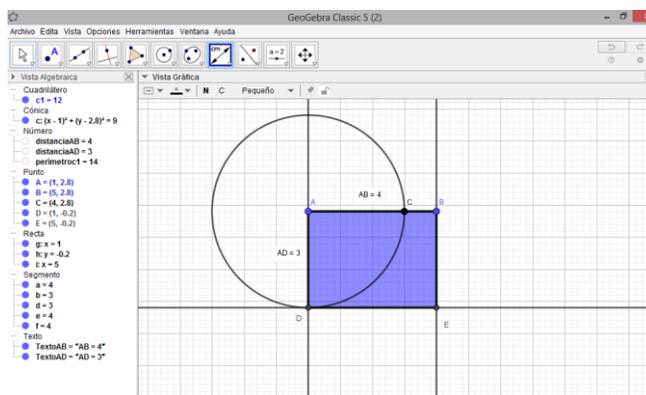


Figura 5 Construcción de un rectángulo con geometría dinámica Geogebra.

Además, las calculadoras algebraicas actuales, los AGD como se muestra en la figura 5, entre otros, incorporan aparte de los sistemas de representación numérico y gráfico, sistemas de manipulación algebraica y geométrica, lo que permite que una situación matemática puede ser estudiada desde cualquiera de estos puntos de vista (numérico, gráfico o simbólico) y, lo que resulta aún más importante, que dicha situación pueda estudiarse integradamente, desde los tres puntos de vista abriendo así la posibilidad a un establecimiento de nuevas relaciones entre las representaciones y, por ende, a una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio. Cabe resaltar que, además de las representaciones ejecutables, también se encuentran las construcciones ejecutables, por ejemplo, las que se hacen con Geogebra.

2.1.3.2 De la amplificación a la Reorganización conceptual

La tecnología es fuente generadora de multiplicidad de acciones extraordinarias que posibilitan procesos que podrán ser ejecutados de una manera muy diferente ha como se realizarían haciendo uso del método tradicional de lápiz y papel; las herramientas pueden verse a partir de dos fenómenos:

- La amplificación, entendido como proceso que complementa, dado que, no hay modificación en él, pero, permite abarcar mucho más.
- Reorganización, proceso en el que hay cambios significativos en el cual se produce una transformación.

Es válido resaltar que estos dos fenómenos no se pueden separar, de modo que, se presenta una dualidad entre el usuario y el instrumento, en pocas palabras, amplifica y reorganiza el pensamiento.

Dado que un estudiante al hacer uso de una herramienta tecnológica (calculadora, software, entre otras) puede tener mucho más amplitud espacio-temporal para desarrollar situaciones complejas con gran facilidad y eficacia., se espera como efecto de la amplificación que se genere facilidad en los procesos de tal forma que el estudiante al mismo tiempo que usa la tecnología pueda operar.

El ejemplo del Violinista en concierto ilustra lo que se quiere decir: el evento se da porque hay un sujeto, el violinista, y un instrumento, el violín, pero no es posible ver únicamente al violinista o en su defecto al violín para que se logre disfrutar de dicho momento, es imposible separar el sujeto del instrumento, lo que se disfruta es la inspiración que él tiene y los gestos, es decir la armonía que se obtiene, en este caso existe una sola entidad, es el resolutor con el aparato.

La reflexión en torno a los procesos de amplificación y reorganización también puede darse desde la perspectiva de la transición de herramienta a instrumento matemático que sufren las computadoras y calculadoras (Rabardel, 1995, citado por Moreno 2001).

2.1.3.3 De las herramientas a los instrumentos

Al observar los procesos que se realizan con computadoras se está frente a dos posibilidades, en primer lugar, entenderla como una herramienta de amplificación y en segundo lugar, entenderla como una herramienta de re-organización cognitiva. Cuando el uso de la computadora no modifica, sino que complementa los procesos de pensamiento del estudiante puede entenderse como una herramienta, es decir la herramienta solo genera en el estudiante efectos de ampliación, pero, si por el contrario, después de un uso sostenido de la herramienta (computadora), se logra que haya cambios tanto en el nivel de estrategias de solución como en la forma de plantear el problema, se dice que la herramienta ha sufrido una transformación, ha pasado hacer un instrumento de mediación.

“En dicha génesis se combinan dos procesos:

- a) El sujeto se adapta a la herramienta.
- b) El sujeto adapta la herramienta a sí mismo” (pág. 86).

Estos dos procesos ocurren a través de esquemas de uso (conocimientos, prácticas y habilidades) orientados a las acciones directamente asociadas a la herramienta. A su vez su naturaleza restringe las acciones del estudiante. El uso continuo de ellas estabiliza los esquemas de uso, permitiendo atribuir un significado a los objetos (matemáticos) en función de la orientación de la actividad y de las tareas a desarrollar. A partir de allí, el empleo de las herramientas (ahora instrumentos) queda controlado por los esquemas.

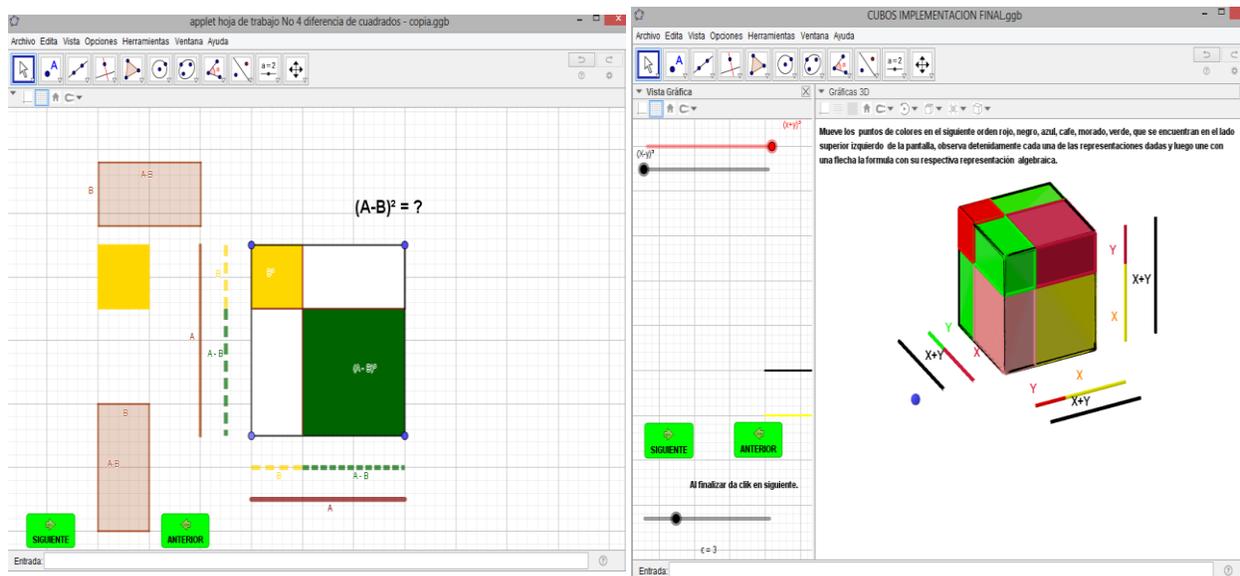


Figura. 6 Construcción en GeoGebra la suma de un binomio al cuadrado $(A + B)^2$ y la suma de un binomio al cubo $(X + Y)^3$.

2.1.4 Integración de las TIC.

La actual sociedad se caracteriza por la difusión y apropiación de la tecnología en todos los ámbitos de la vida, de igual forma, por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas que imponen un extraordinario dinamismo. En esta era computacional los estudiantes acceden con diferentes fines y de una manera muy fácil al uso de diferentes dispositivos como tabletas, computadores, IPod, celulares entre otros.

La incorporación de las TIC en actividades de aprendizaje, tiene una historia de más de 40 años; no obstante, su integración sistemática a los sistemas escolares ha sido mucho más reciente, así como también los estudios que dan cuenta de los resultados de tales procesos. Investigaciones en Educación matemática resaltan la importancia de emplear tecnología en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Balacheff & Kaput, (1996); MEN, (2013); Goldemberg, (2000); Santos, (2000); National Council of Teachers of Mathematics , (2000); Moreno, (2002^a); Santos & Benitez, (s,f.); Moreno y Santos, (2016)

Algunos de los trabajos de investigación publicados en el tercer Handbook Internacional de educación Matemática reflexionan sobre la influencia que ha ejercido la tecnología en la educación desde diferentes ámbitos como lo es la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación, formación de docentes y elaboración de materiales didácticos, además la resaltan como un factor importante que influye directamente en los rápidos cambios que ha ido presentando esta disciplina

El Ministerio de Educación Nacional, (2013) publica las competencias TIC para el desarrollo profesional Docente, la finalidad es brindar pautas, criterios y parámetros tanto para quienes diseñan e implementan los programas de formación de maestros, como para los docentes y

directivos docentes en ejercicio dispuestos a asumir el reto de hacer uso reflexivo de las TIC en educación.

2.1.4.1 Porque el uso de GeoGebra: El software de matemática interactiva GeoGebra, permite construir, explorar, visualizar y manipular en forma directa las figuras geométricas. Realizar un seguimiento de los cambios que se producen en la transformación de los objetos geométricos, puede conducir a la búsqueda de patrones y a la construcción de conjeturas. Cuando los estudiantes emplean este software tienen la posibilidad de transformar las figuras en tiempo real, una vez realizan la construcción pueden mover libremente ciertos componentes de un dibujo y observar cómo se van transformando otros. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas, como atributos esenciales de la construcción original.

A continuación se relacionan algunas de las características que se toman en cuenta para usar GeoGebra en la línea de las TIC:

- Permite estudiar la deformación continua de una construcción geométrica, o el lugar geométrico de un objeto, mientras otros se transforman de una manera continua.
- Aporta elementos para la exploración y formulación de conjeturas
- Permite realizar simulaciones de problemas matemáticos con los que se logre encontrar relaciones.
- Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación
- Facilita el empleo de diferentes registros de representación (gráficos, tabulares y algebraicos)
- La aproximación geométrica puede ser importante para relacionar la solución de un problema con diferentes líneas de contenido de la geometría (triángulos, sistemas de coordenadas cartesianas, las cónicas, la ecuación cuadrática y las funciones trigonométricas), con temas de cálculo (variación, límite, derivada, máximos y mínimos, tendencias, razón de cambio, etc.)

2.1.5 Uso de manipulativos: Los manipulativos son elementos que en la educación matemática son utilizados para explorar, adquirir o investigar conceptos matemáticos o procesos y para realizar actividades de resolución de problemas basándose en la percepción (visual, táctil o generalmente evidencia sensorial). (Bartolini & Martignone, 2014, pág. 365).

De acuerdo a las consideraciones dadas por Bartolini y Martignone (2014) existe una variedad de manipulativos que pueden adquirirse fácilmente, ya sea a nivel comercial, en línea (descargables) o elaboración propia, los cuales con un poco de creatividad pueden ser realizados por el docente o por los estudiantes. Algunos ejemplos de estos son: bloques de madera, palos de cuenta (realizar cuentas con palos de bambú o plásticos), pascalina (calculadora mecánica), el compás (par de compases), pantógrafos (máquina de dilatación), contadores, tablero, bloques base diez, bloques de patrones, palitos, dinero de papel, botones, origami, entre otros.

En este sentido, un manipulativo es un objeto que su diseño tiene la finalidad de permitir que el estudiante pueda aprender un concepto matemático a través de la manipulación del mismo. En otras palabras cuando un estudiante hace uso de objetos manipulables es capaz de aprender conceptos abstractos en concreto; sin embargo, la disponibilidad, la adaptación a la cultura de los estudiantes (contexto), las expectativas, los objetivos a alcanzar, el sistema de creencias de los docentes y su visión sobre las matemáticas son algunos de los factores que influyen para elegir correctamente cual es el tipo de manipulativo que debe ser usado en la enseñanza de cualquier concepto matemático

Ahora bien las anteriores por consiguiente se pueden establecer las siguientes ventajas del uso de manipulativos:

- Contribuyen al uso de herramientas para la solución de problemas
- Favorecen el aprendizaje significativo
- Estimulan la observación y la experimentación
- Propician la reflexión
- Permiten la relación causa-efecto
- Facilitan el trabajo en grupo.

2.2 Dimensión matemática

Asociada a la noción matemática, en este caso el álgebra: las técnicas de factorización, específicamente para los polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

2.2.1 La factorización

La factorización se presenta como una técnica u operación algebraica fundamental que puede aplicarse a un gran número de procedimientos matemáticos donde ella hace presencia, haciendo énfasis en primera instancia, en los elementos previos como la familiarización con las expresiones algebraicas, la teoría de exponentes, la multiplicación de expresiones algebraicas y los productos notables. Al respecto, Álvarez y Mejía, (2006) definen que: “Factorizar una expresión algebraica es descomponerla en un producto de factores que deben ser expresiones irreducibles en el conjunto sobre el cual se está factorizando, en este caso, el conjunto de los números Reales” (pág. 15).

2.2.1.1 Expresión Algebraica

Una expresión algebraica es cualquier combinación de variables (letras) y números, en al menos una de las operaciones algebraicas básicas: suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

- ***Expresión algebraica irreducible***

Es aquella expresión que no puede descomponerse como el producto de dos o más expresiones algebraicas de grado mayor que cero en un conjunto dado; en caso contrario, se tienen una expresión algebraica reductible.

$$25XY - 10 = 5(5XY - 2)$$

Es irreducible sobre el conjunto de los números naturales reales \mathbb{R} ; 5, que es un factor de la expresión dada, es de grado cero

- **Clasificación de expresiones algebraicas**

Las expresiones algebraicas se clasifican dependiendo del número de términos, además reciben nombres específicos como: monomios, binomios, trinomios, multinomio y polinomios.

Monomio: es una expresión algebraica simple ya que constan de un solo término

$$36X^3Y^3Z, \quad -16mn, \quad \frac{10X^2}{12Y}$$

Binomio: es una expresión algebraica que consta de dos términos.

$$a^2 - b^2 \quad \sqrt{X} + 3\sqrt{Y} \quad 6XY - 5Z$$

Multinomio: es la expresión algebraica que consta de más de un término, en la práctica algebraica se le denomina como polinomio.

$$a^2 - b^2, \quad a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 + 5ab^3 - 6b^4, \quad 3X^3 - 4X^2 + 6X - 8$$

Polinomio: es una indeterminada o variable X , denotada $P(x)$, se define de una manera formal, en matemáticas como una expresión algebraica de la forma.

$$P(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \dots + a_1 X + a_0$$

Donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$ son los coeficientes del polinomio, a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente. El exponente n , al cual esta elevada la variable o indeterminada, establece el grado del polinomio y se denota grado $[P(x)]$.

- **Factorización de binomios**

Cuando la expresión a factorizar es un binomio, una vez descartada la posibilidad de un factor común, entonces ese binomio puede factorizarse de acuerdo con su forma.

Diferencia de cuadrados: factorizar una expresión algebraica de esta forma resulta sencillo de hacer, para ello, basta plantear el producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos de la expresión a factorizar. $X^2 - Y^2 = (X + Y)(X - Y) = X^2 - XY - YX - Y^2$

Suma de cubos - diferencia de cubos: en términos algebraicos y su factorización es de la siguiente manera:

$$X^3 + Y^3 = (X + Y)(X^2 - XY + Y^2); \quad X^3 - Y^3 = (X - Y)(X^2 + XY + Y^2)$$

- **Factorización Trinomios Cuadrados Perfectos**

Se trata de expresar un trinomio de la forma $X^2 + 2XY + Y^2$ o del tipo, $X^2 - 2XY + Y^2$ como un producto de factores, así. $X^2 + 2XY + Y^2 = (X + Y)^2$, $X^2 - 2XY + Y^2 = (X - Y)^2$

En un trinomio cuadrado perfecto, el tercer término siempre es positivo, en el caso que los términos cuadráticos tengan el mismo signo negativo, se determina factor común -1 y el trinomio resultante es cuadrado perfecto.

- **Productos Notables**

Existen ciertos productos de binomios de frecuente aparición en álgebra que han sido clasificados con nombres específicos a fin de hacer un buen reconocimiento de ellos; son productos especiales que se resuelven abreviadamente, aplicando una expresión ya establecida, la cual puede deducirse por multiplicación directa. Se recomienda que el estudiante memorice estas nuevas fórmulas por que la manera más eficaz para factorizar una expresión algebraica es recordándola como un producto notable.

Cuadrado de la suma de dos términos: el cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término. $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

Cuadrado de la diferencia de dos términos: el cuadrado de la diferencia de dos términos, es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término. $(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$

Cubo de la suma de dos términos: el cubo de la suma de dos términos, es igual al cubo del primer término, más tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

$$(X + Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$$

Cubo de la Diferencia de dos términos: el cubo de la diferencia de dos términos, es igual al cubo del primer término, menos tres veces el cuadrado del primer término por el segundo, más tres veces el primer término por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

$$(X - Y)^3 = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$$

3. Diseño Metodológico

En este capítulo se presentan las actividades que componen el trabajo de investigación, así mismo el objetivo de cada una de ellas. Inicialmente se puntualiza en el tipo de estudio y las características de los sujetos que participaron en la investigación, luego se explican las fases que integran dicho trabajo: planteamiento de la problemática, diseño y direccionamiento de la prueba, aplicación del diagnóstico, diseño y pilotaje de las hojas de trabajo y los recursos tecnológicos. Por último, se explica el propósito del análisis de la información tanto cuantitativa como cualitativamente.

3.1 Tipo de estudio

El tipo de estudio que se llevará a cabo en esta investigación es de enfoque mixto, debido a que, se combinarán técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos y lenguaje cualitativo y cuantitativo.

3.2 Sujetos

La aplicación de las hojas de trabajo, se realizó en el Instituto Técnico Agropecuario e Industrial Juan Tama, este establecimiento educativo es de carácter Público, jornada completa, enfoque mixto y promueve estudiantes en modalidad técnicos agropecuarios e industriales. Se encuentra ubicado en el Resguardo Indígena de Canoas Municipio de Santander de Quilichao, departamento del Cauca. La educación que brinda está dirigida a diferentes comunidades el 85% son Nasas pertenecientes a 15 resguardos en su mayoría ubicados en la zona Norte del Departamento, el 10% mestizos y el 5% Afrocolombianos.

Para el desarrollo de esta investigación se tendrán en cuenta los estudiantes del grado 8°, integrado por 20 estudiantes, de los cuales 8 son mujeres (40%) y 12 hombres (60%), con edades que oscilan entre los 13 y los 14 años.

3.2.1 Principios y fundamentos Institucionales.

El modelo etno educativo del Instituto concibe los procesos de socialización y formación en el marco de la educación intercultural, basada en el reconocimiento de las diferencias étnicas, en el fortalecimiento de los valores tradicionales y en la construcción de una ética ciudadana moderna.

Los valores institucionales son: reciprocidad, solidaridad, responsabilidad, respeto, honestidad, sabiduría, dignidad del trabajo y ternura en las relaciones humanas.

- **Solidaridad:** de acuerdo a la cosmovisión Nasa, las relaciones hombre-sociedad-naturaleza están reguladas por el principio de la reciprocidad, el universo es considerado como una inmensa telaraña en la que todos los seres participamos dando y recibiendo para mantener un equilibrio dinámico, es decir mediante este valor se busca construir un sistema de vida más justo y equitativo para todos
- **Solidaridad:** se constituye en un valor fundamental para dar cohesión y coherencia a la vida comunitaria, fortaleciendo su identidad y manteniendo su existencia

- Responsabilidad: mediante este valor se busca que los individuos den respuesta a la exigencias de las metas personales que se hallan impuestos y a los compromisos inherentes a su condición de ser comunitario, a su vez, es un constante llamado al desarrollo de la personalidad y a desarrollar la capacidad de sentirse obligado a dar respuesta, cumplir un trabajo o un compromiso sin presión externa alguna
- Respeto: el carácter intercultural e interétnico del instituto se fundamente en el respeto por sí mismo y en el reconocimiento de la alteralidad como principios de convivencia, con este valor se busca que los seres humanos se amen más así mismo, que se sientan orgullosos de su identidad y se tejan relaciones con los demás basadas en el dialogo, la tolerancia y la aceptación de las diferencias
- Honestidad: forma de comportamiento mediante la cual transparentamos lo que somos, adoptando la sencillez y sinceridad en cada uno de nuestros actos
- Sabiduría: es el conocimiento y pensamiento profundo de un pueblo. Incluye las creencias del origen , el sentido de la vida, la estructura y el destino del universo, interiorizados y transmitidos de generación en generación, en la vida cotidiana , a través de los mitos, ritos, sueños, oralidad, etc., dentro de un sistema simbólico

Para el Instituto significa recrear estos saberes, fortalecerlos, pero ante todo sensibilizar a todos los actores de la comunidad educativa para que comprendan y dimensionen las posibilidades de éstos, como fuente de justicia y equidad.

- La dignidad del trabajo: en el I.T.A.I Juan Tama se concibe el trabajo como una práctica social creativa por medio del cual los sujetos sociales transforman responsablemente su entorno, dándole sentido a sus vidas. El trabajo en el Instituto debe ser una práctica integral, es decir, que en el convergen la inteligencia, la mano y el corazón o la bondad, por esta razón debe asumirse el trabajo como una actividad alegre, voluntariosa y responsable en la que cada uno deja en la obra realizada parte de su ser.
- Ternura: el modelo del I.T.A.I Juan Tama comienza a despertar una nueva práctica humanística que busca la transformación social a través de la fraternidad, entendida como un acto de encuentro y de amor hacia el género humano. Desde esta perspectiva en el Instituto se ejerce la ternura como un derecho, como una profunda construcción subjetiva en la que los participantes se valoran a sí mismos y a los otros, reconociendo sus diferencias y buscando los consensos que les posibiliten vivir el presente y construir un futuro juntos

3.3 Fases de estudio

En la siguiente grafica se muestran de manera sintetizada cada una de las etapas que conforman el presente trabajo de investigación, así como, las acciones relevantes correspondientes a cada una de ellas. Luego se explicará más a detalle cada una las fases.

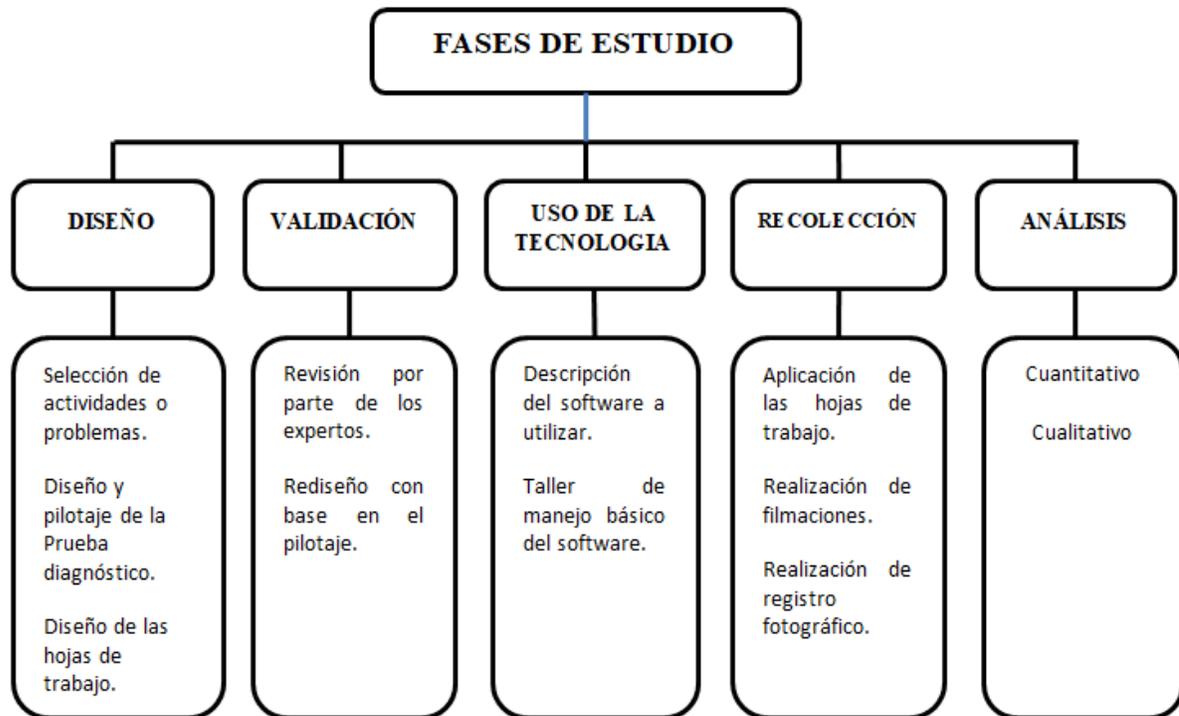


Figura. 7 Fases de investigación

A continuación se describen cada una de las fases del trabajo de investigación.

3.3.1 Fase de Diseño

En esta primera fase, se presentan los siguientes dos momentos: el primero hace referencia a la selección de actividades o problemas, los cuales serán estructuradas de acuerdo a los estándares básicos de competencia en matemática propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el grado octavo y teniendo en cuenta, los aportes de diversos autores. El segundo hace referencia al diseño de la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo según sea el caso con base en lo estipulado en el primer momento.

3.3.2 Fase de Validación

Una vez diseñadas la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo, serán presentadas a las siguientes instancias:

- Director del presente proyecto de trabajo de grado.
- Evaluadores del presente proyecto de trabajo de grado.
- Profesores que tengan conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC y en la técnica de factorización.

Lo anterior, con la intención de perfeccionar y elaborar hojas de trabajo que cuenten con los elementos necesarios para evaluar el impacto de la propuesta, así como la pertinencia del uso de la tecnología y de esta manera dar cuenta del objeto de estudio.

3.3.3 Uso de la Tecnología

El propósito de esta fase, es presentar a los estudiantes participantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra, el tiempo destinado para ello será de una hora y se realizará en un aula dotada de los equipos suficientes (Tablet y computadores) y el software requerido.

Adicionalmente, siguiendo a Benítez (2006), dentro de esta fase se implementaran las siguientes acciones: descripción general del software y taller de manejo de tecnología.

- Descripción general del software: se presentaran las características relevantes de cada software, las funciones y comandos principales y la forma de operar dichos comandos.
- Taller de manejo de tecnología: se realizará con los estudiantes un taller, de 60 minutos, con el fin de que resuelvan una serie de actividades sobre el manejo básico de cada herramienta. El profesor estará atento a las dudas que se puedan presentar.

3.3.4 Fase de recolección

La recolección de datos se llevó a cabo durante cuatro semanas, con estudiantes que cursan octavo grado del instituto I.T.A.I. Juan Tama. En la tabla se observan las actividades que se aplicaron:

Tabla 7

Calendario de aplicación de las actividades

Fecha de aplicación	Actividad	Tiempo
05/09/2018	Prueba Diagnóstico	45 minutos
01/11/2018	Hoja de trabajo No. 1	120 Minutos
15/11/2018	Hoja de trabajo No. 2	120 minutos
27/11/2018	Hoja de trabajo No. 3	120 minutos
03/12/2018	Hoja de trabajo No. 4	120 minutos

Nota: se describe detalladamente el calendario de aplicación de las actividades, (Fuente, elaboración propia)

La prueba diagnostico nos permitió diseñar las Hojas de Trabajo No. 1, 2, 3 y 4. Las actividades resultaron entretenidas y/o interesantes para los estudiantes y se fomentó el trabajo en equipo, de tal forma que existió una comunicación de ideas entre ellos.

Además se utilizó un instrumento de recolección las hojas de trabajo. Este instrumento de recolección contiene varias preguntas y un espacio suficiente para que los estudiantes respondan por escrito. Algunas de las preguntas están basadas en contexto hipotético, que se expresan en lenguaje natural, algebraico y geométrico.

Durante la ejecución de las hojas de trabajo se destacan tres momentos: el trabajo individual, el acompañamiento y la reformulación de contextos.

- Trabajo individual: en esta etapa el estudiante se enfrenta al problema sin la ayuda del maestro o algún compañero.
- Acompañamiento: en esta etapa interviene el profesor como formulador de preguntas y sugerencias que permitan al estudiante acercarse cada vez más a la solución del problema.
- Reformulación de contextos: es la oportunidad para que el estudiante se enfrente a problemas similares, pero en otros contextos, es decir, se mantiene una conexión con el problema inicial, pero se amplían algunas características, a través de la socialización con sus pares y el docente que permiten explorar nuevos terrenos.

3.3.5 Fase de Procesamiento

Después de haber recolectado la información, se debe archivar de manera física y electrónica se hicieron archivos con las hojas de trabajo separando un folder por cada actividad y rotulado cada con el nombre de la hoja de trabajo y la fecha de aplicación.

Asimismo, se guardaron, rotularon y archivaron los medios electrónicos producidos en el computador con ayuda de GeoGebra y las fotografías.

Una vez guardados los archivos, se procedió a realizar tablas y gráficas de acuerdo a las categorías de análisis. En lo cuantitativo utilizamos las categorías: correcto, incorrecto y no sabe. En lo cualitativo utilizamos categorías de acuerdo a tipo de competencias desarrolladas por los estudiantes.

3.3.6 Fase de Análisis

Como se mencionó anteriormente, una vez recolectada la información se procederá a realizar el análisis de la misma, en términos cualitativos y cuantitativos. A partir de los resultados obtenidos, será posible dar respuesta a las preguntas de investigación que son la guía para la realización del presente trabajo, y además, se podrá evaluar el impacto de las actividades que serán propuestas en el salón de clase a los participantes.

Esta fase del estudio se desarrollará teniendo en cuenta los referentes propuestos en los capítulos I y II del presente documento, con lo que se espera evidenciar que los instrumentos de mediación, el uso de diferentes representaciones y la tecnología juegan un papel importante dentro del salón de clase, ya que permiten que el estudiante avance en la comprensión de la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

4. Diseño y análisis de las actividades

Para el desarrollo de esta investigación se diseñó una prueba diagnóstica que permitió identificar dificultades y prerrequisitos de los estudiantes en cuanto a la factorización y cuatro hojas de trabajo, en las cuales se hace uso de las diferentes representaciones de la técnica matemática. En las dos primeras hojas se trabaja la representación algebraica con la integración del CAS en el software de matemática interactiva Geogebra. En la tercera hoja se trabaja con el uso de material concreto (cubos y paralelepípedos elaborados en madera los cuales se diseñaron para el aprendizaje interactivo) y finalmente la cuarta hoja presenta un contexto de representación geométrica en Geogebra 2D y 3D.

La información que resulte de cada una de las actividades presentadas tanto en la prueba diagnóstica como en las hojas de trabajo se utiliza para dar respuesta a las preguntas de investigación referidas en el primer capítulo.

El capítulo cuatro se divide en 5 secciones, una por cada actividad, en todas se hace una descripción de la actividad correspondiente, se analizan los contenidos, procesos y dificultades que aparecen involucrados en la solución. Posterior a esto se plantean los objetivos que se formularon para la implementación y las condiciones en las cuales se realizó la toma de datos, seguidamente, se exponen los alcances de los instrumentos de mediación y la metodología propuesta, para luego realizar un análisis comparativo de la prueba diagnóstica y de las actividades teniendo en cuenta que dicho análisis será de dos tipos: cuantitativo y cualitativo, ambos esenciales para evaluar el progreso de los estudiantes de octavo grado del I.T.A.I Juan Tama. Finalmente se presentan algunos comentarios, para tener una idea clara del impacto de la propuesta, así como la pertinencia y uso de la tecnología (GeoGebra).

La información utilizada en este capítulo procede de diversas fuentes: Manuscritos de los estudiantes, los archivos electrónicos y las transcripciones de los videos y grabaciones cabe resaltar que, para el caso específico de los manuscritos de los estudiantes se presentan sin hacer ningún cambio de los originales.

4.1 Análisis del diagnóstico

Refiere al análisis de una muestra de las preguntas diseñadas en la prueba diagnóstica con el fin de observar los recursos, estrategias y representaciones que se involucran en su resolución, a su vez, identificar las habilidades de los estudiantes para relacionar las representaciones geométricas con las algebraicas, de manera que brinde elementos suficientes para realizar una serie de comentarios finales que den cuenta de las capacidades y limitaciones del público objetivo.

4.1.1 Presentación de la actividad.

La prueba diagnóstica (ver anexo 1) permite explorar las nociones que tienen los estudiantes con relación a conceptos como: área, volumen, polinomios; la relación entre las representaciones algebraicas y geométricas, así como de algoritmos para la factorización de polinomios cuadrados

y cúbicos perfectos. Este propósito se pretende lograr a través de las once preguntas de las que consta el instrumento mediante el cual se recogerá la información.

Es preciso mencionar que cada uno de las preguntas tiene un propósito esencial, por lo que se pueden agrupar de la siguiente manera:

- Encuentra los resultados de las siguientes operaciones.

$$a + a = \quad a \cdot a = \quad a \cdot a \cdot a =$$

- Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.
- ¿Qué entiendes por la expresión diferencia de cubos?
- ¿Conoce una ley para factorizar polinomios cúbicos? Sí _____ No _____
- Si conoces alguna Ley explica tu respuesta.

Con estas preguntas se pretende reconocer que tanto saben los estudiantes sobre la factorización. En particular se quiere que los estudiantes escriban el significado del concepto y sus leyes asociadas. Adicionalmente se pretende que pongan en juego los valores institucionales a la hora de dar respuesta a las preguntas 4 y 5.

- Representa geoméricamente (dibujo) un cubo
- Representa geoméricamente (o dibujo) un cubo de lado a .
- Representa geoméricamente (o dibujo) una suma de cubos.
- Representa geoméricamente (o dibujo) una diferencia de cubos.

Las preguntas 6, 9, 10 y 11 tienen como finalidad valorar la capacidad que tienen los estudiantes para relacionar los sistemas de representación (lenguaje natural, algebraico y geométrico).

- Calcule el volumen de un cubo de 5 cm.
- Calcule el volumen de un cubo de lado X .

Las preguntas 7 y 8 plantean problemas de volúmenes y áreas de figuras tanto de forma numérica como algebraicas y tiene como propósito que los estudiantes pongan en evidencia sus conocimientos acerca de las nociones de área y volumen.

Sin embargo hay que aclarar que la clasificación anterior no es limitativa, puesto que, algunas preguntas pueden involucrar dos o más propósitos de los anteriores.

4.1.2 Objetivos

Uno de los objetivos de la prueba diagnóstico es identificar dos aspectos fundamentales dentro de los que se encuentran la puesta en evidencia de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de factorizar los polinomios cuadrados y cúbicos perfectos; el segundo aspecto, permite constatar si los estudiantes cuentan con las habilidades necesarias para poder desarrollar las actividades apoyadas en el recurso tecnológico. Una vez resueltos estos aspectos se dará paso al diseño de las hojas de trabajo que permitan dar cumplimiento al objetivo de investigación, a su vez, los resultados obtenidos en el diagnóstico constituyen parámetros de referencia para evaluar el impacto del presente trabajo en el conocimiento y desarrollo de habilidades que tienen los estudiantes sobre la factorización.

4.1.3 Condiciones de aplicación

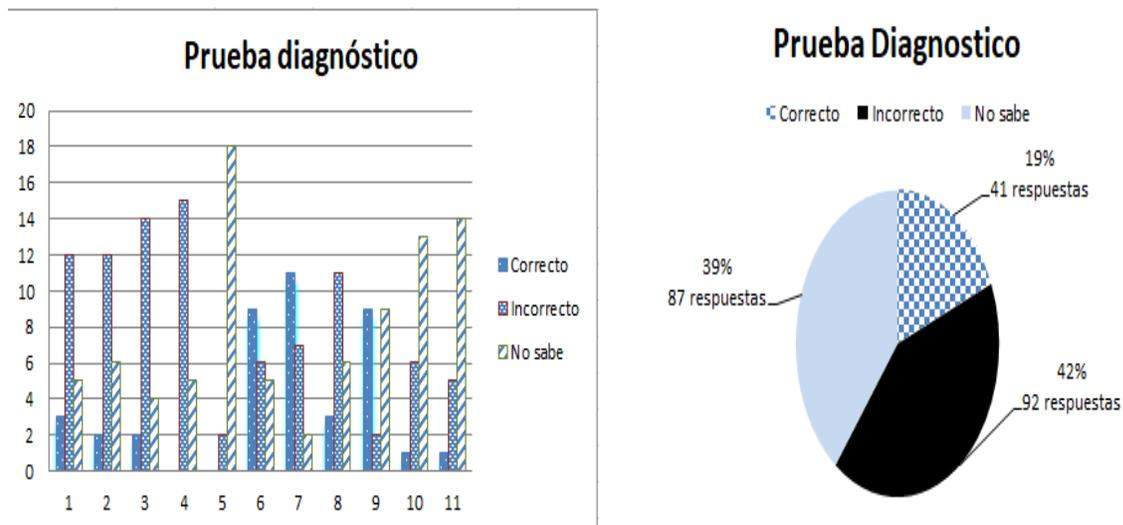
La prueba diagnóstico contiene once preguntas, las primeros cinco son abiertos y cuentan con un espacio para escribir la respuesta, lo cual se hace explícito al momento de dar las instrucciones; la actividad se realizó el 5 de septiembre de 2018, con un grupo de 20 estudiantes de octavo grado, entre los cuales, 8 son mujeres (40%) y 12 son hombres (60%), que oscilan entre los 12 y 13 años de edad; la prueba se aplica en un salón de clase, de forma individual, durante una hora de clase; inicialmente, se explica las instrucciones y metodología contenidas en la prueba; posteriormente, se hace énfasis en la importancia de esta en el trabajo de investigación y, finalmente, se procede a la resolución de la prueba.

4.1.4 Análisis cuantitativo.

Las preguntas en la prueba diagnóstica están relacionadas a la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos; y a nociones de área y volumen, conceptos fundamentales a la hora de poner en juego esta técnica matemática.

La primera pregunta tiene como objetivo fundamental conseguir información acerca de las habilidades de los estudiantes para operar expresiones algebraicas, debido a que esto incide directamente en la técnica de la factorización.

En la siguiente gráfica se muestra el número de estudiantes que respondieron correcto, incorrecto o no sabían acerca de lo que se cuestionaba en las once preguntas de la prueba.



Gráfica 1. Resultados prueba diagnóstico.

Tal como se puede observar en la gráfica No 1, el rendimiento de los estudiantes es extremadamente bajo, con el 19% (41 respuestas) de aciertos, 42%(92 respuestas) de forma incorrecta y el 39%(87 respuestas) restante no sabe. A su vez en el diagrama de barra se muestra los resultados obtenidos por cada pregunta, en la pregunta siete el 55% (11 estudiantes) lograron contestar de manera correcta; mientras que en el resto de las preguntas la cantidad de aciertos

desciende paulatinamente, dado que una proporción inferior al 45% (9 estudiantes) logra el objetivo. Las preguntas con menor proporción de aciertos fueron la cuatro y la cinco con un 0%, la diez y la once con un 5%.

A continuación se muestran y analizan las preguntas a las que se hace referencia en el párrafo anterior.

Tabla 8
Distribución de los resultados de menor porcentaje en la prueba diagnóstico

Número de reactivo	Pregunta con menor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
4	¿Conoces una ley para factorizar polinomios cúbicos perfectos? SI _____ NO _____	0%
5	Si conoces una ley que permita factorizar polinomios cúbicos perfectos, explica tu respuesta.	0%
8	Representar geoméricamente (o dibujo) una suma de cubos.	15%
10	Calcule el volumen de un cubo de lado 5 cm.	5%
2	Con tus propias palabras describe que entiendes por factorización.	10%
11	Calcule el volumen de un cubo de lado X.	5%

Nota: se presenta detalladamente los resultados con menor porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstico, (elaboración propia)

Para dar respuesta a la cuarta pregunta es necesario tener en cuenta nociones de volumen, radicación, productos notables, multiplicación, producto entre polinomios y factorización, entre los más importantes. Además es fundamental tener en cuenta que un polinomio de este tipo es el resultado del producto de un binomio al cubo, por lo cual la expresión debe cumplir ciertas características:

- Que la expresión tenga cuatro términos.
- Que el 1° y 4° término tengan raíz cubica exacta.
- Que el 2° y el 3° término cumplan con la regla del binomio al cubo.

De esta manera se podrá concluir que es un binomio al cubo que se factoriza usando la siguiente regla: se calcula la raíz cubica del 1° y el 4° y se expresan como un binomio al cubo $(x + y)^3$.

Es importante tener en cuenta que la pregunta número cinco depende de la afirmación de la pregunta número cuatro por lo tanto, el estudiante para resolverla debe recurrir a toda su historia pedagógica, en donde se le ha brindado elementos teóricos fundamentales algunos ya mencionados en el párrafo anterior, que le permitan expresar la ley para factorizar los polinomios cúbicos para ello puede realizar el ejemplo con el cual se introduce la técnica de factorización de polinomios cúbicos en el sistema tradicional de enseñanza $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$.

En lo correspondiente a la pregunta número ocho, la respuesta correcta refiere que la suma de cubos es un producto de dos factores, en donde el primero son las raíces cúbicas de cada término y el segundo factor es un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz cúbica, menos el producto de las raíces cúbicas, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

Otra forma de dar respuesta a esta cuestión es mediante la representación geométrica de la siguiente manera.

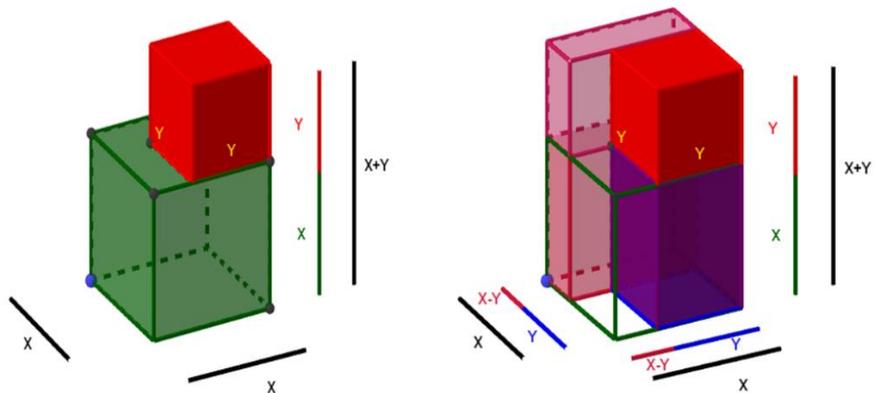


Figura 8 Representación geométrica de suma de cubos

La solución a la pregunta 2, de acuerdo a lo que se evidencia en los estándares y lineamientos en matemáticas, la factorización se puede entender, primero, como una técnica que permite realizar transformaciones de expresiones algebraicas y segundo, como método de simplificación algebraica usada para resolver problemas en diversos contextos, por consiguiente, al ser un método práctico de resolver problemas principalmente algebraicos, de cálculo y de trigonometría, ayuda a sintetizar, de manera matemática, algunas ecuaciones muy grandes y complejas.

Para dar solución a la pregunta diez y once se requiere:

- Conocer algunas de las características del tipo de figura geométrica solicitado, tales como: el cubo es un sólido que tiene 6 caras cuadradas congruentes y por consiguiente la medida de sus lados es igual.
- Nociones sobre cálculo de volúmenes: identificación de las 3 dimensiones del sólido, ancho, largo y alto, las cuales tienen igual medida, en nuestro caso, el valor para cada una es X.
- Connotación de la letra como incógnita: en el problema solicitado la medida del cubo es X, lo que representa una incógnita, puesto que se desconoce su valor exacto, por consiguiente, si X representa cualquier valor, el tamaño de la figura puede variar, siendo representada en diferentes proporciones.
- Propiedades de potenciación: operar el producto de bases iguales, se deja la misma base y se suman los exponentes, tenemos la base X, que tiene como exponente 1, por lo tanto $X * X * X = X^3$

Por otro lado también es necesario analizar las preguntas que se contestaron con mayor porcentaje de respuestas correctas, tal como se muestra a continuación.

Tabla 9

Distribución de los resultados con mayor porcentaje en la prueba diagnóstico

Número de reactivo	Pregunta con mayor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
7	Calcula el volumen de un cubo de lado 5cm.	55%
6	Representa geoméricamente (un dibujo) un cubo.	45%
9	Representa geoméricamente (cubo) un cubo de lado a	45%

Nota: se presenta detalladamente los resultados con mayor porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstico, (Elaboración propia)

Como se puede observar en la tabla 8, el mayor porcentaje obtenido en la prueba fue de 55% que resulta poco favorable respecto a la baja complejidad de las preguntas para el grado de escolaridad en el cual se presentó.

Para contestar la pregunta siete, basta con determinar que el volumen de un cubo es igual al producto de multiplicar la medida del ancho, largo y alto, por lo tanto el resultado será, $V=L*A*H$, $V=5cm*5cm*5cm$; $V=125cm^3$

En esta pregunta se esperaba que la mayoría de los estudiantes pudieran resolverla, sin embargo solo el 55% contesto correctamente, esto se debe a que se tiene dificultad para relacionar que en un sólido se trabaja con 3 dimensiones, largo, ancho y altura, las cuales tienen igual longitud. Es preciso señalar que uno de los propósitos de esta pregunta es identificar habilidades en el manejo y cálculo de volúmenes puesto que en algunos casos se tiende a confundir el cálculo de áreas con los volúmenes, sin tener en cuenta que para las áreas se manejan dos dimensiones y para los volúmenes 3 dimensiones.

La pregunta seis, se soluciona teniendo en cuenta la noción de cubo, las características particulares de esta figura además de la habilidad para realizar trazos geométricos, de tal forma que se logre evidenciar en 2D una figura tridimensional.

Para contestar la pregunta número 9 se debe tener presentes las características particulares de un cubo, el manejo de la incógnita que en esta situación representa las tres magnitudes del cubo y recurrir a las habilidades para trazar el cubo. Esta pregunta es relativamente sencilla y de igual forma que en la pregunta siete, se esperaba que el porcentaje de acierto fuera mayor, sin embargo solamente el 45% de los estudiantes contestaron de manera correcta, esto debido a que en su mayoría presentaron dificultad en la interpretación de la pregunta cuando se le proporciona la información acerca de las medidas del cubo, en este caso haciendo uso de la incógnita.

La forma correcta de contestar la pregunta es la siguiente:

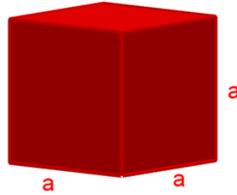


Figura 9 Representación de un cubo de la a .

Una vez analizadas las preguntas con menor y mayor índice de aciertos, se presentan todos los datos para tener una idea precisa y general de los resultados cuantitativos de la prueba diagnóstica. En la siguiente tabla se muestran las once preguntas con las diferentes opciones de respuesta, en cada cuadrícula se muestran dos valores el primero hace referencia a la cantidad de estudiantes en términos absolutos y el segundo a la cantidad de estudiantes en términos porcentuales.

Tabla 10
Distribución de resultados prueba diagnóstica

No. De pregunta	Correcto	Incorrecto	No sabe
1	3 15%	12 60%	5 25%
2	2 10%	12 60%	6 30%
3	2 10%	14 70%	4 20%
4	0 0%	15 75%	5 25%
5	0 0%	2 10%	18 90%
6	9 45%	6 30%	5 25%
7	11 55%	7 35%	2 10%
8	3 15%	11 55%	6 30%
9	9 45%	2 10%	9 45%
10	1 5%	6 30%	13 65%
11	1 5%	5 25%	14 70%

Nota: se presenta de forma detallada los porcentajes obtenidos por preguntas en la prueba diagnóstica.

De la tabla anterior se puede deducir que un gran porcentaje de los estudiantes presentan vacíos en conceptos como cálculo de áreas y volúmenes, manejo de la variable, operaciones entre

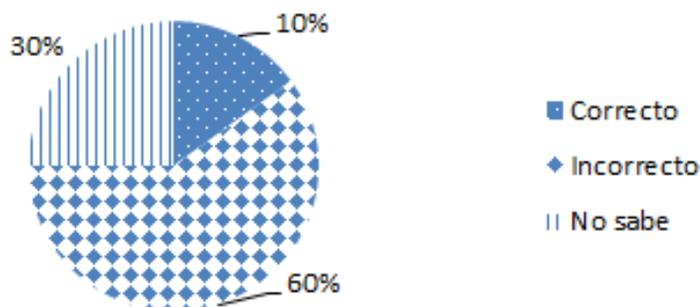
polinomios, potenciación, entre otros, los cuales son fundamentales en el grado de escolaridad, por consiguiente, tuvieron algunas dificultades a la hora de contestar la prueba diagnóstica.

4.1.5 Análisis cualitativo.

La información cuantitativa no proporciona datos suficientes para un estudio detallado, así que es imprescindible abordar aspectos cualitativos de la investigación. Por consiguiente, en este apartado se realiza una categorización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes a cada una de las preguntas, con el propósito de identificar que dificultades presentan.

En este sentido se indago a los estudiantes acerca de lo que ellos entendían por factorización. En la siguiente gráfica se muestran los resultados.

Definición de factorización



Gráfica 2. Pregunta No 2, prueba diagnostico

La grafica 2, muestra que el 10% (2 estudiantes) logró definir de manera correcta lo que es factorización, el 60% (12 estudiantes) respondió de forma incorrecta y el 30% (6 estudiantes) no respondió a la pregunta, dando a entender que no sabían la respuesta. Vale la pena mencionar que de acuerdo al grado de escolaridad los estudiantes ya deberían haber alcanzado el conocimiento y las habilidades para el manejo de la técnica, pero se evidenció a través del análisis de los resultados que presentaron confusión entre las nociones de factorización y factor, que aunque tienen alguna relación son totalmente diferentes.

A continuación se presenta algunas de las respuestas dadas por los estudiantes al respecto:

El estudiante No 7, comento lo siguiente a cerca de lo que para ella significa factorización:

INCORRECTO

Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.

Es el orden de unos números
que se denominan factores

Imagen 1 Manuscrito Prueba Diagnóstico Estudiante No 7

Así mismo el estudiante No 12 proporciona la siguiente respuesta:

INCORRECTO

• Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.

Que la factorización son números que
tienen igual base y se suman
los exponentes.

Imagen 2 Manuscrito Prueba Diagnóstico Estudiante No 7

Por otro lado el estudiante No 14, comento lo siguiente:

INCORRECTO

• Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.

Bueno para mí son factores

Imagen 3 Manuscrito prueba diagnóstico, estudiante 14

En contraste, el estudiante No 6 con su respuesta se acerca a la definición de factorización

CORRECTO
2. Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.
<i>Imagen 4</i> Manuscrito prueba diagnóstico, estudiante No 6

Para el caso de la pregunta siete, el estudiante No 6 responde correctamente, reconoció e identificó que para calcular el volumen de un cubo es necesario tener en cuenta las tres dimensiones largo, ancho y alto, además hizo buen uso de la propiedad de producto de la potenciación cuando dio la respuesta en cm^3

CORRECTO
7. Calcule el volumen de un cubo de 5 cm
<i>Imagen 5</i> Manuscrito prueba diagnóstico, Estudiante No 6

Por su parte la estudiante No 7 contestó incorrectamente, consideró que para hallar el volumen de un cubo debía tener en cuenta la medida de los cuatro lados, a su vez, al realizar el producto de multiplicar las cuatro medidas el resultado es erróneo por tanto se ve reflejado la dificultad que presentó tanto para encontrar volúmenes como para realizar procesos básicos de multiplicación y potenciación.

INCORRECTO
7. Calcule el volumen de un cubo de 5 cm
<i>Imagen 6</i> Manuscrito prueba diagnóstica, Estudiante No 7

4.1.6 Consideraciones Finales

La aplicación de la prueba diagnóstica permitió conocer el nivel de conocimientos que poseían los estudiantes al momento de realizar la intervención didáctica. En general se concluye que el desempeño de los estudiantes es muy bajo con un 19% de respuestas correctas, y por consiguiente se destacan los siguientes:

- En el bloque de conocimiento (integrado por las preguntas 1-5), se propone indagar sobre las habilidades de los estudiantes para operar polinomios y determinar los conocimientos en factorización y sus leyes. En este orden de ideas se encontraron las siguientes debilidades:
 - (i) Los estudiantes no tenían las habilidades para operar monomios, por ejemplo, al sumar $a+a$ (términos semejantes) les daba como resultado el mismo término ($a+a=a$) olvidaron que por propiedad en los términos semejantes se suman los coeficientes y se conserva la parte literal ($a+a=2a$). Por otro lado, al multiplicar $a*a$ (términos semejantes), de igual forma que el anterior ejemplo respondieron que el resultado es el mismo ($a*a=a$) omitieron la propiedad de producto de potenciación que dice “cuando multiplico bases iguales, dejo la misma base y sumo los exponentes” ($a*a=a^2$)
 - (ii) No hay claridad en los estudiantes para definir como entienden la factorización, en la pregunta 2 se encontró que el 90% (18 estudiantes) no lograron dar una definición del concepto se tienden a confundir la técnica matemática para resolver expresiones algebraicas con un factor, con la propiedad del producto de potenciación o como una factura de venta a manera de ejemplo para definirla manifestaron que la factorización hace referencia a los números factores que hacen parte de las operaciones matemáticas. También responden que hablar de factorización tiene que ver con facturas, utilizando como ejemplos supermercados, bancos, etc. Otra de las respuestas dadas por los estudiantes fue cuando se factoriza se deja la misma base y se suman los exponentes.
 - (iii) El 100% de los estudiantes desconocían o no habían comprendido la ley de factorización para polinomios cúbicos, en las preguntas 4 y 5 el 75% (15 estudiantes) redactó la ley de forma incorrecta y el 25 % (5 estudiantes), manifestó que no sabían cómo responder a las preguntas, los estudiantes solo recordaban que debían realizar una serie de procedimientos algebraicos pero que no los tenían muy claros.

Lo anterior se puede evidenciar en el siguiente fragmento donde se transcribe la respuesta que dio un estudiante cuando el docente le pregunto porque había contestado que no sabía nada sobre esta técnica matemática (pregunta No 4 y 5 del diagnóstico).

Fragmento 1.

Se utiliza la siguiente nomenclatura de representación E17: estudiante; D: docente.

E17: profe yo ya no me acuerdo de eso

D: ¿no recuerdas ninguna de las leyes vistas cuando se abordó en clases la técnica de factorización?

E17: profe, pues nosotros si vimos el tema de factorización pero solo recuerdo que nos explicaban en el tablero con unos ejercicios donde solo eran letras y números y al final eso

resultaba en dos o tres términos, bueno, dependiendo porque eran varios casos, luego nos ponían a realizar un poco de ejercicios que uno hacía pero la verdad yo nunca supe porque o para qué era eso, yo solo me guiaba con el que el profesor hacía en el tablero y ya.

D: es decir tú no entendías nada de lo que hacías

E17: si profe a mí me iba bien en eso, pero es que, no yo no sé

D: y entonces que paso, si en ese momento lo hacías porque ahora dices que no sabes.

E17: ahhhh profe lo que pasa es que eso ya fue hace rato, cuando eran esas clases yo memorizaba algunos procedimientos y pues me quedaban bien, era como fácil, pero ya paso bastante tiempo y la verdad yo no me acuerdo como era que yo hacía para resolverlos.

De acuerdo a la respuesta que proporciona el estudiante se puede concluir que, los estudiantes reconocen haber visto el tema de factorización; pero el proceso de enseñanza fue desprovisto de significado lo que no permitió que comprendieran como resolver un problema a través de esta técnica, con esto se ratifica la importancia del uso de diferentes representaciones y el uso de situaciones que sean significativas para el estudiante.

- El bloque de representaciones (integrada por las preguntas 6, 9, 10 y 11) contiene aspectos relacionados con la habilidad para relacionar sistemas de representación. Se encontró que los estudiantes se les dificulta pasar de un sistema de representación a otro (lenguaje natural, al algebraico o al geométrico y viceversa) por ejemplo cuando tenían que representar una diferencia de cuadrados o una suma de cubos el 100% de los estudiantes contestan que no saben cómo realizarlo
- El bloque de conocimientos (preguntas 7, 8) contiene preguntas relacionadas con la resolución de problemas que involucran el cálculo de áreas y volúmenes tanto numérico como algebraico. Se encontró que la mayoría de los estudiantes confunden los conceptos de volumen y áreas, por ejemplo, al momento de hallar el volumen de un cubo de lado X , consideran que X no es una medida, pero que si deben operarla la deben multiplicar tres veces y algunos lo hacen cuatro veces, al operar el resultado que obtienen es el mismo, es decir $V=X.X.X=X$ o $V=X.X.X.X=X$, al respecto los estudiantes como se mencionó anteriormente no aplican la propiedad del producto de potenciación por tanto el resultado es el mismo para ellos, para el segundo ejemplo donde multiplican cuatro veces la X no tienen claridad que para hallar el volumen solo necesitan de 3 medidas el largo el ancho y el alto.

4.2 Hoja de trabajo 1, representación algebraica con la mediación de GeoGebra

La hoja de trabajo No 1 gira entorno a la representación algebraica para la factorización de polinomios cuadrados perfectos, con la medición del CAS en GeoGebra.

4.2.1 Propósito

- Analizar los conocimientos, habilidades que tienen los estudiantes sobre la factorización de polinomios cuadrados.
- Identificar y reconocer características de los polinomios cuadrados.

- Analizar la importancia e impacto que tiene el uso de las tecnologías como herramientas mediadoras (software de Geogebra) en el proceso de construcción de una ley.

4.2.2 Descripción de la hoja de trabajo No1.

La actividad de la hoja de trabajo No1 consiste en que los estudiantes hagan uso del comando factoriza de GeoGebra, puedan identificar características y propiedades para factorizar polinomios cuadrados perfectos que posteriormente les permita establecer la ley de factorización. Para ello se elabora la hoja de trabajo No1 que consta de 7 preguntas (ver anexo 2).

4.2.3 Condiciones de aplicación.

La hoja de trabajo No1 la contestaron 20 estudiantes, de los cuales 12 (60%) fueron niños y 8 (40%) niñas, con un promedio de edad de 13 años. Fue una prueba individual que se aplicó el 1 de noviembre de 2018 por escrito, los recursos requeridos para resolverla fueron: papel, lápiz y un computador o Tablet por estudiante con previa instalación del software de matemática interactiva GeoGebra, para lograr los objetivos planteados se dio una capacitación sobre el manejo de conceptos básicos en GeoGebra, específicamente manejo de la ventana CAS. Una vez terminada la resolución de la pregunta 1 a la 7, los resultados se socializaron con el profesor y todo el grupo de estudiantes, finalmente el profesor interviene con la institucionalización.

Las fases en que se desarrolló la clase para la hoja de trabajo No 1 se muestran a continuación:

Tabla 11

Fases de ejecución Hoja de trabajo No1.

Fase	Descripción
Acercamiento al software GeoGebra	Manejo de conceptos básicos de GeoGebra, específicamente la ventana CAS.
Diagnostico	Los estudiantes manifiestan si conocen alguna ley para factorizar y justifican su respuesta
Intervención didáctica Mediación del software.	Haciendo uso del software de GeoGebra en la vista CAS los estudiantes factorizan, establecen características y confrontan resultados al factorizar con y sin GeoGebra.
Evaluación	Los estudiantes reconocen y determinan una ley que les permite factorizar algunas expresiones algebraicas
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron resultados y con lluvias de ideas construyeron conceptos a partir de la experiencia, reflexionaron sobre qué piensan de la actividad. El rol que desempeña el profesor es de orientador y modelador.
Institucionalización	Finalizando la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizo e institucionalizo las ideas y los resultados obtenidos durante la actividad.

Nota: se detalla cada una de las fases de ejecución de la propuesta de investigación, (Elaboración propia).



Recordando el manejo básico de la vista CAS en GeoGebra



Manejo básico vista CAS en GeoGebra



Uso del CAS en Geogebra

Imagen 7 Manejo básico vista CAS en GeoGebra, hoja de trabajo No 1

4.2.4 Análisis de la hoja de trabajo No1.

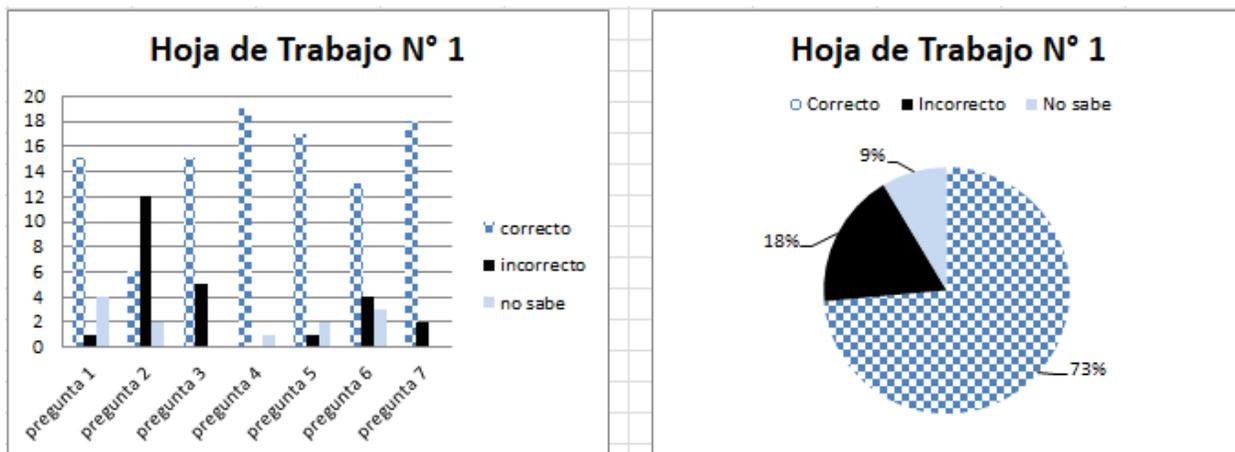
En la tabla 12, se muestra la distribución de los resultados de la hoja de trabajo No 1.

Tabla 12
Distribución de los resultados en la hoja de trabajo No 1

Estudiante	Conocimientos		Habilidades de control	Habilidades heurísticas		Habilidades de control	Patrones	Suma	Porcentajes
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		
1	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
2	2	1	2	2	2	2	1	5	71%
3	2	2	2	0	0	0	2	4	57%
4	1	1	1	2	1	1	2	2	28%
5	2	2	2	2	2	1	2	6	86%
6	2	2	2	2	2	0	2	6	86%
7	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
8	2	1	2	2	2	1	2	5	71%
9	0	1	2	2	2	2	2	5	71%
10	0	0	1	2	2	2	2	4	57%
11	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
12	2	1	2	2	0	2	1	4	57%
13	2	1	1	2	2	1	2	4	57%
14	2	2	1	2	2	2	2	6	86%
15	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
16	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
17	0	1	2	2	2	2	2	5	71%
18	0	0	1	2	2	0	2	3	43%
19	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
20	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
porcentaje	75%	30%	75%	90%	80%	70%	85%	74%	74%
Sumas	15	6	15	19	17	13	18	103	

Nota: se muestra detalladamente los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 1, (Elaboración propia)

La siguiente gráfica indica en términos tabulares y porcentuales la cantidad de aciertos, desaciertos y preguntas no contestadas.



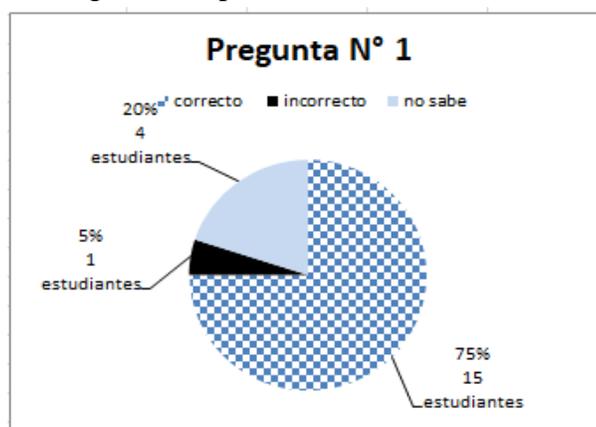
Gráfica 3. Resultados hoja de trabajo No 1.

En la gráfica No 3 se puede observar que al desarrollar las actividades propuestas en la hoja de trabajo No 1 el 72% de los estudiantes contestaron de forma correcta. Estos resultados son muy notorios al ser contrastados con los obtenidos en la prueba diagnóstica donde solo un 19 % de estudiantes logró contestar correctamente.

A continuación se presenta el análisis de cada una de las preguntas de la hoja de trabajo No1, el cual se realiza mediante gráficas e imágenes que permiten una mejor interpretación de la información obtenida en el desarrollo de las actividades.

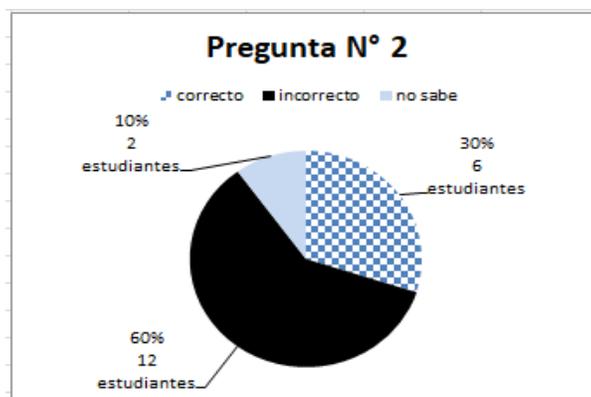
Dada su naturaleza y relación las preguntas 1 y 2 se analizaran en conjunto.

Pregunta No 1, Conocimientos: la redacción de esta pregunta fue la siguiente, “Conoces una ley que te permita factorizar la siguiente expresión, $X^2 + 4X + 4$ ”



Gráfica 4. Resultados pregunta No 1, conocimientos, hoja de trabajo No 1

Pregunta No 2, Conocimientos: la redacción de la pregunta 2 fue la siguiente, en caso de que la respuesta de la pregunta anterior sea afirmativa, escribe la ley en el espacio en blanco.



Gráfica 5. Resultados pregunta No 2, conocimientos, hoja de trabajo No. 1

Con las preguntas No 1 y No 2, se busca identificar que conocimientos tienen los estudiantes sobre factorización, en la pregunta No 1, el 75 % (17 estudiantes) de la muestra expresan tener un conocimiento sobre el tema, sin embargo solo un 25% (3 estudiantes) responde de forma negativa a la pregunta. Por otra parte en la pregunta No 2, solamente el 30% (6 estudiantes) lograron justificar de manera correcta, el 60% (12 estudiantes) de forma incorrecta. Finalmente, el 10% (2 estudiantes) manifestaron no saber.

Estas dos preguntas guardan una estrecha relación, puesto que se pretende primero identificar los conocimientos que tienen los estudiantes sobre la técnica matemática y segundo que se ponga en juego los valores institucionales es decir, se espera corroborar la veracidad de las respuestas dadas por los estudiantes, cabe resaltar que en la pregunta No 1, el 75% responden de forma afirmativa; no obstante, en la pregunta No 2 se evidenció que solamente el 30% tuvo los conocimientos y las habilidades que les permitió llegar a la solución de la expresión dada, resultados que fueron reflejados en la prueba diagnóstica.

Seguidamente se presentan dos evidencias de los manuscritos de los estudiantes.

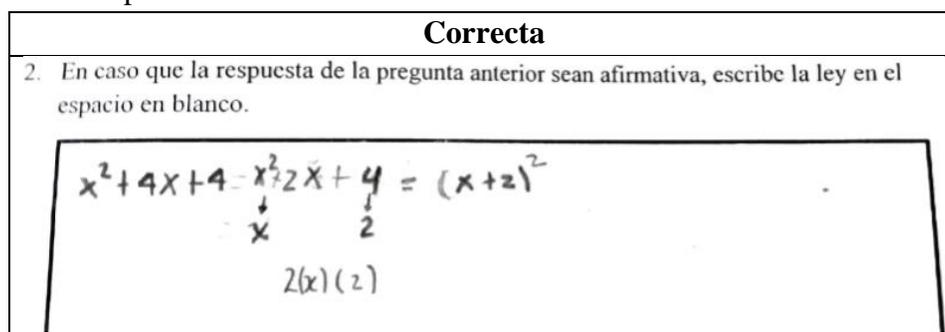


Imagen 8 Estudiante N° 14, hoja de trabajo No 1.

De acuerdo al manuscrito de la imagen 8, el estudiante respondió afirmativamente a la primera pregunta y justificó su respuesta en la siguiente pregunta, cuando empleó la ley de factorización para polinomios cuadrados, ya que reconoció que es un trinomio cuadrado perfecto y procedió a

desarrollarlo sacando la raíz cuadrada del primer y tercer término, luego comprobó que al multiplicar dos veces la primera raíz por la segunda este producto es igual al segundo término, finalizó factorizando el trinomio como la suma de un binomio al cuadrado.

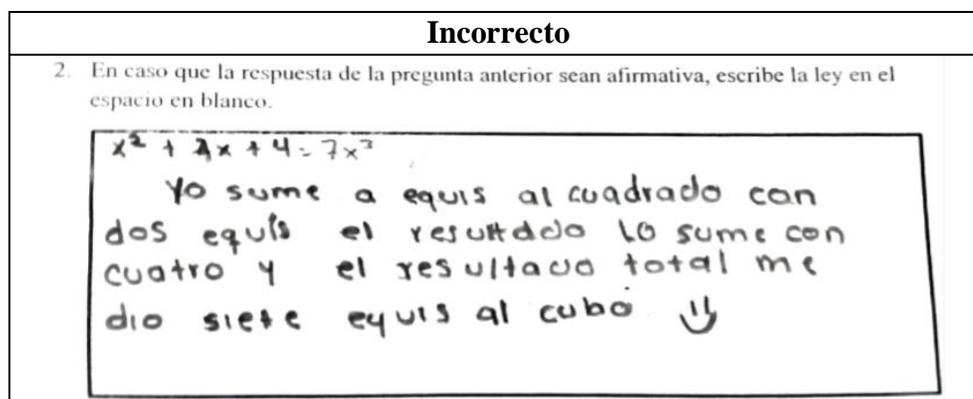


Imagen 9 Estudiante N° 20, hoja de trabajo No 1

En la imagen No 9, el estudiante respondió de forma errónea, desarrolló la expresión sumando los coeficientes o parte numérica y agregó al resultado la variable X^2 , claramente se observa que el estudiante no tuvo los conocimientos en factorización que le permitieran operar correctamente, ni la habilidad para aplicar la propiedad al operar las expresiones algebraicas que dice que, “solo se pueden sumar aquellos términos que sean semejantes”. En el manuscrito se evidencian varios aspectos: por un lado el estudiante no tiene desarrolladas sus estrategias de control porque comete un error pero no logra identificarlo. Por otra parte, cometer un error de esa naturaleza algebraica obedece al sistema de creencias o concepciones erróneas que tiene el estudiante sobre los polinomios. (Schonfeld, 1985)

Pregunta No 3, Habilidades de control: la redacción de la pregunta 3 es la siguiente, “con la ayuda de GeoGebra usando el comando factoriza, completa la siguiente tabla” (ver anexo 2).

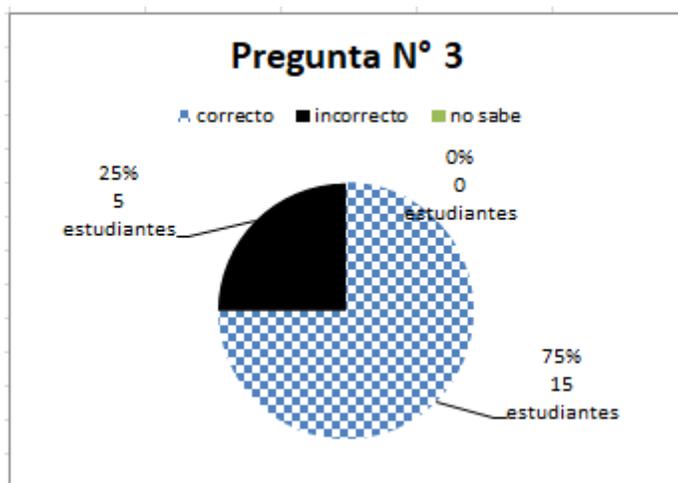
El objetivo de esta pregunta es analizar si el estudiante posee la habilidad de control, mediante la ejecución de las instrucciones para factorizar con el comando (Factoriza) del software los polinomios que le fueron dados en la “casilla de entrada”, como resultado el software arroja la factorización de cada una de las expresiones algebraicas las cuales debe consignar en la “casilla de salida”.

En la siguiente imagen se muestran los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes en la pregunta No 3.

En la gráfica 6 se observa que el 75% (15 estudiantes) siguió correctamente las instrucciones dadas y logró completar la tabla con sus respectivas factorizaciones a diferencia del 25% (5 estudiantes), pese haber recibido una inducción sobre el manejo básico de la vista CAS en GeoGebra no entendieron el procedimiento que debían realizar al usar el comando “factoriza” y

por ende no cumplierón con lo solicitado de manera satisfactoria. Se debe aclarar que en este tipo de ambientes el manejo de esta herramienta hace parte del dominio de los conocimientos y recursos a disposicion del resolutor.

Las imágenes que se muestran a continuación presentan dos manuscritos de los estudiantes.



Gráfica 6 pregunta No 3, hoja de trabajo No 1.

Correcto

3. Con la ayuda de Geogebra usando el comando factoriza, completa la siguiente tabla.

Entrada	Salida
$x^2 - 6xy + 9y^2$	$(x - 3y)^2$
$9x^2 + 42x + 49$	$(3x + 7)^2$
$x^2 + 10xy + 25y^2$	$(x + 5y)^2$

Imagen 10 Estudiante No 15, hoja de trabajo No 1

El manuscrito anterior evidenció que el estudiante desarrollo la habilidad de control, puesto que siguió correctamente cada una de las órdenes y por consiguiente logró obtener la factorización de los polinomios dados, los cuales consigno en la columna de salida de la tabla.

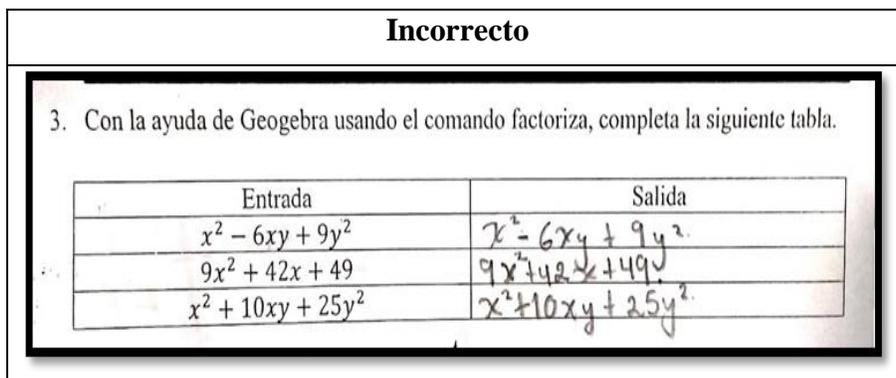


Imagen 11 Estudiante No 8, hoja de trabajo No. 1

En el manuscrito de la imagen 11 se evidencia que el estudiante no desarrollo la habilidad de control esto se debe en parte a que no entendi3 el procedimiento que deb3a realizar, lo que gener3 que tuviera ciertas dificultades para ejecutar de forma correcta las3rdenes que se le dieron debido que al introducir los datos de manera err3nea el software arroj3 el mismo polinomio. Por consiguiente consign3 la informaci3n en la casilla de salida sin percatarse que este resultado no era la factorizaci3n.

Pregunta No 4, Habilidades Heur3sticas: La redacci3n de la pregunta es la siguiente, “de la tabla anterior revisa las caracter3sticas en com3n de los ejercicios en la columna de entrada y red3ctalas en el siguiente espacio”.

Esta pregunta permiti3 analizar habilidades heur3sticas de los estudiantes cuando enfrentan la b3squeda de las caracter3sticas que tienen los polinomios cuadrados perfectos. Los resultados muestran que el 95% (19 estudiantes) contestaron de forma correcta, consiguieron identificar y redactar algunas de las caracter3sticas que poseen este tipo de polinomios (cuadrados), elementos que les ayud3 a construir las bases para establecer la ley de factorizaci3n. Por otra parte el 5 % (1 estudiante) contest3 que no sabe, lo que indica que no desarroll3 dichas habilidades.

Las siguientes figuras muestran evidencias de las respuestas dadas por los estudiantes.



Gráfica 7. Resultados pregunta No 4, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No

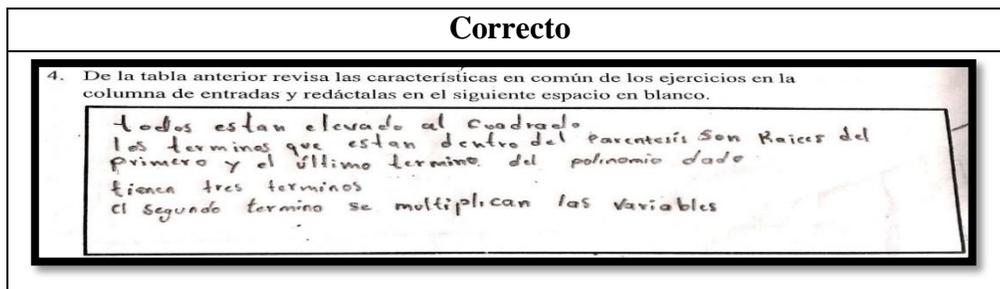


Imagen 12 Estudiante No 9, hoja de trabajo No 1

En la imagen 12 se observa una respuesta correcta, el estudiante encontró que los polinomios dados de la casilla de entrada se caracterizaban por tener tres términos de los cuales dos estaban elevados al cuadrado, además en el segundo término reconoció que se multiplican las variables. En la respuesta que dio el estudiante se evidencia la implementación de estrategias como la visualización, la comparación, entre otras que le permitieron identificar elementos comunes de estos polinomios, lo que evidencia un notable progreso, puesto que al iniciar las actividades de la hoja de trabajo manifestó no tener conocimientos previos en torno a la ley para factorizar polinomios cuadrados perfectos. Sin embargo al ir avanzando en las actividades propuestas el estudiante logró identificar correctamente algunas de las características propias de dicha ley.

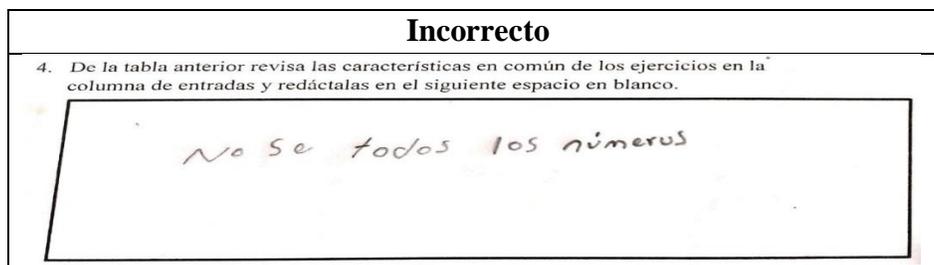
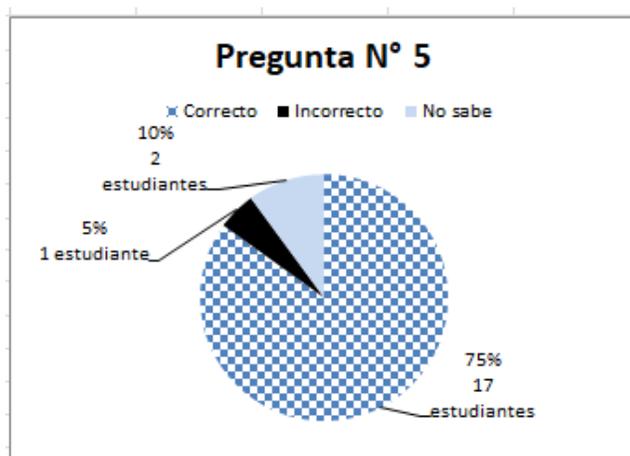


Imagen 13 Estudiante No 3, hoja de trabajo No 1

En la imagen 13 se evidenció una respuesta incorrecta, el estudiante en su manuscrito no planteó ninguna estrategia que le ayudará a encontrar algún elemento que relacionará los polinomios dados en la casilla de entrada y por tanto optó por contestar que la única característica que se relaciona con los polinomios son todos los números.

Aquí vale la pena resaltar que aunque el estudiante inicialmente manifiesta conocer la ley para factorizar y logra justificar su respuesta en la segunda pregunta, resolviendo de manera correcta la expresión; no redacta las características que presentan los polinomios, lo que indica que memorizar los algoritmos no necesariamente conlleva a la comprensión de la técnica matemática de la factorización.



Gráfica 8. Resultados pregunta No 5, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No 1.

Actividad N°5 habilidades heurísticas. Inicialmente se dio a cada estudiante la siguiente consigna; “de la tabla anterior (respuestas de la pregunta N° 3) revisa las características en común de los ejercicios en la columna de salidas y redáctalas en el siguiente espacio en blanco”. Obteniendo los resultados que se presentan en la gráfica 8, se observó que el 80% (16 estudiantes) escribió de forma correcta las características en común de las factorizaciones que se encontraban en la columna de salida, el 10% no logro identificarlas y el 10% restante afirmaron que no saben; pese a que previamente se impartieron talleres relacionados con el manejo del software. Es importante resaltar que en este tipo de ambientes de aprendizaje, el manejo del software hace parte del dominio de conocimientos o recursos a disposición de quien se está enfrentando a la resolución de la hoja de trabajo.

A continuación se muestran evidencias del trabajo realizado por los estudiantes a la hora de identificar y escribir las características de las factorizaciones, obtenidas con la mediación de GeoGebra

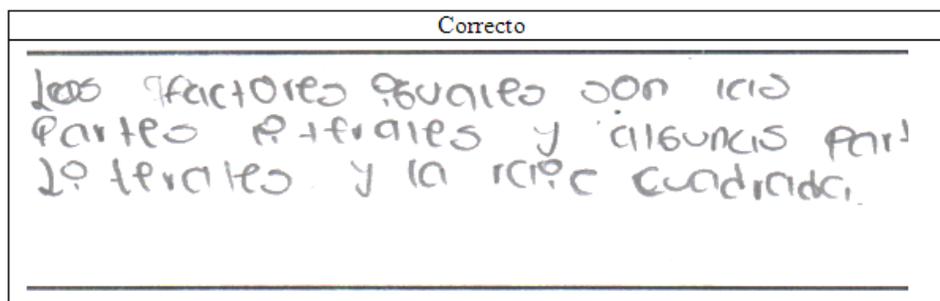


Imagen 14 Estudiante No 7, hoja de trabajo No 1.

En la imagen 14, se puede observar una respuesta correcta, en la cual el estudiante aplicó diferentes habilidades heurísticas que le permitieron identificar algunas características particulares de las factorizaciones, entre ellas las partes literales y el cuadrado en cada una de las respuestas arrojadas por el software de matemática interactiva en la columna de salida.

De igual forma, se logró evidenciar como el estudiante desarrolló habilidades a través del manejo del software GeoGebra, que le permitieron establecer características particulares de las respuestas para posteriormente compararlas, dando un paso importante hacia la generalización de la técnica de factorización de polinomios cuadrados perfectos.

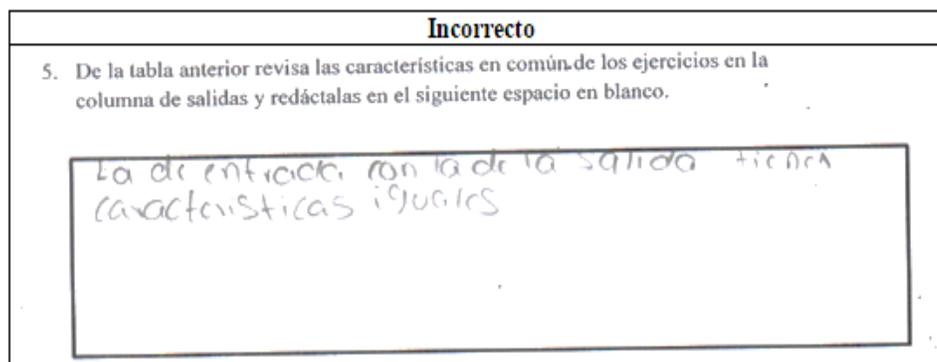
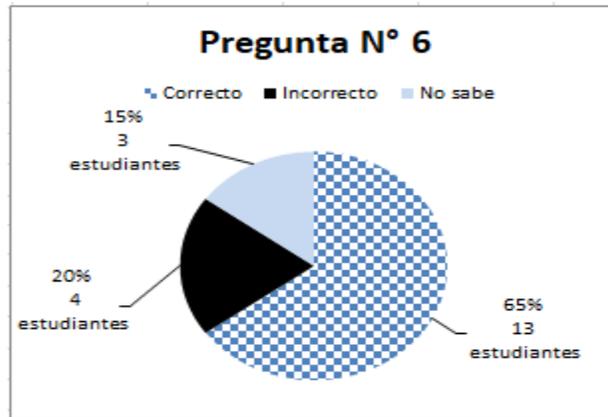


Imagen 15 Estudiante No 4, hoja de trabajo No 1.

En la imagen 15, se evidenció que la respuesta del estudiante fue incorrecta porque presentó dificultades para identificar términos semejantes, conceptos matemáticos básicos y otras características de los factores que aparecen en la columna de salida, mostrando dificultades en la comprensión de la técnica de factorización.



Gráfica 9. Resultados pregunta No 6, habilidades de control, hoja de trabajo No 1.

Actividad N° 6 habilidades de control. Para este apartado se dio la siguiente instrucción: “complete la siguiente tabla primero sin usar GeoGebra, luego usando GeoGebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo”. Los resultados obtenidos en la gráfica 9 permiten observar que el 70% (14 estudiantes) logró completar la tabla usando el comando factoriza de GeoGebra. El 25% (5 estudiantes) no logró completar la tabla, y el 5% (1 estudiante) no contestó los espacios que debía de llenar sin el uso de GeoGebra o dejó la columna en blanco aun usando el software. Cabe resaltar que en este tipo de ambientes de aprendizaje, el manejo adecuado de los diferentes comandos del software, hace parte del dominio de conocimientos o recursos a disposición de quien se está enfrentando a la resolución de las hojas de trabajo.

A continuación se muestran imágenes como evidencias del trabajo realizado por los estudiantes a la hora de completar la tabla.

Correcto			
6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.			
Polinomios	Sin geogebra	Con geogebra	Error
$x^2 - 2xy + y^2$	$(x - y)$	$(x - y)^2$	El cuadrado
$9x^2 - 6xy + y^2$	$(3x - y)$	$(3x - y)^2$	Signo, el #3 y el cuadrado
$9x^2 + 6x + 1$	$(3x + 1)$	$(3x + 1)^2$	El #3 y el cuadrado

Imagen 16 Estudiante No 4, hoja de trabajo No 1.

En la imagen 16, se observó que el estudiante completo correctamente la tabla, en primer lugar utilizo el papel y lápiz para factorizar los polinomios presentando algunos errores como no elevar al cuadrado y omitir los coeficientes, luego empleó el software de manera adecuada. Por último, comparó las respuestas, detectó y corrigió el error.

En esta imagen se puede observar, como el ambiente ayuda a que el estudiante desarrolle y ponga en juego sus habilidades de control en el momento en que logró detectar el error, llevando a que en seguida fuera corregido.

Por otro lado en la respuesta que proporciona el estudiante se evidencia los siguientes valores: honestidad, compromiso, responsabilidad, respecto entre otros, lo que se puede constatar en el siguiente fragmento en el que se transcribe lo que argumento cuando el docente le pregunta porque no corrigió su respuesta cuando observo en el software cual era la factorización del polinomio.

Fragmento 2:

Se utiliza la siguiente nomenclatura de representación E17: estudiante, D: docente.

D: parece ser que algunos estudiantes cuando al realizar la actividad propuesta en la pregunta 6 de la hoja de trabajo 1 y 2, no fueron honestos, habían contestado mal y cuando el software les dio la factorización la cambiaron, ¿Qué opinas de eso? Y ¿Por qué tu no hiciste lo mismo?

E17: no yo pienso que eso no es correcto, el hecho de que yo me equivoque no significa que soy un bruto, por el contrario si yo me doy cuenta del error eso me ayudará a no olvidarme para no volver a repetirlo

D: ¿es decir que tú no estás de acuerdo con los compañeros que lo hicieron?

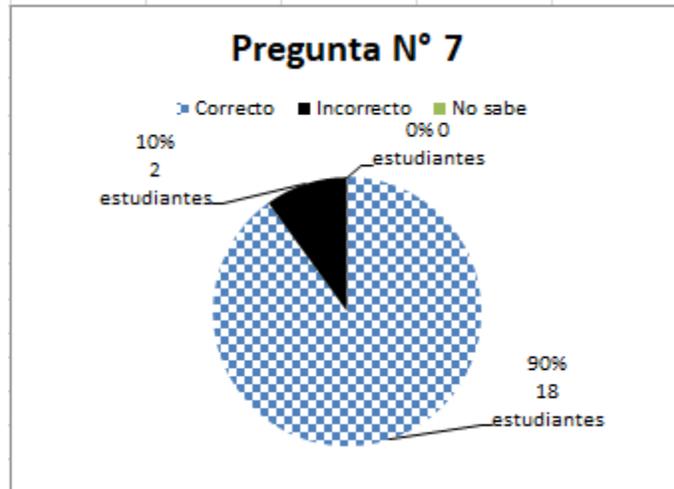
E10: es que profe de que vale tratar de engañarla a usted a mis compañeros, si la verdad es que yo no puedo engañarme a mí mismo, eso es imposible yo sé que me equivoque y que gano con hacer que los demás piensen lo contrario, en este caso ellos internamente saben que se equivocaron y eso no lo van a poder cambiar.

En este fragmento claramente se observa en la respuesta del estudiante que los valores no son negociables simplemente es un resultado de su vivencia.

Incorrecto			
6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.			
Polinomios	Sin geogebra	Con geogebra	Error
$x^2 - 2xy + y^2$	No se	$(x - y)^2$	No
$9x^2 - 6xy + y^2$	No	$(3x - y)^2$	No
$9x^2 + 6x + 1$	se	$(3x + 1)^2$	No

Imagen 17 Estudiante No 18, hoja de trabajo No 1.

En la imagen 17, se observa una respuesta donde el estudiante no logró completar la tabla de manera correcta, pues se evidencia que en la segunda columna donde debía completar sin el uso de GeoGebra el estudiante escribe que no sabe, sin embargo muestra habilidades en el manejo del software logrando factorizar los polinomios lo cual no es suficiente para cumplir el propósito de la pregunta, pues ni siquiera identifica si existe algún error aun cuando el comando factoriza del software arroja de forma adecuada las respuestas de los polinomios.



Gráfica 10. Resultados pregunta No 7, patrones, hoja de trabajo No 1.

Actividad N° 7 Patrones. La pregunta propone lo siguiente “De acuerdo a lo aprendido en la presente actividad redacte una ley que le permita factorizar la siguiente expresión $9X^2 + 24X + 16$ ”. En la gráfica 10, se observa que un porcentaje bastante alto de los estudiantes (85%) escribió de forma correcta una ley que permita factorizar polinomios cuadrados perfectos, mientras que un 10% de los estudiantes no logra establecer una ley. De igual forma un 5% de los estudiantes no respondió a la pregunta dejando ver que no sabía la respuesta a pesar de lo trabajado.

Es muy importante rescatar que en esta pregunta el estudiante debía de poner en juego todos sus conocimientos y lo adquirido en el transcurso de la actividad para poder escribir tal algoritmo.

A continuación se muestran evidencias del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad.

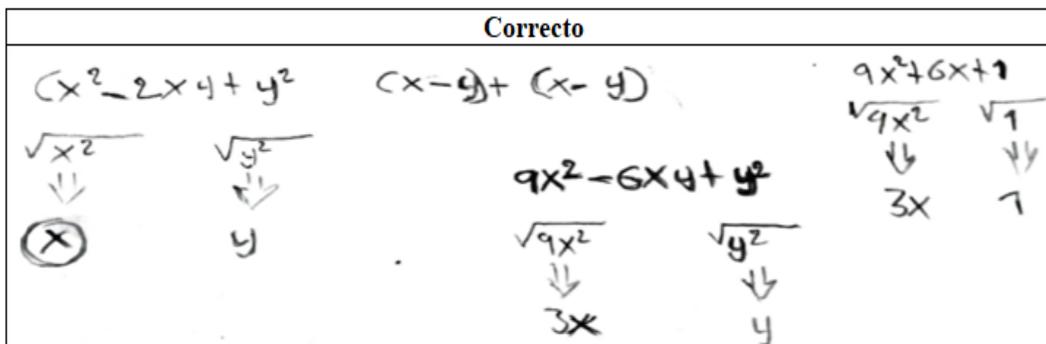


Imagen 18 Estudiante No 1 Hoja de trabajo No 1.

En la Imagen 18, se puede observar una de las respuestas correctas en donde el estudiante logra establecer una ley que le permite factorizar polinomios cuadrados perfectos demostrando un gran avance en la comprensión de esta técnica matemática. Además es importante resaltar todo el procedimiento que el estudiante plasma en el espacio dado para la respuesta correspondiente ya

que deja ver el dominio de conocimientos y habilidades heurísticas matemáticas que permiten la generalización de una ley.

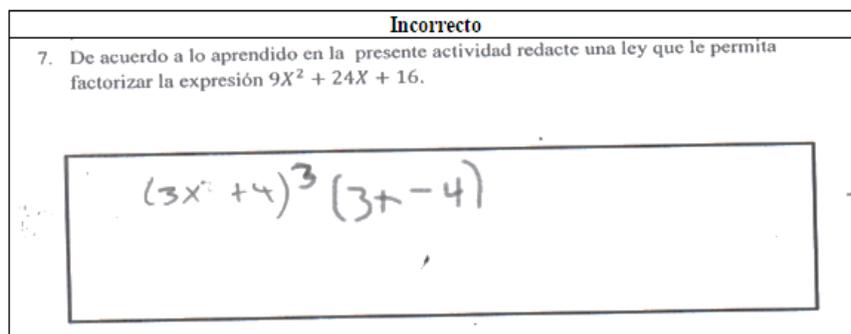


Imagen 19 Estudiante No 12, hoja de trabajo No 1.

En la imagen 19, se puede observar una de las respuestas incorrectas, en donde el estudiante no logra redactar una ley que le permita factorizar polinomios cuadrados perfectos, por el contrario escribe un producto de factores que permiten evidenciar que a pesar de lo trabajado el estudiante presenta dificultad para identificar las características de los polinomios cuadrados perfectos y de esta forma establecer una ley.

4.2.5 Comentarios finales

Una vez se aplica hoja de trabajo No 1, el (90%) de los estudiantes construyeron una ley que les permitió factorizar polinomios cuadrados de manera correcta (ver gráfica 10, pregunta 7).

La explicación de este impacto se debe a los siguientes factores:

- Los estudiantes participaron de forma activa en todo el proceso de construcción de la factorización de trinomios cuadrados perfectos, a través de lápiz/papel y la integración de GeoGebra, en donde realizaron actividades como: factorizar polinomios cuadrados perfectos mediante el comando factoriza, reconocer características comunes entre los polinomios dados en la casilla de entrada, identificar características en común entre las factorizaciones arrojadas por el comando del software, visualizar, particularizar, generalizar, comparar los resultados obtenidos con y sin GeoGebra, detectar errores y corregirlos. En esta última actividad se observa que la interacción con el software, la hoja de trabajo y la metodología, contribuye al desarrollo de estrategias metacognitivas como lo sostiene (Schoenfeld, 1985, p. 45.)
- En el desarrollo de las actividades se pone en juego valores institucionales: las respuestas proporcionadas por los estudiantes en la pregunta 6 muestran la apropiación de valores como la honestidad, el compromiso, la responsabilidad, el respeto entre otros. Puesto que al realizar las actividades primero sin GeoGebra y luego con el comando factoriza no cambiaron las respuestas dadas inicialmente (en las que se habían equivocado); sino que reconocieron haber cometido un error y lo consignaron en la casilla correspondiente como se les había solicitado, este tipo de comportamiento obedece a las prácticas milenarias de

los pueblos Nasa y Afro puesto que para estas comunidades los valores no son negociables y por tanto son evidenciados continuamente en sus quehaceres, a su vez es de resaltar la influencia que tiene el modelo etnoeducativo del Instituto donde se concibe los procesos de socialización y formación como espacios de convivencia y por tanto se fortalecen los valores tradicionales (ver fragmento 2, pregunta 6)

- Es importante resaltar que la combinación de las diversas actividades y la integración de la Geogebra permitió que los estudiantes se interesaran e involucraran en el proceso de aprendizaje de la factorización de polinomios cuadrados perfectos, a tal punto que podían identificar y corregir el error que estaban cometiendo al completar las tablas, asumiendo así un rol más activo.
- La integración del software de matemática interactiva GeoGebra y su comando Factoriza fue esencial debido a que permitió que los estudiantes observaran características en común de los polinomios como de sus respectivas factorizaciones, brindando así la posibilidad de desarrollar habilidades heurísticas y de control que ayudaron a la construcción de la ley que les permitía factorizar polinomios cuadrados perfectos.
- La metodología implementada permitió que los estudiantes trabajaran de manera individual y posteriormente socializaran lo aprendido con sus compañeros y con el profesor algo que en el sistema tradicional de enseñanza pocas veces sucede, generalmente se procede mediante un algoritmo y luego una serie de ejercicios que se deben ser resueltos siguiendo los procedimientos dados.

4.3 Hoja de trabajo 2, Representación algebraica con la mediación de GeoGebra.

En esta hoja se trabaja la representación algebraica para la factorización de los polinomios cúbicos perfectos, con la medición del CAS en Geogebra, y los conocimientos que tienen los estudiantes acerca de esta técnica respecto a las expresiones cúbicas perfectas, para ello se consideran siete preguntas.

4.3.1 Propósitos

- Analizar los conocimientos, habilidades que tienen los estudiantes acerca de la factorización de polinomios cúbicos perfectos.
- Identificar y reconocer características de los polinomios cúbicos perfectos.
- Analizar la importancia e impacto que tiene el uso de las tecnologías como herramientas mediadoras y amplificadoras de conocimientos (software de Geogebra) en el proceso de construcción de una ley de factorización de polinomios cúbicos perfectos.

4.3.2 Descripción de la actividad

Las actividades de la hoja de trabajo No 2 consiste en que los estudiantes haciendo uso del CAS de GeoGebra puedan encontrar y establecer características o propiedades de la factorización de polinomios cúbicos perfectos. Para ello se elaboran 7 preguntas que están guiadas hacia la consecución de los propósitos. (Ver anexo 3).

4.3.3 Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo No 2 la contestaron 20 estudiantes, de los cuales 12 (60%) fueron niños y 8 (40%) niñas, con un promedio de edad de 13 años. Fue una prueba individual que se aplicó el 3 de noviembre de 2018 por escrito en una sesión de clase de 60 minutos. Los recursos requeridos para resolverla fueron: papel, lápiz y un computador o Tablet por estudiante con previa instalación del software de matemática interactiva GeoGebra. Para lograr los objetivos planteados se impartió una capacitación sobre el manejo de conceptos básicos en GeoGebra, específicamente manejo de la ventana CAS. Una vez terminada la resolución de la pregunta 1 a la 7, los resultados se socializaron con el profesor y todo el grupo de estudiantes. Es importante mencionar que las actividades propuestas necesitan de un ambiente de clase dinámico para que, a partir de la participación e interacción con el software y el profesor se puedan garantizar la consecución de los propósitos establecidos.

Las fases en que se desarrolló la clase para la hoja de trabajo No 1 se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 13
Fases de ejecución hoja de trabajo No 1.

Fase	Descripción
Acercamiento al software GeoGebra	Manejo de conceptos básicos de GeoGebra, específicamente la ventana CAS.
Diagnostico	Los estudiantes manifiestan si conocen alguna ley para factorizar y justifican su respuesta
Intervención didáctica Mediación del software.	Haciendo uso del software de GeoGebra en la vista CAS los estudiantes factorizan, establecen características y confrontan resultados al factorizar con y sin GeoGebra.
Evaluación	Los estudiantes reconocen y determinan una ley que les permite factorizar algunas expresiones algebraicas.
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron resultados y con lluvias de ideas construyeron conceptos a partir de la experiencia, reflexionaron sobre qué piensan de la actividad. El rol que desempeña el profesor es de orientador y modelador.
Institucionalización	Finalizando la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizo e institucionalizo las ideas y los resultados obtenidos durante la actividad.

Nota: se detalla cada una de las fases de ejecución en la hoja de trabajo 1, (Elaboración propia)

4.3.4 Análisis de la hoja de trabajo No 2. (Tablas y gráficas).

En la siguiente tabla se muestra la distribución de los resultados de la Hoja de Trabajo No.2

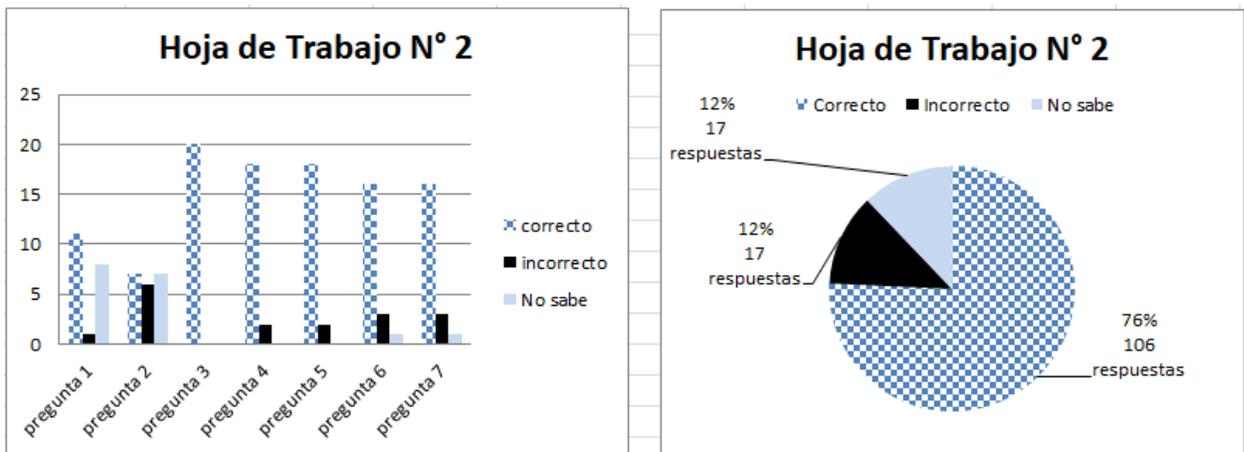
Tabla 14

Distribución de los resultados de los estudiantes en la hoja de trabajo No 2.

Estudiante	Conocimientos		Habilidades de control	Habilidades heurísticas		Habilidades de control	Patrones	Suma	Porce. %
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7		
1	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
2	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
3	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
4	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
5	0	0	2	2	2	2	1	4	57%
6	1	0	2	2	2	2	1	4	57%
7	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
8	0	0	2	2	2	2	2	5	71%
9	0	0	2	2	2	2	2	5	71%
10	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
11	2	2	2	2	2	1	2	6	86%
12	0	0	2	1	1	2	1	2	29%
13	2	2	2	2	2	1	2	6	86%
14	0	0	2	2	2	2	2	5	71%
15	0	1	2	1	1	0	0	1	14%
16	0	0	2	2	2	2	2	5	71%
17	0	1	2	2	2	2	2	5	71%
18	2	1	2	2	2	2	2	6	86%
19	2	1	2	2	2	1	2	5	71%
20	2	2	2	2	2	2	2	7	100%
Porcentaje	55%	35%	100%	90%	90%	80%	80%	5	76%
Sumas	11	7	20	18	18	16	16		

Nota: se detalla los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 2

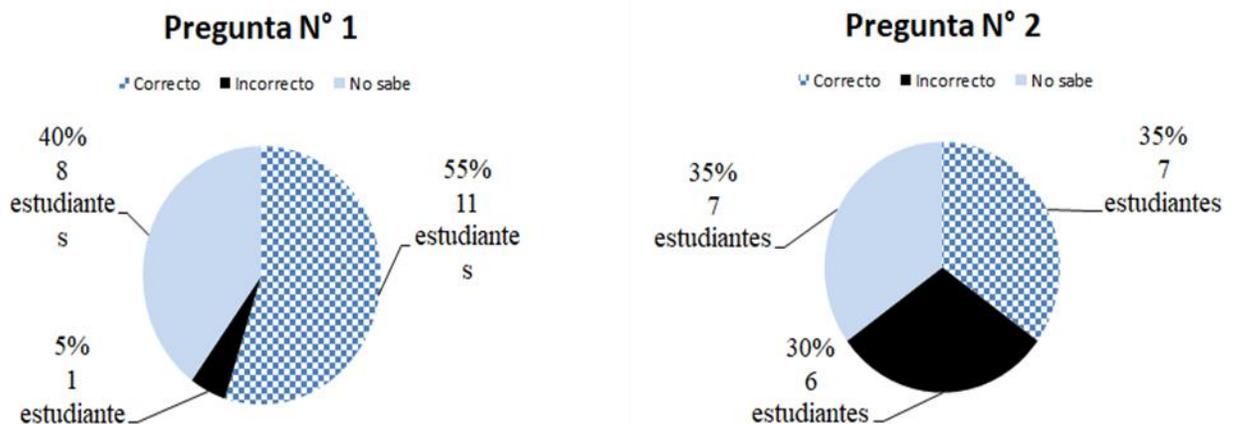
A continuación se presenta una gráfica que indica en términos tabulares y porcentuales la cantidad de aciertos, desaciertos y preguntas no contestadas en la hoja de trabajo número 2.



Gráfica 11. Resultados hoja de trabajo No 2.

En la gráfica 11, se puede observar que el 75% (15 estudiantes) lograron un buen desempeño en la hoja de trabajo No 2, mientras que el 13% (3 estudiantes) contestaron de manera incorrecta, finalmente el 12% (2 estudiantes) no respondieron.

A continuación se presenta el análisis de cada una de las preguntas que conforma la hoja de trabajo número 2 a través de gráficas y tablas que permiten una mejor interpretación y explicación de la información recolectada a lo largo de la actividad. Es necesario aclarar que el análisis de las preguntas 1 y 2 se realizó de manera paralela debido a su carácter complementario, ya que el objetivo apunta a que la información que nos brinden los estudiantes sea verídica para poder calcular el impacto del ambiente de aprendizaje puesto en acto.



Gráfica 12. Resultados pregunta N° 1 y pregunta N° 2, conocimientos, hoja de trabajo No 2.

Actividades N°1 y N°2 Conocimientos: La redacción de la primera consigna era la siguiente “Conoces una ley que te permita factorizar la siguiente expresión $X^3 + 3XY^2 + 3X^2Y + Y^3$ ” y el segundo problema propone que “en caso que la respuesta de la pregunta anterior sea afirmativa

escribe la ley en el espacio en blanco” En las anteriores gráficas se presenta de manera porcentual y numérica la información arrojada por los estudiantes respecto a la primera y segunda pregunta de la hoja de trabajo número 2, esta información esta demarcada por cada una de las convenciones establecidas (correcto, incorrecto y No sabe).

En la gráfica 12, pregunta No 1, se puede observar que un porcentaje mayor a la mitad 55% (11 estudiantes) respondieron de manera correcta a la pregunta, mientras que una proporción bastante baja 5% (1 estudiante) respondió de manera incorrecta, el 40% (8 estudiantes) no dio respuesta a la pregunta permitiendo evidenciar que no conocían previamente una ley que le permitiera factorizar polinomios cúbicos perfectos.

Así mismo en la gráfica 12, se evidencia en el diagrama correspondiente a la pregunta número 2, refiere que los porcentajes son más equilibrados debido a la naturaleza de la respuesta que se debe dar pues un 35% de los estudiantes respondieron correctamente, mientras que otro 30% respondieron de forma incorrecta y un 35% indico que no sabe. Es importante destacar que en estas preguntas los estudiantes ponen en evidencia sus conocimientos acerca de la técnica de la factorización de polinomios cúbicos perfectos, aquí vale la pena decir que cuando los estudiantes responden de forma afirmativa la primera pregunta, no significa que en realidad conozcan una ley, por ello se establece en la segunda pregunta un recuadro en donde los estudiantes deben redactar dicha ley que afirmaron conocer. En la información que nos ofrecen las gráficas se puede detectar que 4 estudiantes equivalentes al (20%) marcaron de forma afirmativa en la pregunta número 1, pero en la pregunta numero 2 no lograron redactar una ley que les permita factorizar polinomios cúbicos perfectos, así mismo el porcentaje de las personas que en primera instancia contestaron de forma incorrecta (5%) aumento paulatinamente (30%); mientras que el porcentaje de los estudiantes que no respondieron (40%) a la primera pregunta disminuyo brevemente (35%). Permitiendo conocer que algunos estudiantes no contestaron verazmente la primera pregunta, algo que ocurre con las pruebas evaluativas del sistema tradicional de enseñanza porque solo piden marcar las respuesta sin ningún tipo de justificación a esta.

A continuación se presenta evidencias del trabajo de los estudiantes que permite realizar un análisis más detallado del impacto del ambiente de aprendizaje.

En la imagen 20, se observó una de las respuestas correctas de la pregunta número 1 y 2 respectivamente porque el estudiante marca que conoce una ley que le permite factorizar polinomios cúbicos perfectos, mostrando unos conocimientos básicos acerca de esta técnica matemática, lo cual reafirma al redactar dicha ley en el recuadro correspondiente a la pregunta número 2.

Correcto
<p>2. En caso que la respuesta de la pregunta anterior sean afirmativa, escribe la ley en el espacio en blanco.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $(X+Y)^3 = X^3 + 3XY^2 + 3X^2Y + Y^3$ <p>Binomio de la suma de los cubos</p> </div>

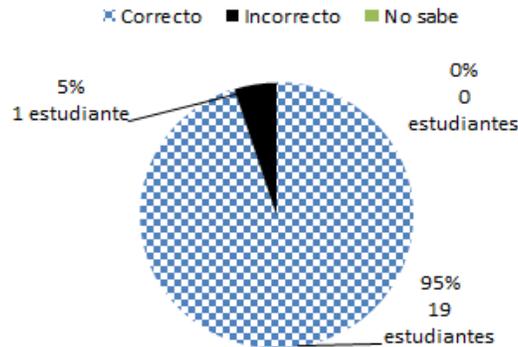
Imagen 20 Estudiante No 7 hoja de trabajo No 2.

Incorrecta
<p>1. ¿Conoces una ley que te permita factorizar la siguiente expresión?</p> <p>b. $X^3 + 3XY^2 + 3X^2Y + Y^3$ Si (x) No ()</p>
<p>2. En caso que la respuesta de la pregunta anterior sean afirmativa, escribe la ley en el espacio en blanco.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> $(X+Y) + (X+Y)$ </div>

Imagen 21 Estudiante N° 17, hoja de trabajo No 2

En la imagen 21, se evidenció una respuesta incorrecta ya que el estudiante marca de forma afirmativa la pregunta número 1, poniendo en juego sus conocimientos y dando a entender que conoce una ley que le permite factoriza polinomios cúbicos perfectos, de igual modo se muestra que el estudiante no logró redactar de forma correcta dicha ley en el recuadro correspondiente, evidenciando que no respondió de forma honesta a la primera pregunta, lo cual nos lleva a ratificar la importancia de proponer actividades a los estudiantes que permitan la justificación de procedimientos o respuesta, tal como se propone en la pregunta número dos de la segunda hoja de trabajo.

Pregunta N° 3



Gráfica 13 Resultados pregunta No 3, habilidades de control, hoja de trabajo No 2.

Actividad N°3 habilidades de control. La redacción de la pregunta fue la siguiente “Con la ayuda de GeoGebra usando el comando factoriza, completa la siguiente tabla”, En la gráfica 13 que se presentó anteriormente se observó que el 100% (19 estudiantes) logró factorizar los polinomios cuadrados perfectos de manera adecuada cuando usaron el comando factoriza, mientras que un el 5% (1 estudiante) factorizó de forma errónea los polinomios pese a la ayuda del software mostrando dificultades en el manejo del comando; no obstante se evidencia un avance significativo en cuanto al manejo y uso de la tecnología para factorizar polinomios cúbicos perfectos a tal punto que casi todos los estudiantes a excepción de uno, lograron realizar con éxito la actividad.

A continuación se presentan evidencias del trabajo realizado por los estudiantes.

Correcto	
3. Con la ayuda de Geogebra usando el comando factoriza , completa la siguiente tabla.	
Entrada	Salida
$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$	$(X+Y)^3$
$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$	$(X-Y)^3$
$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$	$(m+2)^3$

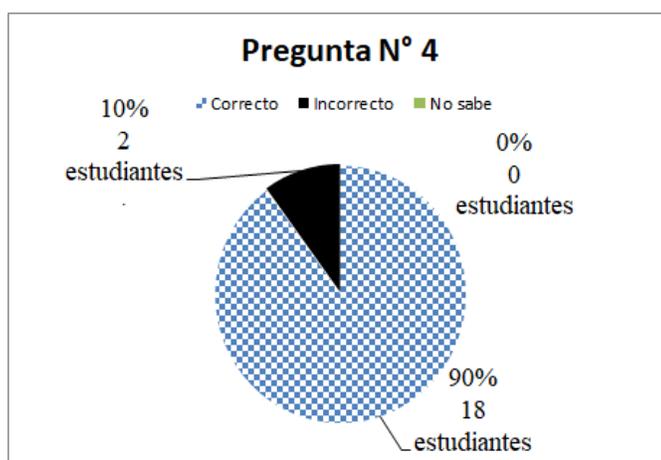
Imagen 22 Estudiante No --, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 22, se observó una respuesta correcta en la cual el estudiante logró completar la tabla haciendo uso de GeoGebra, específicamente del comando factoriza, se muestra un buen manejo del software lo que le permitió desarrollar distintas habilidades frente a la técnica de la factorización y al manejo de la tecnología.

INCORRECTO	
3. Con la ayuda de Geogebra usando el comando factoriza , completa la siguiente tabla.	
Entrada	Salida
$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$	$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$
$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$	$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$
$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$	$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$

Imagen 23 Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 23, se evidenció una de las respuestas incorrectas en la que el estudiante no completo la tabla, mostrando debilidades en el manejo del software a pesar de haber trabajado el manejo de los diferentes comandos especialmente aquellos que se iban a poner en función, pues el manuscrito permite observar que el estudiante reescribe los polinomios dados en la columna de salida



Gráfica 14. Resultados pregunta No 4, habilidades heurísticas hoja de trabajo No 2.

Actividad N° 4 habilidades heurísticas. La redacción de la consigna decía lo siguiente “de la tabla anterior revisa las características en común de los ejercicios de la columna de entrada y redáctalos en el siguiente espacio en blanco.” La grafica de la figura 48 sintetizó de forma porcentual y numérica la información arrojada por los estudiantes y permitió evidenciar que el 90% (18 estudiantes) logro identificar y redactar las características en común de los polinomios que se encontraban en la columna de entrada de la tabla (pregunta 3), lo que indica un avance significativo en los estudiantes respecto a la factorización de polinomios cúbicos perfectos, mientras que el 10% restante completo la tabla de forma incorrecta dejando ver dificultades en el proceso de comparación y observación de características en las expresiones dadas.

A continuación se presentan evidencias del trabajo realizado por los estudiantes.

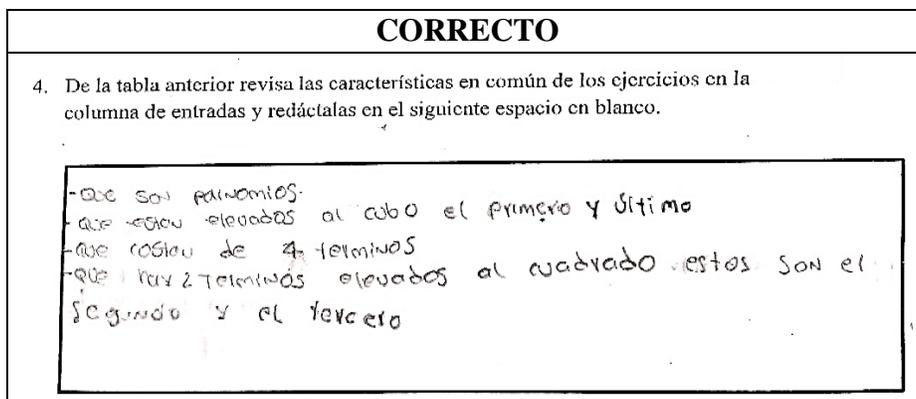


Imagen 24 Estudiante No 13, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 24, se observó el manuscrito de una de las respuestas correctas, en la cual el estudiante a través de la visualización y comparación logró identificar y redactar algunas características de los polinomios cúbicos perfectos, dando así un paso importante para la comprensión de esta técnica matemática, dado que, en el sistema tradicional de enseñanza esta técnica se trabaja de forma limitada, lo que lleva a los estudiantes a presentar distintas dificultades.

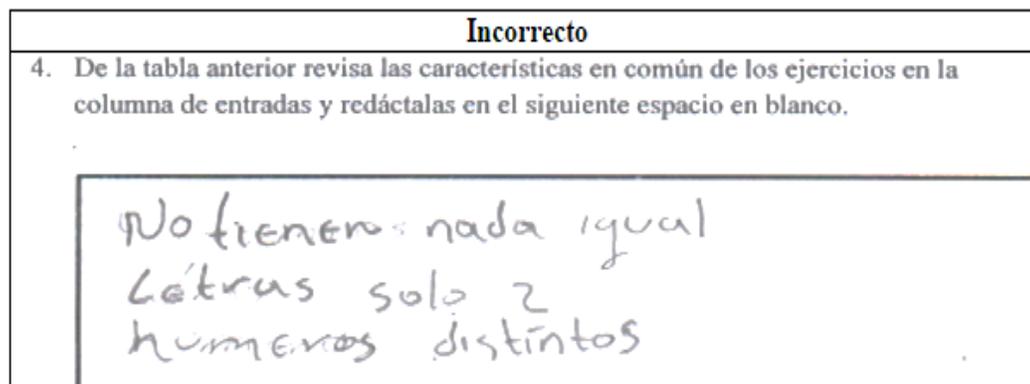
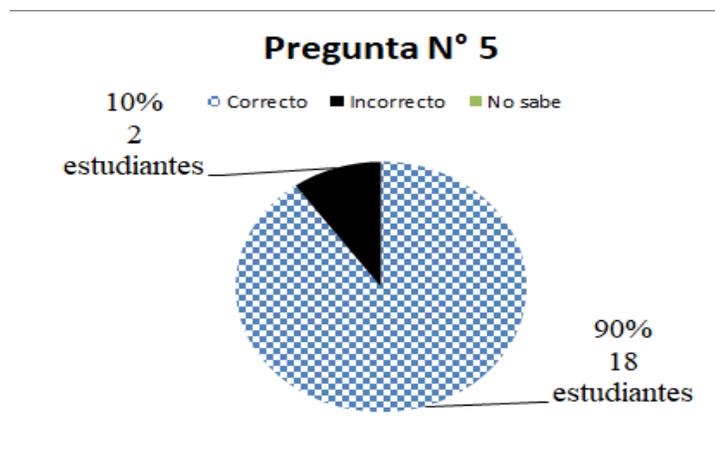


Imagen 25 Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2

En la imagen 25, se evidenció una respuesta incorrecta porque el estudiante no logró identificar las características de los polinomios presentados en la columna de entrada, lo que nos indica que presenta dificultades para comparar expresiones y comprender la factorización de polinomios cúbicos perfectos. En el manuscrito el estudiante redactó inicialmente que los polinomios no tienen características en común, luego que solo dos tienen letras y por último que tiene números, lo cual no cumple con el propósito de la actividad, ya que no son características particulares de los polinomios dados.



Gráfica 15. Resultados pregunta No 5, habilidades heurísticas, hoja de trabajo No 2.

Actividad N° 5 habilidades heurísticas. La redacción de la pregunta decía lo siguiente “de la tabla anterior revisa las características en común de los ejercicios de la columna de salidas y redáctalos en el siguiente espacio en blanco.” En la gráfica de la figura 51, se presentó la información arrojada por los estudiantes tanto de forma porcentual como numérica, lo que permitió observar que un 90% (18 estudiantes) lograron identificar las características de las factorizaciones que se encuentra en la columna de salida de la tabla, mientras que un 10% (2 estudiantes) aun presentaba dificultades para identificar y redactar ciertas características, así mismo el porcentaje de los estudiantes que no contestaron es del 0%.

A continuación se presentan evidencias del trabajo realizado por los estudiantes.

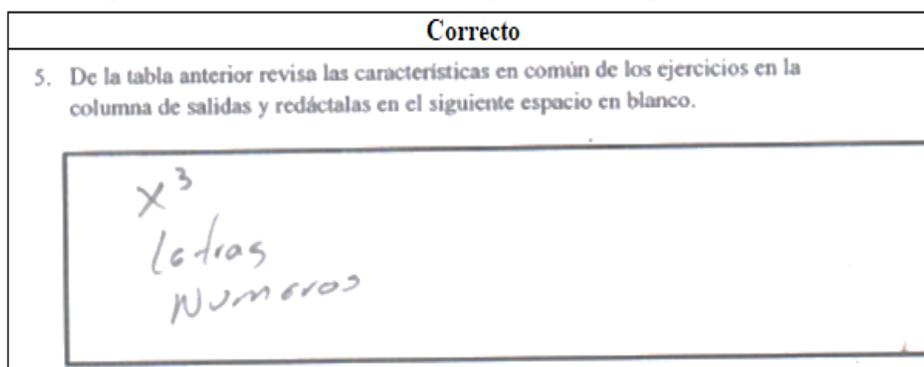


Imagen 26 Estudiante No 19, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 26 se evidenció una respuesta correcta en la que el estudiante logró identificar y redactar de forma correcta algunas características de las factorizaciones arrojadas por el comando factoriza de GeoGebra en la columna de salida, dando un gran paso hacia la comprensión de la factorización de polinomios cúbicos perfectos. Pues como se mostró en el manuscrito el estudiante redacta tres características importantes que son comunes a las expresiones dadas.

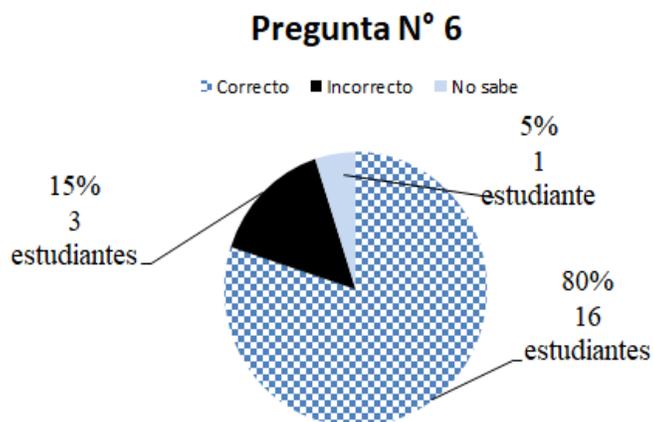
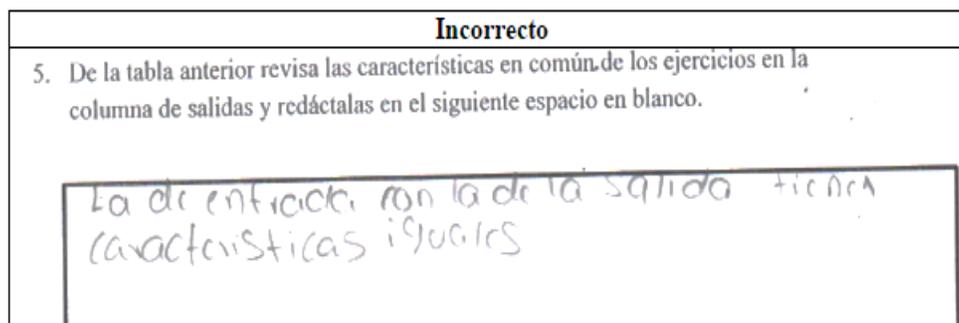


Imagen 27 Estudiante No 12, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 27, se evidenció una respuesta incorrecta porque el estudiante no identificó ni redactó las características de las respuestas arrojadas por el comando factoriza, por el contrario, escribió de forma incorrecta algunas cosas como que todas tienen símbolos y paréntesis o como aparece en el manuscrito hizo referencia a que los polinomios de la columna de entrada tienen las mismas características de las factorizaciones arrojadas en la columna de salida.



Gráfica 16. Resultados pregunta No 6, hoja de trabajo No 2.

Actividad N° 6, habilidades de control. La redacción de la consigna se presenta de la siguiente manera “complete la siguiente tabla primero sin usar GeoGebra, luego usando GeoGebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo”. En la gráfica 54 se observó que 80% (16 estudiantes) lograron completar la tabla usando el comando factoriza de GeoGebra, mientras que un 15% (3 estudiantes) no logró completar la tabla y el 5% restante no realizó la actividad a pesar de las diferentes inducciones acerca del manejo del software y las actividades realizadas.

Esta información nos permite evidenciar un avance importante en la comprensión de la factorización de polinomios cúbicos perfectos. Cabe resaltar que en este tipo de ambientes de aprendizaje, el manejo adecuado de los diferentes comandos del software, hace parte del dominio de conocimientos o recursos a disposición de quien se está enfrentando a la resolución de las hojas de trabajo.

A continuación se muestran evidencias del trabajo realizado por los estudiantes.

Correcto			
6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.			
Polinomios	Sin geogebra	Con geogebra	Error
$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$	$(X+Y)^3$	$(X+Y)^3$	Ninguno
$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$	$(X+Y)^3$	$(X-Y)^3$	signo
$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$	$(m+2)^3$	$(m+2)^3$	el número

Imagen 28 Estudiante No 18, hoja de trabajo No 2.

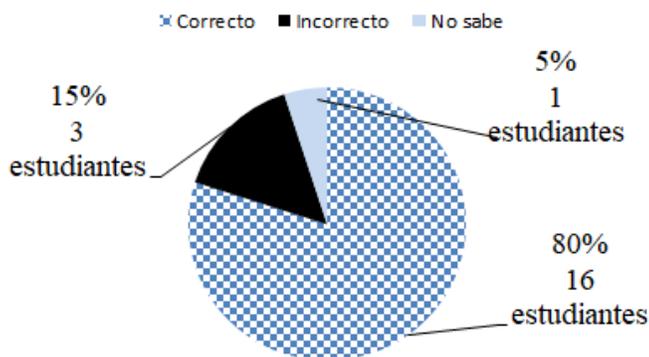
En la imagen 28, se observó una de las respuestas correctas en la cual el estudiante no solo completa la tabla sino que, con la ayuda del comando factoriza del software GeoGebra logró corregir el error que cometió al realizar la factorización del segundo polinomio evidencia del buen manejo del comando (factoriza) y el desarrollo de las habilidades de control, lo que le permite amplificar sus conocimientos acerca de la factorización de polinomios cúbicos perfectos.

Incorrecto			
6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.			
Polinomios	Sin geogebra	Con geogebra	Error
$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$	$(X+Y)^3$		
$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$	$(X+Y)^3$		
$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$	$(m+2)^3$		

Imagen 29 Estudiante No 11, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 29, se evidenció una de las respuestas incorrectas porque el estudiante no logró completar la tabla. Aunque llenó correctamente la columna sin GeoGebra muestra dificultades en el manejo del comando factoriza y pues no consigue completar la columna donde debía hacer uso del software, por consiguiente no cumple el objetivo de comparar las respuestas y posteriormente corregir errores que hubiese cometido.

Pregunta N° 7



Gráfica 17. Resultados pregunta No 7, hoja de trabajo No 1.

Actividad N° 7 Patrones: La consigna decía lo siguiente “De acuerdo a lo aprendido en la presente actividad redacte una ley que le permita factorizar la siguiente expresión $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$. En la gráfica 57 se observó que un 80% (16 estudiantes) escribió de forma correcta una ley que permite factorizar polinomios cúbicos perfectos, mientras que un 15% (3 estudiantes) no logra redactar la ley. De igual forma un 5% (1 estudiante) no respondió a la pregunta dejando ver que no sabía la respuesta a pesar de lo trabajado. Es muy importante rescatar que en esta pregunta el estudiante debía dar cuenta de todos sus conocimientos y lo adquirido en el transcurso de la actividad para poder escribir tal algoritmo.

A continuación se muestran evidencias del trabajo hecho por los estudiantes en el intento por escribir una ley que le permita factorizar polinomios cúbicos perfectos.

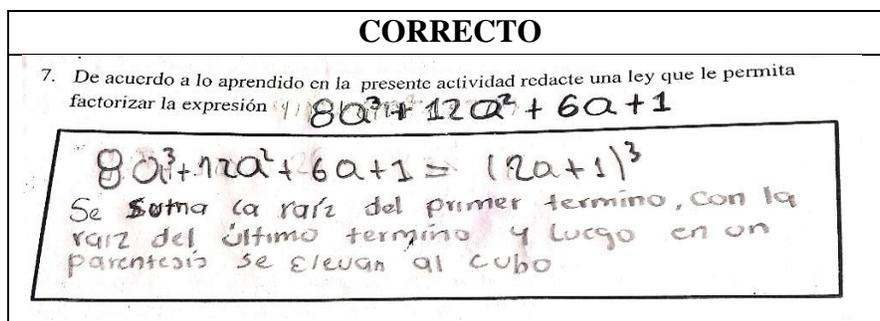


Imagen 30 Estudiante No 4, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 30 se evidenció una respuesta correcta, el estudiante a partir de las diferentes actividades propuestas logró redactar la factorización del polinomio dado, evidenciando el dominio de una ley que le permite factorizar las expresiones de igual naturaleza a la presentada y de esta manera adentrarse en la generalización para factorizar polinomios cúbicos perfectos

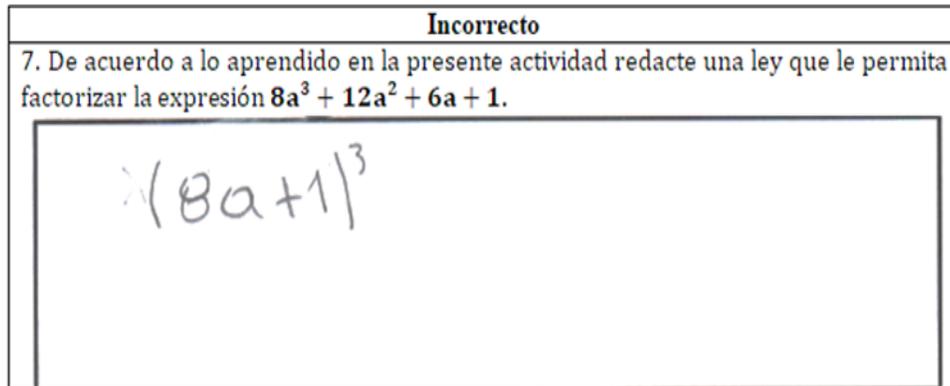


Imagen 31 Estudiante No 5, hoja de trabajo No 2.

En la imagen 31, se observó una de las respuestas incorrectas debido a que el estudiante redactó de forma inadecuada la ley que le permite factorizar la expresión y los polinomios cúbicos perfectos. Muestra una falencia al no extraer la raíz cubica al coeficiente del primer término como normalmente se realiza con el algoritmo, evidenciando dificultades en la comprensión de la técnica matemática, a pesar de las actividades trabajadas.

4.3.5 Consideraciones finales

En la prueba diagnostico que se realizó al inicio de la investigación se encontró que el 100% de los estudiantes no conocían ni lograban redactar una ley que les permitiera factorizar polinomios cúbicos perfectos, evidenciando la falta de comprensión de tal técnica matemática. En contraste, al aplicar la segunda hoja de trabajo del ambiente de aprendizaje el (80%) de los estudiantes lograron redactar una ley que les permitiera factorizar polinomios cúbicos perfectos de manera correcta, mostrando un gran avance en la comprensión de la factorización. A continuación se presentan los factores que explican tal impacto:

- Los estudiantes participaron de forma activa en todo el proceso de construcción de la factorización de la suma de polinomios cúbicos perfectos, a través de lápiz/papel y la integración de GeoGebra, en donde realizaron actividades como: factorizar polinomios cúbicos perfectos mediante el comando factoriza, reconocer características comunes entre los polinomios dados en la casilla de entrada, identificar características en común entre las factorizaciones arrojadas por el comando del software, visualizar, particularizar, generalizar, comparar los resultados obtenidos con y sin GeoGebra, detectar errores y corregirlos. En esta última actividad se observa que la interacción con el software, la hoja de trabajo y la metodología, contribuye al desarrollo de estrategias metacognitivas como lo sostiene (Schoenfeld, 1985, pág. 45).
- En la propuesta se plantean actividades que ponen en juego la factorización de polinomios cúbicos perfectos, algo que en el sistema tradicional no se trabaja a profundidad, comúnmente por la densidad de contenidos o por la falta de dominio de los mismos.

- Es muy importante resaltar que el desarrollo de las actividades a través de las hojas de trabajo (lápiz/papel), GeoGebra (tecnología) y la metodología implementada, hizo que los estudiantes se interesaran e involucraran más en la construcción de su conocimiento (factorización de polinomios cúbicos perfectos), a tal punto que el estudiante que presentaba dificultad, podía identificar que errores estaba cometiendo y posteriormente procedía a corregirlo al completar la tabla, mostrando así un rol más activo en su proceso de aprendizaje.
- La integración de GeoGebra y su comando Factoriza fue esencial debido a que amplificó los conocimientos de los estudiantes pues permitió que observaran características en común de los polinomios como de sus respectivas factorizaciones, al brindar la posibilidad de desarrollar habilidades heurísticas que ayudaron a la construcción de una ley que le permita factorizar polinomios cúbicos perfectos.
- La metodología implementada en la hoja de trabajo permitió que el estudiante fuera construyendo paulatinamente la ley de factorización mediante las distintas actividades, además en este proceso los estudiantes trabajan de manera individual y posteriormente socializan lo aprendido con sus compañeros y con el profesor algo que en el sistema tradicional de enseñanza pocas veces sucede debido a que su proceder es dar un algoritmo y una serie de ejercicios para que se resuelvan mediante este.
- En términos generales se puede decir que la aplicación de esta hoja de trabajo e integración de GeoGebra permitió un avance significativo en la comprensión de la técnica de la factorización debido a que permitió la ampliación y reorganización de los conocimientos en los estudiantes.

4.4 Hoja de trabajo 3, representación geométrica con la mediación de material concreto.

En esta hoja se trabaja la representación geométrica de la técnica de factorización de polinomios cúbicos perfectos con la mediación de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera). Se hace énfasis en el trabajo con este tipo de material teniendo en cuenta la modalidad del centro educativo, además se presenta como un instrumento introductorio y complementario a Geogebra 3D.

4.4.1 Propósito

- Analizar los conocimientos y las habilidades de los estudiantes al factorizar polinomios cúbicos perfectos cuando integran representaciones geométricas que incluyen volúmenes (uso de material concreto con cubos y paralelepípedos de madera)
- Identificar y reconocer características de los polinomios cúbicos perfectos.
- Analizar la importancia e impacto que tiene el uso de material concreto como herramienta mediadora y amplificadora de conocimientos en el proceso de construcción de una ley.
- Analizar la importancia que tiene el uso de las diferentes representaciones

4.4.2 Descripción de la actividad

La hoja de trabajo No 3, consiste en que los estudiantes identifiquen propiedades y otorguen significado al método de factorización de polinomios cúbicos perfectos, cuando relacionan la representación geométrica a través de los conceptos de área y volúmenes con la representación algebraica (simbología o formulas generales), mediante el uso de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera). Para ello se elabora la hoja de trabajo No3 que consta de siete preguntas (ver anexo 4).

4.4.3 Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo No3 la contestaron 20 estudiantes, con un promedio de edad de 14 años, donde 12 (60%) fueron niños y 8 (40%) niñas. Las actividades planteadas en esta hoja de trabajo fue una prueba individual que se aplicó el 27 de noviembre de 2018 por escrito. Para el caso de la manipulación del material concreto se realiza de forma grupal, debido a que no se contaba con cubos suficientes para asignarle uno a cada estudiante, una vez terminada la resolución de las preguntas 1 a 7 los resultados se socializaron con el profesor y todo el grupo de estudiantes.

Las fases en que se desarrolló la clase para la hoja de trabajo No 3.

Tabla 15
Fases hoja de trabajo No 3

FASE	DESCRIPCIÓN
Reconocimiento del material concreto	Observación e identificación del tipo de figuras geométricas a utilizar.
Intervención didáctica con utilización de material concreto	Los estudiantes manipulan las figuras geométricas y a partir de una medida dada, establecen comparaciones que permiten encontrar las medidas desconocidas de las otras figuras, forman una figura geométrica con las piezas dadas, hallan el volumen de cada pieza, el volumen total de la figura que se forma, el polinomio que la representa, identifican que el polinomio es igual al volumen total y este se ha formado como la suma de las partes o los volúmenes de las piezas que componen la figura, lo que les permite establecer la ley de factorización.
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron los resultados y con lluvias de ideas construyeron conceptos a partir de su experiencia, el rol que cumple el profesor es orientar
Institucionalización	Una vez se termina el espacio en que los estudiantes han socializado, el profesor organizo e institucionalizo cada uno de los resultados así como también las ideas expuestas por cada uno de los estudiantes.

Nota: se describen las fases de ejecución de la hoja de trabajo No 3 (Elaboración propia)



Comparando figuras geométricas para hallar sus medidas



Hallando áreas y volúmenes con material concreto.



Encontrando la figura geométrica con el material concreto

Imagen 32 Uso de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera), hoja de trabajo No 3.

A continuación se relaciona los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 3

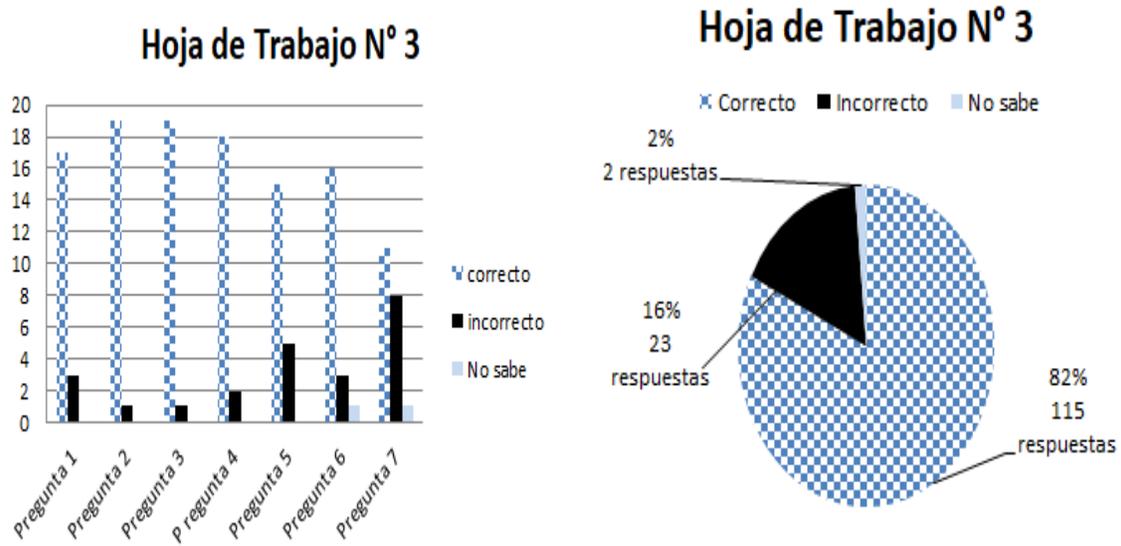
Tabla 16
Resultados obtenidos de hoja de trabajo No 3.

Estudiante	Conocimientos hab. heurísticas		Habilidades Heurísticas			Conocimientos		Patrones		Suma	Porcentajes
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7				
1	2	2	2	2	2	2	1	6	85,7%		
2	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
3	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
4	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
5	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
6	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
7	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
8	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
9	2	2	2	2	2	2	2	7	100%		
10	2	2	2	2	2	2	1	6	85,7%		
11	2	2	2	2	1	1	1	4	57,1%		
12	2	2	2	2	1	2	1	5	71,4%		
13	2	2	2	2	1	2	1	5	71,4%		
14	1	2	2	2	2	2	1	5	71,4%		
15	2	2	2	2	2	2	1	6	85,7%		
16	2	2	2	1	2	2	2	6	85,7%		
17	2	1	1	2	2	1	1	3	42,9%		
18	1	2	2	1	1	0	0	2	28,6%		
19	2	2	2	2	2	1	2	6	85,7%		
20	1	2	2	2	1	2	2	5	71,4%		
Porcent.	85%	95%	95%	90%	70%	80%	60%				
sumas	17	19	19	18	15	16	11				

Nota: se detalla los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 3, (Elaboración propia)

4.4.4 Análisis de los resultados de la hoja de trabajo 3.

Las siguientes gráficas evidencian los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 3



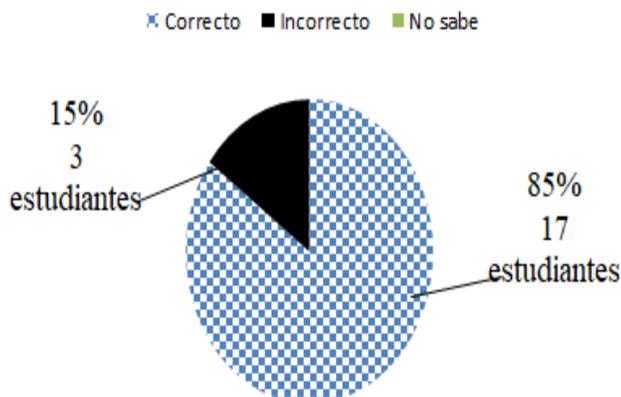
Gráfica 18 Resultados hoja de trabajo No 3.

En la gráfica 18 se puede observar que los estudiantes obtuvieron un avance significativo en cuanto al rendimiento, al realizar un contraste entre el rendimiento que tuvieron en la prueba diagnóstica y la hoja de trabajo No 3, se puede observar que se pasó del 19% al 82%, resultados que son muy notorios.

A continuación se presenta de forma detallada los resultados obtenidos en cada una de las preguntas.

Pregunta No 1, Conocimientos y habilidades heurísticas: la redacción de la pregunta es la siguiente, “a partir de las piezas representadas en la figura 1 que se te han entregado y tomando como referencia que la medida del cubo de color amarillo es de lado X y la medida del cubo de color rojo es de lado Y, determina el volumen de cada una de las piezas representadas, completando la siguiente tabla”

Pregunta N° 1



Gráfica 19 Resultados pregunta No 1, hoja de trabajo No 3.

El objetivo de esta pregunta es analizar la integración de conocimientos y habilidades heurísticas a través del uso de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera). Los resultados obtenidos según la gráfica No 62 muestran que el 85% (17 estudiantes) completaron la tabla y determinaron el volumen de cada una de las figuras dadas, se puede notar que los estudiantes colocaron en juego habilidades heurísticas como la manipulación, visualización y comparación, asociadas a conocimientos básicos en potenciación, áreas y volúmenes, elementos que les permitió identificar lados comunes, número de figura con igual medida, encontrar medidas desconocidas y establecer diferencias entre medidas para hallar el área de la base y el volumen, por otra parte el 15% (3 estudiantes) presentó dificultades y no lograron calcular ni las áreas ni los volúmenes de cada una de las figuras, por consiguiente no completaron la tabla. Las siguientes imágenes muestran algunas de las respuestas de los estudiantes

CORRECTO

1. A partir de las fichas representadas en la figura 1, que se te han entregado y tomando como referencia que la medida del cubo de color amarillo es de lado X y la medida del cubo de color rojo es de lado Y, determina el volumen de cada una de las piezas representadas, completando la siguiente tabla.

Tipo de pieza	Cantidad de piezas	Medida de la pieza			Área base de la pieza	Volumen de cada pieza	Volumen total
		Largo	Ancho	Altura			
Cubo A	1	X	X	X	X^2	X^3	X^3
Prisma 1	3	X	X	Y	X^2	$X^2 Y$	$3(X^2 Y)$
Prisma 2	3	X	Y	Y	$X Y$	$X Y^2$	$3(X Y^2)$
Cubo B	1	Y	Y	Y	Y^2	Y^3	Y^3

Imagen 33, Estudiante No 5, hoja de trabajo No 3.

El estudiante No 5, a través de la manipulación, visualización y comparación, consiguió clasificar correctamente las figuras de acuerdo a su tamaño e identificar la medida de cada uno de

los lados tanto conocidos como desconocidos. A su vez reconoció que para hallar áreas necesita tener en cuenta dos medidas el largo y ancho, y para hallar el volumen requiere de tres medidas, el largo, ancho y alto. Finalmente aplica propiedades de potenciación para establecer el área y el volumen total de las figuras dadas.

INCORRECTO

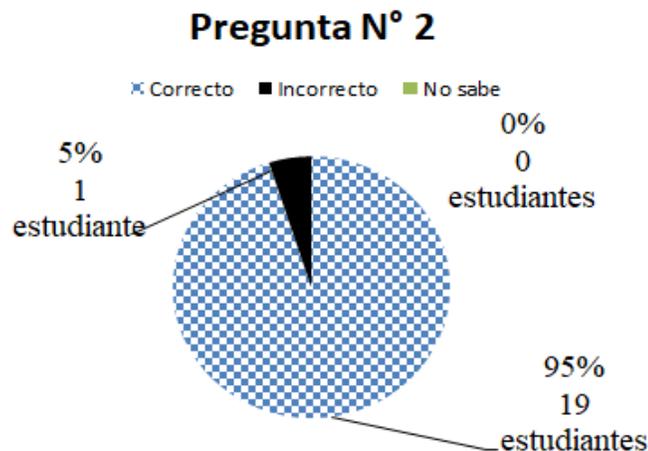
1. A partir de las fichas representadas en la figura 1, que se te han entregado y tomando como referencia que la medida del cubo de color amarillo es de lado X y la medida del cubo de color rojo es de lado Y, determina el volumen de cada una de las piezas representadas, completando la siguiente tabla.

Tipo de pieza	Cantidad de piezas	Medida de la pieza			Área base de la pieza	Volumen de cada pieza	Volumen total
		Largo	Ancho	Altura			
Cubo	1	Y	Y	Y	Y ²	Y ³	Y ³
Cubo	1	X	X	X	X ²	X ³	X ³
Prisma	3	X	Y	Y ²	..
Prisma	3	X	..	Y	..	X ² Y	Y ² (X ²)

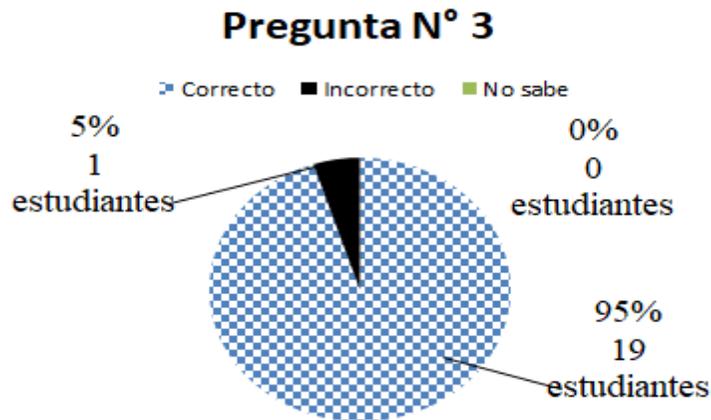
Imagen 34, Estudiante No 20, hoja de trabajo No 3.

El estudiante No 20, en sus manuscritos dejó notar que no tiene el conocimiento para saber cómo hallar el área y el volumen de una figura geométrica, ni tampoco las habilidades para aplicar propiedades de potenciación, de igual forma se le dificultó relacionar medidas comunes mediante la visualización y comparación de las figuras, por lo tanto cometió varios errores y no logró completar el objetivo que era encontrar el volumen de cada una de las figuras.

Pregunta No 2 (habilidades heurísticas), la redacción de la pregunta fue la siguiente “¿Qué figura geométrica se puede armar con las piezas de color verde claro, naranja, rojo y amarillo dadas inicialmente, sin que sobre ninguna pieza, ni tampoco quede espacio entre una pieza y otra? (cada pieza debe calzar exactamente)”



Gráfica 20. Resultados pregunta No 2, hoja de trabajo No 3.



Gráfica 21. Resultados Pregunta No 3, hoja de trabajo No 3.

Pregunta No3. (Habilidades Heurísticas) la redacción de la pregunta era la siguiente: ¿qué estrategia utilizaste para armar la figura geométrica? explica tu respuesta. Con las preguntas No 2 y la No 3 se busca establecer una relación de identidad entre el cubo que es la figura resultante y las ocho figuras geométricas que se unen para formarlo, asimismo se analizaría las estrategias que el estudiante aplicó para resolver la situación.

En las gráficas 20 y 21, se observa que el 95% (19 estudiantes) respondieron correctamente a las preguntas y describieron las estrategias que implementaron, el 5 % (1 estudiante) contestó de manera incorrecta. Lo anterior permitió establecer que aquellos estudiantes que implementaron habilidades de visualización y comparación de medidas en la pregunta No 1, se les facilitó plantear la estrategia de ubicar cada una de las piezas, teniendo en cuenta los lados iguales, puesto que ya conocían que las figuras tenían lados en común, por lo tanto reconocían que guardaban una relación. Además identificaron que al unir las ocho piezas correctamente la figura resultante era un cubo.

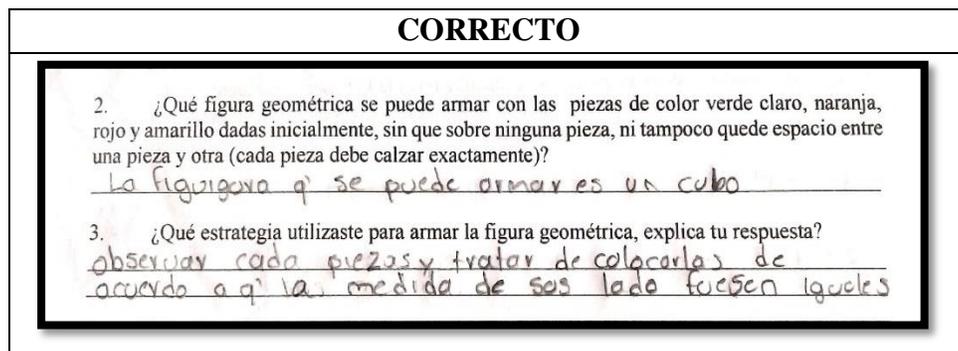


Imagen 35 Estudiante No 6, hoja de trabajo No 3.

El estudiante N 6, observó detalladamente cada una de las piezas y para encontrar la figura que se formaba aplicó la estrategia de ubicar las piezas teniendo en cuenta los lados iguales, habilidad que le permitió identificar que la figura resultante es un cubo y justificar su respuesta con los

procedimientos que realizó para llegar a la solución. De igual manera evidenció la habilidad para pasar de la representación simbólica a la representación geométrica y posteriormente al lenguaje natural.

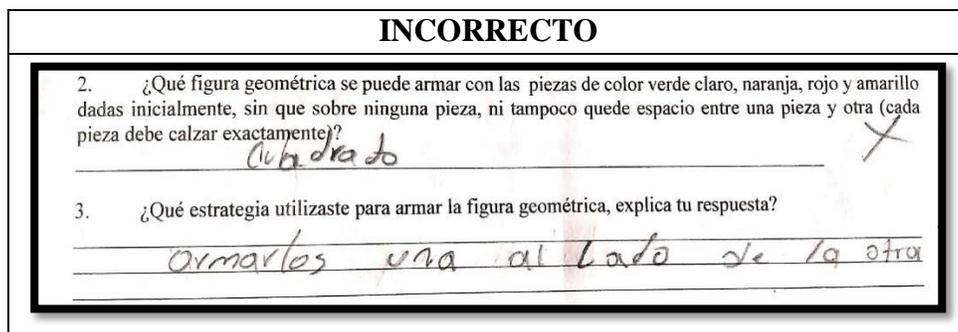
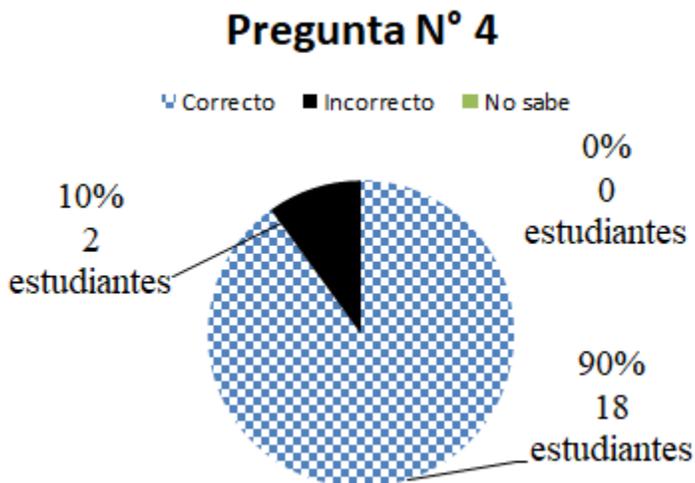


Imagen 36 Estudiante No 17, hoja de trabajo No 3.

En la imagen 36, se observa una respuesta incorrecta, el estudiante no evidenció tener los conocimientos para diferenciar que estaba trabajando con sólidos y el cuadrado es una figura plana, por consiguiente se equivocó al considerar que la figura resultante es un cuadrado, puesto que en la figura plana se tienen dos dimensiones y en los sólidos tres dimensiones, razón por la cual sería imposible con un sólido formar un cuadrado.

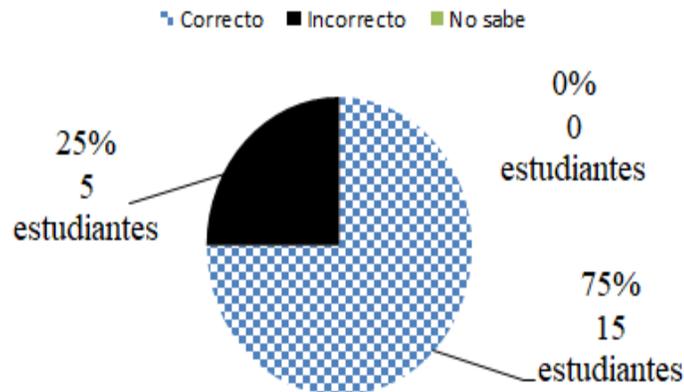
Pregunta No 4, conocimientos: la redacción de la pregunta era la siguiente: “¿Cuáles son las medidas de la figura geométrica que encontraste?”



Gráfica 22, Resultados pregunta No 4, hoja de trabajo No 3

Pregunta No 5, conocimientos: la redacción de la pregunta era la siguiente: ¿Cuál es el volumen total de la figura que se formó?

Pregunta N° 5



Gráfica 23. Resultados pregunta No 5, hoja de trabajo No 3.

Las preguntas 4 y 5, tienen como objetivo identificar que los lados de la figura que se forma (cubo) están dados por la suma de dos medidas desconocidas las cuales están representadas por las variables $(X+Y)$, a su vez, reconocer que las medidas (X, Y) son correspondientes a los lados de las ocho figuras que se unen para formar el cubo.

En la pregunta No 4, el 90% (18 estudiantes) respondieron de forma correcta, hallaron las medidas y establecieron cual era el largo, ancho y alto de la figura y el 10% (estudiantes) respondieron de manera incorrecta, por otra parte, en la pregunta No 5, el 70% (14 estudiantes) contestaron de forma correcta cuando encontraron que el volumen total del cubo es $(X+Y)^3$ y el 30% (6 estudiantes) respondieron incorrectamente, no consiguieron descubrir cuál era el volumen del cubo.

En las imágenes siguientes, se observa algunos manuscritos que corresponden a las respuestas dadas por los estudiantes en a las preguntas 4 y 5.

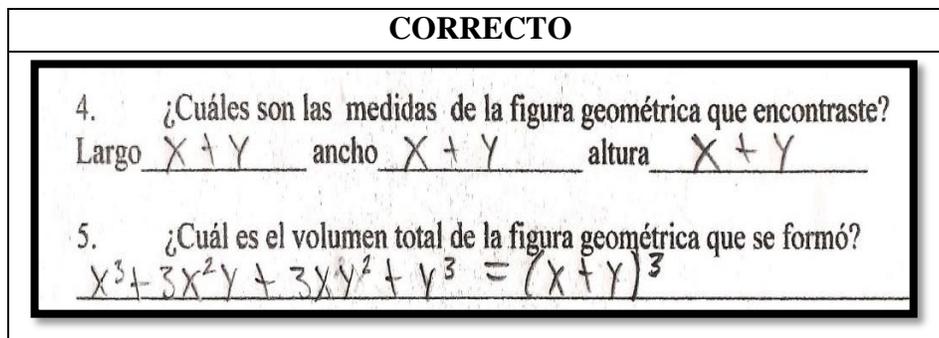


Imagen 37 Estudiante No 2, hoja de trabajo No 3.

El estudiante No 2 relacionó bien las medidas, logró identificar que los lados del cubo están dados por dos medidas que debe sumar, relación que le permitió encontrar correctamente el largo, el ancho y el alto de la figura resultante, finalmente procedió a encontrar la fórmula para determinar el volumen del cubo, de acuerdo a su respuesta se puede observar que tenía claro los procedimientos, manejó correctamente las equivalencias y por esta razón da su respuesta de dos formas.

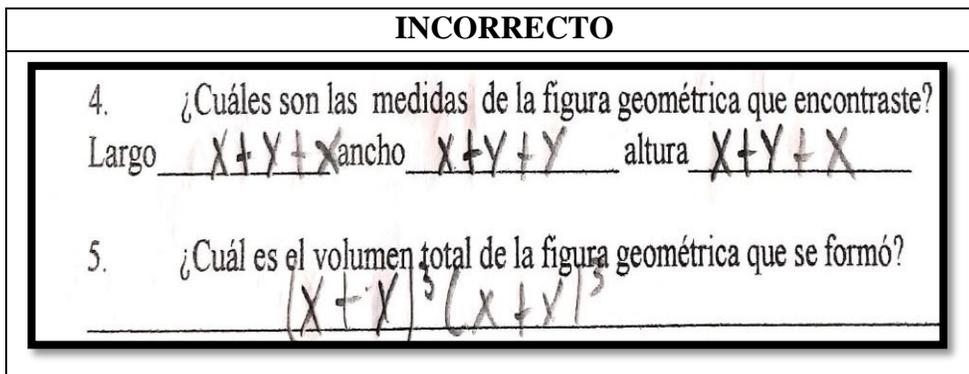
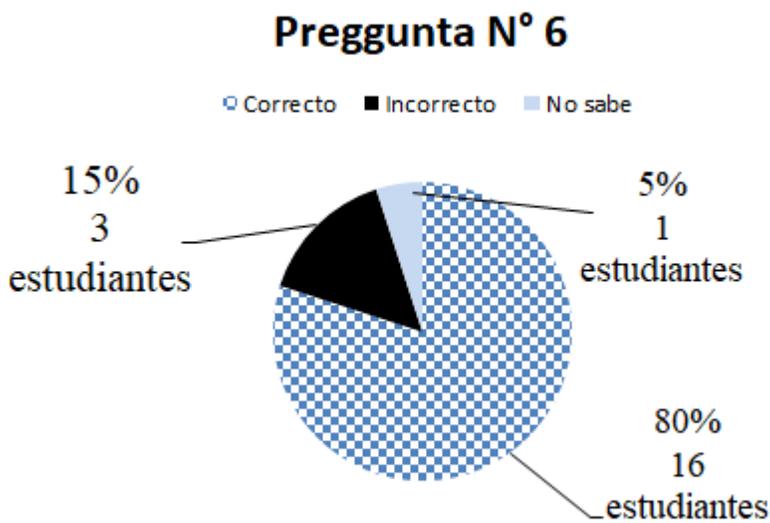


Imagen 38 Estudiante No 18, hoja de trabajo No 3.

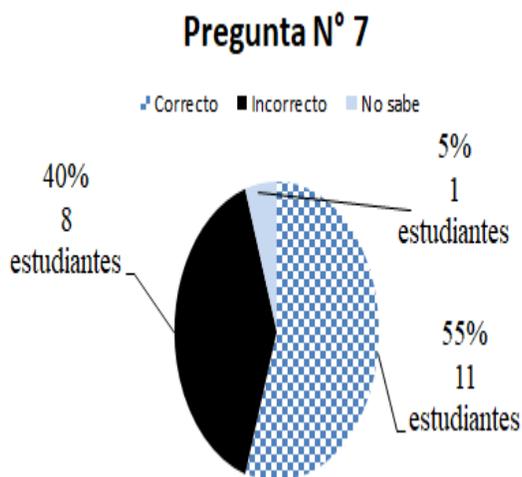
La respuesta del estudiante No 18 es incorrecta, para hallar las medidas de la figura resultante (cubo) sumó tres variables, para el largo (X+Y+X), ancho (X+Y+Y), alto (X+Y+X), sin percatarse que según las medidas que encontró la figura no podría ser un cubo, puesto que por propiedad el cubo tiene todos sus lados iguales, en la pregunta No 5, aunque encontró que el volumen del cubo es $(X+Y)^3$, se equivoca al multiplicarlo dos veces. Se evidencia una clara confusión por parte del estudiante al momento de aplicar conocimientos y habilidades para encontrar tanto medidas de lados como volúmenes en figuras geométricas.

Pregunta No 6 (Patrones) la redacción de la pregunta era la siguiente: “¿encuentra el polinomio que representa el cubo?”



Gráfica 24. Resultados pregunta N° 6, hoja de trabajo No 3.

Pregunta No 7 (Patrones) la redacción de la pregunta era la siguiente: “se puede concluir que, completa” (ver Anexo 4).



Gráfica 25. Resultados pregunta No 7, hoja de trabajo No 3.

El objetivo de estas dos preguntas es determinar patrones matemáticos (geométricos), se espera que el estudiante generalice y determine el polinomio que representa la figura geométrica, el cual está dado por la suma de los volúmenes de cada pieza, así mismo que logré establecer una relación de identidad entre el volumen total del cubo y los volúmenes de cada una de las piezas.

En la pregunta No 6 se observa que el 80% (16 estudiantes) contestaron correctamente al determinar que $X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$ es el polinomio que representa el cubo, el 30% (3 estudiantes) contestó incorrectamente y el 5% (1 estudiante) respondió que no sabía. Por otra parte en la pregunta No 7, el 60 % (12 estudiantes) contestaron correctamente, puesto que plantearon una conjetura para la solución de la factorización cubica y el 40% (8 estudiantes) respondieron de forma incorrecta, no lograron cumplir el objetivo.

Las siguientes imágenes muestran algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

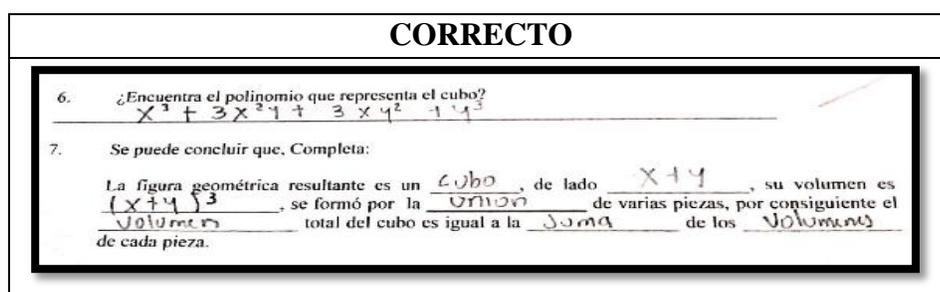


Imagen 39 Estudiante No 20, hoja de trabajo No 3.

El estudiante No 20, encontró el polinomio sumando correctamente los volúmenes de las figuras geométricas, reconoció, identificó y estableció la relación de identidad para la factorización, la cual fue representada entre el volumen total de la figura resultante (cubo) y la suma de los volúmenes de cada una de las 8 figuras dadas inicialmente (2 cubos y 6 prismas), lo que significa que modeló situaciones en las que integró representaciones geométricas con representaciones algebraicas para hallar mediante volúmenes la factorización de polinomios de forma cubica.

INCORRECTO	
6.	¿Encuentra el polinomio que representa el cubo? <u>$3X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + 3Y^3$</u>
7.	Se puede concluir que, Completa: La figura geométrica resultante es un <u>Cubo</u> , de lado <u>$X+Y+X+Y$</u> su volumen es <u>$(X+Y)^3$</u> , se formó por la <u>forma</u> de varias piezas, por consiguiente el <u>Cubo</u> total del cubo es igual a la <u>suma</u> de los <u>lados</u> de cada pieza.

Imagen 40 Estudiante No 17, hoja de trabajo No 3.

El estudiante No 17, no logró encontrar el polinomio que representa la figura, se equivocó al agregar el número tres como parte numérica a todos los términos del polinomio, lo que significa que no fue claro para él, que el literal tres que multiplica las variables representa tres figuras de igual medida, por consiguiente no logra el objetivo de completar los espacios en blanco para establecer la conjetura.

4.4.5 Consideraciones finales

En la prueba diagnostico se encontró que el 90% (18 estudiantes) no sabían definir el concepto de factorización y el 100 % (0 estudiantes) no lograron redactar una de las leyes para factorizar polinomios (ver gráfica N° 1 pregunta 2, 4 y 5), sin embargo al aplicar la hoja de trabajo No 3 se puede observar un notable avance el 82% (16 estudiantes) reconocieron, identificaron y establecieron relaciones de identidad entre las figuras dadas y la figura resultante, relacionaron los conceptos de áreas y volúmenes para hallar la factorización de cubos perfectos, desarrollaron estrategias y habilidades que les ayudo a obtener los conocimientos y comprendieron de manera significativa la ley para factorizar polinomios cúbicos perfectos. La explicación de este impacto se debe a los siguientes factores:

- El uso de material concreto (cubos y paralelepípedos de madera) como instrumento de mediación permitió que los estudiantes construyeran paulatinamente la ley de factorización, además se dio paso a que los estudiantes inicialmente trabajaran de manera individual y posteriormente socializaran lo que habían aprendido con sus compañeros y con el profesor, algo que en el sistema tradicional de enseñanza pocas veces sucede debido

a que su proceder es proponer un algoritmo y una serie de ejercicios para que luego se resuelvan.

- Los estudiantes participaron de forma activa en todo el proceso de aprendizaje debido a que se integró la representación algebraica y la geométrica a través de la hoja de trabajo (lápiz/papel) y el uso de material concreto mediante cubos y paralelepípedos de madera, objetos que son muy cercanos y familiares al diario vivir de los estudiantes en el taller de ebanistería de la institución. En esta actividad los estudiantes desarrollaron habilidades como la manipulación, visualización y comparación que jugaron un papel determinante en la construcción y comprensión de los conocimientos y el desarrollo de las habilidades para factorizar.
- Los estudiantes desarrollaron habilidades cognitivas matemáticas como observar, identificar, transferir, visualizar, comparar, generalizar, interpretar, para desarrollar una mayor capacidad de metacognición.
- La integración de diferentes instrumentos de mediación (material concreto y hojas de trabajo) generó en los estudiantes motivación e interés para aprender y desarrollar las actividades propuestas debido a su carácter complementario.
- El uso de diferentes representaciones (lenguaje natural, algebraico y geométrico) permitió un avance significativo (a nivel general del 19% en el diagnóstico, al 82% en la hoja de trabajo No 3) en el proceso de aprendizaje de los estudiantes favoreciendo los conocimientos y el desarrollo de habilidades de la técnica matemática (factorización de cubos perfectos).

4.5 Hoja de trabajo 4, representación Geométrica con la mediación de GeoGebra.

En esta hoja se trabaja la representación geométrica para la factorización de los polinomios cúbicos perfectos, con la medición del software de matemática interactiva GeoGebra

4.5.1 Propósito

- Integrar los sistemas de representación (lenguaje natural, geométrico (2d y 3d) y algebraico) a través de la modelación en el software de matemática interactiva GeoGebra, las hojas de trabajo y la metodología propuesta.
- Promover la comprensión de la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, mediante actividades que sean significativas para los estudiantes.
- Indagar como el estudiante comprende e interpreta la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos al integrar diferentes sistemas de representación.
- Identificar diferencias entre polinomios cuadrados y cúbicos perfectos de los que no lo son.

4.5.2 Descripción de la actividad

En esta hoja de trabajo se presenta dos applets en el software de matemática interactiva GeoGebra, los cuales modelan la representación geométrica de la factorización de polinomios

cuadrados y cúbicos perfectos. El desarrollo de las actividades que se plantean están orientadas por 5 preguntas y para dar solución a estas consignas se presentan varias figuras geométricas que el estudiante podrá visualizar, comparar y manipular en dos dimensiones (2 cuadrados y 6 rectángulos) y tres dimensiones (2 cubos, uno de lado X y el otro de lado Y, 6 prismas, 3 de lados X,X,Y y 3 de lados X,Y,Y). Además cuenta con varios cuadros de dialogo que contextualizan la actividad y proporcionan las instrucciones necesarias para dar solución a las preguntas. Se anexa también una serie de botones de control los cuales permiten avanzar o retroceder y manipular o arrastrar los objetos en la pantalla como se observa en la figura 10.

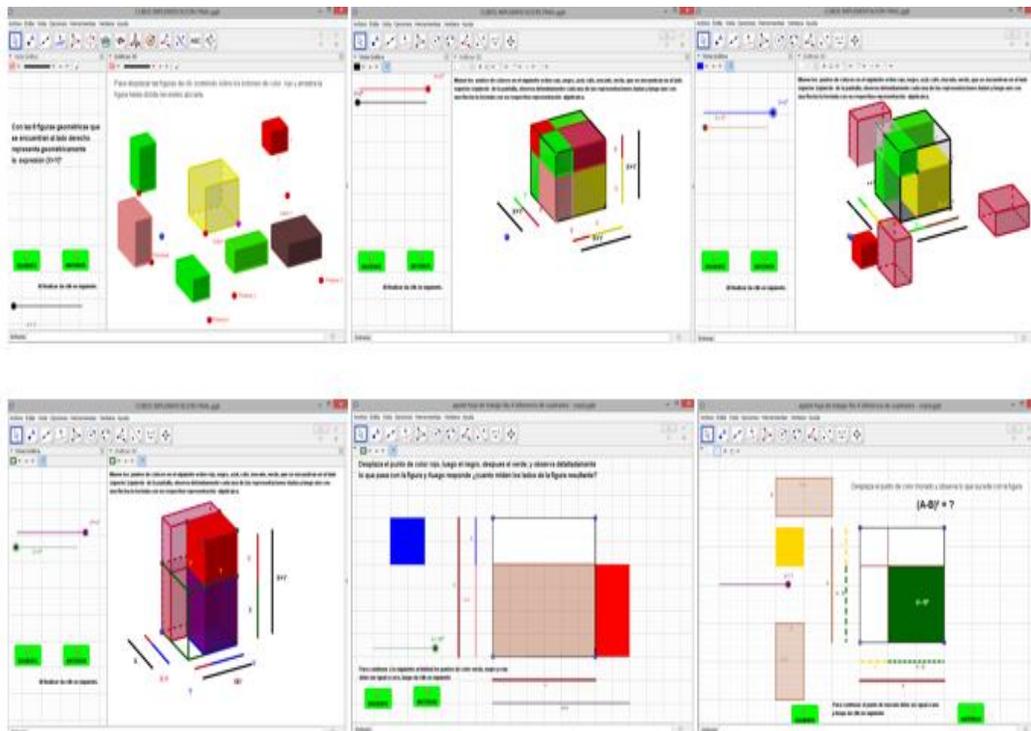


Figura. 10 Actividades Propuestas en geogebra 2d y 3d para factorizacion de polinomios cuadrados y cubos perfectos

4.5.3 Condiciones de aplicación

La hoja de trabajo No 4 la contestaron 20 estudiantes, con un promedio de edad de 14 años en donde 12 fueron niños (60%) y 8 niñas (40%). La actividad planteada en esta hoja de trabajo fue una prueba individual que se aplicó el 7 de febrero de 2019 por escrito, los recursos requeridos para resolverla fueron papel, lápiz y un computador o Tablet por estudiante con previa instalación del software de matemática interactiva GeoGebra. Para lograr los objetivos planteados se dispuso de un tiempo de 120 minutos, los primeros 30 minutos se recordó el manejo de conceptos básicos en GeoGebra, específicamente manejo de la ventana 2d y 3d y sus comandos respectivos. En los 90 minutos restantes se desarrollaron las actividades propuestas. Una vez terminada la resolución de la pregunta 1 a la 4, los resultados se socializaron con el profesor y todo el grupo de estudiantes.

Las fases en que se desarrolló la clase para la hoja de trabajo No 4 fueron:

Tabla 17
Fases hoja de trabajo No 4

Fase	Descripción
Acercamiento al software GeoGebra	Manejo de conceptos básicos de GeoGebra, específicamente la ventana 2d y 3d.
Diagnóstico	Los estudiantes representan en el software geoméricamente la factorización de suma de dos cubos perfectos y la diferencia de un binomio al cuadrado.
Intervención didáctica Mediación del software.	Haciendo uso del software de GeoGebra en la vista 2d y 3d los estudiantes mediante la visualización, arrastre, comparación y manipulación, reconocen e identifican geoméricamente la factorización de cuadrados y cúbicos perfectos, finalmente establecen formulas generales de cada uno
Evaluación	Los estudiantes determinan diferencias para la factorización de suma de cubos y suma de binomios al cubo, a su vez establecieron la diferencia entre resta de binomios cuadrados y diferencia de cuadrados
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron resultados y con lluvias de ideas construyeron conceptos a partir de la experiencia, reflexionaron sobre qué piensan de la actividad. El rol que desempeña el profesor es de orientador y modelador.
Institucionalización	Finalizando la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizo e institucionalizo las ideas y los resultados obtenidos durante la actividad.

Nota: Se describen las fases de ejecución de la hoja de trabajo No 4, (Elaboración propia)



Taller manejo básico de la vista 3d GeoGebra

Encontrando formulas con la representación geométrica vista 3d GeoGebra

Representación geométrica suma de un binomio al cubo 3d GeoGebra

Representación geométrica resta de un binomio al cubo 3d GeoGebra

Imagen 41implementación de actividades hoja de trabajo No 4.

Es muy importante mencionar que las actividades propuestas necesitan de un ambiente de clase dinámico para que a partir de la participación e interacción con el software y el profesor se puedan garantizar alcanzar los propósitos establecidos

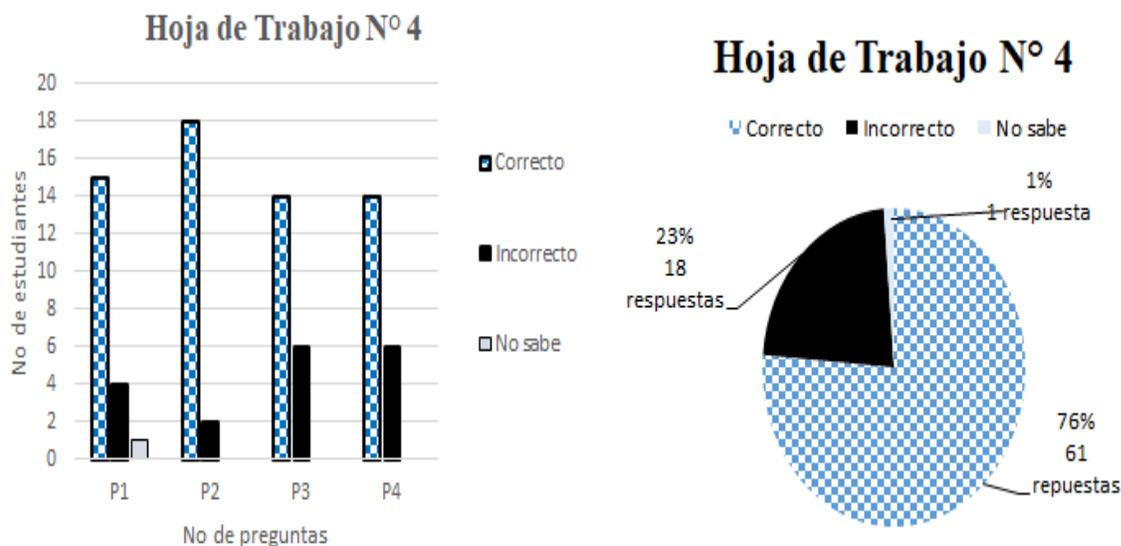
4.5.4 Análisis de la hoja de trabajo No 4.

En la siguiente tabla se muestra la distribución de resultados de la hoja de trabajo No 4.

Tabla 18
Resultados, hoja de trabajo No 4.

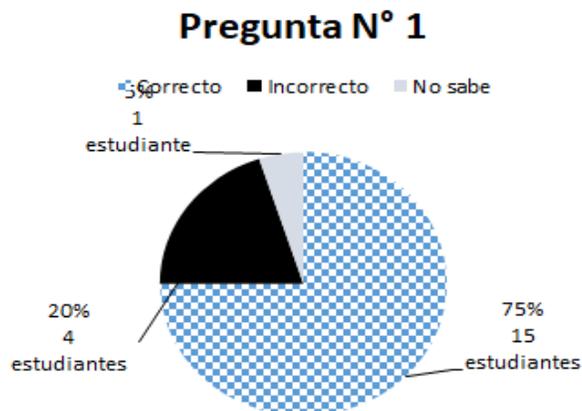
Estudiante	Conocimientos hab. heurísticas	Habilidades Heurísticas		Conocimientos	Suma	Porcentajes
	Preg.1	Preg. 2	Preg. 3	Preg. 4		
1	1	2	2	2	3	75%
2	2	2	2	2	4	100%
3	2	2	2	2	4	100%
4	2	2	2	2	4	100%
5	1	1	1	1	0	0%
6	2	2	2	2	4	100%
7	2	2	2	2	4	100%
8	2	2	2	2	4	100%
9	2	2	2	2	4	100%
10	1	2	1	1	1	25%
11	2	2	1	1	2	50%
12	2	2	2	2	4	100%
13	2	2	2	2	4	100%
14	2	2	2	2	4	100%
15	2	2	1	1	2	50%
16	2	2	2	2	4	100%
17	1	2	1	1	1	25%
18	0	1	1	1	0	0%
19	2	2	2	2	4	100%
20	2	2	2	2	4	100%
porcentajes	75%	90%	70%	70%	3,05	76%
sumas	15	18	14	14		

Nota: se detalla los resultados obtenidos en la hoja de trabajo No 4, (Elaboración propia)



Gráfica 26 Resultados hoja de trabajo No 4.

Actividad No 1. Habilidades heurísticas: la redacción de la pregunta fue la siguiente, “ingresa a GeoGebra y con las figuras geométricas dadas en el applet representa las siguientes expresiones algebraicas”. Justifica tu respuesta. (Ver anexo 5).



Gráfica 27 Pregunta No 1, hoja de trabajo No 4.

El objetivo de esta pregunta es analizar y evaluar como el estudiante interpreta o visualiza geoméricamente las expresiones algebraicas que se han venido trabajando en las 3 primeras hojas de trabajo. En la gráfica 27 se observa que el 75% (15 estudiantes) representaron correctamente la suma de un binomio al cubo y la diferencia de un binomio al cuadrado, lo que significa que han comprendido la técnica puesto que lograron movilizarse de un registro de representación a otro. El 20% (4 estudiantes) responden de forma incorrecta y el 5% (1 estudiante) no sabe, evidenciando

que presenta deficiencias en la construcción de su conocimiento matemático (factorización de polinomios cuadrados y cubos perfectos).

A continuación se presenta evidencias del trabajo realizados por los estudiantes.

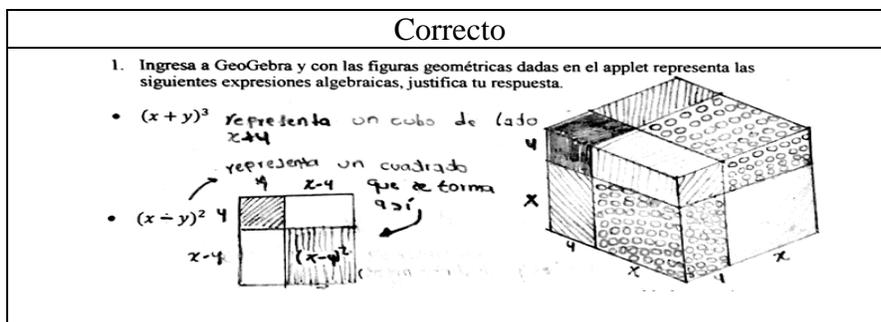


Imagen 42, Estudiante No 6, hoja de trabajo No 4.

En la imagen 42, el estudiante respondió acertadamente, logro realizar la representación geométrica de las dos expresiones que se le solicitaron. Mediante la opción de “arrastre” disponible en el software, ubico correctamente las figuras dadas, a su vez justifico su respuesta cuando escribió que la expresión $X^3 + Y^3$ forma un cubo de lado $X+Y$ el cual realiza en su hoja de trabajo y para la expresión $(X - Y)^2$ dibuja un cuadrado con sus respectivas medidas. Cabe resaltar que en esta respuesta el estudiante no se limitó a realizar la construcción con el software de GeoGebra, sino que utiliza lápiz y papel para representar las expresiones pasando del plano 2d al 3d sin mayores dificultades, llama la atención este hallazgo ya que en la mayoría de los casos es complicado realizarlo.

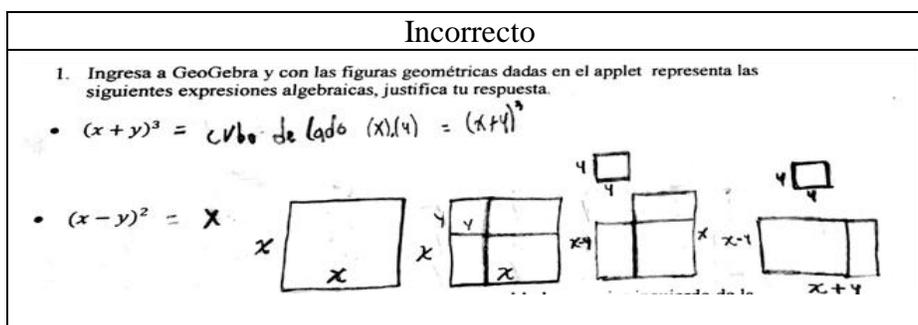
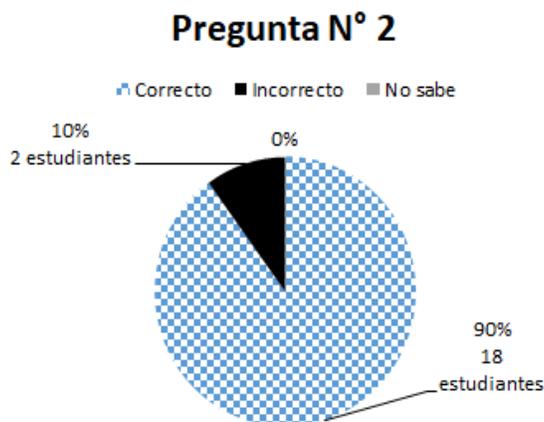


Imagen 43, Estudiante No17, hoja de trabajo No 4.

El estudiante No 17 contesta incorrectamente. Aunque aduce que al representar geoméricamente la expresión $(X + Y)^3$ su resultado es un cubo, se equivocó cuando consideró que la medida de este cubo es $(X)(Y)$; por otro lado, se confundió y terminó por aplicar la representación geométrica de la expresión $X^2 - y^2$ como solución de la expresión $(X - Y)^2$.

Pregunta No 2. Habilidades de control y heurísticas: la redacción de la actividad fue la siguiente. “En el applet, mueve el punto de color negro que se encuentra en el lado superior izquierdo de la

pantalla, observa detenidamente cada una de las representaciones dadas y luego une con una flecha la formula con su respectiva representación algebraica” (Ver anexo 5).



Gráfica 28 Pregunta No 2, hoja de trabajo 4

El objetivo de esta pregunta fue que el estudiante haciendo uso de habilidades como el arrastre, la visualización y comparación de una representación geométrica dada en el software, encuentre y relacione cada factorización con su respectivo polinomio.

En la pregunta No 2, el 90% (18 estudiantes) responde correctamente. Una vez realizaron la actividad en el applet lograron identificar mediante las representaciones geométricas las formulas y las correspondientes representaciones algebraicas, el 10% (2 estudiantes) contestaron de forma incorrecta, a pesar de que manipularon cada una de las representaciones en el applet, confundieron las soluciones de cada una de las formulas. Por lo tanto no consiguieron cumplir el objetivo.

En la siguiente grafica se observa los resultados obtenidos por los estudiantes.

Correcto

2. Mueve el punto de color negro que se encuentra en el lado superior izquierdo de la pantalla, observa detenidamente cada una de las representaciones dadas y luego une con una flecha la formula con su respectiva representación algebraica.

1. $X^3 + y^3$		a. $x^2 - 2xy + y^2$
2. $(x + y)^3$		d. $(x + y)(x - y)$
3. $x^2 - y^2$		c. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
4. $(x - y)^2$		b. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Imagen 44 Estudiante No 6, hoja de trabajo No 4.

El estudiante No 6, mediante la manipulación, visualización y comparación de las representaciones dadas, relacionó correctamente cada factorización con su respectivo polinomio,

se movilizó de una representación a otra al hallar la equivalencia entre lo geométrico y lo algebraico, lo que le permitió cumplir con el objetivo de la actividad.

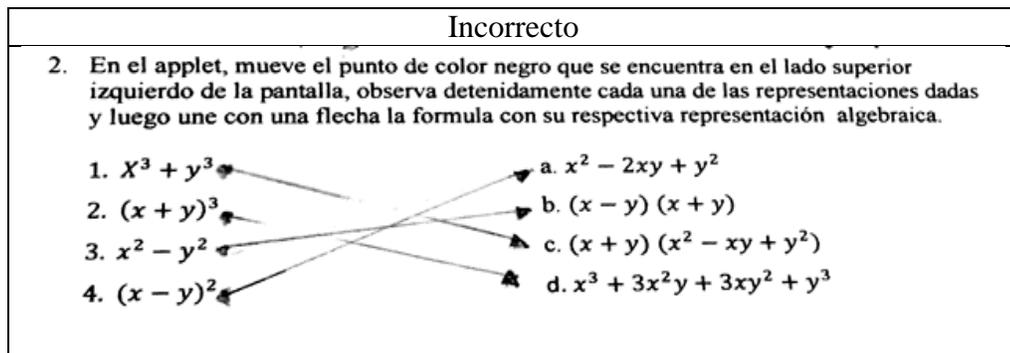
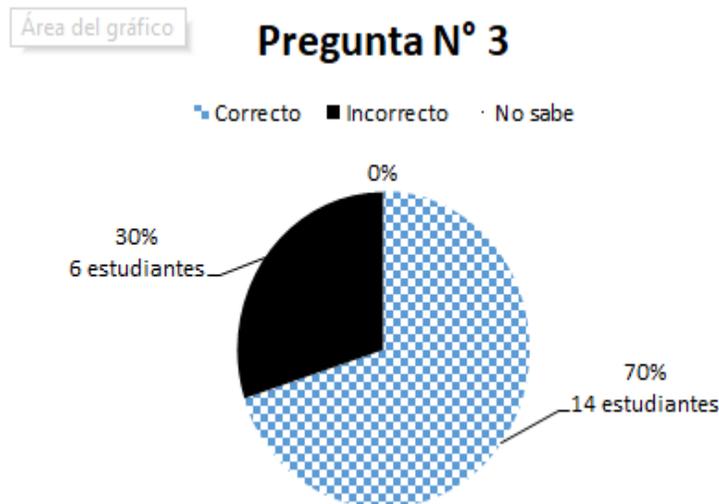


Imagen 45, Estudiante N° 6, hoja de trabajo No 4.

En la imagen 45, el estudiante respondió de manera incorrecta, al no lograr relacionar cada factorización con su respectivo polinomio y por tanto las respuestas no son correctas ya que aplico la resta de un binomio al cuadrado, de igual forma relacionó la suma de cubos con la respuesta de la suma de un binomio al cubo.

Pregunta No 3, conocimientos: la redacción de la pregunta es la siguiente. “De acuerdo a las representaciones dadas en el applet ¿encuentra la diferencia que hay al desarrollar la expresión $X^3 + y^3$ y la expresión $(x + y)^3$? justifica tu respuesta”.



Gráfica 29 resultados pregunta N° 3, patrones, hoja de trabajo No 4.

El objetivo de esta pregunta es encontrar patrones y establecer la ley de factorización de polinomios cúbicos perfectos. El 70% (14 estudiantes) contestaron correctamente, la mediación

del software de GeoGebra amplio y reorganizo los conocimientos y habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos que tenían los estudiantes, puesto que además de establecer las leyes de factorización lograron identificar las diferencias entre las expresiones dadas, las cuales comúnmente suelen confundirse o considerarlas como equivalentes, el 30% (6 estudiantes) responden incorrectamente, presentan dificultades para relacionar lo geométrico y lo algebraico como también no llegan a establecer las leyes correspondientes.

Las siguientes imágenes muestran evidencias de las respuestas dadas por los estudiantes.

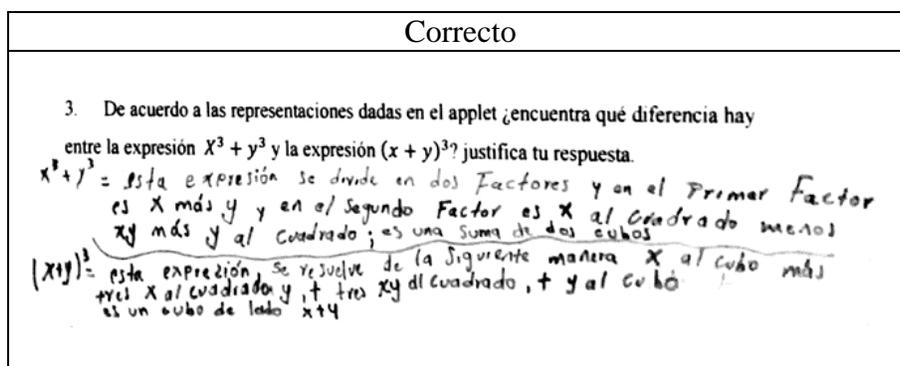


Imagen 46 Estudiantes N° 3, hoja de trabajo No 4.

la imagen 46, se observa que el estudiante respondió correctamente, diferenció las expresiones en un lenguaje En algebraico y geométrico, a su vez, visualizó que para el caso de la suma de dos cantidades al cubo $(X+Y)^3$ representa geoméricamente un cubo de lado $X+Y$, seguidamente demostró la habilidad para desarrollar la factorización redactando la ley para factorizar polinomios cúbicos perfectos, $(X+Y)^3$ es igual al cubo del primer término (x^3), más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo término ($3x^2y$), más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término ($3xy^2$), más el cubo del segundo término (y^3).

Las imágenes a continuación relacionan las respuestas dadas por los estudiantes.

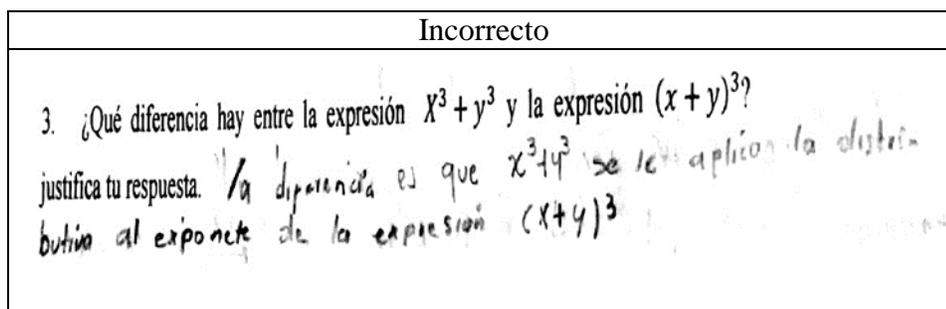
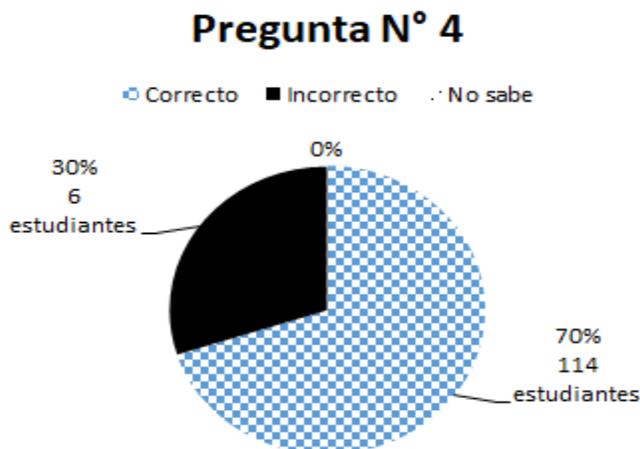


Imagen 47 Estudiantes No 5, hoja de trabajo No 4.

En la imagen 47 el estudiante responde incorrectamente ya que considerar que la diferencia entre las dos expresiones estaba dada por la propiedad distributiva aplicada a una de ellas. Claramente se evidencia que no tiene el conocimiento, ni ha desarrollado la habilidad para operar estas expresiones en las cuales por propiedad no se puede realizar la distribución del exponente.

La respuesta del estudiante fue: la diferencia es que X^3+Y^3 se le aplicó la distributiva al exponente de la expresión $(X + Y)^3$.

Pregunta No 4, conocimientos: la redacción de la pregunta fue la siguiente, “de acuerdo a las representaciones dadas en el applet ¿encuentra la diferencia que hay, al resolver la expresión $X^2 + y^2$ y la expresión $(x + y)^2$? justifica tu respuesta”.



Gráfica 30, resultados pregunta No 4, hoja de trabajo No 4.

El objetivo de esta pregunta es encontrar patrones y establecer la ley de factorización. El 80% (16 estudiantes) responden correctamente, al igual que en la pregunta anterior un alto porcentaje de estudiantes logro encontrar relaciones que les permitieran establecer diferencias entre las expresiones y finalmente redactar las leyes de factorización para los polinomios dados (cuadrados), el 10% (2 estudiantes) contestan incorrectamente y el 10% (2 estudiantes) manifiestan que no sabían o no entendían la naturaleza del procedimiento a realizar, a pesar del proceso de acompañamiento realizado por el docente a cargo.

A continuación relacionamos algunas de las respuestas dadas por los estudiantes

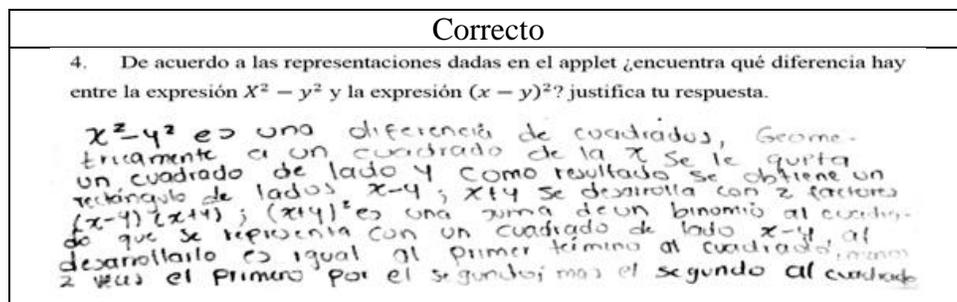


Imagen 48 Estudiante N° 2, hoja de trabajo No 4.

En la imagen 48, se observa que el estudiante respondió correctamente, encontró como diferencia entre las expresiones dadas que $X^2 - Y^2$ representa una diferencia de dos cuadrados, representada geoméricamente por un cuadrado de lado X, que se le quita un cuadrado de lado Y, como resultado se obtiene, un rectángulo de lado X-Y, por X+Y, se desarrolla con dos factores que contienen las raíces de los términos conjugados, así (X+Y) (X-Y) para el caso de la expresión $(X - Y)^2$, identificó que es un binomio que representa un cuadrado de lado X-Y, y al desarrollarlo es igual al primer término al cuadrado, menos dos veces el primero por el segundo, más el segundo al cuadrado.

Para los dos casos el estudiante logró identificar las diferencias en representación geométrica como algebraica, posteriormente redactó las leyes para factorizar polinomios cuadrados y cúbicos perfectos.

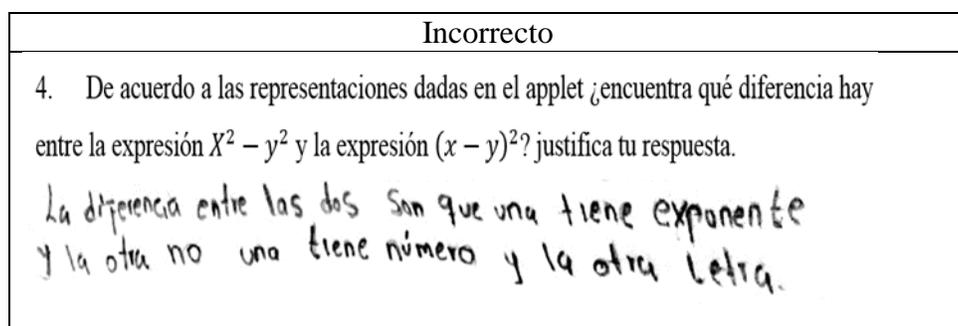


Imagen 49, estudiante N° 10, hoja de trabajo No 4

En la imagen No 49, se observa una respuesta incorrecta, pese haber realizado la actividad de manipulación de las representaciones en el software, el estudiante se limitó solamente a la parte algebraica, comparó las soluciones y dedujo que la diferencia entre las dos expresiones era que una se le colocaba exponentes y números, y la otra tenía letras sin exponentes. Claramente deja ver que no tiene el conocimiento y la habilidad para reconocer lo que las identifica y la ley para factorizar cada una de estas expresiones.

4.5.5 Consideraciones finales

En el diagnóstico el 90% de los estudiantes no dieron una definición del concepto de factorización, el 0% de los estudiantes no redactó ninguna de las leyes de factorización. Al aplicar la hoja de trabajo N° 3 el 76% (15) de los estudiantes lograron diferenciar las expresiones dadas en diferentes representaciones (lenguaje verbal, algebraico y geométrico), expresaron sus características y redactaron la ley de factorización, lo que significa que las actividades planteadas con la mediación de Geogebra permitió que los estudiantes amplificaran y reorganizaran sus conocimientos (sobre factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos), este avance se debe a los siguientes impactos.

- El uso de diferentes tipos de representaciones: se articularon las representaciones en lenguaje natural, algebraico y geométrico, lo que permitió a los estudiantes ejercitar,

manipular, visualizar, relacionar interpretar y comprender la técnica matemática desde otras representaciones y por ende poder redactar las leyes de factorización (para polinomios cuadrados y cúbicos perfectos), a la vez diferenciar aquellos polinomios cuadrados y cúbicos perfectos de los que no lo son, finalmente se desarrolla un aprendizaje significativo.

- El uso de tecnología (GeoGebra 3D) permitió a los estudiantes visualizar de una forma diferente la modelación de los polinomios cúbicos perfectos que anteriormente habían sido presentados a partir de las figuras talladas en madera, evidenciando así una gran complementariedad entre los dos instrumentos.
- Motivación: los estudiantes se mostraron muy entusiasmados y motivados al realizar cada una de las actividades, manifestando que era una forma diferente de aprender un tema que les parecía muy difícil de entender. Lo anterior se puede evidenciar en el siguiente fragmento en el que se transcribe las respuestas de los estudiantes cuando socializaron la actividad realizada.

Fragmento 3:

Se utiliza la siguiente nomenclatura de representación, E6: estudiante, E4: estudiante, E10: estudiante, D: docente.

D: ¿Qué les pareció la actividad realizada? Es muy importante que cada uno de ustedes exprese con sinceridad sus apreciaciones y sugerencias.

E6: a mí me pareció muy interesante, al principio cuando usted nos explicó la actividad yo pensé que era algo muy difícil de realizar, bueno y porque no aburrido, pero cuando yo ingrese al programa ese (refiriéndose a GeoGebra), uff me pareció muy chévere ver las figuras ennnn, como se dice ahhhh (figuras en 2 y 3d, le dice un compañero) eso en 2 y 3 dimensiones, además podíamos mover las figuras, ver qué pasaba con cada una de ellas, no como en el cuaderno que solo son letras y números que difícilmente uno entiende que es lo que pasa allí

E4: si profe trabajar con los computadores realmente es más chévere uno se le pasa el tiempo rapidísimo, yo empecé hacer la actividad y me concentre tanto que no me di cuenta a qué horas se acabó la clase, yo solo respondía una pregunta y quería saber qué otras cosas habían.

E10: yo estoy de acuerdo con lo que dicen mis compañeros, pero las clases van a seguir siendo así o solo era por el trabajo que están haciendo

D: la idea jóvenes es que esta metodología que desarrollamos en las cuatro hojas de trabajo la podamos seguir implementando ya que como ustedes lo acaban de mencionar facilita el aprendizaje y promueve la participación de ustedes.

Cabe resaltar que la pregunta realizada por la docente pone en juego aptitudes de interés, motivación participación y reflexión, valores como la honestidad, responsabilidad, compromiso que deben tener los estudiantes en su proceso de aprendizaje los cuales son evidenciados en las respuestas que proporcionan los estudiantes en el fragmento anterior.

- La implementación de actividades que proporcionaran construcciones dinámicas en las que se favorecía la visualización, manipulación, interpretación, generalización y comparación entre las representaciones.

5. Conclusiones

El presente apartado de conclusiones se divide en dos secciones: la respuesta a las preguntas de investigación planteadas en el trabajo y las sugerencias a diferentes actores de la comunidad e instituciones.

5.1 Respuesta a la pregunta central de investigación

En torno a la pregunta ¿Cuáles son las características del proceso de aprendizaje que favorezca la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo del I.T.A.I Juan Tama? Se obtiene el siguiente grupo de consideraciones relacionadas con el proceso de aprendizaje.

De acuerdo a lo que plantea Castellanos, N., Morga, & Castellanos, A., (2003) y el Men (1998) la educación por competencias debe integrar conocimientos, habilidades, destrezas, prácticas y valores, los cuales se evidencian en el desempeño, situaciones concretas y contextos específicos, por tanto abarca aspectos cognitivos, procedimentales y actitudinales con la finalidad de obtener mejores logros a nivel personal, laboral y social. En este sentido los procesos de aprendizaje deben caracterizarse por:

- Facilitar los procesos de construcción de conocimientos: La metodología implementada a través de la integración de GeoGebra, lápiz y papel, y material concreto, facilitó la construcción de conocimientos en la técnica matemática de la factorización lo cual se evidenció en tres aspectos: primero, se mejoró el rendimiento de los estudiantes de un 19% obtenido en la prueba diagnóstica a un 85% en promedio en las hojas de trabajo, segundo los estudiantes desarrollaron habilidades de control, heurísticas, motrices y de uso de tecnología, finalmente se fomentó valores como la honestidad, disciplina, responsabilidad, seguridad, respeto, entre otros.
- Ser activos: el rol tanto del docente como del estudiante cambió se rompió con la rutina y el estilo tradicional de enseñanza, el docente apoyó y guió al estudiante, hizo sugerencias y preguntas con el objetivo de encaminarlo a que pudiera tomar la decisión correcta cuando se enfrentaba a la búsqueda de métodos y estrategias que debía aplicar. A su vez los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia el aprendizaje de esta técnica, participaron activamente en la fase de exploración, visualización, comparación y búsqueda de patrones, el tipo de actividades les causó curiosidad y despertó en ellos un reto a superar al dejar de lado la memorización, reproducción y mecanización de procedimientos.
- Promover el uso de diferentes representaciones: a través de la propuesta de investigación los estudiantes implementaron y valoraron diferentes estrategias de solución, de manera

que se enriqueciera el conocimiento al utilizar varias alternativas, con el objetivo que se evitara la sobre simplificación y se pudiera representar la complejidad de la técnica matemática. Es decir, no se limitó los procesos a un solo sistema de representación, ni tampoco se obvió el uso de diversos medios proporcionados por herramientas tecnológicas que permiten enriquecer las experiencias de aprendizaje.

- Ser útiles y contextualizados: se plantearon situaciones de aprendizaje reales para los estudiantes acordes a la modalidad del colegio, puesto que se busca que los conocimientos construidos a través del recurso puedan ser llevados a la práctica en los proyectos complementarios.(talleres de ebanistería, metalmecánica y proyectos agropecuarios). Se enfatizó las tareas auténticas en un contexto significativo en lugar de la instrucción abstracta fuera de contexto.
- Fomentar la Apropiación: se logró promover la apropiación del proceso de aprendizaje, los estudiantes identificaron sus metas y objetivos con la intención de que el docente le apoyara en la solución de sus dudas a partir de los objetivos a lograr.
- Ser motivadores y reflexivo: la metodología implementada instaba a que los estudiantes se motivaran, participaran y reflexionaran sobre la experiencia adquirida, lo que se evidencio en la participación activa y en las respuestas dadas al momento de realizar la socialización de las actividades.
- Promover el aprendizaje mediante la práctica y la experiencia: la propuesta que se plantea va más allá de conocimientos que se quedan plasmados en un cuaderno o en notas de clases, se trasciende a la práctica y la experiencia que el estudiante se pregunte, haga y comprenda.
- Fomentar valores y aptitudes: la metodología implementada despertó mucha seguridad en los estudiantes, los hace más autónomos puesto que van construyendo sus propias ideas que las expresan de forma escrita y oral, el éxito que tienen en la construcción de los conocimientos les ayuda a desarrollar la autoconfianza y seguridad, dado que pueden trabajar de forma individual pero también se les da un espacio para trabajar en grupo donde pueden comparar sus respuestas. Todo esto les genera motivación, entusiasmo, confianza y seguridad personal. Se resalta la disciplina y compromiso con la que los estudiantes estaban trabajando cada una de las actividades dando un uso correcto al tiempo de clase.

Cabe agregar que la investigación se realiza en una institución donde la interculturalidad y la confluencia de etnias juega un papel determinante puesto que al realizar las actividades se evidencia la puesta en marcha de los valores institucionales con una naturalidad, por ejemplo la honestidad, los estudiantes pertenecientes a comunidades Indígenas y Afro descendientes en su mayoría aunque tengan la oportunidad de realizar trampa en las actividades que se proponen les cuesta hacerlo esto comparado con los estudiantes de instituciones en los centros urbanos, este comportamiento se debe a : la cosmovisión de los Nasa y los Afro, y la interculturalidad que se tiene en el I.T.A.I Juan Tama.

- El trabajo colaborativo: se promovió la construcción colaborativa de conocimiento a través de la negociación social, y no entre la competencia de los aprendices. El aprendizaje debe reflexionarse colaborativamente entre estudiante- docente y estudiante -estudiante, puesto que se busca cooperación y no competencia.
- Ser procesos dinámicos: se integran actividades dinámicas para los estudiantes

Las anteriores características se implementaron en actividades que tuvieron las siguientes fases:

Tabla 19

Implementación de actividades

Fase	Descripción
Acercamiento al software GeoGebra	En esta fase se realizó talleres de manejo de conceptos básico de GeoGebra explorando: (i) la ventana CAS y la ventana grafica 2d y 3d, (ii) el comando factoriza, (iii) algunas de las propiedades de arrastre, animación y comparación entre figuras.
Diagnostico	Los estudiantes ponen en evidencia que conocimientos previos tienen referente al tema de factorización, luego exploran en el software o con el material concreto como ellos consideran que podrían representarse algunas factorizaciones cuadradas y cubicas perfectas.
Intervención didáctica con la Mediación del CAS en GeoGebra	Haciendo uso de GeoGebra en la vista CAS los estudiantes factorizan, establecen características y confrontan resultados al factorizar con y sin GeoGebra.
Intervención didáctica con la mediación de material concreto	Los estudiantes manipulan las figuras geométricas y a partir de una medida dada, establecen comparaciones que permiten encontrar las medidas desconocidas de las otras figuras, forman una figura geométrica con las piezas dadas, hallan el volumen de cada pieza, el volumen total de la figura que se forma, el polinomio que la representa, identifican que el polinomio es igual al volumen total y este se ha formado como la suma de las partes o los volúmenes de las piezas que componen la figura, lo que les permite establecer la ley de factorización.
Intervención didáctica con la Mediación de GeoGebra 2d y 2d	Haciendo uso del software de GeoGebra en la vista 2d y 3d los estudiantes mediante la visualización, arrastre, comparación y manipulación, reconocen e identifican geoméricamente la factorización de cuadrados y cúbicos perfectos, finalmente establecen formulas generales de cada uno
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron resultados y con lluvias de ideas construyeron conceptos a partir de la experiencia, reflexionaron sobre qué piensan de la actividad. El rol que desempeña el profesor es de orientador y modelador.
Institucionalización	Finalizando la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizo e institucionalizo las ideas y los resultados obtenidos durante la actividad.
Evaluación	El profesor presenta la factorización de cuadrados y cubos perfectos en su versión formal. La evaluación se divide en 3 sub fases de acuerdo al momento en el que se aplica. <ul style="list-style-type: none"> • Diagnóstica: se evalúa el dominio de conocimientos de entrada y las habilidades básicas. • Formativa: en el proceso de exploración y comunicación los estudiantes evidencian los avances sobre la construcción de nuevos conocimientos, el desarrollo de habilidades y procesos del pensamiento matemático. La evaluación se realiza continuamente a través de los manuscritos que presentan los estudiantes en las hojas de trabajo y de forma oral durante la socialización

- Sumativa: al terminar las actividades el profesor analiza el conjunto de preguntas y problemas para valorar el grado de apropiación de los conceptos
 - Los estudiantes reconocen y determinan una ley que les permite factorizar algunas expresiones algebraicas, hallaron características, establecieron diferencias para la factorización de suma de cubos y suma de binomios al cubo, a su vez establecieron la diferencia entre resta de binomios cuadrados y diferencia de cuadrados
-

5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

¿Qué importancia tiene el uso de diferentes representaciones en la construcción de conocimiento y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo?

Es importante tener en cuenta las diferentes representaciones de un concepto matemático ya que cada una de ellas representa solo una parte del mismo, el paso de una representación a otra y su correcta manipulación es lo que permite comprender, construir el conocimiento, y desarrollar distintas habilidades tal como lo menciona Duval (citado por Hitt 2003) “dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa. Debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (p.8) en este sentido se puede decir que:

- La Integraron diferentes representaciones en las hojas de trabajo permitió a los estudiantes observar desde otra perspectiva el proceso de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos, a su vez, desarrollar habilidades para una mayor comprensión del conocimiento que estaban construyendo
- Se diseñaron actividades que integraran diferentes representaciones permitiendo dar cuenta de la importancia de asumir nuevos retos y transformaciones en las formas habituales de trabajo y de las concepciones sobre la enseñanza, el aprendizaje y la matemática misma.
- A través de las actividades propuestas se reafirma que, mediante la aplicación de diferentes sistemas de representación en un proceso de aprendizaje se puede llegar a cumplir mejor el objetivo de aprender significativamente, razón por la cual la mayoría de los estudiantes lograron entender el concepto de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, integrando la representación algebraica y la geométrica a través del uso de material concreto, el software de GeoGebra (en su vista CAS, 2d y 3d) y lápiz/papel.

¿Qué características debe tener las actividades de aprendizaje para propiciar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades sobre la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos con la mediación de Geogebra en estudiantes de grado octavo?

- Las actividades que se diseñan con el objetivo de favorecer la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades, deben permitir a los estudiantes poner en

juego conocimientos previos, generarle un impacto, motivarlos y despertar su interés, y que estas realmente sean de utilidad y aplicables al entorno para que se les trabaje la idea de ver y creer que las matemáticas dan sentido y son útiles.

¿Qué impacto e importancia tiene el uso de las tecnologías, como mediadoras en la construcción y el desarrollo de habilidades de la factorización de polinomios cuadráticos y cúbicos perfectos?

- El proceso de aprendizaje fue muy apropiado, dado que favoreció la construcción de conocimientos y facilitó el desarrollo de habilidades en los estudiantes para comprender la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos. Los roles tanto del estudiante como del profesor cambiaron por completo, el profesor fue un orientador del proceso, planteó sugerencias y preguntas, solucionó dudas; mientras que los estudiantes fueron agentes activos, se involucraron en las diferentes fases de exploración, intervención didáctica, evaluación, socialización e institucionalización de los procesos abordados.
- La metodología implementada en la presente investigación instó a los estudiantes hacer más autónomos dado que poco a poco van construyendo su conocimiento, el cual es expresado de manera oral o escrita, a su vez, les ayuda a desarrollar mayor confianza lo que permite que el temor infundido muchas veces frente al estudio de las matemáticas vaya desapareciendo.
- Siguiendo a Moreno (2001, 2002) quien plantea que “Para el desarrollo curricular de las matemáticas, las herramientas de mediación computacional y el uso de materiales concretos se convierten en amplificadores y re-estructurante del currículo”. En este sentido, de acuerdo a los resultados y la evidencia empírica mostrada a lo largo de la investigación se puede concluir que el uso de GeoGebra, material concreto (cubos y paralelepípedos de madera) y el uso de lápiz/papel (hojas de trabajo) como instrumentos de mediación que se complementan, favorecieron la construcción de conocimientos y potencializaron el desarrollo de habilidades tanto heurísticas como de control en los estudiantes de grado octavo del I.T.A.I Juan Tama.
- Los instrumentos de mediación resultaron muy motivadores e interesantes en el proceso de aprendizaje de la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, debido al dinamismo de GeoGebra (en la vista CAS, 2d y 3d), complementado con la concretes del material manipulable (cubos y paralelepípedos de madera) donde se relacionaba el concepto de área y volumen mediante figuras geométricas y la sencillez de la metodología implementada, por consiguiente se logró que los estudiantes experimentaran y construyeran las leyes de factorización.
- El uso de GeoGebra como mediador en la construcción y desarrollo de habilidades de la factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos, implica la ampliación y reorganización del conocimiento, la modelación de situaciones y el uso de diferentes representaciones, lo cual se constituye como una herramienta fundamental para la comprensión de dicha técnica matemática. Desde este punto de vista servirá como

herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

5.3 Sugerencias

5.3.1 Sugerencias para los profesores de matemáticas.

- Se recomienda a los profesores que además de enseñar los contenidos algorítmicos, promuevan el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático como: particularizar, visualizar, generalizar, estimar, encontrar patrones, entre otros.
- Deberán diseñar actividades que integren diferentes sistemas de representación, con el objetivo de favorecer el conocimiento y el desarrollo de habilidades en los estudiantes, a su vez generando mayor impacto, producto de la promoción, la motivación e interés por aprender.
- El diseño de las actividades sean integrales, es decir que además de los contenidos temáticos, incluyan todos los tipos de saberes que conforman las competencias básicas (conceptuales, procedimentales y conductuales) a su vez que puedan integrar las competencias específicas sin dejar de lado las genéricas.
- Puedan ser facilitadores y generadores de aprendizajes, capaces de diseñar e implementar estrategias que permitan en los estudiantes el análisis, el pensamiento crítico, la inquietud de generar su propio conocimiento, que investiguen y sean autónomos, y socialicen sus conocimientos.
- Evaluar continua y constantemente los procesos de aprendizaje para dar seguimiento a la evolución de la adquisición de competencias, basándose en evidencias de desempeño.

Para materializar esta sugerencia se deben cumplir varias actividades: (i) capacitación y actualización constante de su curriculum (ii) propiciar ambientes escolares que generen aprendizajes significativos mediante estrategias de enseñanza contextualizadas a la realidad del estudiante, (iii) incluir la línea de nuevas tecnologías en la formación de nuevos profesores, (iv) en el caso de profesores ya formados deben solicitar participar en cursos, talleres y diplomados de actualización en cuanto al uso de las tecnologías digitales con fines didácticos, (v) promover el uso de calculadoras, celulares, tabletas o computadores en el marco de una estrategia concreta que permita potencializar el conocimiento a partir de recursos TIC. Entre otros.

5.3.2 sugerencias a los estudiantes

- Se debe inculcar en el estudiantado la importancia de la comprensión de las matemáticas bajo un lenguaje que deben aprender para desenvolverse y comunicarse con el mundo.
- Propiciar un uso del internet guiado y relacionado a una estrategia de conocimiento que pueda facilitar herramientas valiosas como el software de matemáticas (GeoGebra) para la comprensión y construcción de conceptos matemáticos.

- Los estudiantes deben comprometerse responsablemente con su proceso de aprendizaje, ser agentes activos, desarrollar buenas actitudes, buscar conocimientos a partir de su interés, contexto y su propio desarrollo, es decir, partir de una mejor disposición para enfrentar retos y construir nuevos conocimientos.

5.3.3 Sugerencias para directivos escolares

- Gestionar recursos para que se invierta en la adecuación y actualización de las salas de informáticas incluyendo el servicio óptimo de internet y video beam como el de otros recursos TIC con enfoque en diferentes áreas de conocimiento.
- Gestionar capacitación para los docentes en el manejo de las TIC y el diseño de materiales didácticos que integren el uso de diferentes sistemas de representación como herramientas de mediación. Es importante la gestión de programas de educación continua que permitan apropiar nuevas herramientas para promover la integración de las tecnologías existentes al aula de clase.
- Reconocer, estimular y exaltar la labor realizada por docentes que presenten, gestionen y ejecuten proyectos de investigación en el aula de clase. Promover la participación en convocatorias externas para investigación como el programa ONDAS de Colciencias que permite estimular los procesos de innovación en el aula y la apropiación de recursos TIC en las laboras docentes.

6. Bibliografía

- Álvarez, R., & Mejía, F. (2006). *Factorización*. Medellín, Colombia: L. Vieco e Hijos Ltda.
- Arenas, A. (2016). *Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de la factorización a través de las TIC (Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia, Valledupar, Colombia.
- Avalos, L. (2014). *Adaptación de Juegos Para Enseñar Factorización y Productos Notables en Educación Media superior (Tesina)*. Universidad Pedagógica Nacional, Mexico.
- Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). *Computer-Based Environments in Mathematics*, pp. 469-501. *En International Handbook of Mathematical Education, Bishop, A. et al (eds), Kluwer Academic Publishers.*
- Ballen, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado (Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Bartollini, M., & Martignone, F. (2014). *Manipulatives in Mathematics Education*. in. Lerman S. (eds) *Encyclopedia of education*. Springer Dordrecht.
- Benitez, D., Londoño, N., Mederos, O., & Ruiz, L. M. (2010). *El Desarrollo de Competencias Disciplinarias De Matemáticas en el ambito Escolar; III Encuentro Nacional de Profesores de Ciencias Exactas y Naturales*. Universidad de Ibagué, Ibagué, Colombia.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. (Windsor, UK: NFER-Nelson).
- Butto, C. (2011). Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de Tecnologías digitales: un estudio teórico-experimental en el nivel básico. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (pág. 13). Brasil .
- Castellanos, N., Morga, L. E., & Castellanos, A. (2003). *Educación por Competencias: Hacia la excelencia en la Educación Superior*. Mexico: Red Tercer Milenio.
- Castro, E., & Molina, M. (Agosto de 2007). Desarrollo De Pensamiento Relacional Mediante Trabajo Con Igualdades Numéricas En Aritmética Básica. *Educación Matemática*, 19(2), 67-94.
- Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas (4ta ed.)*. (A. Casal, Trad.) Tomo 2. . Mexico D.F, Mexico: Mexico: siglo Siglo veintiuno Editores.
- Daza, L. (2012). *Interpretación de la Factorización a Través del Uso de Geogebra (Tesis de Pregrado)*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

- Edsource. (5 de Mayo de 2009). Porque es Importante Aprender Algebra. *Guia de padres y estudiantes*. Recuperado el 3 de Octubre de 2017, de https://edsource.org/wp-content/publications/pub_algebra_qa_Spanish.pdf
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje Aritmetico - Algebraico. *Recherches en didactique des mathematiques*, 9(2), 155-188.
- Garcia, J. (2012). *Incidencia de las tecnologias de la información y la comunicación como estrategia de aprendizaje del algebra en estudiantes de primer semestre de universidad nacional de Colombia sede Palmira (Tesis de Maestria)*. Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia .
- Godino , J., & Font, V. (Febrero de 2003). *Matemática y su Didáctica Para Maestros*. Granada: ReproDigital. C/Baza, 6. La Mediana. Obtenido de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en un Ambiente con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-223.
- Jimenez, S., & Salazar, V. (2013). *Propuesta Didáctica: Tabletas Algebraicas como Una alternativa de Enseñanza del Proceso de Factorización de Algunos POLinomios de segundo Grado (Tesis de Pregrado)*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Kieran, C., & Filloy, Y. ., (1989). *Investigación y Experiencias Didácticas*. Universidad de Québec, Montréal, Canadá. Mexico : Traducción Castellana de Luis Puig.
- Lastra, S. (2005). *Propuesta Metodológica De Enseñanza Y Aprendizaje De La Geometría, Aplicada En Escuelas Críticas (Tesis de Maestría)*. Universidad de Chile, Santiago de Chile.
- López, E. (2008). *Productos Notables, Factorización Y Ecuaciones De Segundo Grado Con Una Incógnita, Una Propuesta Didáctica Para El Bachillerato Del Colegio De Ciencias Y Humanidades (Tesis de Maestria)*. Universidad Nacional Autónoma de México , Mexico.
- Mejía , M. F. (2011). *La Factorización de Polinómios de una Variable Real en un Ambiente de Lapíz/Papel (L/P) y Algebra Computacional (CAS) (Tesis de Maestría)*. Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Mejia, M. F. (2004). *Analisis Didáctico de la Factorización de Expresiones Polinómicas Cuadráticas (Tesis de Pregrado)*. Universidad Del Valle, Santiago de Cali.

- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santafé de Bogotá Colombia. Recuperado el 07 de Julio de 2015, de http://www.mineducación.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogota, Colombia. Recuperado el 07 de Julio de 2015, de http://www.mineducación.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf.
- Men. (2013). *Competencias TIC para el Desarrollo profesional Docente*. Bogota, Colombia.
- Men. (2014). *Foro Educativo Nacional, Ciudadanos Matemáticamente competentes*. Bogota , Colombia .
- Moreno, Armella, L. (2002). *Instrumentos Matemáticos Computacionales*. Mexico.
- Moreno, Armella, L. (2002a). *Cognición y computación: el caso de la geometría y la Visualización. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) Seminario Nacional de formación de Docentes: USo de las Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.
- National Council of Teachers of Mathematics . (2000). *Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA*.
- Palarea, M., & Socas, M. (1994). Algunos Obstáculos Cognitivos en el Aprendizaje del Lenguaje Algebraico. *I Seminario Nacional del Lenguaje y Matemáticas*. 16, págs. 91-98. Perfiles Educativos.
- Sandoval , N. C. (2014). *Diseño de una secuencia didáctica que integra el uso de origami para el aprendizaje de la factorización en grado octavo (Tesis Maestria)*. Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia.
- Santos , M., & Benitez, D. (2003). Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de Representación Para la Resolución de Problemas. *Perfile Educativos*, 25(100), 23-41. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?=13210003>
- Santos, M., & Benitez, D. ((s,f.)). *El Uso de Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de Representacion en la Resolucion de Problemas*.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al Estudio Didaáctico del algebra: origenes y perspectiva*. Argentina : Libros del Zorzal, Buenos Aires .

- Tamayo , G., Fernandez , A., Torres , P., Ortiz, J., & Solano , A. (2009). Herramientas semióticas: Cognición, Aprendizaje y Currículo. *Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pág. 24). Medellín, Colombia : Editorial Gaiga.
- Tangarife , D. (2003). *Transición Del Pensamiento Numérico Al Pensamiento Algebraico A Través De La Estrategia Didáctica-Algeblocks(Tesis de Maestría)*. Universidad Nacional de Colombia , Manizales, Colombia.
- Tobón , S., Rial, Sanchez, A., Carretero, M. A., & Garcia, J. A. (2006). *Competencias, calidad y educación superior*. Bogota : Cooperativa Editorial Magisterio.
- Valoyes, L. (2013). Estudio de la Representación del Algebra en los Documentos Curriculares Colombianos. *Perspectivas Educativas*, 6, 15-32.
- Vara, Saenz, S. E. (2010). *Desarrollo de Habilidades Matemáticas Para la Comprensión y Aplicación de La Factorización (Tesis de Maestría)*. Juarez, Chihuahua.

ANEXOS.



Institución Educativa Domingullo
Municipio de Santander de Quilichao Cauca.



Estudiante: _____ Grado: _____

Fecha: D _____ M _____ A _____

PRUEBA DIAGNÓSTICO

Propósito conocer conceptos y habilidades básicas

1. Encuentra los resultados de las siguientes operaciones.

$$a + a =$$

$$a \cdot a =$$

$$a \cdot a \cdot a =$$

2. Con tus propias palabras describe lo que entiendes por factorización.

3. ¿Qué entiendes por la expresión diferencia de cubos? .

4. Conoces una ley para factorizar polinomios cúbicos?

Sí _____ No _____

5. Si conoces alguna Ley explica tu respuesta.



6. Representa geoméricamente (dibujo) un cubo



7. Calcule el volumen de un cubo de 5 cm

8. Calcule el volumen de un cubo de lado X

9. Representa geoméricamente (dibujo) un cubo de lado a.

10. Representa geoméricamente o explica que entiendes por una diferencia de cubos

11. Representa geoméricamente o explica que entiendes por una suma de cubos



Institución Educativa Domingullo
Municipio de Santander de Quilichao Cauca.



Estudiante: _____ **Grado:** _____

Fecha: D _____ M _____ A _____

HOJA DE TRABAJO No 1.

1. ¿Conoces una ley que te permita factorizar la siguiente expresión?

a. $X^2 + 4X + 4$

Si () No ()

2. En caso que la respuesta de la pregunta anterior sean afirmativa, escribe la ley en el espacio en blanco.

3. Con la ayuda de Geogebra usando el comando factoriza, completa la siguiente tabla.

Entrada	Salida
$x^2 - 6xy + 9y^2$	
$9x^2 + 42x + 49$	
$x^2 + 10xy + 25y^2$	
$a^2 + 4a + 4$	
$100m^2 - 12nm + n^2$	

4. De la tabla anterior revisa las características en común de los ejercicios en la columna de entradas y redáctalas en el siguiente espacio en blanco.

5. De la tabla anterior revisa las características en común de los ejercicios en la columna de salidas y redáctalas en el siguiente espacio en blanco.

6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.

Polinomios	Sin GeoGebra	Con GeoGebra	Error
$x^2 - 2xy + y^2$			
$9x^2 - 6xy + y^2$			
$9x^2 + 6x + 1$			
$x^2 + 10x + 25$			
$a^2 + 4a + 4$			
$4m^2 - 12nm + 9n^2$			
$25x^2 - 30xy + 3y^2$			

7. De acuerdo a lo aprendido en la presente actividad redacte una ley que le permita factorizar la expresión $9X^2 + 24X + 16$.

5. De la tabla anterior revisa las características en común de los ejercicios en la columna de salidas y redáctalas en el siguiente espacio en blanco.

6. Completa la siguiente tabla primero sin usar Geogebra, luego usando Geogebra a través del comando factoriza; si las respuestas en las dos columnas del mismo ejercicio son diferentes encuentra el error y corrígelo.

Polinomios	Sin GeoGebra	Con GeoGebra	Error
$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$			
$X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$			
$m^3 + 6m^2 + 12m + 8$			
$8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$			
$27m^3 - 54m^2n + 36mn^2 - n^3$			
$m^3 + 18m^2 + 27m + 27$			

7. De acuerdo a lo aprendido en la presente actividad redacte una ley que le permita factorizar la expresión $9X^2 + 12X + 16$.



Institución Educativa Domingullo
Municipio de Santander de Quilichao Cauca.



Estudiante: _____ **Grado:** _____

Fecha: D _____ M _____ A _____

HOJA DE TRABAJO No 3

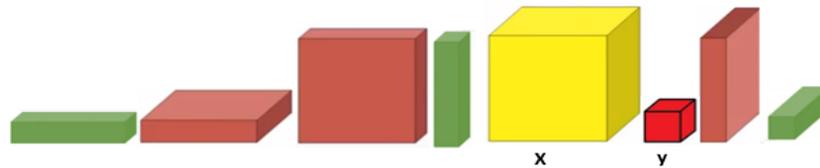


Figura 1.

1. A partir de las fichas representadas en la figura 1, que se te han entregado y tomando como referencia que la medida del cubo de color amarillo es de lado **X** y la medida del cubo de color rojo es de lado **Y**, determina el volumen de cada una de las piezas representadas, completando la siguiente tabla.

Tipo de pieza	Cantidad de piezas	Medida de la pieza			Área base de la pieza	Volumen de cada pieza	Volumen total
		Largo	Ancho	Altura			

2.¿Qué figura geométrica se puede armar con las piezas de color verde claro, naranja, rojo y amarillo dadas inicialmente, sin que sobre ninguna pieza, ni tampoco quede espacio entre una pieza y otra (cada pieza debe calzar exactamente)?

3.¿Qué estrategia utilizaste para armar la figura geométrica, explica tu respuesta?

4.¿Cuáles son las medidas de la figura geométrica que encontraste?

Largo _____ ancho _____ altura _____

5.¿Cuál es el volumen total de la figura geométrica que se formó?

6.¿Encuentra el polinomio que representa el cubo?

7.Se puede concluir que, Completa:

La figura geométrica resultante es un _____, de lado _____, su volumen es _____, se formó por la _____ de varias piezas, por consiguiente el _____ total del cubo es igual a la _____ de los _____ de cada pieza.



Institución Educativa Domingullo
Municipio de Santander de Quilichao Cauca.



Estudiante: _____ **Grado:** _____

Fecha: D _____ M _____ A _____

HOJA DE TRABAJO No 4.

Propósito: integrar los sistemas de representación geométrica y algebraica, mediante los cuales se dará significado a la técnica de factorización de polinomios cuadrados y cúbicos perfectos a través de la modelación.

1. Ingresa a GeoGebra y con las figuras geométricas dadas en el applet representa las siguientes expresiones algebraicas, justifica tu respuesta.

- $(x - y)^2$

- $(x + y)^3$

2. En GeoGebra, Mueve el punto de color negro que se encuentra en el lado superior izquierdo de la pantalla, observa detenidamente cada una de las representaciones dadas y luego une con una flecha la formula con su respectiva representación algebraica.

1. $X^3 + y^3$

- a. $x^2 - 2xy + y^2$

2. $(x + y)^3$

- b. $(x + y)(x - y)$

3. $x^2 - y^2$

- c. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

4. $(x - y)^2$

- d. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

3. De acuerdo a las representaciones dadas anteriormente (pregunta 2) ¿Qué diferencia hay entre la factorización de la expresión $X^3 + y^3$ y la factorización de la expresión $(x + y)^3$? justifica tu respuesta.



4. De acuerdo a las representaciones dadas anteriormente (pregunta 2) ¿Qué diferencia hay entre la factorización de la expresión $X^2 - y^2$ y la factorización de la expresión $(x - y)^2$? justifica tu respuesta.



Anexos 6 Applet

<https://www.geogebra.org/u/adrimaruza>