UNA UNIDAD DIDÁCTICA LOCAL
PARA EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN

JOSÉ LUIS GÓMEZ SOLANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
MAESTRIA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES
MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN
TULUÁ (VALLE)
2019

UNA UNIDAD DIDÁCTICA LOCAL

PARA EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN

JOSÉ LUIS GÓMEZ SOLANO

DIRECTORA

DEISY ZEMANATE CUELLAR, Mg.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y CIENCIAS EXPERIMENTALES

MODALIDAD PROFUNDIZACIÓN

TULUÁ (VALLE),

2019

UNA UNIDAD DIDÁCTICA LOCAL

PARA EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN COMO RELACIÓN

NOTA DE ACEPTACIÓN

JURADO 1

JURADO 2

TUTOR

DEISY ZEMANATE

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a DIOS por permitir cumplir mi sueño como docente, de poder subir un peldaño más en mi profesión, para así mismo impartir conocimientos con calidad a mis estudiantes.

Agradezco a mi esposa quien me colaboro en la construcción, corrección y edición de los textos de la tesis.

Agradezco a mi hija y mi abuela por su comprensión y sacrificios en los tiempos dedicados al estudio.

Agradezco a mi directora de tesis Deisy Zemanate Cuellar, quien con su sabiduría, paciencia y disposición, nos guio y nos educó para recorrer este camino. Profe, no fue nada fácil.

A la Institución Educativa Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra, en cabeza del especialista Freddy Alberto Díaz Domínguez, por el otorgamiento de la beca a través del Ministerio de Educación nacional, poder estudiar dicha maestría.

Resumen

El propósito de este trabajo, es identificar qué actos de comprensión manifiestan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra de Guacarí, cuando se moviliza la noción de función como relación desde una unidad didáctica local. Para la planificación del aprendizaje es importante tener en cuenta las orientaciones oficiales e institucionales que aplicadas a un Modelo Local de Análisis Didáctico, permite una construcción adecuada que argumente y le dé sentido al contenido matemático, sin que prime solo lo algorítmico, su descripción con los diferentes sistemas de representación; razón por la cual, se decide llevar a cabo una investigación con enfoque cualitativo de tipo descriptivo, que muestra situaciones propias del contexto de los estudiantes y que se convierte en una herramienta de investigación en el aula, al permitir constatar actos de comprensión, los cuales resultan fundamentales a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica local. Así, pues, se concluye que los estudiantes evidencian la comprensión, al identificar, discriminar y con dificultades al generalizar.

Palabras Clave: comprensión, función como relación, modelo local análisis didáctico, unidad didáctica local.

Abstract

The purpose of this work is to identify which acts of understanding manifested by ninth grade students of the Higher Education Institution Miguel de Cervantes Saavedra de Guacarí, when the notion of function is mobilized as a relationship from a local didactic unit. For the planning of learning it is important to take into account the official and institutional guidelines applied to a Local Model of Didactic Analysis, allow an adequate construction that argues and gives meaning to the mathematical content, without prioritizing only the algorithmic, its description with the different systems of representation; reason why, it is decided to carry out an investigation with qualitative approach of descriptive type, that shows situations proper of the context of the students and that it becomes a tool of investigation in the classroom, when allowing to verify acts of understanding, which they are fundamental when it comes to designing, carrying out and evaluating a local didactic unit. Thus, it is concluded that students demonstrate understanding, identifying, discriminating and having difficulties in generalizing.

Keywords: understanding, notion of function as relationship, local model, didactic analysis, local didactic unit.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Tablas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

Este trabajo ha sido realizado usando el Modelo Local de Análisis Didáctico, con la finalidad de fundamentar el aprendizaje de contenidos matemáticos, de acuerdo a las metas educativas del Ministerio de Educación Nacional plasmadas en la planificación escolar y que tienen lugar en el aula; al elaborar tareas escolares con el propósito de identificar los actos de comprensión que manifiestan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Normal Superior "Miguel de Cervantes Saavedra" cuando se moviliza la noción de función como relación al diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas locales (Bedoya, 2002).

La problemática del estudio reside en las dificultades de comprensión de la noción de función como relación, ya que el aprendizaje en la escuela no lleva a identificar, ni a discriminar las magnitudes en una relación que se presenta en la vida real, ya que está orientado solo a procesos cognitivos desde el algoritmo, lo que no permite el estudio del pensamiento variacional, limitando el desarrollo de competencias. Además el docente desconoce la comprensión que tienen sus estudiantes por tal motivo surge la necesidad de buscar nuevas metodologías de enseñanza.

En el capítulo I, se plantea el problema con los aspectos generales y propios de la investigación, los antecedentes que enriquecen la propuesta y las conclusiones, así mismo se expone la justificación que describe su importancia, el objetivo tanto general que da respuesta a la pregunta de investigación y como los específicos marcan una naturaleza propia de la metodología a seguir en la construcción de la propuesta.

El marco conceptual aparece en el capítulo II, donde se presentan los elementos conceptuales que fundamentan toda la propuesta, iniciando con la comprensión, que contiene una introducción del origen y los actos de comprensión (Sierpinska, 1992) los conceptos del Análisis Didáctico y sus componentes, conformados por el contenido, los fenómenos donde se aplica, la cognición, la instrucción y su actuación; un acercamiento histórico de la función, considerados importantes para estructurar la planificación de la propuesta, enfocada en el aprendizaje de los estudiantes.

En el capítulo III, se muestran los aspectos de la metodología utilizada bajo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo. El diseño metodológico se da en dos fases, respondiendo a cada uno de los objetivos específicos; en la fase I, se lleva a cabo la construcción de un Modelo de Análisis Didáctico que inicia con el contexto, un análisis curricular teniendo en cuenta los criterios del Ministerio de Educación Nacional a través de los Lineamientos y Estándares donde se aclara cómo la noción de función como relación aporta para el desarrollo del pensamiento variacional, los sistemas de representación, su articulación y la importancia necesaria para la construcción de los sistemas algebraicos y analíticos. De igual forma, se analiza el proyecto educativo institucional en el cual aterrizan los contenidos matemáticos en el aula por medio del enfoque Humanista-Científico, la organización de los ambientes de formación con las áreas afines en el contexto que se mueve la población educativa; considerando la anterior información, se edifican criterios para la elaboración de una rejilla de análisis como instrumento de selección de datos.

Igualmente, se realiza el análisis de contenido del concepto, teniendo en cuenta todos sus elementos, los diferentes significados y los sistemas de representación que permiten abordar este conocimiento matemático, aplicado al contexto que resulte en el análisis fenomenológico. Continuando así con el análisis cognitivo, donde se articula lo curricular y algunos actos de comprensión de Sierpinska, para la elaboración de los objetivos, establecer sus limitaciones y las oportunidades de aprendizaje.

En el análisis de instrucción se hace el diseño de la unidad didáctica local con la selección de tres tareas escolares, las cuales responden a expectativas de aprendizaje, contenidos, sistemas de representación, contexto, desarrollo de competencias, las capacidades y el acto de comprensión que se intenta reconocer, en la primera tarea se desea que los estudiantes identifiquen relaciones y establezcan cuándo son o no función, la segunda discrimina las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identifica la relación de dependencia y la última modela situaciones del contexto geométrico y económico con la noción de función cuadrática como relación.

En la fase II, se implementa la unidad didáctica local, usando como instrumento de recolección de datos, la grabación de video para detallar momentos importantes en la construcción del aprendizaje, posteriormente se revisan las hojas de trabajo con el fin clasificar los hallazgos de las respuestas y escribir los descriptores correspondientes en una rejilla que discrimina su frecuencia en la obtención o no de los objetivos de aprendizaje, y así concluir si se ha mostrado un acto de comprensión de acuerdo con las tereas escolares diseñadas.

En el capítulo IV, se encuentra el análisis de resultados (análisis de actuación) obtenidos durante la implementación de las tareas escolares diseñadas para la unidad didáctica local, disponiendo la información en una rejilla para cada tarea escolar, con descriptores que explican las diferentes características de respuesta. En la tarea escolar inicial el estudiante encuentra problemas de diversos contextos, con una secuencia de preguntas que deben ser respondidas en un espacio previsto, para hacer el proceso adecuado, donde la mayoría identificaron relaciones, determinado si son o no función; evidenciando así un acto de comprensión.

De acuerdo con la tarea escolar intermedia, los estudiantes logran enfrentarse a problemas de realidades del municipio, donde con sus datos desarrollan los procedimientos necesarios para encontrar los requerimientos y responden una serie de preguntas para discriminar las magnitudes hasta llegar a la construcción del modelo, algunos presentan dificultades, puesto que confunden las magnitudes variables con las magnitudes constantes, invierten la variable independiente con la dependiente, enuncian incorrectamente la relación entre variables y magnitudes, por esta razón no construyen el modelo matemático.

En la tarea escolar final, los estudiantes modelan dos situaciones del contexto (geométrico y económico) que da cuenta el análisis fenomenológico mediante un cuestionario; finalmente logran el aprendizaje de la función cuadrática y las categorías de los actos de comprensión, al identificar y discriminar las magnitudes, modelar en el sistema de representación verbal, sagital, tabular y gráfico; sin embargo, se les dificulta construir el modelo algebraico.

Como resultado del proceso de investigación, el docente debe conocer los documentos curriculares e institucionales como orientaciones básicas que sirven de guía y condicionan su quehacer en el aula, respecto al aprendizaje que deben construir los estudiantes, por tal motivo se aplican y articulan en la elaboración de un modelo local de análisis convirtiéndose en una herramienta metodológica, al planificar una unidad didáctica de un contenido específico (la noción de función como relación), para luego escoger los objetivos basados en los actos de compresión de identificar, discriminar y generalizar, los obstáculos epistemológicos, dificultades y errores, en actividades propias del contexto, en tanto que permite evaluar el estado de comprensión que tienen los estudiantes y poder realizar cambios ajustados nuevas unidades que se propongan.

Capítulo I

1. El Problema de Investigación

1.1 Antecedentes

La noción de función como relación, es una de las más utilizadas en la enseñanza de la matemática escolar y ha ocasionado un número importante de investigaciones, por ser muy compleja (Eisenberg, 1991); debido a los problemas que presentan los estudiantes durante su aprendizaje y a la falta de comprensión al no realizar la construcción de la noción mediante la relación entre magnitudes y los sistemas de representación que lo caracterizan, en este caso se mencionan algunas investigaciones que han abordado esta problemática y que aportan al presente trabajo.

En el artículo titulado “El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones” Díaz (2013), da a conocer la evolución histórica de este concepto, y expone las etapas y obstáculos que se presentaron durante su desarrollo, con el propósito de realizar aportes frente a su enseñanza y aprendizaje. Menciona igualmente algunos resultados de investigación en educación matemática, como trabajos que diseñan actividades asociadas a modelos teóricos, dirigidos a la enseñanza que determinan concepciones erróneas en su aprendizaje al no considerar el dominio y el rango de las funciones, que han facilitado detectar dificultades en el estudiante, así como los aspectos de interpretar funciones representadas por gráficas, analizar los cambios en los parámetros de las gráficas, realizar transformaciones entre diferentes sistemas de representación, la modelación de situaciones del mundo real y procesos, como introducir el concepto con problemas prácticos no matemáticos, realizando tareas de transformación y conversión entre al menos dos sistemas de representación para comprenderla. Las dificultades que aparecen en el análisis de la evolución histórica, proporcionan evidencias a problemas ligados a su desarrollo tales como: su tendencia por la regularidad y la separación entre el contexto gráfico y algebraico.

El artículo brinda aportes de tipo pedagógico, apuntando a que los estudiantes se inquieten a dar explicación de una situación modelada por una relación funcional, al comprender el cambio entre magnitudes y los sistemas de representación. Díaz, (2013) también da claridad a las diversas líneas de investigación hechas sobre función entre las cuales se resaltan la inconsistencia entre la imagen y la definición conceptual, los errores conceptuales y dificultades del concepto, los diferentes componentes y representaciones de las funciones, así como de la interpretación de las gráficas de las funciones; y para esta investigación se toma como prioridad la comprensión de los estudiantes del concepto de función.

La tesis doctoral de Cuesta (2007) titulada "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" de la Universidad Autónoma de Barcelona, cuyo objetivo condujo a proponer una ruta para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de función y extremo, la cual se da a través del diseño y evaluación de una unidad didáctica que incida en la construcción de significados por parte de los estudiantes, su problemática radica en el insuficiente nivel de conocimiento del concepto de función, al no comprender el comportamiento de las magnitudes, los sistemas de representación, como el algebraico, el gráfico y la modelación de situaciones.

La metodología de esta investigación es descriptiva, cualitativa e interpretativa, partiendo de una caracterización del contexto; para cumplir sus objetivos específicos se lleva a cabo en tres etapas definidas así: La primera es la planificación de los aspectos curriculares necesarios para el diseño de la unidad didáctica, como lo es la estructura conceptual, las orientaciones de carácter ministerial, los objetivos del proceso y las actividades adecuadas para el aprendizaje. La segunda, plantea la selección del grupo de estudio, el inicio de la aplicación y desarrollo de la unidad didáctica. La última etapa describe e interpreta los resultados durante y después de la aplicación.

Las resultados y conclusiones que sirven para esta investigación son: la identificación del concepto de función cuando existe una relación de dependencia entre dos variables, pero en algunos estudiantes no comprenden la regla que domina la relación, tampoco al pasar de la descripción verbal a la gráfica, la tabla y la expresión que modela la situación, además, algunos estudiantes son capaces de pronunciar la definición del concepto de función, pero fracasan en decidir si una gráfica representa o no una función (Cuesta, 2007).

En la misma línea de investigación, Vargas (2011) de la Universidad Nacional de Colombia, desarrolla una propuesta didáctica titulada "El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, para trabajar en el grado noveno" que plantea como meta el diseño de una unidad didáctica basada en la modelación de situaciones de las ciencias (física), permitiendo el aprendizaje de la función cuadrática; fundamentada a través de la revisión histórica, epistemológica y didáctica del concepto.

El problema planteado, hace referencia a la estructuración de unidades didácticas que faciliten el aprendizaje de la función cuadrática con la modelación de situaciones de las ciencias físicas. Apoyándose en la evolución histórica del concepto de función en sus distintas etapas; en lo epistemológico, al estudio de las concepciones del concepto por parte de los estudiantes y su conexión con las formas de mostrarlo en el aula; en lo didáctico, con aportes a dificultades de los estudiantes como el no saber el comportamiento de una magnitud, su dependencia, las transformaciones entre los sistemas de representación asociadas a la falta de trabajo contextualizado a otras ciencias y sin modelación (Vargas, 2011).

La metodología de la investigación de Vargas (2011) es cualitativa. Inicia con el análisis de la evolución histórica del concepto de función, los puntos de vista desde lo analítico y conjuntista, la definición de función cuadrática y la modelación matemática en las ciencias físicas; continua con el desarrollo de la propuesta didáctica al diseñar la unidad e implementarla con elementos curriculares, problemas de la física (el movimiento) y finaliza con el análisis de resultados, conclusiones y recomendaciones.

El resultado y la conclusión de la investigación muestra el valor de la modelación al simular un pedazo de la realidad con fenómenos de las ciencias naturales (física), ya que permite a los estudiantes construir un adecuado conocimiento, encontrar la estructura conceptual en la situación, el comportamiento de las variables y su dependencia, las maneras de representarlas, el trato adecuado de algunas dificultades y obstáculos que sirven de apoyo para este proyecto (Vargas, 2011).

En el aprendizaje es importante hablar de la comprensión, y cómo se establecen los criterios que pueden alcanzar los estudiantes, pretendiendo superar algunos errores, dificultades y obstáculos. Documentados en la investigación de Murillo (2013) de la Universidad Tecnológica de Pereira a través de su tesis "Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grado noveno y once de los colegios públicos de la Virginia", siendo el objetivo general, identificar y caracterizar niveles de comprensión del concepto de función, que tienen los estudiantes (Sfard, 1991).

El problema planteado en esta investigación, son las dificultades que presentan los estudiantes por la poca comprensión del concepto de función debido a su relación con otros conceptos matemáticos necesarios como: dominio, codominio, crecimiento, decrecimiento y extremos, la existencia de muchos lenguajes para su representación (verbal, tabla de valores, graficas, expresiones y diagramas) y su relación con la geometría y el álgebra; que se ven reflejados más adelante cuando desarrollan el cálculo diferencial e integral; presentando problemas en el ingreso a la universidad en carreras de ingeniería y tecnología.

Por esta razón se efectuó una investigación cuantitativa, descriptiva de análisis de casos con lo cual se aplicó un cuestionario a un grupo de estudiantes; las preguntas se planearon y organizaron teniendo en cuenta las diferentes representaciones de una función y el modelo de construcción de la comprensión, propuesto por Sfard (1991). En la fase inicial se presenta una corta evolución histórica del concepto de función hasta distinguir las diferentes representaciones en el siglo XXI y su implementación en el currículo colombiano; en la fase intermedia, el fundamento teórico se basa en la estructura del concepto de función, la comprensión con su proceso y el análisis de las actividades del cuestionario para caracterizar algunos niveles.

Por último se realiza el análisis de los resultados por medio de un procedimiento estadístico descriptivo que evidencia algunos elementos importantes que caracterizan a los estudiantes respecto a la comprensión (Murillo, 2013). La conclusión que da soporte a este proyecto de investigación, muestra que los docentes reconocen la enseñanza del concepto de función como una relación entre dos conjuntos, y no promueven en los estudiantes el aprendizaje a través de situaciones del contexto, por tal motivo no llegan a la modelación situaciones.

Es importante destacar investigaciones que utilizan planteamientos desde la enseñanza para la comprensión; tal como lo hace Cano (2012) de la Universidad de Antioquia, en su tesis de maestría titulada "La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión". Plantea como objetivo, explorar los elementos que evidencian la comprensión del concepto de función bajo el marco conceptual de la enseñanza para la comprensión enfatizando en su definición. El problema expuesto, es la dificultad que tienen los estudiantes en la comprensión de función, debido a su concepción como un procedimiento algorítmico que lleva a confundirlo con su representación analítica, acrecentado por la complejidad tal y como lo sugiere Dubinsky (1992).

Cano (2012) realizó una investigación de tipo cualitativo por medio del estudio de casos, el proyecto se organizó con los aportes teóricos de Vinner (1991), con el rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Sierpinska (1992), sobre la noción de función y Eisenberg (1991), con funciones y dificultades asociadas a su aprendizaje. Más adelante con la elaboración de la unidad curricular que contiene metas y desempeños de la comprensión de funciones se explora la definición del concepto, involucrando los elementos del marco conceptual de la enseñanza para la comprensión, mediante "una unidad curricular para diseñar y dirigir las prácticas de aula" (Blythe, 1998, p.14).

Los resultados del estudio, muestran que los estudiantes aclaran solo dos definiciones del concepto de función como son la de dependencia y correspondencia, luego construye relaciones funcionales, y en situaciones del contexto usan diferentes formas de representación, reconocen las magnitudes, así como su dependencia (Cano, 2012). Esta investigación, aporta a la comprensión del concepto "Función cuadrática", el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático, siendo significativo el aprendizaje.

Se continua por la misma línea, Mosquera (2015) de la Universidad Nacional de Colombia en su tesis de Maestría titulada: "Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real, en el marco de la enseñanza, de la comprensión para fortalecer el pensamiento Variacional", el propósito es elaborar una propuesta en el marco de la enseñanza para la comprensión que posibilite en los estudiantes el aprendizaje de las funciones cuadráticas de variable real para fortalecer sus competencias en el pensamiento variacional, con énfasis en la modelación, resolución y el planteamiento del problema.

La problemática planteada, señala las dificultades como el uso inadecuado de operaciones básicas, la confusión al graficar un punto en el plano y la falta de aplicabilidad presentes en la comprensión del concepto de función cuadrática, que es posiblemente ocasionado por un aprendizaje memorístico, con explicaciones carentes de significado y sin ninguna aplicabilidad al contexto cercano del estudiante.

El método de esta investigación es cualitativa, de tipo etnográfico, al establecer relaciones entre variables que describen y explican un fenómeno. Ahora bien, los diseños etnográficos intentan analizar ideas, creencias, significados, prácticas de grupo y conocimientos (patton 2002). En conclusión, la etnografía involucra la descripción e interpretación profunda de la situación o temas escogidos (Creswell, 1998). En la primera fase, se hace un rastreo sobre la documentación del Ministerio de Educación Nacional, lineamientos, estándares y metodologías enmarcadas en la enseñanza para la comprensión; en la siguiente fase se construye una prueba diagnóstica y el diseño de actividades didácticas para la modelación de la función cuadrática, con la teoría de la enseñanza para la comprensión y por último, se realiza la intervención, el análisis de resultados y las conclusiones.

Los resultados de la investigación, muestra la construcción del concepto de función cuadrática por partes de los estudiantes, al comprender la dependencia entre magnitudes, usar la tabla, transformando los datos al sistema de representación gráfico, encontrando el vértice y los puntos de corte con el eje x, también presentan dificultades algebraicas que les impide encontrar la expresión de la situación. El aporte de esta investigación, es la construcción de la prueba con actividades propicias para motivar la construcción del concepto a través de la modelación de situaciones (Mosquera, 2015).

1.2 Planteamiento del Problema

Para los docentes es importante conocer la comprensión (Sierpinska, 1992) que tienen sus estudiantes frente al conocimiento que están desarrollando, ya que el aprendizaje está orientado al avance de procesos desde el algoritmo mismo, no logran hacer descripción de situaciones del mundo real, no hay interés por parte de los estudiantes en la identificación de los cambios de una magnitud, llevándolo incluso a confundirlo con su representación (Díaz, 2013); debido a la complejidad de la noción de función surge la necesidad de buscar nuevas metodologías que permitan disminuir los bajos resultados en el área de las matemáticas en las pruebas saber.

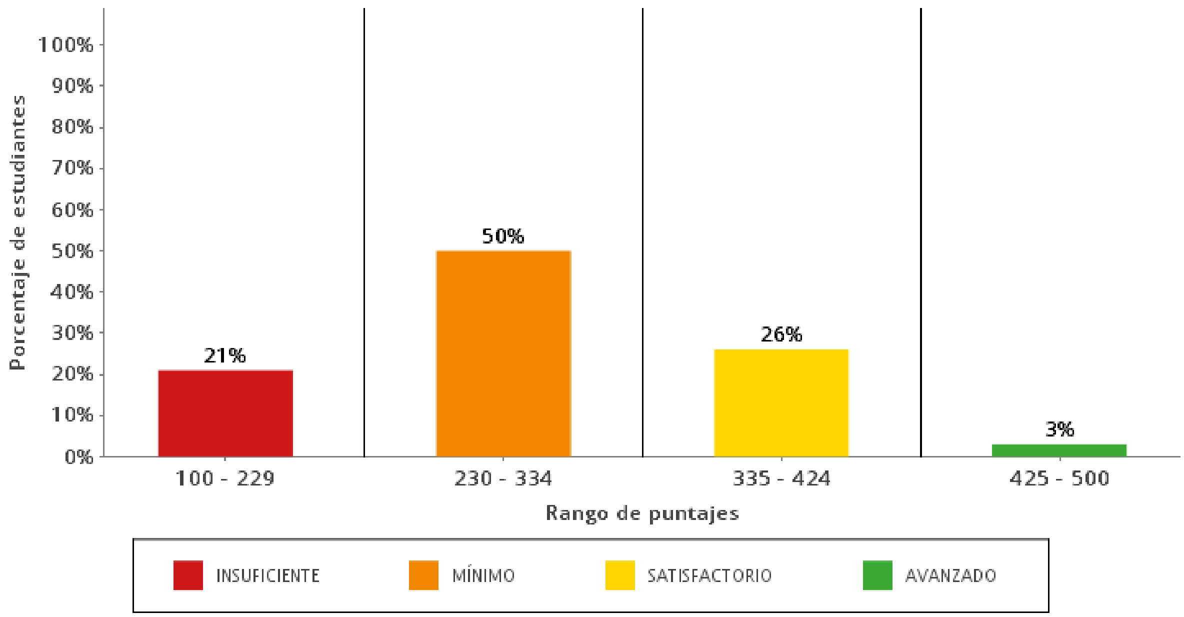
La construcción del aprendizaje desde el algoritmo, no suscita la obtención de habilidades ni desarrolla el pensamiento variacional (Vasco, 2010) debido probablemente a que el trabajo en la escuela no prioriza la identificación de regularidades, *"de patrones que se repiten periódicamente"* (MEN, 2014, p. 66), partiendo de la observación y análisis en el comportamiento de las magnitudes en una situación específica, ni logran los estudiantes relacionar dichas regularidades con su representación algebraica (Quintero, 2015). En su sentido simbólico (Kaput, 1989a.), en ocasiones no existe en los estudiantes el significado de la variable, porque se aborda la enseñanza de manera estática, limitando el desarrollo de competencias, por ende no se comprende la noción de función como relación (MEN, 2014).

Al intentar modelar situaciones de otras ciencias, se genera un caos cuando aparece la noción de función como relación en la física, al pretender explicar el movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, la caída libre y el lanzamiento de proyectiles; a la par en economía, para representar la función de ingresos, costos y demanda; en la ingeniería al edificar puentes de forma parabólica y en las matemáticas, al dar solución a problemas de geometría y cálculo diferencial e integral, que son de gran importancia para obtener buenos resultados en las pruebas externas (Díaz, 2013).

La planificación del área no abarca la problemática en el aprendizaje de un contenido matemático en particular, debido a que el docente desconoce la manera de abórdalas, es aquí donde se necesita una herramienta metodológica, que permita al estudiante superar los obstáculos, dificultades y errores con la concreción de actividades para evidenciar su comprensión. (Bedoya, 2002).

En la Institución Educativa Escuela Normal Superior "Miguel de Cervantes Saavedra" (NSMCS) de Guacarí, Valle del Cauca. Durante las pruebas Saber 2017, se evidencia esta problemática en el grado noveno, ya que muchos estudiantes no superan las preguntas de menor complejidad (Ver figura 1) y les cuesta reconocer algunas representaciones de la función, pasar de un registro a otro y modelar situaciones sencillas de variación, observándose así bajos resultados.

Figura 1 Resultados Prueba Saber 9 2017 en Matemáticas.



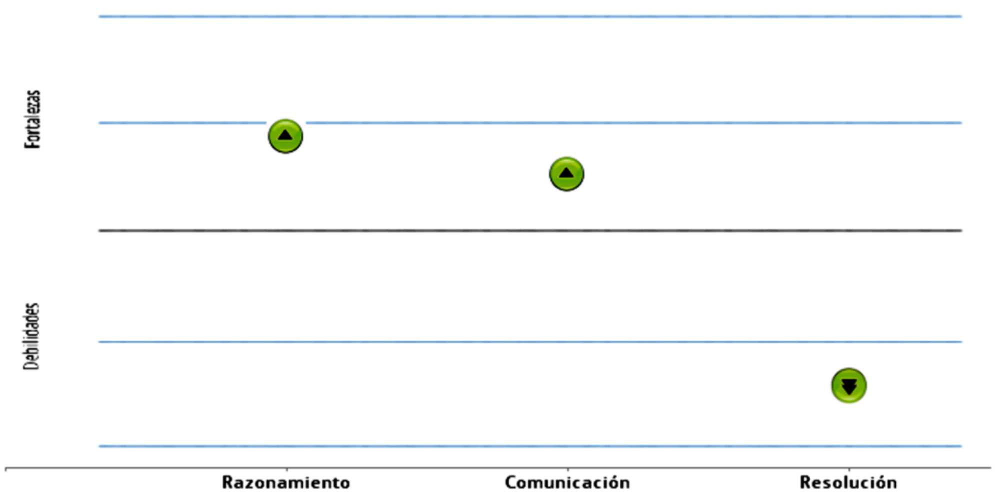
Fuente. SNIEE-ICFES

Así mismo durante la prueba Saber 9, se evalúan tres competencias definidas así:

- Razonamiento y argumentación.
- Comunicación, representación y modelación
- Planteamiento y resolución de problemas

Mostrando un avance en las dos primeras, y no en la tercera (Figura 2), cada competencia valora los componentes Numérico-Variacional, Geométrico-Métrico y Aleatorio. Esto expresa que los progresos mostrados, es el total de los tres componentes; dejando entre ver más adelante (Figura 3) que en la componente Numérico-Variacional, presentan poca identificación de las nociones matemáticas que intervienen, y sus distintos sistemas de representación que permiten desarrollarlo.

Figura 2. Competencias Evaluadas en Matemáticas Prueba Saber 9

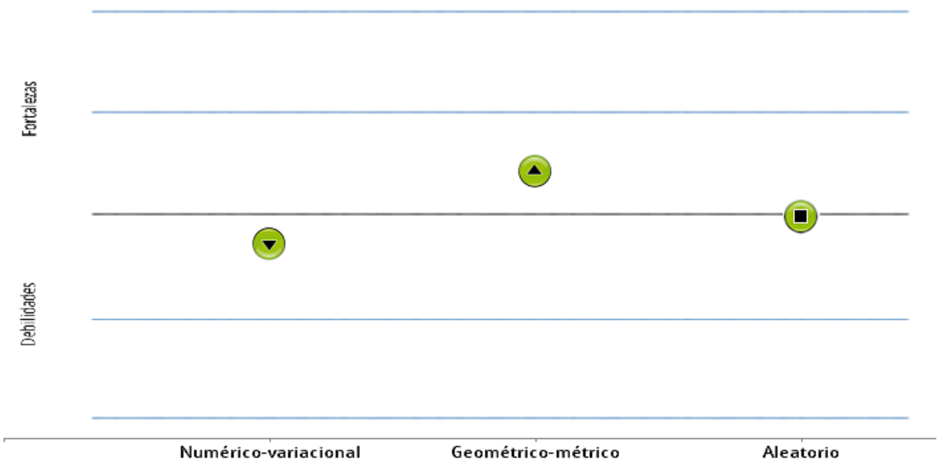


Fuente. SNIEE-ICFES

La figura 3 muestra las debilidades del componente Numérico-Variacional presente en cada competencia, el cual es importante reforzar para el razonamiento, la identificación de regularidades en secuencias numéricas, el manejo de expresiones equivalentes, su interpretación a tendencias representadas en un grupo de variables relacionadas con el uso de representaciones y operaciones en contextos de proporcionalidad directa e inversa (MEN, 2014).

Para la comunicación, es significativo identificar y establecer relaciones entre propiedades de las gráficas y las ecuaciones algebraicas, como también describir y representar contextos de variación, asociándolo a distintas representaciones. En la resolución de problemas, se debe encaminar a la modelación de situaciones de variación a la noción de funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos (MEN, 2014)

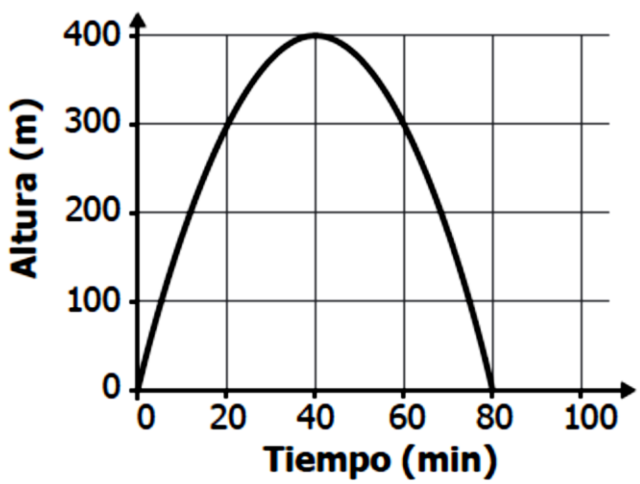
Figura 3. Componentes Evaluados en Matemáticas Prueba Saber 9 2017



Fuente. SNIEE-ICFES

Tal como se evidencia en la pregunta liberada de la prueba saber 9: "*La gráfica muestra la altura de un globo respecto al tiempo de elevación.*

Figura 4. Pregunta Liberada Saber 9 2017 Matemáticas.



Fuente: Prueba Saber 9 – ICFES.

En relación con el globo, es correcto afirmar que

A. *alcanza la altura máxima en 400 min.*

B. *el tiempo que el globo dura volando es 40 min.*

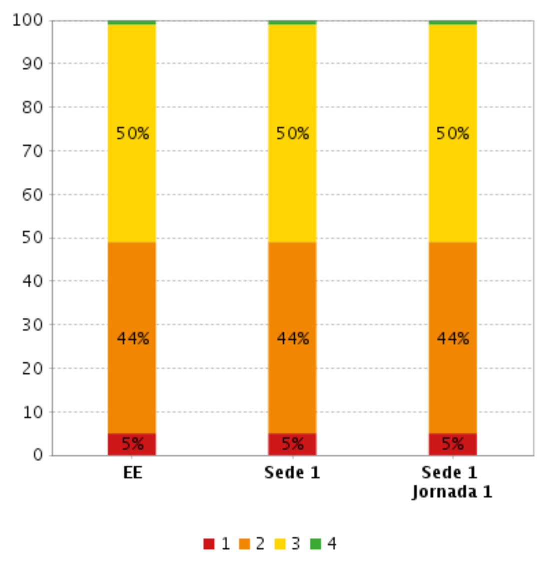
C. *la altura máxima que alcanza es 40 m.*

D. *gasta 80 min en hacer todo su recorrido".*

Esta pregunta corresponde a la competencia de razonamiento y argumentación, con la intención de interpretar tendencias, que se presentan en una situación de variación con nivel de desempeño satisfactorio, para responder, el estudiante debe identificar el fenómeno (Puig, 1997), manejar la noción de función como relación, los distintos sistemas de representación con las magnitudes que están en juego, y relacionar dos tipos de representación, como el verbal y el gráfico (Kaput, 1987a).

En saber once se definen las competencias presentes en los cinco pensamientos que se describen en los Lineamientos y Estándares, pero solo en la competencia de interpretación y representación, el estudiante debe comprender y transformar la información presentada en distintos registros como tablas, gráficos, conjuntos de datos, diagramas, esquemas (Kaput, 1985) , así como la capacidad de utilizar estos tipos de representación para extraer información relevante que permita entre otras cosas, establecer relaciones matemáticas e identificar tendencias y patrones. Con el desarrollo de esta competencia, se espera que un estudiante manipule coherentemente registros, entre los cuales pueden incluirse el simbólico, el natural, el gráfico y los que se dan en situaciones que involucran las matemáticas y otras ciencias.

Figura 5. Porcentaje de Estudiantes por Niveles de Desempeño prueba Saber 11-2017 Matemáticas.



Fuente. SNIEE-ICFES

El porcentaje de desempeño de estudiantes en la prueba saber del 2017, en el nivel 1 y 2 es del 49%, revelando así que solo superan las preguntas de menor complejidad del exámen; estos resultados indican, renovar la enseñanza de los conceptos matemáticos y sus relaciones funcionales, para alcanzar las competencias.

Para el profesor es un insumo fundamental conocer los actos de comprensión (Sierpinska, 1992) que manifiestan sus estudiantes en la medida que ese conocimiento le va a permitir tomar decisiones frente a las estrategias metodológicas, frente al tipo de actividades que se proponen y frente a los recursos que se implementan (Bedoya, 2002).

Atento a esto se plantea el siguiente interrogante:

¿Qué actos de comprensión manifiestan los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra, cuando desarrollan una unidad didáctica local que moviliza la noción de función como relación?

1.3 Justificación

Cuando el contenido matemático es aprendido por el estudiante de manera organizada a través de estrategias, motivan el desarrollo de razonamientos y habilidades para ser usados en su cotidianidad; por ejemplo: al hablar de los números naturales se ve la importancia del dinero, los ingresos y las cuentas que se deben pagar al realizar una compra (Gómez, 2002). Pero comprender un contenido matemático, no solo es entender su definición como tal, es descubrir la posición que tiene en una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones; para la noción de función como relación es importante entender su definición, los sistemas de representación que los llevan a observar el comportamiento de las magnitudes, las partes que la describen y la solución de un problema del mundo real, entonces se puede afirmar que se ha comprendido alguna cosa respecto a su conocimiento (Sierpinska, 1992).

La noción de función como relación aparece en las ciencias dando explicación a diferentes situaciones, como en la física al estudiar la trayectoria de una pelota lanzada al aire o la forma que describe un rio al caer desde lo alto de una montaña, el movimiento uniformemente acelerado y el movimiento en dos dimensiones, donde la variación del tiempo con respecto a la posición, es una relación entre magnitudes. En la ingeniería civil, para resolver problemas específicos, al construir puentes en forma de arco parabólico y colgante que tienen que soportar un peso uniformemente distribuido, tomando como punto de partida la ecuación de segundo grado. Es aplicable a su vez en la biología para estudiar los efectos nutricionales de los organismos (Cano, 2012).

Así mismo, se puede describir cuando un animal salta de una rama a otra o un delfín salta sobre el agua, en el tenis, el lanzamiento de bala, en fuentes de agua y demás; todas estas situaciones desarrolladas a nuestro alrededor muestran la importancia del aprendizaje de la noción de función como relación para posibilitar su conocimiento (Torres, 2011).

En la Institución Educativa Normal Superior “Miguel de Cervantes Saavedra” de Guacarí Valle. El aprendizaje de los contenidos matemáticos genera amplios conocimientos que invitan a los estudiantes a obtener una mirada diferente del papel de las matemáticas en sus vidas, viendo la aplicabilidad que tiene éste en su cotidianidad, al desarrollar su pensamiento matemático.

En ese orden de ideas, se propone diseñar una unidad didáctica local de la noción de función como relación en el grado noveno, para reducir la brecha que existe entre el plan de aula de una asignatura y la solución de problemas relacionados con un concepto específico en situaciones propias del contexto (Rico, 1997b), convirtiéndose así en una herramienta de investigación, que da respuesta al problema planteado en la investigación, en tanto que es un elemento primordial para la planificación de las actividades de aula por parte del docente, ya que permite conocer el estado de comprensión que tienen sus estudiantes para la toma de decisiones (Bedoya, 2002).

Aunque para Pedro Gómez (2007) el análisis didáctico, es explicado como un procedimiento donde el profesor diseña, aplica y evalúa actividades de enseñanza y aprendizaje; el interés de este trabajo se centra en la evaluación del aprendizaje a través de algunos actos de comprensión (Sierpinska, 1992) en los estudiantes, pero el aspecto de la enseñanza que atañe al docente se toma a manera de reflexión, aunque no es un objetivo de esta investigación.

1.4 Objetivos

1.4.1 General.

Identificar los actos de comprensión que manifiestan los estudiantes de grado noveno de la Institución Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra cuando se moviliza la noción de función como relación desde una unidad didáctica local.

1.4.2 Específicos.

1. Determinar un Modelo Local de Análisis Didáctico que movilice la noción de función como relación y articularlo con algunos elementos curriculares desde una unidad didáctica local.

2. Identificar desde los resultados obtenidos durante la implementación de una unidad didáctica local, algunos elementos que permitan establecer los actos de comprensión que logran los estudiantes respecto a la noción de función como relación.

.

Capítulo 2

2. Marco Conceptual

En este capítulo, se detalla el origen y significado del modelo local de análisis didáctico configurando así un nivel del currículo, donde se conceptualizan las actividades en los distintos análisis (contenido, cognitivo, instrucción y actuación) que orientan al profesor de matemáticas para elaborar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica local, que se centra en un contenido matemático especifico con situaciones propias del contexto, para que los estudiantes, dentro de las expectativas de aprendizaje, logren alcanzar algunos actos de comprensión al identificar, discriminar y generalizar. Asimismo, se hace un acercamiento histórico del contenido matemático a desarrollar.

2.1 Aproximación a la Comprensión en Matemáticas

Buscar una definición con exactitud del término “comprensión”, no es fácil; más aún si se refiere al contexto matemático, “estas dificultades surgen de la falta de capacidad para distinguir entre el conocimiento y la comprensión” (Sierpinska, 1990), pero Skemp (1978) hace una diferenciación entre la comprensión y el conocimiento llamando la atención de la comunidad educativa matemática de Norte América; aclarando las confusiones creadas por la filosofía del momento, que generalmente igualaban la comprensión con el conocimiento (Meel, 2003).

Skemp (1982), se dedica a la comprensión matemática; clasificándola en una relacional (Saber qué hacer y por qué se debe hacer), otra instrumental (Tener reglas con una razón), posteriormente documenta otras dos; la lógica (Organización de acuerdo a una prueba formal) y la simbólica (Simbolismo y notación para las ideas asociadas); de las diversas conexiones entre las anteriores ideas señaladas, surge el conocimiento (Meel, 2003).

En la actualidad se plantean conceptos constructivistas de la comprensión, el modelo Piere y Kieren (1991) sobre el crecimiento de la comprensión y la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) de Dubinsky (1991), los obstáculos epistemológicos o cognitivos (Bachelard, 1938; Cornu, 1991; Sierpinska, 1990b), la definición del concepto y la imagen del concepto (Davis y Vinner, 1986; Tall, 1989,1991; Tall y Vinner,1981; Vinner, 1983, 1991), las representaciones múltiples (Kaput, 1985, 1987a, 1987b, 1989a, 1989b) y una dicotomía entre las concepciones operativas y estructurales (Sfard, 1991, 1992, 1994); ya que la construcción de la comprensión se da por medio de la formación de objetos mentales y sus conexiones.

El trabajo de Piaget (1969) sobre el proceso de "abstracción reflexiva"[1], es la toma de conciencia, producto de las asimilaciones y acomodaciones que modifican los esquemas mentales, influenciando en el desarrollo de la teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) de Dubinsky, donde la comprensión inicia con el tratamiento de objetos (físicos o mentales) antes elaborados, con el fin de crear acciones que se interiorizan para producir procesos, luego se encapsulan para fabricar objetos; finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se organizan en esquemas (Meel, 2003).

Dubinsky (1991) toma de Piaget, las construcciones esenciales para desarrollar conceptos matemáticos (la generalización, la interiorización, el encapsulamiento, la coordinación y la reversión), donde lo más importante para la comprensión es la acción, que se realiza con la manipulación de objetos físicos o mentales dentro de la experiencia misma del estudiante; la acción se interioriza cuando se repite, convirtiéndose en una construcción interna llamada proceso, si el estudiante puede reflejar ese proceso para transformarlo por medio de una acción se considera como encapsulado para describirlo y revertirlo con el fin de obtener nuevos procesos.

Es así como Sierpinska (1990b) construye su idea de la comprensión como acto o como proceso "*La comprensión es un acto, pero un acto relacionado con un proceso de interpretación, que es una dialéctica del desarrollo; entre más y más se elaboren suposiciones, se validen dichas suposiciones"* (p.26). Los conceptos matemáticos son creaciones de la mente como producto de las definiciones; de este modo cuando se construye un concepto a través de actos de comprensión,

[1] Abstracción reflexiva: proceso por el que el individuo obtiene conocimiento a partir de la experiencia lógico-matemática que surge de sus propias acciones sobre los objetos. (Psicología del desarrollo) © https://glosarios.servidor-alicante.com

es necesario conocerlo específicamente, para ayudar al proceso es necesario conocer los obstáculos epistemológicos asociados a él.

2.1.1 La Comprensión como acto desde Sierpinska

Sierpinska (1990b) explica el concepto de comprensión basado en Ricoeur, Dewey, Dilthey, Lindsay y Hussler fundamentada en las ideas y conexiones de pensamiento ignorados por el estudiante, que genera obstáculos epistemológicos; ya que es la interacción del estudiante en el salón de clases por medio de un proceso mental que describe los niveles de conocimiento de un concepto matemático teniendo presente su saber cultural; lo anterior se obtiene a través de las prácticas que éste ha vivido, con base en su modelo mental y con el cual se identifica al enfrentar se a situaciones matemáticas que involucran la noción de función como relación.

El aprendizaje de la noción de función como relación a veces en el aula de clase es probablemente parcial, porque se trabaja la expresión algebraica, la tabla y la gráfica, de manera mecánica si se presenta una situación que la involucre, el estudiante recurre al nivel de comprensión que tenga, y si este aprendizaje no permite solucionarlo, genera en él una reorganización estructural de conocimientos y creencias; esta forma de conocimiento es considerada por Sierpinska "obstáculo epistemológico", cuando el estudiante vive esta experiencia contradictoria se ve obligado a reorganizar su forma de conocimiento, dando lugar a un "acto de comprensión" significativo el cual se presenta en cuatro categorías:

- **Identificación** (de un objeto entre otros objetos) es un proceso mental mediante el cual se logra que un objeto de comprensión se destaque en la conciencia.
- **Discriminación** (entre dos objetos) se cumple este acto, cuando se toma conciencia de la existencia de dos objetos notando sus diferencias y sus propiedades relevantes.
- **Generalización** es el proceso mental que da la posibilidad de considerar un objeto de comprensión como un hecho singular de otra situación.
- **Síntesis** con este acto de comprensión se exploran las relaciones que conectan diferentes generalizaciones, por medio de un principio unificador organizado como un todo.

La función, presenta una definición precisa, pero en el momento en que la noción es aplicada, esta adquiere diferentes significados, dependiendo de los contextos en que es usada; así por ejemplo, la relación entre magnitudes, las coordenadas de un punto, las transformaciones de una representación a otra o cuando se busca en la variable independiente para obtener la variable dependiente (Sierpinska, 1992).

2.2 Análisis Didáctico

El comienzo del análisis didáctico se asocia al método filosófico (Grecia antigua) con tres concepciones, la primera, es la *noción escrutadora o regresiva;* basada en recuperar lo básico, pero con variedad de caminos; y su explicación o reconstrucción se muestra mediante el proceso de síntesis. La segunda la *disgregadora o reductiva* entendida desde Aristóteles, fundamentada en la investigación de componentes con los cuales el concepto se construye, o el desglose del concepto en las partes que lo forman y su síntesis se produce de los resultados anteriores. La tercera, la dimensión transformativa o interpretativa, la cual deduce, que después de descomponerse el concepto en partes, debe llevarse a un lenguaje específico y transcribirlo lógicamente correcto, logrando su primer producto en los trabajos de la filosofía analítica. "*Se entiende por análisis, un conjunto de métodos que resuelve de lo complejo a lo simple*" (Rico, Lupiañez, & Molina, 2013, p. 3).

El análisis didáctico hace que el docente, comprenda y desarrolle un concepto desde las distintas miradas que debe poseer un currículo; por consiguiente, es un instrumento didáctico que organiza los métodos de enseñanza y aprendizaje, asociándolos entre sí, especificando los objetivos, contenidos y actividades de aprendizaje (Rico et al; 2013).

Teniendo en cuenta, los referentes de calidad que el Ministerio de Educación Nacional instaura, difícilmente proporcionan orientaciones precisas para el constante trabajo al interior del aula; los docentes toman de su plan de área y de clase los contenidos matemáticos de forma ordenada y parcializada, dando cubrimiento a estos sin mirar que los contenidos presentan una problemática conceptual, cognitiva y de enseñanza de las matemáticas (Gómez, 2002).

Cuando se planifica la clase, el docente debe estar en la capacidad de reconocer y organizar los variados significados del concepto matemático a estudiar, seleccionando los que son el centro de la formación. Al concentrarnos en una noción matemática específica; es posible ampliar esta visión de la planificación y de la enseñanza, rompiendo la brecha entre la planificación del área y aula (análisis didáctico) y lo que sucede en la práctica docente (unidad didáctica).

Siendo así, el análisis didáctico, una conceptualización de un nivel de planificación local del currículo; es a su vez un procedimiento donde es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significado del contenido matemático escolar lo cual lo da el análisis didáctico, para efectos de diseñar una unidad didáctica local (Rico, 1992; Rico, 1997b).

Un análisis didáctico, inicia con la elección del concepto matemático a enseñar, teniendo en cuenta el saber previo de los estudiantes; con respecto al análisis de actuación (proporcionando información importante para una nueva planeación). Posteriormente, al ser elegido, se ahonda en el reconocimiento de sus elementos (conceptos y estructuras matemáticas), manejando las distintas relaciones que hay entre los elementos y sus representaciones; a lo que se denomina, análisis de contenido, proporcionando elementos para elaborar el análisis cognitivo donde se plantean las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje, para construir la noción de función como relación. De acuerdo a los anteriores análisis, se escogen las tareas escolares a realizar con el propósito de hacer el análisis de instrucción, donde se identifican las capacidades, competencias y posibles caminos de aprendizaje que pueden alcanzar los estudiantes, evaluando también la pertinencia de dichas actividades (Gomez, 2006).

2.2.1 Organizadores del currículo

Al llevar a cabo las categorías del Análisis Didáctico aparecen varios conocimientos que, unidos, se llaman Conocimiento Didáctico; constituidos por herramientas teóricas y conceptuales, nombradas por Rico (1997) como Organizadores del Currículo que se movilizan en el diseño, desarrollo y evaluación de Unidades Didácticas (Rico y Segovia, 2001). Son calificados como elementos teóricos y metodológicos, intermediarios del Análisis Didáctico que fundamentan los significados de los contenidos matemáticos en el aula (Bedoya, 2002).

De acuerdo a lo anterior, se hará una breve descripción de cada uno de los organizadores del currículo, el primero son los documentos curriculares oficiales e institucionales que lo soportan; el segundo da cuenta de la organización de los contenidos matemáticos, clasificando conceptos, procedimiento, estrategias y actitudes; el tercero proporciona el análisis fenomenológico; el cuarto son los aspectos visuales y simbólico del conocimiento matemático; el quinto son los errores y dificultades en torno a la comprensión del aprendizaje que debe saber el docente; en el sexto se encuentran los conocimientos difíciles o de mayor dificultad; el séptimo son materiales y recursos; el octavo es el desarrollo histórico de la matemática y el ultimo organizador es una bibliografía básica (Rico,1997).

El currículo tiene cuatro componentes, objetivos, contenidos, metodología, y evaluación para el diseño de unidades didácticas; en lo que concierne a esta investigación, se enfocó en un contenido en particular que corresponde a la noción de función como relación y cuando se desarrolla la unidad didáctica local, se aplica una metodología especifica llamada modelo local de análisis didáctico, con la realización de unos objetivos específicos que construyeron una evaluación para ser desarrolla en el aula de clase enmarcada en los actos de comprensión de Sierpinska (1992).

2.2.2 Modelo Local de Análisis Didáctico

Este análisis didáctico, genera varias utilidades, dentro de las que se encuentran, la planeación del currículo de forma local, al reducir las dificultades en la comprensión que posee un concepto matemático, a su vez cambia al docente no solo en su quehacer en el aula, sino en la forma de afrontar de manera científica su actuación, y una de las más importantes, es contribuir a la construcción de conocimientos útiles que lleven al estudiante a renovar su vida y por ende su contexto (Rico et al; 2013).

La propuesta del modelo local de análisis didáctico, compuesto por un marco teórico-práctico que organiza el análisis didáctico (Rico, 2007) necesario para la planificación, siendo este otro nivel del currículo, que posibilita el desarrollo gradual de propuestas de aula, producciones didácticas de los profesores, centradas en este caso en la evaluación y adecuadas al contexto institucional. Estas propuestas se validan mediante la práctica sistemática y reflexiva en el aula a través del análisis didáctico (Bedoya, 2002).

2.2.3 Análisis de Contenido

Es el punto de inicio del ciclo del análisis didáctico, debido a que la planificación y las actividades se hacen entorno a un contenido matemático específico, con la intensión de explicar de modo detallado la noción de función como relación y la manera de organizar el conocimiento para su comprensión; Rico (1997b) explica cómo se debe abordar dicho contenido; distinguiendo tres niveles de conocimiento; los hechos, son unidades de información y sirven como registros de información, los conceptos, son un grupo de hechos y las estructuras sirven para unir conceptos y sus relaciones.

Se hace necesario referirse a los sistemas de representación[2] que le dan un orden matemático a el contenido, suministrando significado a los estudiantes, y así poder llevar acabo las distintas operaciones de los sistemas de representación, como la creación de signos o expresiones, las operaciones, las transformaciones sintácticas y la traducción entre sistemas de representación (Goldin & Javier, 1998).

Es necesaria la visión del docente para la identificación de las nociones, que forman el contenido matemático, esas nociones en sí, son subestructuras matemáticas que conforman el contenido matemático (Gómez, 2002), determinando sus respectivas representaciones y fijan las relaciones entre ellas, Algunas de estas subestructuras pueden configurar fenómenos sociales, naturales y matemáticos.

2.2.3.1 Análisis fenomenológico

El término fenómeno, en el análisis didáctico, se refiere a una manera de hablar de la experiencia matemática en distintos contextos, dejando de lado la tradición filosófica y las ideas de Freudenthal (1973 y 1983) la palabra, que proviene de ‘phainómenon’ [fainwmenon], que significa “lo que aparece”; los contenidos matemáticos no están fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan (Puig, 1997).   La expresión análisis fenomenológico, en el contexto del análisis didáctico, según Luis Puig (1997) “*consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que la estructura conceptual es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos*” (p.62).

[2] Sistema de representación. Conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas.

De igual manera, para que exista la modelación de un fenómeno, se debe responder a la tripla: noción, fenómeno y relación, identificando particularidades estructurales que se pueden representar con elementos y propiedades de la subestructura, señalando los aspectos más relevantes dentro del contexto del fenómeno para asociarse entre sí; organizando cantidad de fenómenos naturales, sociales y matemáticos, donde es posible resolver problemas propios de estos, en general la resolución de estos problemas, utiliza algunos elementos y propiedades de la noción matemática en uno o más sistemas de representación. (Gómez, 2002)

2.2.5 Análisis cognitivo

Este análisis tiene como condición principal la noción matemática que se elaboró en el análisis de contenido; su aprendizaje permite la elaboración paulatina del conocimiento por parte de los estudiantes, cuando se les asignan tareas que lo acercan a la comprensión de la noción de un contenido matemático. Por tanto, esas tareas escogidas, establecen qué partes de la noción debe llevar acabo para desarrollarlas; el análisis de contenido, le da las herramientas para identificarlas, describirlas y caracterizarlas, teniendo en cuenta los errores en que pueden incurrir los estudiantes en su aprendizaje o las dificultades que los lleva a cometer dichos errores y documentarlos desde la didáctica para superarlos. Los estudiantes, deberán ser puestos a prueba en actividades que los lleven a comprender la noción, las representaciones, las relaciones entre sus elementos, los modelos involucrados que puedan aparecer (Gómez, 2002).

2.2.6 Análisis de instrucción

Es la organización y elección de las actividades de aprendizaje que hace el docente, por medio de la resolución de problemas, y con el buen uso de los recursos que se dispongan en el momento; los cuales pueden transformar la manera cómo los estudiantes representan la noción. Su manipulación permite simular el funcionamiento del contenido matemático y generar un nuevo significado; además, estas actividades según Gómez (2002) se refieren al contenido matemático detallado en la noción que aparece en el análisis de contenido, para cumplir los objetivos descritos al comienzo del ciclo, teniendo en cuenta los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo.

La reciprocidad que hay entre la noción matemática y los fenómenos (análisis fenomenológico), perciben las destrezas, razonamientos y estrategias que los estudiantes deben tener, al diferenciar el modelo matemático, asimismo formularlo, resolverlo e interpretar el fenómeno con las representaciones necesarias para obtener la resolución del problema y posteriormente, llegar a la comprensión (Gómez, 2002).

2.2.7 Análisis de actuación

Es la última fase del análisis didáctico; aquí el docente realiza una detallada y sistemática descripción del aprendizaje que los estudiantes adquieren de la noción matemática en la aplicación de la unidad didáctica. Las acciones hechas, y la forma como se enfrentan para resolverlas, se convierten en indicadores del conocimiento adquirido durante el ciclo del análisis didáctico (Gómez 2002, p.284).

Cabe anotar que en esta descripción se deben documentar las dificultades, obstáculos que persisten y que se pudieron superar al realizar las actividades; sin embargo, algunos estudiantes no la resuelven de manera satisfactoria, dando soluciones incompletas y con errores. Por tanto, el docente deberá estudiar estas soluciones con el fin de observar las dificultades que están ocultas en los errores, y los posibles obstáculos que explican estas dificultades.

2.2.8 Unidad didáctica

Es donde de convergen la teoría y la práctica de un modelo de análisis didáctico para implementar en el aula, compuesto por un grupo de ideas e hipótesis de trabajo que maneja los contenidos de la disciplina y los recursos precisos para el quehacer con respecto a estrategias de aprendizaje y organizando en la práctica escolar los diversos contenidos (Fernández, 1999). Es decir, una “hipótesis de trabajo” con la que se espera una serie de actividades, para alcanzar un aprendizaje significativo de los conceptos, actitudes y habilidades para los estudiantes.

2.3 Noción de Función como Relación

Para acercarse a la noción de función como relación, se precisa hacer una proximidad histórica, pasando por los diferentes períodos que permitieron su constitución, destacando situaciones, que dan luz en el momento de generar el análisis de contenido, para diseñar e implementar la unidad didáctica local que aproxime a los estudiantes a la comprensión de esta noción. Los diferentes significados y los sistemas de representación serán tenidos en cuenta en el análisis de contenido.

2.3.1 Aproximación Histórica de la Función

En Mesopotamia, aparecen las matemáticas babilónicas (2000-1600 a.C.), con algunos logros científicos cuyo principal interés era la solución de problemas astronómicos, al realizar situaciones de variación continúa, e intentar establecer la luminosidad y sombra de los planetas en relación al ángulo respecto al sol (Mesa & Villa-Ocha, 2008). En esta época, se encontraron tablillas de arcilla que contenían tablas del sistema sexagesimal[3], raíces cuadradas, cúbicas, potencias sucesivas y logarítmicas.

De la forma como los babilonios resolvían los problemas matemáticos, era una aproximación algorítmica a la ecuación cuadrática; pues no surgían en estos, conjeturas, raciocinios, ni demostraciones; sino el planteamiento de ejercicios tales como: en lo aritmético, la construcción de rectángulos, cuadrados, cálculo de raíces cuadradas; en lo geométrico, trazo de líneas y una serie de cálculos en sus tablillas que al ser unidos entre sí, llevan a la expresión algebraica conocida en la actualidad (Yuste, 2008). Por lo tanto, se observa la importancia de la exploración de regularidades.

En las matemáticas del antiguo Egipto, se encontraron diversos papiros que dan cuenta de su actividad matemática, influenciada por los árabes y babilonios; entre los papiros que más se menciona es el papiro de Rhind (1650 a.C), Berlín (1300 a. C.) ambos son documentos de carácter didáctico donde aparecen diversos problemas matemáticos que se acercan a las ecuaciones lineales, áreas de figuras planas, fraccionarios, el teorema de Pitágoras y el problema del volumen de una pirámide truncada. Pero se puede concluir que tanto en la cultura babilónica como en la

[3] El sistema sexagesimal es un sistema de numeración posicional que emplea como base aritmética el número 60.

egipcia existía un entendimiento del concepto de dependencia entre cantidades ya que una variación del radio tendría cambios en el cálculo de su área; al igual que muchas otras situaciones exploradas en numerosas tablas de valores de arcilla encontradas (Ugalde, 2013).

En Grecia, analizaron los problemas del movimiento, la continuidad y el infinito estudiados por Heráclito y Zenón, pero los filósofos de la época los consideraban externos a las matemáticas; es así que Aristóteles contrapone la física con el movimiento y la matemáticas como ciencia teórica. Euclides muestra en su libro los elementos, una matemática estática, llevando a pensar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en variables; transformándose negativamente para el avance del concepto de función como la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la misma confusión de los Griegos entre número y magnitud; idea inicial de la función, descrita en las nociones de cambio y correspondencia entre magnitudes variables (Ugalde, 2013).

En la edad media (600 a.C. hasta el siglo XIV) surgen las ciencias en la cultura árabe; brindando a las matemáticas el inicio de las nociones que hoy se conoce como las razones trigonométricas. Resultado de la explicación racional de los fenómenos astronómicos, ya que tenían curiosidad por construir un modelo del universo que respondiera a preguntas del por qué los planetas brillan, la lluvia cae y el fuego sube, para luego centrarse en el estudio del movimiento (Ugalde, 2013).

Es así como la matemática de los árabes estuvo influenciada por diferentes pueblos, sobresaliendo los persas, hindúes, judíos y cristianos; mejorando su trigonometría, construyendo las bases del álgebra y la aritmética a través de un texto de astronomía de origen hindú denominado Surya Siddhartha, muy diferente a la geometría de los griegos. Los persas acercaron a los árabes al álgebra, cabe mencionar a al-Jwārizmi, en su obra se recogen una serie de reglas para obtener soluciones de ecuaciones de una, dos incógnitas con influencia durante 500 años, sin la idea de variable y relación funcional (Ugalde, 2013).

Al siglo XIII (Europa) las matemáticas empiezan a tener una relación estrecha con las ciencias de la naturaleza, donde emergen posturas filosóficas muy diferentes a las de Aristóteles, en las escuelas de Oxford y París. Filósofos, tales como, Grosseteste y Bacon, afirman que las matemáticas son la principal herramienta para asimilar los fenómenos naturales; los planteamientos de su estudio no solo se basan en el por qué, sino también en el cómo suceden los fenómenos sujetos al cambio (la luz, el calor, la densidad, la velocidad) (Ruiz Higueras L, 1998).

No obstante, a finales del siglo XIII se indican dos métodos que expresan relaciones funcionales; el primero es “el álgebra de palabras” manipulado por Thomas Bradwardine de Oxford, en la mecánica, cambiando los números por letras del alfabeto, y así sustituir cantidades variables. Y en cuanto a las operaciones básicas, por palabras llegando de esta manera a las generalizaciones. El otro método es el geométrico; utilizando la representación gráfica, usual de algunos fenómenos naturales, al modelar la manera en que algunas cosas varían, propuesta por Nicolás Óresme en París alrededor de 1361. Trabajó con segmentos tanto verticales como horizontales para representar diferentes variaciones con la idea de formar una figura geométrica que explicaba las propiedades de la magnitud observada de un mismo objeto (Ugalde, 2013).

Para los siglos XV y XVI se evidencia el simbolismo en el álgebra, contribuyendo al progreso de la notación en la expresión de variable de una función o incógnita en una ecuación, tal y como en la actualidad se considera, debido a los aportes de Diofanto (250 d.C.) y Brahmagupta (589 d.C.); igualmente se observa la independencia de la trigonometría tanto de la matemática como de la astronomía heredada de los griegos y los árabes, planteadas en 1461 por el alemán Müller (Regiomontano) al elaborar las tablas de funciones trigonométricas. En este periodo surgen las investigaciones con el tratado del movimiento propuesto por Galileo Galilei, al vincular las variables específicas de un fenómeno, iniciando con toma de datos, los cuales se distinguían de Oresme, quien daba sus disertaciones de manera cualitativa, posibilitando al concepto de función, progresar al transformarse en un elemento fundamental para la noción de variable independiente (Ruiz, 1998).

Al concluir el siglo XVI Nicolás Chuquet, condujo a la definición de logaritmo en su tratado “La tripartición de la ciencias de los números” (1484), por medio del estudio simultáneo de la progresión aritmética y geométrica, encontrando una correspondencia establecida entre la variable independiente y dependiente; de igual manera, Neper trabajó los logaritmos de manera diferente, al comparar dos movimientos, uno uniforme y otro con velocidad proporcional a su distancia respecto a un punto fijo, expresando un sentido de continuidad y reciprocidad entre número y magnitud (Ruiz, 1998).

Para los siglos XVII y XVIII la evolución del concepto de función permanece con la construcción del universo de las representaciones analíticas, hechas por Fermat y Descartes, al llevar los objetos geométricos y sus características al plano de coordenadas cartesianas; ya que las rectas y las cónicas de un plano se lograron generalizar por ecuaciones de la forma $P(x, y)$ donde P es un polinomio con coeficientes reales de primer o de segundo grado, apareciendo así la geometría analítica (Ruiz, 1998). Descartes comprendía e identificaba el concepto de variable, constante y dependencia entre cantidades, el empleo de la variable independiente y dependiente, sin dar un significado explicito como lo muestra en su obra "El Discurso del Método" (Ugalde, 2013).

Para Sierpinska, (1990) el obstáculo epistemológico de la distinción entre número y magnitud, se fue superando con el uso de letras en álgebra, convirtiendo la noción de magnitud cada vez más abstracta. Los matemáticos se deslumbraron por el poder de las expresiones algebraicas, ya que lo único digno de estudio eran solo las relaciones que podían ser representadas por ecuaciones, creando de esta manera un obstáculo para el avance del pensamiento funcional (Ruiz, 1998).

El aporte de este tiempo para el fortalecimiento del concepto de función era la motivación por la astronomía y física; en especial de la mecánica. Newton en su "teoría de las fluxiones" muestra cómo las magnitudes están descritas y engendradas por los movimientos continuos, de manera tal que la variable "dependiente" se va generando en forma continua a partir de la variable "independiente"; usando la palabra "Gentium" (nacida o generada) primera expresión para referirse a función (Ugalde, 2013). A la par Leibniz en 1692 dio la definición y reglas del cálculo diferencial en su artículo "De Linea Ex Lineis Numero Infinitis Ordinatim Ductis" con la idea de ligar elementos geométricos a una curva, recurriendo así por primera vez al término "función" (1673) refiriéndose con el empleo de una parte en un cuerpo, o en una máquina; para posteriormente, ser relacionado el punto de una curva, con la relación dependencia entre la ordenada y la abscisa (Ruiz, 1998).

La comunicación mantenida entre Leibniz y Bernoulli (1694) lleva muy rápido el manejo de la palabra función como una expresión analítica; debido a la influencia del análisis infinitesimal (estudio de los limites, derivadas, integrales y series infinitas) pensado en sus comienzos desde la antigüedad por Arquímedes, reforzando los planteamientos de la geometría y la mecánica del siglo XVIII, llegando al concepto de número real como fundamento esencial de la teoría de funciones. Bernoulli en 1699 publica la primera definición de función en "Acta Eroditorum" indicando como notación la indeterminada x, φ la letra griega correspondiente a la característica de función, obteniendo φx (cantidad indeterminada que depende de la función).

El símbolo $f(x)$ fue propuesto por Euler en 1740 en el artículo “Additamentun” con una definición de función en la misma línea que su maestro Bernoulli con el cambio del término “cantidad” por el de “expresión analítica” en palabras de Euler *“Una cantidad variable es una cantidad indeterminada o universal que comprende los números positivos y negativos, los números enteros, fraccionarios, racionales, trascendentes e irracionales sin excluir el cero y los números imaginarios”*(Euler, cit. Por D´ Hombres y col, 1987, p. 193) con operaciones aritméticas, las potencias y las raíces asociadas a las funciones algebraicas y trascendentes.

El matemático francés Lagrange (1736 – 1813) citado en Ribnikov (1987) proporciona al cálculo un fundamento netamente algebraico, afirma que:

> El Álgebra no es otra cosa que la teoría de funciones. En el Álgebra las cantidades buscadas deben ser funciones de cantidades dadas, es decir, expresiones representadas por diferentes operaciones, las cuales es necesario realizar con esas cantidades para obtener los valores buscados definiendo la función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas (p. 237).

Para los años 1750 y 1801 Euler generó discusión al afirmar que una función debía o no ser expresada mediante una sola fórmula bajo el problema de las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades (el problema de las cuerdas vibrantes), obteniéndose dos soluciones, una determinada por una única fórmula mediante una serie trigonométrica (Daniel Bernoulli) y la otra cuya solución podía ser dada por fórmulas diferentes para distintos valores del argumento (Jean D’alambert); algunos matemáticos del momento especulaban que la solución de Bernoulli quedaba incompleta, pero Jean Fourier (1980) aclaró dicha discusión al demostrar que la suma de una serie infinita de funciones trigonométricas puede expresarse en intervalos diferentes mediante fórmulas distintas, mostrando que las soluciones de Bernoulli y D’alambert tienen similitudes donde lo substancial es como se expresan los valores que toma la función y no las distintas maneras en que se pueden expresar (Ugalde, 2013).

Los matemáticos del siglo XIX hacen definiciones de función con gran exactitud y precisión, que la proporcionada por Euler en base a la teoría de funciones instituida en 1797 por Joseph Lagrange. Cauchy (1827) citado en Youschkevitch (1976) la define en su "*Curso de Análisis Algebraico*":

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (p. 58).

La separación de la definición de función de Cauchy con respecto a la intuición geométrica, conduce al nacimiento de la teoría de conjuntos.

Lobachevsky (1834) citado en Ribnikov (1987) fija la condición en la cual la función debe asignar un valor a todo "número" en su dominio, y considera como independiente conocer en forma expresamente analítica el criterio de asignación de valores, definiéndola como:

> El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida (p. 229).

Pero Gustav Dirichlet (1837) citado en Boyer (1986) escribe:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (p. 687).

Siendo una definición con respecto a la regla de correspondencia e insinuar como una función podía ser expresada, incluso solamente con palabras; el propósito era desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas (Ugalde, 2013).

Más tarde Riemann (1858) citado en Desanti (1976) escribe:

> Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y (p. 192).

El trabajo de Georg Cantor *"los fundamentos de la aritmética"*, la obra de Richard Dedekind "continuidad y números racionales" y las investigaciones de Eduard Heine, Karl Weierstrass conducían en 1872 a formular la teoría rigurosa de número real.

En el siglo XX la definición de función se separa del empleo continuo de variables numéricas, consiguiendo una gran generalidad, al enmarcarse en la teoría de conjuntos, que permite hoy en día representar múltiples fenómenos de situaciones del contexto. Siendo la definición vigente de función establecida en la teoría de conjuntos; "Sean A y B conjuntos. Una función $f: A \to B$ de A en B es un subconjunto f de $A \times B$ tal que:

a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f ; y

b) Si (a, b) y (a, b') son elementos de f, entonces $b = b'$.

Capítulo 3

3. **Marco Metodológico**

En relación con el presente trabajo de investigación, se elige el uso del método cualitativo de investigación, dado que permite estudiar a fondo la situación, por medio de la correspondencia entre los actores del fenómeno y su contexto (Hernandez Sampieri & Fernandez Collado, 2014). Al considerar la dificultad del problema que se afronta en esta investigación, se hace inevitable discernir sobre las actividades educativas en caminadas hacia el aprendizaje en contexto, y así mismo dar orientaciones generales para respaldar las decisiones en la planificación curricular, logrando el conocimiento de los estudiantes.

Ante la situación planteada, la investigación es de enfoque descriptivo, interpretativo, ya que "*busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis"*, según lo refiere Danhke (1989, Citado por Hernández et al 2014, p. 102); es decir, se recogen datos sobre cada una de las condiciones, nociones, variables, contextos y se guardan los datos que se consiguen. Los instrumentos empleados para la toma de los datos son:

La observación en el aula: se recoge y ordena la información sobre la aplicación de la unidad didáctica local. En la aplicación de esta técnica, el investigador registra lo observado; para mayor facilidad se hace un registro a través de grabación de video, donde *"se está atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones"* en el comportamiento de los estudiantes, concerniente a sus intereses, dificultades y capacidades de aprendizaje en la organización la noción función como relación.

Hoja de trabajo: está constituida por situaciones que contienen actividades, las cuales agrupan lo realizado en los diferentes análisis (contenido, cognitivo e instrucción) de la noción función como relación, presentes en la unidad didáctica local, donde se recolectan las respuestas de los estudiantes, para posteriormente identificar los actos de comprensión manifiestos durante su desarrollo, así como los conocimientos adquiridos, de las situaciones de su contexto. Con el uso de descriptores para clasificar las respuestas de acuerdo a los objetivos de aprendizaje propuestos en cada situación y una descripción general de las mismas.

Revisión documental: respecto a este punto se tuvieron en cuenta documentos referentes al análisis didáctico en matemáticas, los libros de cálculo para la elaboración de noción de función como relación y las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional sobre el currículo; para planificar de manera sistémica el aprendizaje de las matemáticas, por medio de los Lineamientos, Estándares Básicos de Competencias y el PEI de la institución. Con estas orientaciones se organiza la planificación de las áreas obligatorias en concordancia con el enfoque pedagógico previsto en el proyecto educativo institucional (PEI), dirigido a los grados de octavo y noveno con sus conocimientos básicos, los procesos matemáticos generales y el contexto donde se lleva a cabo la propuesta. Para ello se organiza en dos fases, que corresponden al procedimiento de cada uno de los objetivos específicos trazados.

Rejillas para el análisis de la información: esta herramienta logra anotar de manera ordenada y precisa los datos logrados en la observación, la revisión documental y los descriptores para el análisis de las respuestas de los estudiantes con el propósito de llevar a cabo los objetivos propuestos en la investigación.

A continuación se describen cada una de las fases desarrolladas en la investigación:

- *Fase (1) Documental y diseño e implementación de la unidad didáctica local*

Se realiza el análisis curricular de los distintos elementos de la planificación global, que se consideran desde los lineamientos curriculares, estándares de matemáticas, derechos básicos de aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para dar cumplimiento al artículo 78 de la ley 115 de 1994, convirtiéndose como un referente en Colombia, para orientar el aprendizaje de la noción de la función como relación.

Por otra parte, se debe tener en cuenta el proyecto educativo institucional, su enfoque pedagógico, la organización del currículo, la política de calidad para el aprendizaje, la forma de constituir los ambientes de formación que unen las áreas afines, el grado donde se aprende el concepto de función, y el contexto, que permite definir de cierta forma el conocimiento útil para el estudiante. Considerando esta información, se edifican los criterios para la elaboración de una rejilla curricular que permite la construcción de los objetivos a considerar en la unidad didáctica local.

Aquí se construye el modelo local de análisis didáctico pensado para el aprendizaje de la noción de la función como relación, a partir de la recolección de la información que nutre los análisis que lo conforman (de contenido, cognitivo, instrucción y actuación), los cuales se articulan con los elementos curriculares, para el diseño de una unidad didáctica local que será implementada con los estudiantes del grado noveno, y que permitirá identificar los actos de comprensión que logran los jóvenes desde sus producciones.

- Fase (2) *Análisis de datos y conclusiones*

Se analiza en esta fase el instrumento de investigación en el aula, con las producciones de los estudiantes, observando para cada pregunta los hallazgos respectivos, tomando como referencia el modelo local de análisis didáctico, en especial el análisis de actuación o resultados; para así construir las respectivas conclusiones que obtienen del proceso de investigación.

3.1 Modelo Local de Análisis Didáctico

En este apartado, se lleva a cabo la construcción de un Modelo Local de Análisis Didáctico para el aprendizaje de la noción de función como relación, a través de los elementos curriculares, el contexto, el PEI, articulado a los distintos análisis que lo componen, tal como el de contenido con la noción a enseñar, que incluye el fenomenológico; que lleva a conocer la parte del mundo real a modelar, el cognitivo donde podemos establecer las expectativas, las limitaciones y las oportunidades en el aprendizaje, el de instrucción con las tareas propuestas y el de actuación donde se observa en los estudiantes algunos actos de comprensión, respecto al conocimiento adquirido.

3.1.1 Aproximación al Contexto

La Institución Educativa Escuela Normal Superior “Miguel de Cervantes Saavedra,” prepara a una población escolar de 1250 estudiantes del área rural y urbana del municipio de San Juan Bautista de Guacarí, y otros de municipios circunvecinos (El Cerrito, Palmira, Guadalajara de Buga, Pradera, Yotoco, Tuluá y Ginebra), distribuidos en los grados de preescolar, básica primaria y secundaria, media, escuela nueva y programa de formación complementaria (P.E.I, 2012). El ambiente sociocultural de la institución, se construye en el municipio; limitando al norte, con Guadalajara de Buga; al sur, con el Cerrito; al este, con Ginebra y al oeste, con Yotoco y Vijes. Posee un área de 166 kilómetros cuadrados. La parte urbana está conformada por 17 barrios y el rural por 15 corregimientos y 10 veredas (P.E.I, 2012).

Su organización política da muestra del interés de construir valores de responsabilidad, equidad, transformación educativa, al contar con dependencias públicas que determinan el estado social de derecho, tales como: Administración Municipal, Concejo Municipal, Juzgado, Notaria, Registraduría, Fiscalía, Comisaría de familia y la oficina de Cámara de Comercio perteneciente a la ciudad Guadalajara de Buga. De igual forma cuenta con servicios públicos domiciliarios (agua, energía, alcantarillado, aseo, alumbrado público, gas e Internet), con la red pública de salud integrada por un hospital de nivel I, centros médicos, odontológicos y de acondicionamiento físico de carácter privado. Las organizaciones religiosas tienen presencia en el municipio a través de la libertad de culto (P.E.I, 2012).

El área financiera está constituida por establecimientos bancarios y las cooperativas de ahorro y crédito; la vida sociocultural y económica se basa en el cultivo de la caña de azúcar; a través de los ingenios, el sector avícola y porcícola, con el trabajo formal e informal. El área rural se beneficia de productos agrícolas con la siembra de árboles frutales, café, maíz, y la pesca tradicional en el río Cauca, el humedal “Madre Vieja” y lagos artificiales.

La población pertenece a diversas comunidades étnicas (mestizas, afrocolombianas entre otras), que enriquecen la gastronomía en platos típicos como el arroz “atollado”, el manjar blanco, las empanadas, el “fiambre”, el tamal valluno, de pescado y el sancocho de gallina; la cultura está basada en danzas folclóricas, fiestas patronales en el área urbana y rural; la Institución Educativa Escuela Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra fortalece y mantiene vigentes las prácticas ancestrales de la comunidad que impulsan la educación; floreciendo con estos elementos esenciales, el enfoque Humanista- Científico en caminados a la obra de futuros maestros (P.E.I, 2012).

La población elegida para este trabajo de investigación, es el grado 9-3 de la institución educativa, porque su distribución de tiempo es apropiado para sesiones de más de una hora de clase, con una intensidad horaria de 3 horas semanales para matemáticas, 1hora de geometría y otra de estadística; el grupo está conformado por 28 estudiantes (9 mujeres y 19 hombres) entre las edades de 14 a 16 años, con conocimientos previos en operaciones y propiedades de números reales, manejo de procedimientos algebraicos, producto cartesiano, ubicación de coordenadas en el plano cartesiano, magnitud, noción de relación ,dominio y rango. El grado educativo de los padres de familia del grado 9-3, señala que un 80% solo ha finalizado la primaria, el 10% la secundaria, otro 5 % a cursado carreras técnicas y el 5% restante a finalizado una carrera universitaria (datos de la ficha de matrícula).

3.1.2. Desarrollo curricular

La invitación que hace el Ministerio de Educación Nacional concerniente a la enseñanza y a el aprendizaje de los estudiantes; comienza teniendo en cuenta los Lineamientos, Estándares; respecto a qué, y cómo se debe planear la enseñanza en los colegios del país y la manera como el docente ordena su área frente a las necesidades de la comunidad educativa, ligado al proyecto educativo institucional con los criterios claros para el aprendizaje que deben construir los estudiantes en el aula de clases.

3. 1.2.1 *Desde los Lineamientos y Estándares de Competencias*

Los criterios establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, señalan la trascendencia de potencializar las habilidades de pensamiento en los estudiantes por medio de la aplicación de contenidos para la vida; para que se comprendan bien, al desarrollar los diversos pensamientos matemáticos, tales como el pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, abarcando en este último el funcional. Estos contenidos deben ser asimilados; involucrando métodos y procedimientos, que le permitan al estudiante modelar situaciones y problemas tanto de otras ciencias como de la vida cotidiana; superando así el aprendizaje estático y tradicional.

Los Lineamientos de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias, advierten que los sistemas algebraicos y analíticos, generalizan patrones aritméticos, convirtiéndose estos en un fuerte instrumento para la modelación de diversos fenómenos de cambio y variación; con la importancia en la comprensión de la función. En el análisis de relaciones funcionales, se explica el cambio de una cantidad que produce el cambio en otra (magnitudes), y diversos modelos de dependencia entre variables; siendo estos conceptos, procedimientos analíticos y métodos pertenecientes al Pensamiento Variacional (MEN, 1998).

Es así como el aprendizaje de la función, tiene un valor importante dentro del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Al conocer el concepto, la variedad en los significados y los sistemas de representación (los enunciados verbales, la tabla, las gráficas cartesianas o sagitales y las expresiones analíticas) llevan a generar habilidades, destrezas para la variación en los estudiantes, forjando actitudes para su formación como son: el análisis, su registro y el uso del lenguaje matemático (MEN, 1998) .

Se plantean las representaciones tabulares como componente para iniciar el aprendizaje de la función, al acentuar la variación numérica; la tabla a la vez, se usa más adelante para construir la representación gráfica de situaciones del entorno sociocultural, restringidas al cuadrante positivo; en efecto las gráficas cartesianas, hacen posible el estudio dinámico de la variación al tomar los aspectos de dependencia entre variables, originando la noción de función como dependencia (MEN, 1998).

El manejo de la función en los contextos que aparece, en concordancia a los mundos que cambian (Sierpinska, 1992), se convierte en instrumento de conocimiento necesario para asociar patrones de variación entre magnitudes variables al pronosticar y controlar el cambio, esto colabora a los estudiantes en la comprensión de los conjuntos en el que se fija el dominio y el rango; separando la concepción de su existencia debido a una expresión algebraica, pasando así a los modelos elementales (lineal, afín, cuadrática, logarítmica…), prevaleciendo los patrones que las caracterizan.

El pensamiento variacional según Vasco (2010) es "*una manera de pensar dinámica, produce en la mente sistemas que relacionan variables internas de manera que covaríen en forma similar a patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes recortados de la realidad*"(p. 5) y se relaciona con otros pensamientos, al necesitar por ejemplo el uso de diversos sistemas numéricos en las funciones para su desenvolvimiento; con importancia del sistema de los números reales; este a su vez, es el pilar de los procesos de generalización propios a los otros pensamientos (MEN, 1998).

El Ministerio de Educación Nacional dentro del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, se compromete a la enseñanza y el aprendizaje específico de la noción de función como relación para los grados de octavo y noveno en concordancia con los siguientes estándares.

- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.

Y la necesidad de la participación de estándares de otros pensamientos, contribuyendo a una matemática más homogénea para su comprensión, se añade así los siguientes:

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

En consecuencia, las anteriores orientaciones hechas por el Ministerio de Educación Nacional contribuyen para la construcción del currículo institucional y por ende en el diseño de una unidad didáctica local que favorezca la comprensión de la función cuadrática y sus sistemas de representación aportando en el desarrollo de habilidades de pensamiento variacional y estructurando los sistemas algebraicos en una formación matemática con oportunidades a los estudiantes.

3.1.2.1 Desde el Proyecto Educativo Institucional.

La Institución Educativa Escuela Normal Superior "Miguel de Cervantes Saavedra" de Guacarí, tiene como misión y visión, la formación inicial de maestros líderes para atender los niveles Preescolar y Básica Primaria, con calidad, enfoque humanista-científico, de carácter investigativo, artístico, reflexivo e inclusivo; para que hagan de su profesión una fuerza creciente de realización personal, pedagógica, ambiental, social y cultural.

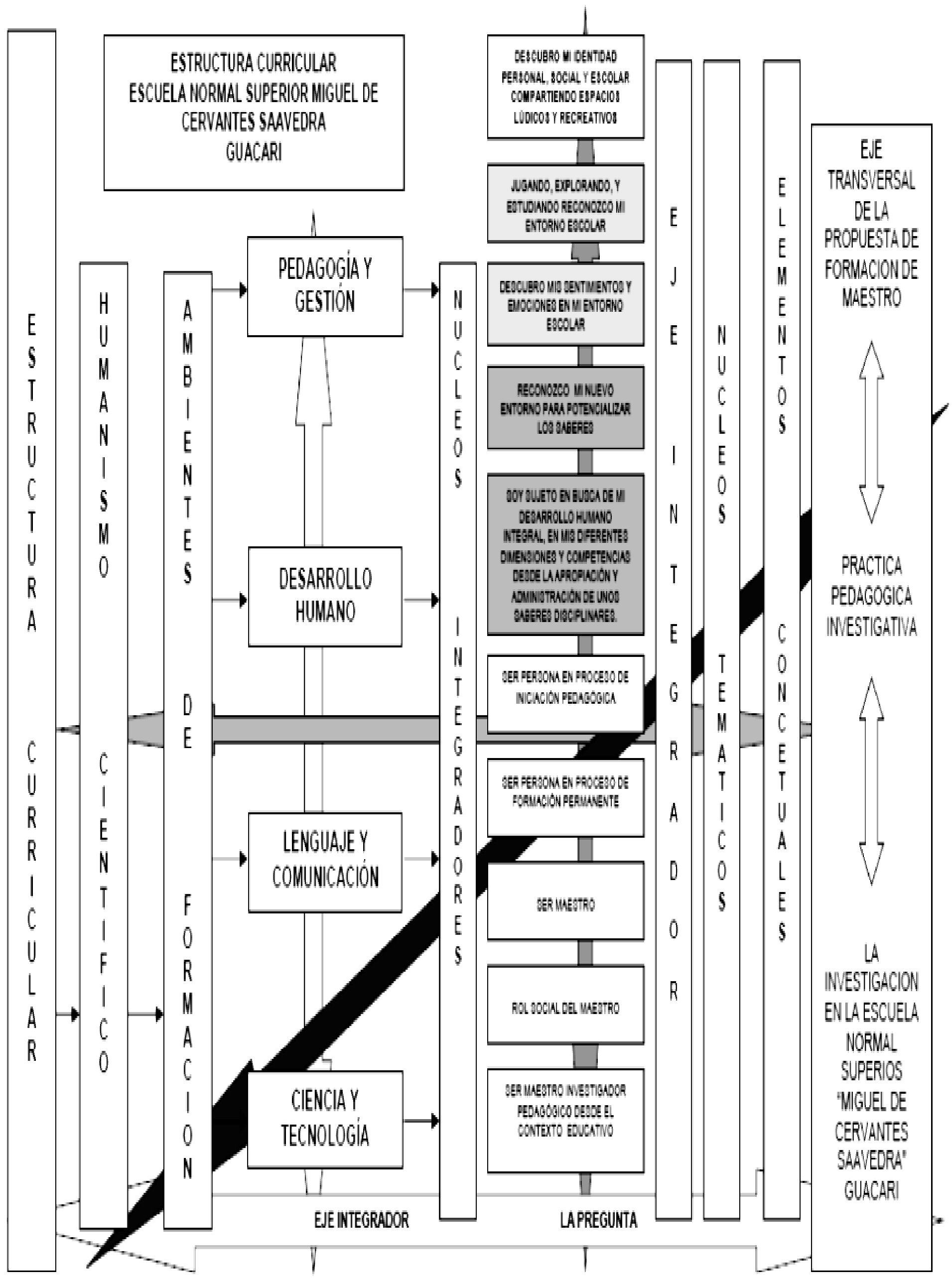
Existe una política de calidad general y otra curricular; en la general, se plantea el compromiso de ayudar al crecimiento de nación con todas las expectativas que establece la ley en el servicio estatal, cumpliendo las políticas del ministerio de educación nacional, dando forma al proyecto educativo. En la curricular, se habla del fomento de la creatividad, la profundización del conocimiento, la investigación y la implementación de estrategias didácticas e innovaciones que desarrollen en el estudiante habilidades de pensamiento y experimentación.

Es así como el modelo curricular se organiza de acuerdo a las disposiciones oficiales, las necesidades de los estudiantes y las condiciones institucionales; su desarrollo es orientado por ambientes de formación, siendo estos ambientes la organización de espacios académicos para la discusión y reflexión en torno a temas o problemas relacionados en la formación de maestros y los núcleos integradores de áreas definidas de acuerdo a la ley, con sus conceptos de estudio y ejes problematizados.

En la estructura del plan de estudios se privilegia la pregunta como eje integrador, permitiendo convocar las disciplinas para dar una solución. De acuerdo con Poggioli (2006) citado en P.E.I (2012) refiere que la pregunta pedagógica, es una poderosa estrategia cognitiva para la adquisición del conocimiento, al desarrollar el pensamiento divergente, procurando la solución de problemas; por eso su organización es mediante núcleos integradores, comenzando cada año lectivo, con una pregunta que se enunciara desde los propósitos de formación que se tienen definidos, siendo insumo del trabajo académico del colectivo docente. Matemáticas hace parte del ambiente de formación ciencia y tecnología con su eje integrador para los grados octavo y noveno *"*soy persona en busca de mi desarrollo humano integral, en sus diferentes dimensiones y competencias desde la apropiación y administración de unos saberes disciplinares.*"* (Ver figura 6)

El perfil del estudiante Cervantino, se caracteriza por un alto sentido de autoestima, responsabilidad, interés por la investigación, la ciencia, la tecnología, la cultura, los valores humanos y hábitos saludables; con el deseo firme de cambiar su vida y por ende su entorno. Por tanto, la matemática aporta a nuestro PEI, en la formación de un estudiante crítico, autónomo; capaz de analizar, sintetizar, interpretar y transformar su realidad, al desarrollar las competencias matemáticas por medio del conocimiento adquirido (P.E.I, 2012).

Figura 6. Estructura Curricular Normal Superior Guacarí- Valle



Fuente: PEI. Escuela Normal Superior de Guacarí

Tabla 1

Síntesis de la Relación Lineamientos, Estándares, PEI y Objetivos

Lineamientos Curriculares	Estándares	PEI	Objetivos
Las habilidades, destrezas y competencias que se proponen en el pensamiento variacional relacionadas con el concepto de función son: El reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; su descripción, modelación y representación en distintos sistemas de registro simbólico (verbales, icónicos, gráficos y algebraicos). Comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos. El aprendizaje con sentido del cálculo numérico, algebraico y del cálculo diferencial integral. La resolución de problemas sustentado en el estudio de la variación, el cambio y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las otras ciencias y la propia matemática.	***Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos.*** Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. ***Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos*** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. ***Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos*** Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. ***Pensamiento Métrico y Sistemas de Medida*** Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	Implementación de estrategias didácticas e innovaciones que desarrollen en el estudiante niveles de pensamiento y experimentación. En el nivel de Octavo a Noveno se hace énfasis en el uso comprensivo de los números reales en sus distintas representaciones en diversos contextos, en el significado de magnitud, dependencia entre magnitudes, expresión, ecuación e inecuación y la modelación de situaciones con funciones polinómicas y en la solución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos.	1. Identificar relaciones y establecer cuándo ellas son o no función y discriminar la función de su representación. 2. Discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identificar la relación dependencia entre ellas. 3. Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de funciones cuadráticas.

3.1.3 Análisis de Contenido

Dentro de este análisis, el docente escoge un conocimiento básico propuesto por los estándares básicos de competencia, propios para el aprendizaje de los estudiantes, siendo clave, establecer muchas de sus características, entre las que se encuentran: el contenido específico, los sistemas de representación, para hacer referencia a los sistemas de signos que permiten designar la noción y la visión funcional para resolver problemas de su entorno.

Para el interés de esta investigación, se tienen en cuenta los libros universitarios de Stewart, Ramos y Joaquín (2007), Zill y Dewar (1992), Larson, Hostetler y Edwards (1986) y Tom Apóstol (1985) pues presentan un rigor académico al ser usados en universidades y mostrar con claridad las diversas definiciones. Es preciso ocuparse del contenido específico de la noción de función, teniendo en cuenta todos sus elementos, los diferentes significados y su sistema de representación, que permiten abordar este conocimiento matemático para su posterior aprendizaje; partiendo de algunos significados.

- Como regla de correspondencia

"Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que le asigna a cada elemento x en X uno y sólo un elemento y en Y. El conjunto X se llama dominio de la función". (Zill et al, 1992, p. 143).

- Relación de dependencia entre variables.

"Una función es una relación entre dos variables tal que a cada valor de la variable independiente le corresponde un sólo valor de la variable dependiente.

La colección de todos los valores que toma la variable independiente se llama dominio de la función, y la colección de todos los valores que toma la variable dependiente se llama recorrido de la función.

Si a cada valor en el recorrido le corresponde un solo valor en el dominio, se dice que la función es uno a uno". (Larson et al, 1986, p. 41)

- Relación entre dos conjuntos.

"Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y.

El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función. (Este puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario”). (Tom Apóstol, 1985, p. 62).

- Como pares ordenados

“Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento” (Apóstol, 1985, p. 65).

Una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tienen el mismo primer elemento”. (Zill et al, 1992, p. 143).

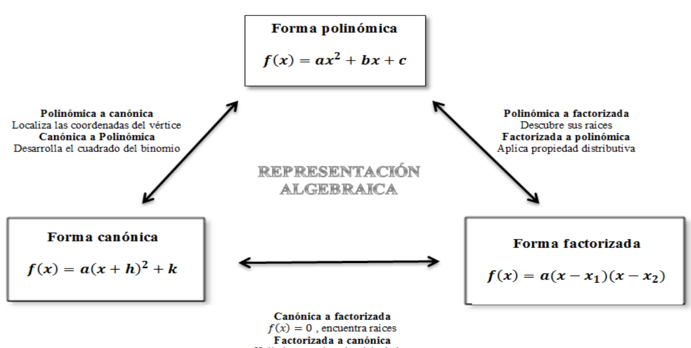
La función cuadrática se deriva de la función polinómica; para todo número real x, por la ecuación

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a^1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^K$$

En donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales llamados coeficientes del polinomio; $n \in N$ es un número natural que, sí $a_n \neq 0$, se llama grado del polinomio; de ahí que la función cuadrática, es una función polinómica de grado $n = 2$.

Una función f es una función cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, siendo su gráfica, una parábola donde sus elementos esenciales son el eje de simetría, los puntos de corte con los ejes, el vértice y las ramas. La cual puede ser representada analíticamente de tres formas: estándar o desarrollada, factorizada y canónica.

Figura 7. Representación Algebraica de la Función Cuadrática



La forma factorizada está escrita en función de sus raíces de la siguiente manera, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ con $a \neq 0$ donde a es el coeficiente principal, x_1 y x_2 son las raíces reales o complejas de la ecuación cuadrática. Cabe anotar que para calcular las raíces se hace $f(x) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se deduce la formula general que permite encontrarlas, mediante el siguiente procedimiento:

$f(x) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0,$ (Factor común a)

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = 0,$ (Completando cuadrados)

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = 0,$ (Agrupando)

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$ (Propiedad de potenciación)

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$ (Trinomio cuadrado perfecto)

$\frac{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{a} - \frac{a(b^2)}{a(4a^2)} + \frac{c}{a} = 0$ (Dividiendo la expresión por a)

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$ (Simplificando)

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ (Inverso aditivo en R)

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (Resta de fraccionarios en R)

$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ (Eliminando el cuadrado)

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (Raíz cuadrada de $4a^2$)

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 -4ac}}{2a}$ (Despejando la variable)

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (Suma de racionales)

Siendo esta última ecuación, la fórmula cuadrática, con la que se encuentran las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado y por ende sus raíces:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama discriminante, donde se pueden definir los tipos de raíces:

- Si, $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes.
- Si, $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación cuadrática tiene raíces reales iguales.
- Si, $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación cuadrática no tiene raíces reales.

Otra forma analítica para expresar una función cuadrática, es la canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde a es el coeficiente principal, y el par ordenado (h, k) las coordenadas del vértice de la parábola, cuya transformación se realiza completando cuadrados de la siguiente forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$ (Factor común a)

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$ (Termino que completa el cuadrado)

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$ (Agrupando)

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a}\right) + c$ (Propiedad de la potenciación en R)

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ (Trinomio cuadrado perfecto y potenciación en R)

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ (Propiedad conmutativa en R)

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Esta expresión se compara con $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde $h = -\frac{b}{2a}$ es el valor de la abscisa y $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ el de la ordenada, estas son las coordenadas del vértice de la parábola.

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vértice en (h, k) , ocurre por el signo del coeficiente a:

- Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba, siendo el vértice el punto mínimo.
- Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo, siendo el vértice el punto máximo.

También se puede usar su expresión canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Donde el valor máximo y mínimo sucede si $x = h$

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$

- Si $a < 0$, entones el valor es máximo de f es $f(h) = k$

En ambos casos su eje de simetría es el eje y.

Figura 8: Punto Mínimo de la Función Cuadrática.

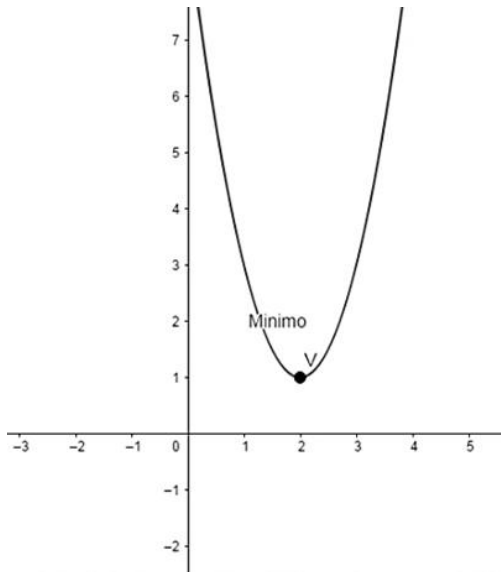
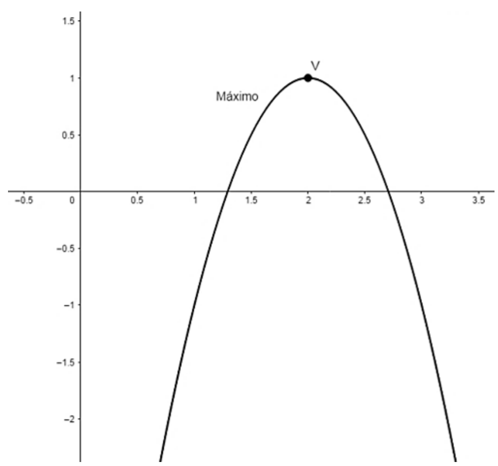


Figura 9: Punto Máximo de la Función Cuadrática



El domino de la función cuadrática (D_f) por ser una función polinómica son todos los números reales R o el intervalo: $D_f = (-\infty, \infty)$, el rango (R_f) lo determina la ordenada del vértice (k) cuando se estable el valor máximo o mínimo, es decir:

- Si k es mínimo, entonces $R_f = [k, \infty)$, además, se dice que el intervalo $(-\infty, h)$ es decreciente y (h, ∞) es creciente.

- Si k es máximo, entonces $R_f = (-\infty, k]$, a demás, se dice que el intervalo $(-\infty, -h)$ es creciente y $(-h, \infty)$ es decreciente.

Por otra parte, los puntos de corte en los ejes se describen así; el corte y para $f(x) = x^2 + bx + c$ es el valor $f(0) = c$; si la gráfica tiene cortes en el eje x, se hace necesario hallar cualquier raíz real $f(x) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$.

El desplazamiento tanto vertical como horizontal de la función cuadrática, advierte que si es $c > 0$, se obtienen en la gráfica los siguientes desplazamientos:

- $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.
- $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.
- $y = f(x - c)$, desplace c unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$.
- $y = f(x + c)$, desplace c unidades hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$.

Por último, la contracción y dilatación de la función cuadrática se genera al multiplicar por un factor c , así:

$y = cf(x)$

- Si $c > 1$, dilata verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
- Si $0 < c < 1$, contrae verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor c.

$y = f(cx)$

- Si $c > 1$, contrae la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $\frac{1}{c}$.
- Si $0 < c < 1$, dilata la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $\frac{1}{c}$.

Los sistemas de representación constituyen parte importante del análisis de contenido; pues estos hacen referencia a los sistemas de signos que permiten designar una noción matemática. Kaput (1992, p.523, citado en Gómez y Cañadas, 2012) considera que un sistema de representación es *"un sistema de reglas para identificar o crear signos, operar sobre y con ellos y determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)"*; en otras palabras, un sistema de representación está formado por signos que se ciñen a unas reglas.

3.1.3.1 Sistemas de representación

Para la noción de función como relación, se han escogido los sistemas de representación que mejor muestre sus características o que tengan mayor relevancia en la identificación de los modos en que el contenido matemático se presenta (Gómez, 2007); por este motivo se consideran los siguientes sistemas de representación: sagital, verbal, tabular, simbólico, gráfico; permitiendo la comprensión del conocimiento en el aula de clase.

El diagrama sagital, es una forma de representar relaciones matemáticas, a través de diagramas de venn; donde se designan dos conjuntos, el de partida (X) y el de llegada (Y), de los elementos del conjunto de partida debe salir una única flecha, mostrando entre ellos una relación existente, que al cumplirse la definición *"Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función";* convirtiéndose así en una función (Apostol, 1985, pág. 62).

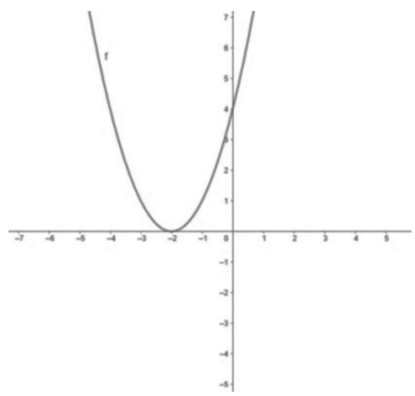
El sistema de representación verbal, es una descripción en lenguaje natural; si se desea resolver un fenómeno o situación problema que necesite ser modelada, donde el estudiante requiere realizar un proceso de comprensión al identificar y discriminar las magnitudes o variables, presentes en el enunciado de la situación, para luego realizar la transformación a otro sistema de representación.

El sistema de representación tabular, es un arreglo rectangular con filas y columnas, donde aparecen los valores que se presentan en una situación; es utilizado para representar dos o más magnitudes que están de alguna manera relacionada; lo cual significa, que una varía dependiendo como lo hace la otra. Las variables obtenidas de la situación modelada del contexto, se sitúan como títulos de las columnas, siendo la variable independiente la que se ubica a la izquierda. Los valores numéricos de ambas variables se ponen de tal forma que el valor de la variable independiente está en la misma fila del valor de la variable dependiente que le corresponde a él. Por tanto, la información que se presenta en las filas y las columnas de la tabla es clave, y forma parte de las reglas de este sistema de representación. (Gómez, 2007)

El sistema de representación algebraico, cuenta con signos propios (coeficiente numérico, letras, exponente y símbolos de las operaciones aritméticas), se puede operar con ellos y existe una asociación entre ellos (Gómez, 2007). En este sistema se le asocia una letra a cada variable, de esta manera se distinguen las variables. Por lo general estas variables se asocian a las letras x y $f(x)$, donde x representa la variable independiente y $f(x)$ la dependiente que se relaciona con y.

El sistema de representación gráfico, hace visibles diversos elementos que en los demás sistemas es difícil observar; en el gráfico se analizan los puntos de corte con los ejes, el vértice, la concavidad, el crecimiento, entre otros; permitiendo estimar el papel de los parámetros. La ubicación de los números y las escalas empleadas en los ejes del dibujo y el trazado de la función constituyen los signos y la forma como se relacionan las variables (independiente y dependiente) (Gómez, 2007).

Figura 10. Sistema de Representación Gráfico de la Función Cuadrática $\boldsymbol{f(x) = (x+2)^2}$



Dar un sentido práctico entre la noción de función como relación y las clases de fenómenos asociados, son el fin último en este análisis; se recogen los fenómenos que hacen parte del contexto de los estudiantes, para el desarrollo de una Unidad Didáctica Local, usando así destrezas, razonamientos y estrategias que deben aplicarse para construir el modelo matemático que corresponde a un problema, a fin de comprenderse y resolverse en términos de los sistemas de representación adecuados (Gómez, 2007).

3.1.3.2 Análisis fenomenológico

Los fenómenos están distribuidos en contextos matemáticos y no matemáticos. Los matemáticos incluyen obtención de números no singulares, el análisis de cónicas, las relaciones cuadráticas y el cálculo de áreas. Los no matemáticos, como físicos, químicos, y económicos; en el municipio de Guacarí se presentan algunos relacionados con la economía, basada en parte en la gastronomía y la maximización de áreas de siembra, en concordancia con el Proyecto Ambiental Escolar (PRAE); por tal motivo, estos fenómenos fueron escogidos en esta investigación por estar presentes en la cotidianidad de los estudiantes, dando sentido a la noción de función como relación y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo.

Con la noción de función como relación se pretende modelar situaciones de la economía y en particular la maximización de las utilidades; siendo esta, la diferencia entre los ingresos totales (dinero ingresado) y los costos totales de producción (dinero invertido), es decir:

Utilidad (U) = Ingresos totales (I) – Costos totales de producción (C)

$$U = I - C$$

El ingreso total (I), es el dinero procedente de la venta de un producto; se obtiene al multiplicar el precio de venta (p) por el número de unidades vendidas (q) así: $I = p.q$, donde q es la cantidad demanda del producto en función del precio, una relación lineal de demanda es de la forma $q(p) = a.p + b$.

De acuerdo a esto $I = P.(a.P + b)$ dando $I = a.P^2 + P.b$, de esta manera, se puede pensar en encontrar el máximo ingreso de acuerdo al incremento o descuento que produce un modelo cuadrático.

Los costos totales de producción (C) resultan de la suma de los costos fijos y variables; El costo fijo (c_f), es la cantidad de dinero que gasta un negocio en elementos administrativos (pago de servicios públicos, nomina entre otros) independientemente de su producción y el costo variable (c_v) es el gasto de dinero que tiene un negocio, en la compra de materia prima usada para su producción, de aquí que la ecuación de costos es: $C = c_f + P.c_v$ y normalmente es una relación lineal, todo lo anterior constituye la función de utilidad dando un modelo cuadrático.

$$U = I - C$$

Como $I = a.P^2 + P.b$ y $C = c_f + P.c_v$ entonces $U = (a.P^2 + P.b) - (c_f + P.c_v)$

Resultando $U = a.P^2 + P.(b - c_v) - c_f$.

Otro fenómeno a modelar, es el área máxima de un rectángulo en función de uno de sus lados, por medio de las figuras geométricas, las cuales se pueden combinar con situaciones propias del municipio; apoyados en conocimientos previos de los estudiantes, relacionado con los encierros de terrenos para siembra, donde el área, en función de su lado se podrá especificar el tipo de variación, la dependencia y el valor máximo. Teniendo en cuenta el perímetro (p) y el área (A) donde:

x: Largo del rectángulo

y: Ancho del rectángulo

El perímetro conocido: $p = 2x + 2y$ despejando el largo tenemos:

$2x + 2y = p$

$2x = p - 2y$

$x = \dfrac{p - 2y}{2}$

El área del rectángulo es $A = x.y$

Reemplazando el largo del rectángulo en el área:

$A = \left(\frac{p-2y}{2}\right)$.y

Resultando la ecuación: $A = \frac{yp-2y^2}{2}$

$$A = \frac{yp}{2} - \frac{2y^2}{2}$$

$$A = -y^2 + \frac{yp}{2}$$

3.1.4 Análisis Cognitivo

Otra categoría del Modelo Local de Análisis Didáctico, se organiza alrededor de las expectativas, limitaciones y oportunidades que tienen los estudiantes en la apropiación del aprendizaje de la noción de función como relación bajo la supervisión del docente, prestando atención si se produce de manera efectiva, con base en la información del análisis de contenido. (Rico et al, 2013).

Acorde con las diferentes instancias del currículo, el aprendizaje en matemáticas se basa en competencias que según la noción más amplia definida en los Estándares (2014) es: *"un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores";* transformándose así en una posibilidad en el aprendizaje que deben lograr, desarrollar y utilizar los estudiantes.

Es así, que algunos de los procesos generales y capacidades matemáticas contempladas en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) son la formulación, tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos que permiten a un estudiante "Ser matemáticamente competente", y asociados a los actos de comprensión de Sierpinska (1992), a través de los procesos mentales de la identificación, la discriminación y la generalización; que al abordar el aprendizaje de la noción de función como relación, se tienen en cuenta las siguientes condiciones:

- Identificación de cambios en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.
- Identificación de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios.
- Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: Uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes.
- Discriminación entre las variables independientes y dependientes.
- Discriminación entre la función y las herramientas analíticas que algunas veces se usan para describir su ley.
- Discriminación entre los conceptos de función y relación.
- Generalización de las variables.

En cuanto a los objetivos determinados que corresponde a las expectativas de aprendizaje propias de la noción de función como relación, previstos para la unidad didáctica son:

- *Objetivo 1*. Identificar relaciones y establecer cuándo ellas son o no función.
- *Objetivo 2.* Discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identificar la relación dependencia entre ellas.
- *Objetivo 3*. Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de la noción de función cuadrática como relación.

El siguiente punto trata de las limitaciones de aprendizaje relacionados con los objetivos propuestos que tiene el estudiante con respecto a la noción de función como relación; "*El estudio de errores y dificultades tiene por finalidad poner en conocimiento del profesor los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno de los datos que surgen de esos estudios son los errores de los estudiantes tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales*" (Rico L. , 1997c, p. 53-54).

Las dificultades son de diferente naturaleza; tienen su origen en objetivos y políticas educativas ministeriales y en el aula, con la relación docente, estudiante, materia e institución. Por tanto, pueden estudiarse de acuerdo al *“énfasis de uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de enseñanza y métodos de enseñanza”* (Socas, 1997, p. 26).

De manera detallada, Socas (1997) organiza las dificultades de aprendizaje en cinco tipos según su naturaleza: asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos propios del pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo y a las actitudes afectivas, emocionales hacia las matemáticas; por esta razón, se centra solo en las dificultades asociadas a la complejidad y a los procesos propios del pensamiento matemático que se relacionen directamente con los objetivos específicos de aprendizaje.

Por otro lado un obstáculo epistemológico, no es falta de atención, ni falta de conocimiento, es un conocimiento adquirido que el estudiante utiliza para producir respuestas apropiadas en un contexto donde su dominio es eficaz, pero al usarse fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incorrectas y su dominio resulta falso.

El error es la muestra indudable de una dificultad, cuando se detalla en las actuaciones de los estudiantes al responder a las preguntas propuestas en las tareas para su aprendizaje. Rico (1995) plantea que la mayoría de los investigadores le atribuyen varias características al error, como el ser sistemáticos, no producirse por azar, con un proceso mental subyacente incompleto o equivocado que el estudiante utiliza de modo consistente y con confianza, también se muestran de manera asombrosa, por lo general se mantienen ocultos durante un tiempo y sólo surgen ante determinados trabajos, persisten debido a que pueden afectar a una parte amplia de conocimiento adquirido que previamente ha tenido validez en otros contextos, ignoran el significado, de modo que respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan. En conclusión *“estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores”* (Socas, 1997, p. 125).

A continuación, se formulan las dificultades y errores que pueden presentarse cuando los estudiantes se enfrenten al desarrollo de las actividades propuestas en la unidad didáctica local desde los objetivos de aprendizaje previstos y que aparecen reportados en los antecedentes de la presente investigación como Díaz (2013) y Cuesta (2007).

Tabla 2

Limitaciones de aprendizaje y del logro de los actos de comprensión

Dificultades: T	Errores: E
T_1: Dificultad para comprender el enunciado del problema. T_2: Dificultad para realizar el cambio de registro entre el lenguaje verbal y los otros sistemas de representación. T_3: Dificultad para discriminar relaciones de funciones. T_4: Dificultad para discriminar la función de su representación.	E_1: Confunde una relación con una función. E_2: Identifica cualquier dato del problema como una magnitud a relacionar. E_3:Confunde la función con sus representaciones.
T_5: Dificultad para identificar las variables en una situación. T_6: Dificultad para identificar la relación de dependencia entre variables. T_7: Dificultad para discriminar entre la variable dependiente y la independiente. T_8: Distingue solamente una de las variables que intervienen en el problema.	E_4: Llama variable a todos los datos del problema. E_5: Asigna la variable independiente con la dependiente. E_6: Confunde las magnitudes variables con las magnitudes constantes en la situación a modelar. E_7: Relaciona dos magnitudes diferentes con la misma variable. E_8: Enuncia incorrectamente la relación entre variables y magnitudes.
	E_9: Reconoce solo la gráfica como una forma de representar la situación a modelar. E_{10}: Relaciona de manera arbitraria las magnitudes variables con los ejes del plano. E_{11}:Usa una escala inadecuada en los ejes del plano cartesiano al graficar.

	E_{13}: Asocia los elementos del par ordenado $(0, x)$ con el punto de corte en el eje y. E_{14}: Adiciona datos sin tener en cuenta la variación en columnas o filas al construir la tabla.
T_9: Dificultad para construir modelos cuadráticos desde una situación dada. T_{10}: Dificultad para modelar situaciones a través de funciones lineales.	E_{15}: Asocia a la representación tabular datos que no corresponden a las magnitudes que covarían. E_{16}:Realiza una corta lista de datos en la tabla que no le permite modelar por completo la situación. E_{17}: Logra representaciones gráficas que no modelan una función cuadrática. E_{18}: Construye de forma incorrecta la expresión algebraica. E_{19}:Incorpora datos que no corresponden a magnitudes variables ni constantes necesarias en la expresión algebraica. E_{20}: Usa inadecuadamente las herramientas analíticas que permiten describir el modelo matemático.

3.1.5 Análisis de Instrucción y Diseño de la Unidad Didáctica Local

El modelo local de análisis didáctico adoptado, a partir del cual se elabora, se planifica, implementa y evalúa la unidad didáctica guía, se propone integrar o considerar los distintos referentes curriculares, de contenido y cognitivos incluyendo obstáculos, dificultades, errores y actos de comprensión para la selección de las actividades, observando en los estudiantes el aprendizaje y el conocimiento de la noción de función como relación y procedimientos construidos, al modelar una situación del contexto (Lupiáñez, 2009).

Para la implementación de la unidad didáctica, se selecciona el grado 9-3 de la Institución Educativa, al tener una distribución de tiempo apropiado, ya que en este nivel de escolaridad la población estudiantil maneja conocimientos previos de la noción de función como relación necesarios para el buen desarrollo y comprensión de las tareas propuestas tales como concepto de números reales operaciones y propiedades, manejo de procedimientos algebraicos, producto cartesiano, ubicación de coordenadas en el plano cartesiano, magnitud, tipos de magnitudes, noción de relación , dominio y codominio.

Se procede entonces al diseño de una unidad didáctica local, teniendo en cuenta el análisis de contenido, cognitivo y los actos de comprensión de la noción de función como son: la identificación, la discriminación y la generalización, planteados por Sierpinska (1992) al identificar relaciones y la forma de establecer cuándo ellas son o no función, discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación e identificar la relación de dependencia entre ellas y modelar situaciones del contexto geométrico, económico para el aprendizaje de la noción de función cuadrática como relación.

De igual manera, se tienen en cuenta los elementos que componen la tarea matemática escolar tales como: la formulación, la meta, el contenido matemático, los recursos, las capacidades, el contexto, las formas de agrupar a los estudiantes y la interacción estudiante-profesor y los estudiantes (Flores, Gomez, & Marin, 2013), ya que facilita caracterizarla para adecuarla si es necesario, contribuyendo más a los objetivos y superar las limitaciones de aprendizaje previstas en el análisis cognitivo.

La tarea escolar inicial (Situación 1) precisa un contexto cotidiano, en el cual algunas realidades son posibles matematizar, otras no (anexo 1). La secuencia de tareas tiene una serie de relaciones para reconocerlas y determinar si son funciones, apuntando a la identificación, siendo una de las categorías de la comprensión (Sierpinska, 1992). Por tanto, la actividad de la unidad didáctica local se vincula al objetivo de identificar relaciones y establecer cuándo ellas son o no función; involucrando del contenido para su aprendizaje, las diversas definiciones de la noción de función de acuerdo a los significados de: regla de correspondencia, relación entre conjuntos, relación de dependencia y pares ordenados. En esta actividad se articulan dos sistemas de representación para su comprensión, el verbal, puesto que el estudiante lo maneja en su cotidianidad, y así poder redactar para él situaciones propias del contexto, el otro sistema de representación es el sagital, que es dónde el estudiante simboliza la situación, para tener claridad, y decidir si es función o no, la siguiente tabla muestra algunos de los criterios de la selección de la tarea escolar inicial (Flores et al; 2013).

Tabla 3

Tarea escolar inicial

Situación 1: En el contexto cotidiano se encuentran diversos tipos de realidades en diferentes campos muchas de ellas que es posible matematizar otras no. A continuación encontrarás una serie de situaciones, identifica las relaciones en cada una de ellas y luego determina cuáles de esas relaciones son funciones y cuáles no. ¿Explica por qué?	
Objetivo	Identificar relaciones y establecer cuando ellas son o no función.
Tipos de contenidos	Definición de relación y función con sus diferentes significados: regla de correspondencia, relación entre conjuntos, relación de dependencia y pares ordenados.
Sistemas de representación	Verbal, sagital.
Contexto	Social, económico.
Contribuye al desarrollo de las competencias	La resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
Categoría Acto de comprensión.	La identificación.

La situación 1 consta de 8 actividades, en el cual se intenta establecer si los estudiantes del grado 9-3 logran alcanzar un acto de comprensión (identificar) con la ayuda de circunstancias del contexto, al construir el proceso más acertado para verificar, las magnitudes, sus tipos de relación, su descripción y responder a la pregunta si las relaciones encontradas son funciones o no, poniendo en juego el conocimiento que tienen disponibles los estudiantes en ese momento acerca del concepto de función. La siguiente rejilla es la planeación de la sesión de clase con los componentes de la tarea escolar inicial (Flores et al; 2013).

Tabla 4

Planeación de la sesión de clase para la tarea escolar inicial (Situación 1)

Componente	Descripción del componente
Meta	Se pretende que el estudiante identifique relaciones y determine si son funciones o no.
Formulación	En forma de instrucción, el estudiante encuentra problemas de diversos contextos con una secuencia de preguntas que deben ser respondidas y en un espacio previsto, hacer el proceso adecuado.
Material	Fotocopia de la unidad didáctica local, lápiz
Agrupamiento	Se organizan grupos de tres estudiantes.
Interacción	Se fomenta la interacción profesor-estudiante, siendo el profesor el guía y apoyo a consultas, motivando su conocimiento. La interacción estudiante-estudiante es propicia para discutir, comunicar y comprender sus argumentos.
Temporalidad	Explicación y ejecución de la tarea en 60 minutos (1 hora de clase).
Capacidades	El estudiante moviliza las siguientes capacidades: identifica las relaciones del contexto, describe las relaciones con el uso de los sistemas de representación verbal y sagital, aplica el conocimiento del concepto función y determina si una relación es función o no.
Contenido	Definición de relación y función con sus diferentes significados: regla de correspondencia, relación entre conjuntos, relación de dependencia y pares ordenados.
Contexto	Social, económico.

La tarea escolar intermedia (Situación 2) incluye realidades del municipio que hace visible la función en escenarios sociales y económicos, los cuales son posibles modelar (anexo 2); vinculadas a las expectativas de aprendizaje al discriminar magnitudes constantes y variables en una situación dada, e identificar la relación de dependencia entre ellas. Los contenidos que median en el aprendizaje son los conceptos de magnitudes constantes, variables y las distintas definiciones de función, pero en especial la relación de dependencia. El estudiante recurre a procedimientos y algoritmos matemáticos, al uso de sistemas de representación verbal, tabular y algebraica para llegar a la construcción del modelo que representa la situación, en la tabla aparece la síntesis y las competencias como algunos elementos de selección.

Tabla 5

Tarea escolar intermedia

Situación 2: En el municipio de Guacarí, están presentes contextos con actividades sociales, económicas y recreativas, las cuales son posibles modelar. A continuación se presentan algunas, en las cuáles tienes que identificar las magnitudes constantes y variables, e indicar las variables dependientes e independientes.	
Objetivo	Discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identificar la relación de dependencia.
Tipos de contenidos	Magnitudes constantes, variables y las distintas definiciones de función, pero en especial la relación de dependencia.
Sistemas de representación	Verbal, tabular y algebraica.
Contexto	Social, económico y recreativo.
Contribuye al desarrollo de las competencias	La resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
Categoría Acto de comprensión	La discriminación

La situación 2 está compuesta por 6 actividades, en la cual se pretende establecer si los estudiantes del grado 9-3 logran alcanzar una de las categorías de los actos de comprensión (la discriminación), basándose en problemáticas del entorno, usando el sistema de representación apropiado para saber el comportamiento de las magnitudes con los datos relevantes presentados, distingue las magnitudes, las que varían y las que son constantes, las dependientes e independientes, a fin de construir su modelo. A continuación se construye la rejilla de planeación de la sesión clase con los componentes de la tarea escolar intermedia (Flores et al; 2013).

Tabla 6

Planeación de la sesión de clase para la tarea escolar intermedia (Situación 2)

Componente	Descripción del componente
Meta	Se espera que el estudiante discrimine las magnitudes constantes y variables e indique las variables dependiente e independiente.
Formulación	A manera de instrucción, el estudiante se enfrenta a problemas de realidades del municipio donde con sus datos desarrolla los procedimientos necesarios para encontrar los requerimientos que se le solicita y responde una serie de preguntas para distinguir las magnitudes hasta llegar a la construcción del modelo.
Material	Fotocopia de la unidad didáctica local, lápiz.

Agrupamiento	Se organizan grupos de tres estudiantes
Interacción	En la interacción profesor-estudiante, el profesor es el guía y apoyo a consultas, motivando su conocimiento para que llegue a la respuesta y argumentación de las preguntas. La interacción estudiante-estudiante es propicia para discutir, comunicar y comprender sus argumentos.
Temporalidad	Explicación y ejecución de la tarea en 60 minutos (1 hora de clase).
Capacidades	El estudiante activa las siguientes capacidades: identifica las magnitudes presentes en el problema del contexto, diferencia las magnitudes constantes y variables, indica y diferencia las variables dependientes e independientes, construye un modelo matemático que represente el problema del contexto.
Contenido	Magnitudes constantes, variables y las distintas definiciones de función, pero en especial la relación de dependencia.
Contexto	Social, económico y recreativo

La tarea escolar final menciona dos fenómenos cercanos a los estudiantes, relacionados con la noción de función (anexo 3), concretada en el objetivo de aprendizaje, modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de funciones cuadráticas; los contenidos a los que los estudiantes deben apropiarse son conceptos de magnitudes constantes y variables, las definiciones de función, función polinómica, función cuadrática; los elementos que la conforman tales como el vértice, puntos de corte, concavidad, punto máximo y mínimo, los sistemas de representación verbal, sagital, tabular, gráfico y algebraico. Hay que mencionar, además preguntas que lo llevan a construir a través de los sistemas de representación el comportamiento de las variables, los elementos de la función cuadrática, su gráfica y la elaboración del modelo matemático, con sus raíces y de acuerdo al algoritmo que resulta al final de la situación, sintetizada en la tabla.

Tabla 7

Tarea escolar final

Tarea 3: Las matemáticas dan la posibilidad de detallar el contexto que nos rodea, ayudando a entender su comportamiento por medio de las relaciones de sus elementos. Con respecto a lo anterior encontrarás dos actividades a modelar por medio de funciones.

Objetivo	Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de la noción función cuadrática como relación.
Tipos de contenidos	Magnitudes constantes y variables, las definiciones de función, función polinómica, función cuadrática; los elementos que la conforman tales como el vértice, puntos de corte, concavidad, punto máximo y mínimo.
Sistemas de representación	Verbal, sagital, tabular, gráfica y algebraica.

Contexto	Geométrico-económico.
Contribuye al desarrollo de las competencias	La resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
Categoría Acto de comprensión	La generalización

La situación 3 se organiza con 2 actividades propuestas en el análisis fenomenológico que son el área máxima de un espacio físico rectangular y la función de ingresos, tratando de reconocer si los estudiantes del grado 9-3 consiguen modelarlas y alcanzan otra categoría de la comprensión (la generalización). En el área máxima de un rectángulo en función de uno de sus lados titulada "proyecto ambiental escolar" (PRAES), identifican las magnitudes, las que varían y permanecen constantes; las magnitudes que varían cuál de ellas son dependientes e independientes, de igual manera completan la tabla teniendo en cuenta la información dada; reflexiona sobre los datos de la tabla e indica lo que ocurre con el área del rectángulo a medida que aumenta su largo, su longitud mayor a 10 cm y cuál de esos valores para el largo y el ancho permiten obtener el área máxima.

De acuerdo a la tabla se representa gráficamente la relación entre el largo y el área obtenida del terreno rectangular, detallando en la gráfica el largo con el que se obtiene el área máxima; con ayuda del profesor se le asigna el nombre al punto máximo y a la gráfica obtenida. De igual modo identifica en la gráfica los puntos de corte respecto al eje horizontal (raíces), que le permite construir el modelo matemático, y por ende hacer la generalización.

Otro camino para obtener el modelo, es construir la expresión analítica que relaciona el área en función del largo, que resulta de observar en la tabla la relación de dependencia entre las dos magnitudes, para luego mirar si las dos expresiones analíticas encontradas son iguales, más tarde da argumentos válidos para decir si la relación es función, con sus respectivas características y darle un nombre con ayuda del profesor.

La siguiente actividad denominada "Las empanadas de Doña Transito" pretende encontrar el ingreso total para cualquier número de empanadas vendidas, por esta razón, los estudiantes deberán identificar las magnitudes, distinguir las que varían y las constantes; las dependientes e independientes, escribir la relación que existe entre la cantidad de empanadas vendidas con su precio, haciendo uso de diagramas sagitales y producto cartesiano, luego graficar la relación, hallar la pendiente, determinar la "ecuación de demanda", con esta ecuación se calcula el precio para diferentes cantidades de empanadas, registrándose los resultados en una tabla.

Seguidamente, los estudiantes construyen el modelo matemático del ingreso que recibe doña Transito, usando la ecuación de la demanda multiplicada por el número de empanadas, realiza la gráfica, da respuesta a: ¿cuál es el mayor ingreso obtenido? ¿Cuántas empanadas debe vender doña Transito para lograr el mayor ingreso? Asigna un nombre al máximo ingreso y a la gráfica obtenida. Identifica en la gráfica los puntos de corte (raíces) con el eje horizontal; con las raíces construye la expresión analítica, argumenta si la relación es función, le asigna un nombre a la noción de función y explica si las dos actividades tienen alguna conexión. Posteriormente se plantea la rejilla de planeación de la sesión clase con los componentes de la tarea escolar final (Flores et al; 2013).

Tabla 8

Planeación de la sesión de clase para la tarea escolar final (Situación 3)

Componente	Descripción del componente
Meta	Se intenta que el estudiante modele situaciones del contexto geométrico y económico a través de la noción de función cuadrática como relación.
Formulación	Aparecen dos actividades, una hace parte del contexto geométrico y otra del económico, para ser modeladas a través de la noción de función cuadrática como relación. En la primera, el estudiante debe identificar las magnitudes, completar y construir la tabla de acuerdo a los datos previstos en la actividad, mirar la variación en la tabla, encontrar los valores para el área máxima, graficar la relación, obtener el área máxima, dar el nombre al punto máximo y a la gráfica, identificar los puntos de corte con el eje x, construir el modelo con las raíces y la relación del área en función del largo; finalizando con preguntas dirigidas a explicar cuándo una relación es función y definir el tipo de función. En la segunda, el estudiante debe identificar las magnitudes, representar la relación de los datos haciendo uso de diagramas sagitales y producto cartesiano, Luego debe graficar las parejas del problema en el plano de coordenadas cartesianas, encontrar la ecuación de la demanda, graficar el problema, hallar los valores para el ingreso máximo, identificar los puntos de corte, modelar con las raíces y con la relación en función al número de empanadas, respondiendo preguntas para definir si la relación es la noción de función cuadrática.
Material	Fotocopia de la unidad didáctica local, lápiz.
Agrupamiento	Se organizan grupos de tres estudiantes
Interacción	De la interacción profesor-estudiante, el profesor es el guía y apoyo a consultas, motivando su conocimiento para que llegue a la respuesta y argumente las preguntas. La interacción estudiante-estudiante es propicia para discutir, comunicar y comprender sus argumentos.
Temporalidad	Explicación y ejecución de la tarea: 120 minutos distribuidas entre la actividad 1 y 2.
Capacidades	
Contenido	Magnitudes constantes y variables, las definiciones de la noción de función, función polinómica, función cuadrática; los elementos que la conforman tales como: el vértice, puntos de corte, concavidad, punto máximo y mínimo.
Contexto	Geométrico y económico.

Capítulo 4

4. Resultados y Conclusiones

Una vez se aplique la unidad didáctica local, se procede al análisis de los resultados que tiene por finalidad, evaluar el aprendizaje de los estudiantes al construir el conocimiento útil de la noción de función como relación en situaciones propias del contexto, intentando identificar algún nivel de comprensión; así mismo, se evalúa la unidad didáctica local respecto a los aportes a el aprendizaje.

4.1 Análisis de Resultados de la Unidad Didáctica Local

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las tareas escolares diseñadas para la unidad didáctica local, organizando la información en una rejilla para cada tarea con sus actividades, teniendo en cuenta las expectativas de aprendizaje. En referencia a lo anterior se procede a redactar los descriptores de las diferentes características de respuestas que dan los estudiantes. En las rejillas aparece la frecuencia absoluta (f_i), indicando el total de estudiantes en cada descriptor, la frecuencia relativa (h_i) siendo el número obtenido entre la razón de la frecuencia absoluta (f_i) y el total de la muestra N $\left(h_i = \frac{f_i}{N}\right)$ y el tanto por ciento (%) que resulta de multiplicar la frecuencia relativa por cien. Por otra parte, en la transcripción del video se asigna la letra P al profesor y la E al estudiante.

4.1.1 Análisis de la Tarea Escolar Inicial (Situación 1)

A continuación, se presenta la tabla 9 correspondiente a los resultados obtenidos de la aplicación de la Tarea escolar inicial (Situación 1):

Tabla 9

Resultados de la tarea escolar inicial (Situación 1)

Objetivo 1: *Identificar relaciones y establecer cuándo ellas son o no función.*

Descriptor situación1	D_1:Estudiantes que hacen uso de diagramas de venn para identificar relaciones, y establece por medio de argumentos de la definición matemática, si es o no función			D_2: Estudiantes que hacen uso de diagramas de venn para identificar una sola relación, y establece por medio de argumentos de la definición matemática, si es o no función.			D_3: Estudiantes que hacen uso de diagramas de venn para identificar una sola relación, pero no establece argumentos válidos, si es o no función.			D_4: Estudiantes que no hacen uso de diagramas de venn para identificar una sola relación, y tampoco establecen argumentos válidos.		
Actividad	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%
1	11	0,39	39	8	0,28	28	6	0,21	21	3	0,107	10,7
2	11	0,39	39	4	0,14	14	6	0,21	21	7	0,25	25
3	4	0,14	14	7	0,25	25	10	0,35	35	7	0,25	25
4	0	0	0	0	0	0	16	0,57	57	12	0,42	42
5	7	0,25	25	7	0,25	25	8	0,28	28	6	0,21	21
6	4	0,14	14	8	0,28	28	1	0,03	3	15	0,53	53
7	8	0,28	28	1	0,03	3	9	0,32	32	10	0,35	35
8	1	0,03	3	5	0,17	17	13	0,46	46	9	0,32	32

Los resultados obtenidos en la tarea escolar inicial, permite evidenciar que en la primera actividad (ver anexo 1) más del 68 % de los estudiantes, entre los descriptores D_1 y D_2 hacen la identificación de relaciones y determinan cuándo es función, usando la definición y verificándolo con el sistema de representación sagital; el 21% de los estudiantes solo la identifica pero desconoce si es función; el 11% desconoce el sistema de representación sagital, la relación y la noción de función (ver tabla 9). A continuación se transcribe el siguiente dialogo del video de la situación 1 en el minuto 5´46", el docente (P) interactúa con los estudiantes (E) para que identifiquen las magnitudes, el dominio, codominio y así establecer las relaciones.

P: ¿Cuáles son los dos conjuntos que aparecen en la situación?

E1: yo, las cuatro horas y estos tres.

E2: la temperatura y el tiempo.

P: la temperatura y el tiempo son esos dos los conjuntos.

E3: ¿Cuál es el dominio?

E1: Dominio, las horas.

E2: El tiempo.

Se presenta posteriormente una discusión, para saber cuál de los dos conjuntos asume el dominio, el docente cuestiona a sus estudiantes preguntándoles ¿Qué ocurría si ambos conjuntos son puestos como dominios de la relación? En el fragmento del minuto 10´19" del video se evidencia cómo el estudiante argumenta cuando una relación es función.

E1: Profesor, solo da de una manera, es función.

P: ¿porqué de una manera es función y de la otra no?

E1: Porque el domino debe estar relacionado con uno y solo uno y este está con dos.

Como se puede ver reflejado en la copia de la hoja de trabajo de un estudiante, cuyo proceso muestra la transformación del lenguaje verbal al sistema de representación sagital a través del diagrama de venn, para así poder inferir las relaciones y por medio de la definición de la noción de función determinar si lo es o no (ver figura 13).

De manera similar ocurrió en las actividades 2 (53,56 %) y 5 (50 %), donde las respuestas de los estudiantes fueron acordes, cuándo se les preguntó ¿Qué tipo de relación hay? Las respuestas se encaminaron a identificar y describir las relaciones que se les proponía, aquí se presenta un apoyo entre estudiantes con el propósito de alcanzar el aprendizaje, como se puede observar en la transcripción del video de la actividad 2 la cual hace referencia a relacionar un número natural y su triple, en el minuto 29´47".

E1: en realidad eso siempre da igual, porque nadie tiene el triple

E1: ni ningún triple de un número se repite.

E2: o sea que es función.

E1: nadie tiene el triple de otro.

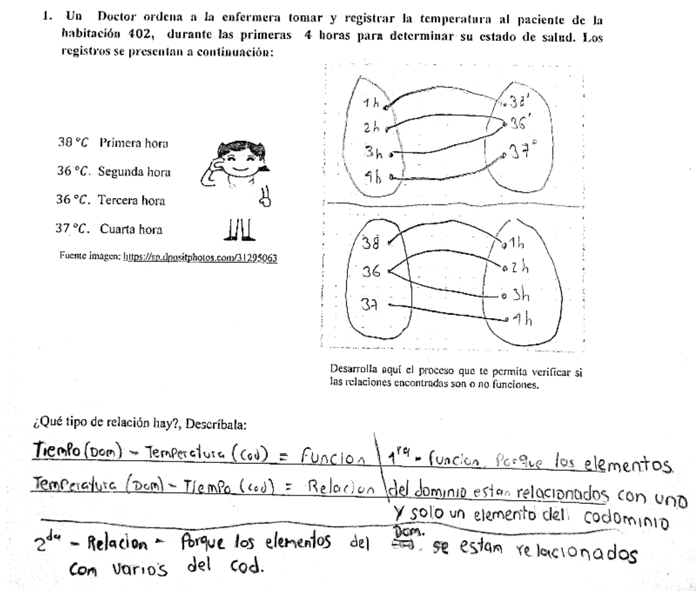
E3: me explica otra vez

E1: uno por tres, tres; pero tres por tres, nueve, eso va a ser infinitamente.

E1: porque ninguno va a tener el triple de otro.

E3: Ah ahora si entendí.

Figura 11. Respuesta de un Estudiante en la Actividad 1


1. Un Doctor ordena a la enfermera tomar y registrar la temperatura al paciente de la habitación 402, durante las primeras 4 horas para determinar su estado de salud. Los registros se presentan a continuación:

38 °C Primera hora
36 °C. Segunda hora
36 °C. Tercera hora
37 °C. Cuarta hora

Fuente imagen: https://sp.depositphotos.com/31295063

Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

¿Qué tipo de relación hay?, Descríbala:

Tiempo (Dom) - Temperatura (cod) = Funcion
Temperatura (Dom) - Tiempo (cod) = Relacion

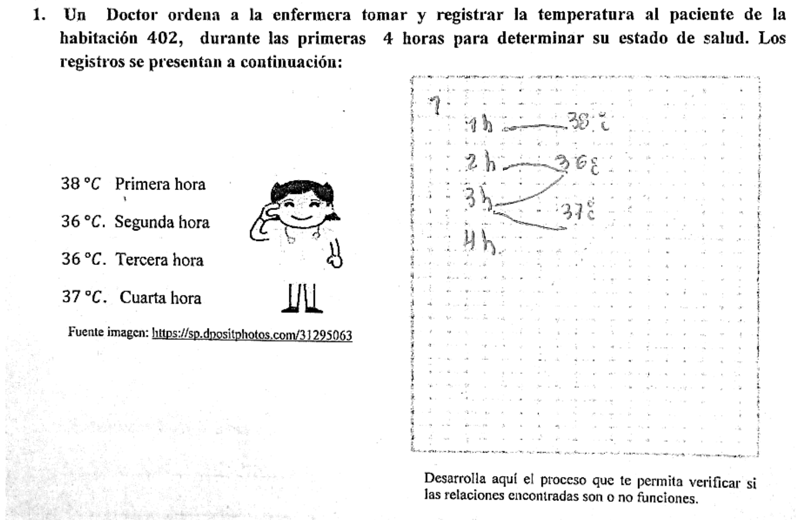
1ra - funcion, Porque los elementos del dominio estan relacionados con uno y solo un elemento del codominio

2da - Relacion - Porque los elementos del Dom. se estam relacionados con varios del cod.

Por otro lado, algunos estudiantes presentaron una serie de errores, destacándose la falta de comprensión del sistema de representación verbal, ya que no entendieron el enunciado, por lo tanto no identificaron las magnitudes, presentando problemas al representarlo en el sistema de representación sagital. Por esta razón, no usaron los diagramas de venn, que les facilita comprobar las relaciones, impidiendo describirlas, así mismo confunden una relación con el concepto de función (ver figura 14).

En definitiva, los resultados generales de la tarea escolar inicial (situación 1), muestra que los estudiantes en su mayoría, sí identifican las relaciones, presentando claridad al designar los dos conjuntos, el de partida (dominio) y el de llegada (codominio) al comprobarlo con los diagramas de venn (conocimientos previos), para luego observar que un elemento del dominio, se relaciona con uno y solo uno del codominio, construyendo de esta manera el aprendizaje del concepto de función con realidades propias del contexto.

Figura 12. Respuesta de Estudiante que no estableció correctamente la relación.


1. Un Doctor ordena a la enfermera tomar y registrar la temperatura al paciente de la habitación 402, durante las primeras 4 horas para determinar su estado de salud. Los registros se presentan a continuación:

38 °C Primera hora

36 °C. Segunda hora

36 °C. Tercera hora

37 °C. Cuarta hora

Fuente imagen: https://sp.depositphotos.com/31295063

1h — 38 °C

2h — 36 °C

3h — 37 °C

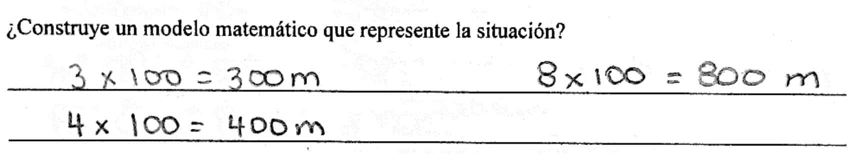
4h

Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

4.1.2 Análisis de la Tarea Escolar Intermedia (Situación 2)

Los resultados obtenidos (ver tabla 10) en la tarea escolar intermedia (Situación 2) permiten evidenciar que en todas las 6 actividades los estudiantes, obtuvieron resultados satisfactorios entre el 53% y 71% al sumar los descriptores B_1, B_2 al discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada, e identificar la relación dependencia entre ellas, algunos estudiantes usan un proceso algorítmico para la solución, otros un sistema de representación como el tabular y el sagital, para la discriminación de las magnitudes. En el descriptor B_2, es bueno aclarar que los estudiantes logran discriminar, pero al momento de solicitar que realicen el modelo matemático que representa la situación, presentan dificultades para hacerlo. Unos elaboran un proceso algorítmico, otros escriben expresiones que no son correctas con respecto a la relación que la actividad plantea para identificar las magnitudes variables dependiente e independiente.

Figura 13. Representación del Modelo Matemático con un Proceso Algorítmico.


¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

3 x 100 = 300m   8 x 100 = 800 m

4 x 100 = 400m

Tabla 10

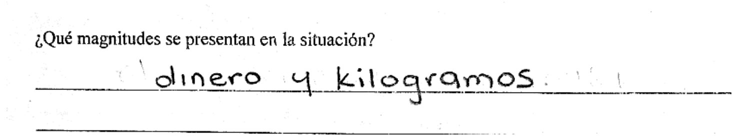
Resultados de la tarea intermedia (Situación 2)

Objetivo 2: Discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identificar la relación de dependencia entre ellas.

Descriptores	b_1: Estudiantes que usan un sistema de representación para discriminar las magnitudes constantes y variables e identifica la variable dependiente e independiente y construye el modelo matemático que representa la situación.			B_2: Estudiantes que usan un sistema de representación para discriminar las magnitudes constantes y variables e identifica la variable dependiente e independiente, pero no construye el modelo matemático.			B_3: Estudiantes que usan un sistema de representación para discriminar las magnitudes constantes y variables, pero no identifica la variable dependiente e independiente y tampoco construye el modelo matemático.			B_4 Estudiantes que usan un sistema de representación pero no discrimina las magnitudes constantes y variables, ni identifica la variable dependiente e independiente, por lo tanto no construye el modelo matemático.		
Actividad	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%
1	9	0,32	32	6	0,21	21	10	0,35	35	3	0,107	10,7
2	10	0,35	35	9	0,32	32	1	0,03	3	8	0,28	28
3	9	0,32	32	8	0,28	28	3	0,107	10,7	8	0,28	28
4	9	0,32	32	6	0,21	21	3	0,107	10,7	10	0,35	35
5	15	0,53	53	5	0,17	17	1	0,03	3	7	0,25	25
6	9	0,32	32	10	0,35	35	3	0,107	10,7	6	0,21	21

Las respuestas validas de los estudiantes, a la pregunta, ¿Qué magnitudes se presentan en la situación? son variadas, por ejemplo en la actividad 1 de "la venta de papayas" (anexo2), responden de una forma coloquial, como magnitudes el dinero y el kilogramo (ver figura 16).

Figura 14. Respuesta Informal de las Magnitudes


¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

dinero y kilogramos.

Cuando realizan la construcción del modelo matemático, se observa una gran variedad de expresiones informales; algunos vuelven a escribir el proceso algorítmico, otros solamente escriben la magnitud constante con la independiente sin señalar la dependiente; en otras palabras muestran falencias en el sistema de representación algebraico.

En el descriptor B_3, se muestra que un 10% de los estudiantes cuando discriminan las magnitudes, se les dificulta distinguir la independiente de la dependiente debido a la falta de interpretación en el lenguaje verbal, al no detallar lo que ocurre en la situación planteada, por consiguiente, a la hora de argumentar no sabe cómo se comportan las magnitudes tal como lo muestra la transcripción del video en el minuto $6'06''$, la cual hace referencia a "un cortero de caña, que le pagan $40.000 pesos por día de trabajo".

E1: Profesor, ¿el día depende del precio?

E2: ¿El precio depende de los días?

P: ¡Como así, a usted le pagan como!

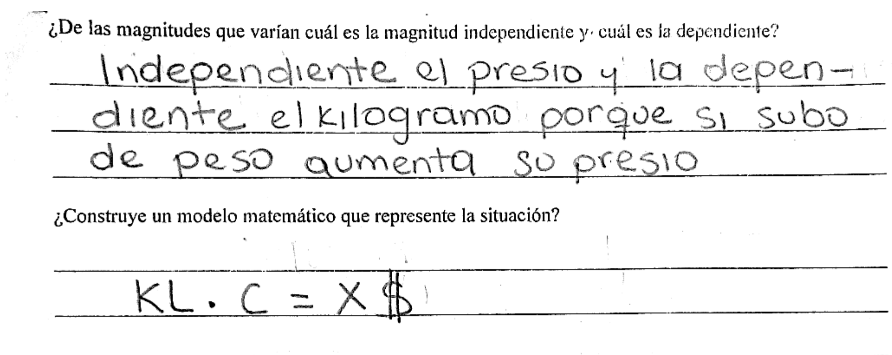
E1: yo trabajo el día

P: ¿Quién es la dependiente?

E2: Días, el precio depende de los días.

Con un promedio del 25% están los estudiantes que usan un sistema de representación pero no discrimina las magnitudes constantes y variables, ni identifican la variable dependiente e independiente, por lo tanto no construye el modelo matemático, presentando errores que le impiden alcanzar la expectativa de aprendizaje, entre estos errores se encuentran: confundir las magnitudes variables con las magnitudes constantes, asignar la variable independiente con la dependiente, enunciar incorrectamente la relación entre variables y magnitudes, por esta razón no construye el modelo matemático (ver figura 17).

Figura 15. Confunde la Magnitud Dependiente con la Independiente


¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

Independiente el presio y la depen-
diente el kilogramo porque si subo
de peso aumenta su presio

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

KL. C = X$

En síntesis se puede decir que la tarea escolar intermedia (situación 2) de la unidad didáctica local, logra que los estudiantes en un 50% superen las expectativas de aprendizaje. Esto significa que los estudiantes usan el sistema de representación verbal, que es su lenguaje natural, para luego transformándolo en otro y así poder discriminar las magnitudes constantes y variables e identificar la relación de dependencia entre ellas, proporcionando un conocimiento útil desde su propio contexto.

4.1.3 Análisis de la Tarea Escolar Final (Situación 3)

4.1.3.1 Modelación en Contexto Geométrico.

Los resultados obtenidos en la tarea escolar final (Situación 3), tal como se muestra en la tabla, el 60 % de los estudiantes realizaron las 16 preguntas de forma acertada de la actividad "Proyecto Ambiental Escolar (PRAE)" cuyo propósito es maximizar un área rectangular. Con acompañamiento del docente se orientó a los estudiantes para que realizarán la construcción del modelo algebraico usando los puntos de corte con el eje x (raíces) y la relación de dependencia entre el largo y el ancho; para modelar situaciones del contexto geométrico a través de la noción de función cuadrática como relación, que para llevarlo a cabo tuvieron que hacer la identificación de magnitudes (variables, constantes, dependientes e independientes), usaron los sistemas de representación verbal, sagital, tabular, gráfico y algebraico, e identificaron las raíces, vértice, punto máximo, asignarle su nombre.

Tabla 11 .

Resultados de la tarea final (Situación 3)

Objetivo 3: *Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de la noción de la función cuadrática como relación.*																		
Descriptor	C_1: Estudiantes que identifican magnitudes (variables, constantes, dependientes e independientes), usa los sistemas de representación sagital, tabular, gráfico y algebraico, e identifica las raíces, vértice, punto máximo, le asigna su nombre; para modelar situaciones del contexto geométrico y económico.			C_2: Estudiantes que tuvieron problemas para construir el modelo con la expresión analítica que relaciona el área en función al largo.			C_3: Estudiantes que tuvieron problemas para hallar el valor de la pendiente de la recta., y así realizar la modelación de la situación.			C_4: Estudiantes que tuvieron problemas para identificar los valores del largo y ancho, y así obtener el área máxima tanto en el sistema de representación tabular como gráfico, además presentan dificultad para construir el modelo.			C_5: Estudiantes que tienen problema en el sistema de representa ción grafico			C_6: No modela la situación por presentar dificultad en todos los sistemas de representación		
Actividad	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%
Proyecto ambiental Escolar "PRAES"	17	0,61	60,7	5	0,18	17,8	2	0,71	7,1	2	0,18	17,8	1	0,03	3	1	0,03	3

Por consiguiente, se hace un recorrido de la actividad a las repuestas dadas por los estudiantes. En primer lugar se identificaron las magnitudes, presentándose una interacción estudiante-profesor a los cuestionamientos que suscitan las preguntas cómo se evidencia en la transcripción de la primera parte del video en el minuto (6´08"):

E1: ¿Profesor, podemos escribir que en las magnitudes que se identifican son el perímetro, el área, el ancho y el largo?

P: Si, ¿los metros de malla qué son?

E1: El perímetro.

Para los estudiantes fue fácil en la lectura del problema llegar a establecer que las magnitudes que intervenían eran el largo, el ancho y el área; pero al hablar del perímetro se les dificulto a algunos asociarlo con los metros de malla metálica. Cuando buscaron las magnitudes que varían y las que permanecen constantes, afirmaron que todas variaban. Con otra lectura de la actividad cayeron en cuenta que los metros de malla metálica, siempre seria la misma medida; dando a entender que el perímetro es constante, tal como se muestra en la transcripción del video en el minuto (8´53").

E1: ¿Cuál de las magnitudes varían?, varían el área, todas varían menos el perímetro.

P: ¿Por qué decís que el perímetro no varía?

E1: porque tiene que estar constante, y no se puede pasar de 40.

Ahora para mirar de las magnitudes, cuál es la independiente y cuál la dependiente, comenzaron hablar entre ellos, interactuando con el docente, para intentar distinguir entre el largo, ancho, área y perímetro, cuáles son las independientes, tal y como se lee en la siguiente transcripción del video en el minuto 10´23".

E2: Profesor, ¿Cuáles son las magnitudes independientes?

P: ¿Cuáles serán las independientes?

E3: El perímetro

P: ¿El perímetro será la independiente?

E4: El largo

P: ¿Por qué?

E1: El largo y el ancho pueden ser independientes, porque si el largo cambia, el ancho también, para no cambiar el perímetro.

Más adelante en el minuto 11´37" continua:

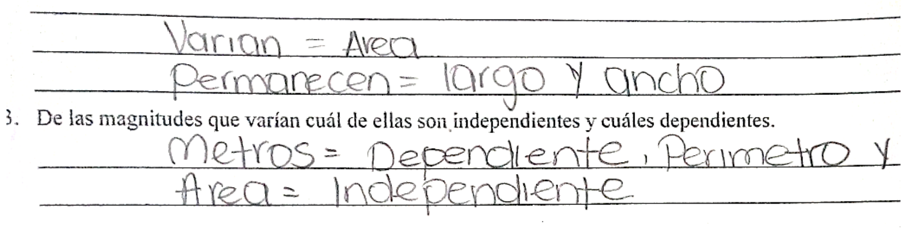
E3: ¿Cuáles son las magnitudes variables dependientes?

P: ¿Cuáles son las magnitudes dependientes?

E5: El área y el perímetro.

En la hoja de trabajo, aparecen respuestas donde los estudiantes logran identificar las magnitudes independientes y dependientes (17 estudiantes), donde les falta establecer las magnitudes dependientes (2 estudiantes) y confunden las dependientes con las independientes (5 estudiantes), a continuación se muestra en la figura 18, una respuesta donde el estudiante confunde las magnitudes independientes y dependientes.

Figura 16. Respuesta de Estudiante donde Confunde las Magnitudes


Varian = Area
Permanecen = largo y ancho
3. De las magnitudes que varían cuál de ellas son independientes y cuáles dependientes.
Metros = Dependiente, Perimetro y
Area = Independiente

Los estudiantes construyeron el sistema de representación tabular, sin contratiempos, con la información suministrada, comprendiendo la relación del largo con respecto al ancho y el área; al pedir el análisis del comportamiento de los datos de la tabla, con la pregunta ¿qué ocurre con el área a medida que aumenta la longitud del largo? Y ¿Qué ocurre con el área cuando el largo es mayor a 10m? Seguidamente se presenta una interacción entre profesor y estudiante donde el estudiante no comprende la pregunta, siendo aclarada por él mismo, con alguna similitud a las respuestas de los demás estudiantes en la transcripción de la grabación del video en el minuto 27´53".

E1: Profesor aquí dice: ¿Qué ocurre con el área a medida que aumenta la longitud del largo, y ¿Qué ocurre cuando el largo es mayor a 10?

P: ¿Qué debes mirar para resolver eso?

E1: La tabla (El estudiante revisa de la tabla, las columnas tanto del largo y el área)

E1: Yo creo que aumenta.

E2: Aumenta hasta cierto punto.

P: Aumenta la longitud, ¿pero qué pasa con el área? Llega a 10 y ¿Qué pasa?

E1: disminuye el área.

Con el análisis de la tabla, los estudiantes buscan los valores del largo y el ancho que le permiten obtener un área máxima, presentándose algunos interrogantes, que con ayuda del docente se alcanzan a superar, como lo indica la transcripción del video en el minuto 21´13".

E6: Profesor, ¿de acuerdo a la tabla el valor para el área máxima es 10?

P: ¿Por qué?

E7: ¿Por qué en la tabla da primero 99, luego 100, y otra vez 99, entonces 10 es el valor del largo para el área máxima?

También, se registra una pregunta sobre el uso de números no enteros en la tabla, como la medida de 10,5 m, para el largo; confusión que se presenta al olvidar la relación de dependencia del ancho y el área con respecto al largo, siendo aclarada por el mismo estudiante con orientación del docente, que se puede evidenciar en la siguiente transcripción del video en el minuto 22´35".

E9: Profesor, ¿aquí puedo poner para el largo y el ancho datos que no están?, es decir 10,5m por 10,5m que me dan 110,25m^2.

P: pero no te sirven, ¿Por qué no te sirven?

E9: porque tiene decimales, porque no está en la tabla.

P: no, ¿Por qué 10,5m y 10,5m no te sirve?, ¿Quién me dice?

E1: porque se pasaría del perímetro.

P: hágalo y vera que se pasa del perímetro.

Luego del sistema de representación tabular, los estudiantes realizan la transformación al sistema de representación gráfico, presentándose dificultades, en la distribución de los números en la recta numérica, ya que no respetan la posición real de cada uno de los números (ver figura 19), y la ubicación de las magnitudes del largo y área confundiendo el eje correspondiente a cada una de ellas, tal como se detalla en la transcripción del video en el minuto 23´41".

E10: Profe ¿aquí dice que de acuerdo a la tabla represente en la gráfica, el largo y el área?

P: Si, puedes hacer el largo y el área, hacer el plano de coordenadas ¿Quién es la independiente?

E11: Independiente el largo.

P: Si ¿Quién es la dependiente?

E11: El área

P: ¿Quién va en el eje horizontal?

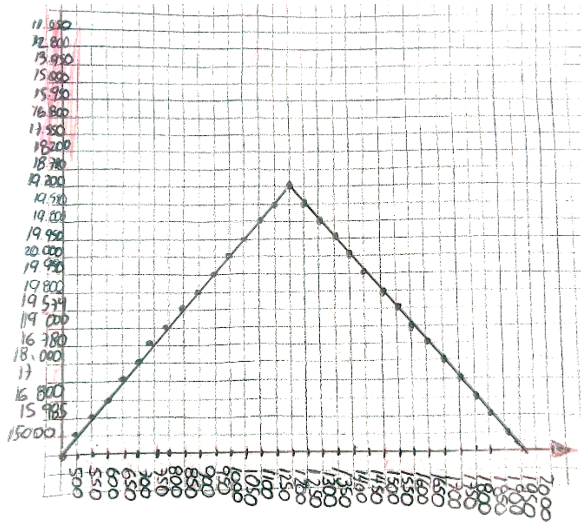
E11: El largo

P: ¿y en el eje vertical?

E11: el área

P: Bueno hágalo.

Figura 17. Dificultad en la Distribución de los Números en la Recta Numérica



Minuto 31´29"

E10: ¿Cómo se deben ubicar los números en el plano de coordenadas cartesianas?

P: Uno de debe colocarlo en el orden de los números de 10 en 10.

Al terminar la construcción de la gráfica, se les pregunta a los estudiantes ¿para qué valor del largo se obtiene el área máxima? Afirmando de manera precisa cuando analiza la gráfica, que el valor del largo es 10m, debido a que está relacionado con el punto más alto que es el área y su valor es $100m^2$. Con ayuda del docente se le asigna un nombre al punto donde se alcanza el área máxima y a la gráfica.

En la identificación de los puntos de corte con respecto al eje x, los estudiantes desconocen las raíces de la función, por lo tanto el docente interviene llevándolos a analizar en la gráfica los valores que hay en la intersección de la curva con el eje x. Y al construir el modelo matemático, se presenta una dificultad en cuanto a la conversión de la representación algébrica, de la factorizada a la polinómica por el manejo erróneo de la propiedad distributiva y la ley de los signos.

De igual forma, los estudiantes intentan construir la expresión analítica con la relación del área en función del largo, para ello, le asignan una letra al largo y establecen la relación con el ancho, pero persiste la dificultad en algunos al realizar las transformaciones de las expresiones analíticas, respetando los signos de los términos. Cuándo se les pregunta si son iguales las dos expresiones, la repuesta es no, siendo equivocada en algunos estudiantes, al no llegar en ninguno de los dos casos a la expresión algebraica polinómica.

Para la argumentación de las preguntas finales, dónde se les pregunta a los estudiantes si el tipo de relación es una función, la mayoría responden afirmativamente de acuerdo con la definición de función, otros con frases informales mostrando algún conocimiento y para terminar nombran la noción de la función como cuadrática. Tal y como se evidencia en los diálogos del segundo video de la actividad en los minutos 13´48" y 15´16".

E4: ¿Este tipo de relación es una función?

P: Para que se a función que se necesita

E9: Que los elementos del grupo A se relaciona con solo uno y solo uno del grupo B.

E10: Profesor, dice que con su ayuda se le dé un nombre a este tipo de funciones.

P: ¿Cómo se llama esta función entonces?

E1: Se llama función cuadrática.

P: ¿Cuál es el motivo que sea cuadrática?

E9: Porque x esta elevada al cuadrado.

4.1.3.2 Modelación en Contexto Económico.

En cuanto a los resultados de la tarea escolar final segunda actividad "las empanadas de Doña Transito" se puede evidenciar que el 57% de los estudiantes (ver tabla 12) distribuidos entre los descriptores E_1 y E_2, identifican las magnitudes (variables, constantes, dependientes e independientes), escriben la relación en el diagrama sagital, calcula la pendiente, la ecuación de la demanda, usa los sistemas de representación tabular, gráfico y algebraico, e identifica las raíces, el vértice; al punto máximo le asigna su nombre y realiza el modelo matemático. Pero en su mayoría, no logran representar en el producto cartesiano, la relación que existe entre la cantidad y el precio, reaparecen las dificultades algebraicas cuando se les solicita construir el modelo matemático.

Tabla 12.

Resultados de la tarea final (Situación 3)

Objetivo 3: *Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de la noción de función como relación.*

Descriptor	E_1 Estudiantes que identifican magnitudes (variables, constantes, dependientes e independientes), escribe la relación en diagrama sagitales, producto cartesiano, calcula la pendiente, la ecuación de la demanda, usa los sistemas de representación tabular, gráfico y algebraico, e identifica las raíces, vértice, al punto máximo le asigna su nombre y realiza el modelo matemático.			E_2: Estudiantes que tuvieron problemas para construir el modelo con la expresión analítica que relaciona el área en función al largo.			E_3: Estudiantes que tuvieron problemas para identificar los valores del largo y ancho, y así obtener el área máxima tanto en el sistema de representación tabular como gráfico.			E_4: Estudiantes que tienen problema en el sistema de representación grafico e identificar el mayor ingreso.			E_5: No modela la situación por presentar dificultad en todos los sistemas de representación.		
Actividad	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%	f_i	h_i	%
Empanadas de Doña Transito”	6	0,21	21	10	0,35	35	10	0,35	35	1	0,035	3,5	1	0,035	35

Seguidamente, se hace una descripción a las repuestas dadas por los estudiantes. Al iniciar con la lectura, se presenta un interrogante que los invita a reflexionar “¿Cuál sería el ingreso de Doña tránsito para cualquier cantidad de empanadas?, con la intensión de emplear el lenguaje verbal en la interpretación del problema, tal y como lo muestra la transcripción del video en los minutos 3´57" y 5´12".

3´57"

E1: Profesor ¿Cuál sería el ingreso para cualquier cantidad de empanadas vendidas?

P: Piénselo y me avisas.

5´12"

E1: Multipliqué la cantidad de empanadas a lo que ella lo vendía, me dio $15.000 y la otra medio $15.950. ¿Entonces ya solucione esa pregunta?

P: No, porque todavía falta mirar qué le preguntan, pero ya tienes cómo hacer para obtener el ingreso.

Al identificar las magnitudes presentes, 6 estudiantes muestran dificultad cuándo se les solicita reconocer de esas magnitudes, cuáles varían y cuáles son constantes; mencionando que “no varían los precios pero si la cantidad” debido a la interpretación que hace de la relación entre las magnitudes expresadas en el sistema de representación verbal, como se puede evidenciar en la siguiente figura y en la transcripción del video donde los estudiantes establecen algunas magnitudes en el minuto 7´26", sin embargo en el minuto 7´48" identifican al ingreso como magnitud dependiente de la cantidad.

7´26"

E2: ¿Cuál sería el ingreso de Doña Transito para cualquier cantidad de empanadas vendidas?

E3: ¿Qué magnitudes identificas en la situación?

E2: Cantidad de empanadas y precio.

7´48"

P: ¿Cuáles son las magnitudes dependientes?

E4: La magnitud dependiente son los ingresos y el precio.

P: ¿Depende de qué?

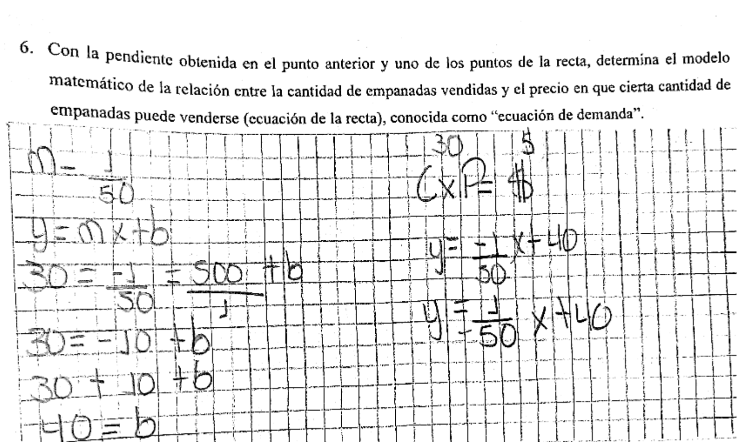
E1: ¿Por qué depende del número de empanadas?

Los estudiantes sólo establecen la relación entre la cantidad y el precio, usando el sistema de representación sagital, la solicitud de hacerlo con el producto cartesiano presenta dificultad, expresando “que no lo saben hacer”, a causa de esto el docente intenta superarla dando algunas indicaciones para su comprensión. Luego la relación es llevada al plano de coordenadas cartesianas para que encuentren la pendiente de la recta; en su mayoría realizan en forma correcta la ubicación de los puntos y usan la ecuación de la pendiente para hallarla. Las dificultades encontradas aquí, ocurren cuando los estudiantes no ubican las magnitudes tanto independientes como dependientes en el eje de coordenadas correspondiente, además no se tiene en cuenta la posición de los números; y otros en la ecuación de la pendiente, cometen errores tanto en los signos como en las operaciones con los números reales.

Para la obtención de la ecuación de la demanda, los estudiantes necesitaron el cálculo de la pendiente y la ecuación punto pendiente, no obstante, en la práctica usaron la ecuación $y = mx + b$ para encontrar el termino b, reemplazando un punto de la recta y la pendiente, y así hallar la función de demanda (ver figura 20), las dificultades que se presentaron fueron ocasionadas en las operaciones, los signos de los términos, el despeje de variables y la simplificación de números; el docente orienta el nombre de la ecuación encontrada que permite saber el precio dependiendo del número de empanadas.

Con la función de demanda, los estudiantes representan en una tabla el precio por unidad para distintas cantidades de empanadas, con algunas dificultades en las operaciones básicas de números reales. Esto permitió al solicitar la construcción del modelo matemático que 9 estudiantes no lo lograran, debido a no realizar por completo el proceso hasta ese momento y otros porque no comprendieron la generalidad al construir la tabla.

Figura 18. Procedimiento Efectuado para Obtener la Función de la Demanda.



La gráfica se construye teniendo en cuenta la relación entre cantidad de empanadas demandadas y el ingreso; en la elaboración de la curva, 9 estudiantes presentan distintas dificultades; como la asignación del eje respectivo para las magnitudes dependientes e independientes, la ubicación de los números en el plano de coordenadas cartesianas. Los demás estudiantes alcanzaron este punto con algunas orientaciones del docente. Con el análisis de la gráfica se identificó el número de empanadas vendidas para lograr el mayor ingreso, se le da un nombre al punto máximo y a la curva estableciendo sus raíces.

En la construcción de la expresión algebraica, continúan las dificultades de los estudiantes al no saber transformar la noción de función cuadrática de la forma factorizada a la polinómica debido a problemas en la propiedad distributiva, multiplicación entre signos y el orden de un polinomio. Las argumentaciones de las características de la relación, el tipo del nombre y si existe alguna relación con la situación anterior; se respondieron basados en la definición de la noción de función y finalizaron afirmando que ambas actividades obedecen a la noción función cuadrática como relación.

Finalmente, en los fenómenos tanto geométrico como económico implementados en la unidad didáctica local, los estudiantes desde su perspectiva sociocultural, logran el aprendizaje de la noción de función cuadrática como relación y las categorías de los actos de comprensión, al identificar y discriminar las magnitudes, modelar en el sistema de representación verbal, sagital, tabular y gráfico; sin embargo, se les dificulta construir el modelo algebraico.

4.2 Conclusiones

Como resultado de este proyecto de investigación, y tomando como base los objetivos propuestos para el aprendizaje mediante la comprensión de la noción de función como relación, se puede concluir que:

4.2.1 En Relación al Objetivo Específico N° 1

Determinar un Modelo Local de Análisis Didáctico que movilice la noción de función como relación y articularlo con algunos elementos curriculares desde una unidad didáctica local.

Es fundamental conocer los documentos curriculares oficiales (Lineamientos, Estándares) e institucionales (PEI, Plan de área, textos) al ser de carácter normativo bajo los cuales se fundamentan las competencias, que dan luces hacia donde debe orientarse el aprendizaje de los estudiantes y resultan apropiados al docente para ser puestos en funcionamiento o aplicados a través de un modelo local de análisis didáctico concretándose en actividades de planificación y elaboración de una unidad didáctica de la noción de función como relación, su posterior análisis y evaluación (Bedoya, 2002).

Los elementos que requiere el profesor para movilizar el aprendizaje de la noción de función como relación, los aportan los diferentes análisis que conforman el modelo local de análisis didáctico, ya que no sólo se debe pensar en el conocimiento matemático, sino también cómo abordarlo de acuerdo a unas condiciones oficiales, institucionales y de contexto, teniendo en cuenta las expectativas, limitaciones y oportunidades; para concretarlas en una unidad didáctica. Siendo importantes los análisis para evidenciar los actos de comprensión en los estudiantes (Bedoya, 2002).

Con respecto a los aportes del análisis de los organizadores de currículo aplicados al diseño de la unidad didáctica se hace la selección del contenido específico de la noción de función como relación, los fenómenos a modelar manejan una correlación con el contexto sociocultural. Usando los sistemas de representación que permiten describir la noción, las dificultades y errores del contenido, desarrollando de esta manera habilidades propias del pensamiento variacional.

4.2.2. En Relación al Objetivo Específico N° 2

2. Identificar desde los resultados obtenidos durante la implementación de una unidad didáctica local, algunos elementos que permitan establecer los actos de comprensión que logran los estudiantes respecto a la noción de función como relación.

Un elemento encontrado, es que en el 68% de los estudiantes se evidencia la identificación como acto de comprensión al identificar relaciones y establecer cuándo son función o no, usando el sistema de representación sagital como forma para verificarlo; al responder a la pregunta "¿Qué tipo de relación hay? Descríbela", primero detecta las magnitudes, luego establece los conjuntos de dominio y codominio para encontrar la relación y mirar si cumple la noción de función; estas situaciones propias del contexto, se diseñan en el sistema de representación verbal para ser transformado a otro sistema. Pero cuando los estudiantes no encuentran la relación es porque no interpretan de forma correcta el lenguaje natural como está redactada la actividad, otros desconocen cómo organizar los datos suministrados en el diagrama sagital y no comprenden la noción de función como relación.

También es posible evidenciar, que el 71 % de los estudiantes demuestran la discriminación como acto de comprensión al diferenciar las magnitudes constantes y variables en una situación dada, e identifican la relación de dependencia entre ellas, al interpretar la instrucción de la actividad en el sistema de representación verbal y transformarlo a otro sistema cuando diferencian las magnitudes variables, constantes, dependientes e independientes; las dificultades que persisten son causadas por la no interpretación de la situación, que no reproduce la relación de las magnitudes y por ende aparece el error al confundir las magnitudes variables dependiente e independiente. Lo cual, sin duda, es uno de los problemas y dificultades tradicionales en relación con el aprendizaje.

Además, se observa que un 60% de los estudiantes en la situación geométrica y 57% la económica, logran modelar problemas del contexto a través de la noción función cuadrática como relación, al identificar y discriminar las magnitudes, haciendo su interpretación en los sistemas de representación verbal, sagital, tabular y gráfico; encuentran el punto máximo, los puntos de corte con el eje x, le asignan un nombre y argumentan si la relación se comporta como función cuadrática demostrando de esta manera actos de comprensión. Pero cuando se les solicita simbolizar la relación en la expresión analítica, llegan hasta determinar sus elementos, mostrándola en forma factorizada si es con sus raíces y de acuerdo a la relación de dependencia entre magnitudes, sin obtener la forma polinómica en ambos procesos; por ende no alcanzan la generalización como acto de comprensión.

Para finalizar, se pudo establecer que algunos estudiantes no reflejan la generalización como acto de comprensión, aunque por medio de la gráfica identifican las raíces de la noción de función cuadrática y las ubican en la forma factorizada, cometen el error al realizar la operación algebraica para llegar a la forma canónica, por ende no muestran la relación de dependencia entre magnitudes; dejar la noción de relación como función no es suficiente para llevarlos a construir el modelo matemático.

4.2.4 Respecto al Objetivo General

Identificar los actos de comprensión que manifiestan los estudiantes de grado noveno de la Institución Normal Superior Miguel de Cervantes Saavedra cuando se moviliza la noción de función como relación desde una unidad didáctica local.

Para concluir, el docente debe conocer los documentos curriculares e institucionales como orientaciones básicas que sirven de guía y condicionan su quehacer en el aula, respecto al aprendizaje que deben construir los estudiantes, por tal motivo se aplican y articulan en la elaboración de un modelo local de análisis didáctico convirtiéndose en una herramienta metodológica, al planificar una unidad didáctica de un contenido específico (la noción de función como relación), para luego escoger los objetivos basados en los actos de compresión de identificar, discriminar y generalizar, los obstáculos epistemológicos, dificultades y errores, en actividades propias del contexto, en tanto que permite evaluar el estado de comprensión que tienen los estudiantes y poder realizar cambios ajustados nuevas unidades que se propongan.

Los actos de comprensión, identificados por parte de los estudiantes, con respecto a los resultados obtenidos después de la aplicación de la unidad didáctica local de la noción de función como relación que permiten desarrollar habilidades del pensamiento variacional, mostraron que sí identifican las relaciones y establecen cuándo son función o no, usando el sistema de representación sagital como forma para verificarlo, ya que determinan las magnitudes, establecen los conjuntos de dominio y codominio, revisando la definición de la noción de función. Del mismo modo, discriminan las magnitudes constantes y variables en una situación dada, e identifican la relación de dependencia entre ellas, cuando al interpretar en el sistema de representación verbal, el enunciado de la actividad lo transforma a otro sistema y diferencia las magnitudes variables, constantes, dependientes e independientes.

Además, logran modelar problemas del contexto a través de la noción de función cuadrática como relación, al identificar y discriminar las magnitudes, haciendo su descripción en los sistemas de representación verbal, sagital, tabular y gráfico; encuentran el punto máximo, los puntos de corte con el eje x, le asignan un nombre y argumentan si la relación se comporta como noción de función cuadrática demostrando de esta manera actos de comprensión. Solo el acto de generalización, no es manifestado ya que los estudiantes presentan dificultades en los sistemas algebraicos al construir el modelo de la situación. Finalmente se puede decir que para el docente, un insumo fundamental es conocer los actos de comprensión que manifiestan sus estudiantes en la medida que este conocimiento le va a permitir tomar decisiones frente a estrategias metodológicas, tipo de actividades que se propone y recursos que implementa para el aprendizaje y la enseñanza, que se obtienen desde el análisis de los organizadores del currículo aplicados a la unidad didáctica local.

REFLEXIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

Las siguientes reflexiones son el producto del discernimiento de cada una de las etapas del desarrollo de la sistematización de experiencias. Al realizar esta investigación en Didáctica de las Matemáticas ha dejado claro, y que por consiguiente son imposibles de obviar en la enseñanza y el aprendizaje, lo cual ha generado muchas dificultades en el aula, como lo es la noción de función como relación; base para la comprensión de otras nociones en la educación media en ciencias naturales y en el mismo campo de las matemáticas.

Todo aprendizaje necesita de la planificación curricular por parte del docente, por eso para él, cuándo lo hace, necesita de un currículo más cercano al estudiante en el aula y algunos conocimientos didácticos, esa construcción es posible con el análisis didáctico que da forma y transforma su enseñanza, en la comprensión de un concepto matemático más dinámico, la aplicación al contexto con un sentido a su vida (Gomez, 2006).

Esta investigación aporta al docente elementos didácticos necesarios para construir, aplicar, evaluar y hacer conjeturas a una unidad didáctica local, para evidenciar actos de comprensión en contenidos matemáticos que tradicionalmente son aprendidos desde el algoritmo y la no construcción de la noción al identificar, discriminar y generalizar, desconociendo sus múltiples significados cuando aparece la noción de función como relación, sin articular los sistemas de representación que la describen, las dificultades y errores que presentan los estudiantes para llegar a un conocimiento que genere un aprendizaje (Sierpinska, 1992).

Frente a nuevas investigaciones alrededor de esta noción y otras de matemáticas, se recomienda explorar los demás actos de comprensión como la generalización y la síntesis, con situaciones propias del contexto local. Desarrollar todos los sistemas de representación, enfatizando en las expresiones algebraicas y sus operaciones, para posibilitar la construcción del modelo matemático.

Durante este proceso de investigación, he construido nuevos saberes en el marco de la didáctica de la matemática y las ciencias experimentales que me han servido para modificar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en el aula y en la institución, fortaleciendo las políticas de calidad para innovar en la planificación curricular dirigido al programa de formación complementaria; con la construcción de unidades didácticas locales de contenidos específicos. Resaltando como aportes importantes para mi desempeño personal y como docente, el desarrollo del pensamiento crítico a través de la lectura, la escritura y la investigación.

LISTADO DE REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1985). *Calculus Volumen 1* (2da ed.). Mexico: Reverté S.A.

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas:enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficadoras* . España: Universidad de Granada.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática* (Es ed.). (M. M. Perez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Cano, G. J. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín (Maestria en Educación).* Universisdad de Antioquia, Medellin.

Cornu, B. (1991). Limits. En In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Cuesta, B. A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica (Tesis Doctoral en educación).* Universidad Autonoma de Barcelona, Bellaterra.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unaviodable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Díaz, G. J. (2013). El concepto de función:Ideas pedagogicas apartir de su historia e investigaciones. *El calculo y su enseñanza, 10*(4), 4-13.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*, 95-123.

Fernandez, J. G. (1999). *¿Como hacer unidades didacticas innovadoras?* Cataluya: Díada Editora .SL.

Flores, P., Gomez, P., Marin, A. (2013). *Apuntes sobre analisís de instruccion. Modulo 4 MAD.* Bogota : Universidad de los Andes .

Goldin, G., & Javier, C. (1998). Representacion and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17*(1), 1-2.

Gómez, P. (2002). Analisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMMA*, *7*(3), 251-293.

Gomez, P. (2006). Análisis Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matematicas de Secundaria. En M. P. Bolea, M. Moreno, & M. J. Gonzalez (Ed.), *Investigación en* *educación matemática : actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 1-25). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial (Tesis Doctoral en Educación).* Universidad de Granada, Granada.

Gomez, P., & Cañadas, M. C. (2012). *Módulo 2: Análisis de contenido.* Bogota: Universidad de los Andes.

Hernandez Sampieri, R., & Fernandez Collado, C. (2014). *Metodología de la Investigación* (cuarta edicion ed.). mexico: McGraw-Hill/ Interamericana Editores S.A.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. En I. E. (Ed.)., *Teaching and learning mathematical problem solving:Multiple research perspectives* (págs. 381-398). Hillsdale, Nj: Eribaum.

Kaput, J. (1987a). Representation and mathematics. . En I. C. (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (págs. 19-26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1987b.). Towards a theory of symboluse in mathematics. En I. J. (Ed)., *Problems of repesentation in mathematics learning and problem solving* (págs. 159-195). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1989a.). Linking representations in the symbol systems of algebra. En R. V. In C. Kieran, *National Council of Teachers of Mathematics* (págs. 167-194.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

kaput, J. (1989b). supporting concrete visual thinking in multiplicative reasoning: Difficulties and opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1),35-47.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (págs. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Larson, Hostetler, R., & Edwards, B. (1986). *Cálculo y Geometria Analítica* (6ta ed.). Mexico: Mcgrawhill Educacion.

Leithol, L. (1998). *Calculo* (7 ed.). Mexico: Oxford University Press-Harla Mexico, S.A.

Lupiáñez, J. l. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formacion inicial de profesores de matemáticas de secundarias (Tesis doctoral).* Universisdad de Granada, Granada.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorias de la comprension matematica: Comparacion de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprension matematica y la Teoria APOE. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 6*(3), 221-271.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matematicas.* Bogota: Magisterio.

MEN. (2014). *Estandares Basicos de Competencia en Matematicas.* Bogota.

Mesa, Y., & Villa-Ocha, J. (14-18 de julio de 2008). Reflexión Histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática. *Comunicación presentada en HPM 2008- History and Pedagogy of Mathematics* , pág. 6.

Murillo, H. A. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once de los colegios públicos de la Virginia (Tesis de maestria en educación).* Pereira.

P.E.I, N. S. (2012). *Proyecto educativo institucional.* Guacari Valle: Calidad.

Piaget, J. (1975.). Piaget's theory. En I. P. (Ed.), *The process of child developmet* (págs. 164-212). New York, NY.: Jhon Aronson.

Pirie, S. E. (1990). A recursive theory of mathematical understanding:some elements and implications. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. (L. Rico, Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94.

Quintero, M. M. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito (Tesis de Maestria en educación).* Universidad Nacional de Colombia. Medellin : .

Ribnikov, K. (1974). *Historia de las matemáticas.* Moscú: Mir.

Rico, L. (1992). *Proyecto Docente.* Universidad de Granada, Granada.

Rico, L. (1995). *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.* Granada: Lic en Matematáticas 5 curso-.

Rico, L. (1997b). La educacion matematica en la enseñanza de la secundaria. En R. Luis, E. Castro, M. Coriat, L. puig, & M. Socas (Edits.), *Los organizadores del currículo de matemáticas* (págs. 39-59). Barcelona: Ice-Horsori.

Rico, L. (1997c). Los organizadores del Curriculo. En L. Rico, *Los Organizadores del Curriculo.* Barcelona: Horsori.

Rico, R. L., Lupiañez, J. L., & Molina, M. (2013). *Ánalisis Didáctico en Educacion Matemática*. Granada: Comares.

Ruiz, H. L. (1998). *La Nocion de Función: ANALISIS EPISTEMOLOGICO Y DIDACTICO*. Granada: UNIVERSIDAD DE JAEN. SERVICIO DE PUBLICACIONES E INTERCAMBIO.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of the mathematical conceptions: Reflectionon processesand objetsas different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 1 -36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification:The case of function. En I. G. (Eds.), *The concept on function: Aspects of epistomology and pedagogy* (págs. 59-84). Washington: DC: MAA.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-55.

Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics* (Universidad del valle ed., Vol. 10). (G. D. César Delgado, Trad.) Cali, Colombia.

Sierpinska, A. (1992). *On Understanding The Notion of Function, En:Dubinski, E. y Harel, G. (eds.), The Concept of function: Some Aspectsof Epistemology and Pedagogy, MAA Notes,* (.Documento de uso académico Universidad Del Valle, 1999. Cali. Colombia. ed., Vol. 25). (César Delgado, Trad.) Washington, DC: Mathematical Association of América.

skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77,20-26.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la. En *La educación matemática en la enseñanza en la enseñanza de la Secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Stewar, J., Ramos, S., & Joaquin, T. (2007). *Calculo diferencial e integral* (2da edición ed.). Colombia: internacional thomson.

Tall, D. (1978). The Dynamics of understanding mathematics. En *Mathematics Teaching* (págs. 84, 50- 52).

Tall, D. (1989.). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change . *For the Learning of Mathematics*, 9 (3), 37-42.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (págs. 3-21). Dordrech: Kluwer.

Torres, F. P. (2011). *El Concepto de Función en la transición bachillerato Universidad.* Universidad de Valle, Cali.

Ugalde, W. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet, 14*(1), 1-48.

Vargas, N. M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno (Tesis de Maestría en Educación).* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Vasco, C. E. (2010). El pensamiento variacional y la modelación matemática.

Youschkevitch, A. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19 the Century. *Archive for History of Exact Sciences, 16*, p.37-85.

Yuste, P. (2008). Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia. *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science,, 23*(2), 219-244.

Zill, D., & Dewar, J. (1992). *Algebra, trigonometría* (3ra, edicion. ed.). Mexico D.F.: Mcgraw hill Educación.

7. ANEXOS

1. Diseño Tarea escolar inicial (Situación 1)

Unidad didáctica local de la noción de función como relación

Nombre ____ *Grado*_________

Situación 1

Objetivo: Identificar relaciones y establecer cuándo ellas son o no función.

En el contexto cotidiano se encuentran diversos tipos de realidades en diferentes campos muchas de ellas que es posible matematizar otras no. A continuación encontrarás una serie de situaciones, identifica las relaciones en cada una de ellas y luego determina cuáles de esas relaciones son funciones y cuáles no. ¿Explica por qué?

1. Un Doctor ordena a la enfermera tomar y registrar la temperatura al paciente de la habitación 402, durante las primeras 4 horas para determinar su estado de salud. Los registros se presentan a continuación:

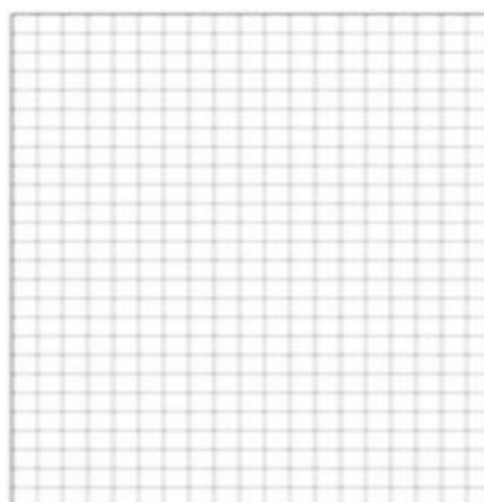
38 °C Primera hora

36 °C. Segunda hora

36 °C. Tercera hora

37 °C. Cuarta hora

Fuente imagen: https://sp.dpositphotos.com/31295063



Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

¿Qué tipo de relación hay?, Descríbala:

____

____

¿Identificas alguna otra relación?, Descríbela:

____

____

¿Son funciones las relaciones encontradas?, ¿Explique por qué?

____

2. Un número natural y su triple

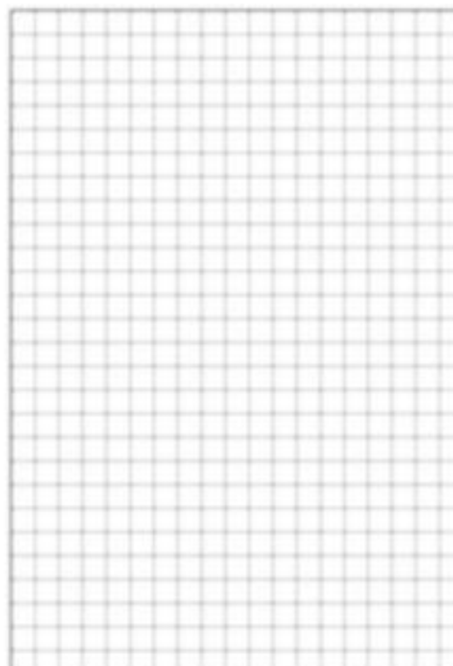
¿Identificas alguna relación, cuál?

____

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

____

____



Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

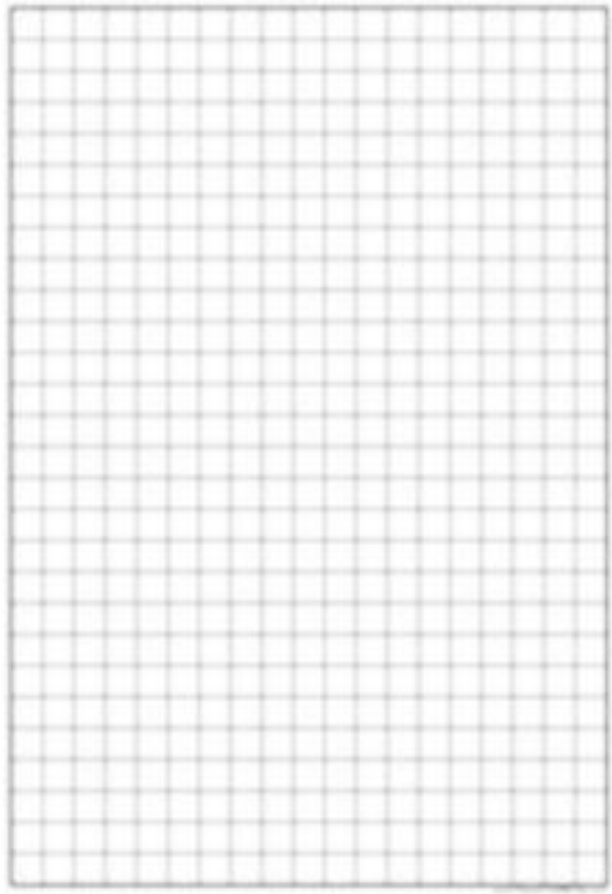
¿Son funciones las relaciones encontradas?, ¿explique por qué?

---

3. **Un número y su cuadrado aumentado en 5**

¿Identificas alguna relación, cuál?

¿Identificas otras relaciones, cuáles?



Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

¿Son funciones las relaciones encontradas?, ¿explique por qué?

---

4. Tu edad desde el año 2003 y el año en que cumpliste.

¿Identificas alguna relación, cuál?

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

¿Son funciones las relaciones encontradas?, explique por qué?

Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

5. En la panadería "el palacio del pandebono" se compraron galletas del mismo diámetro y cada una de ellas con una cantidad de choco chispas.

Fuente: https://1.bp.blogspot.com/galleta%2Bchips.png

¿Identificas alguna relación, cuál?

____

____

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

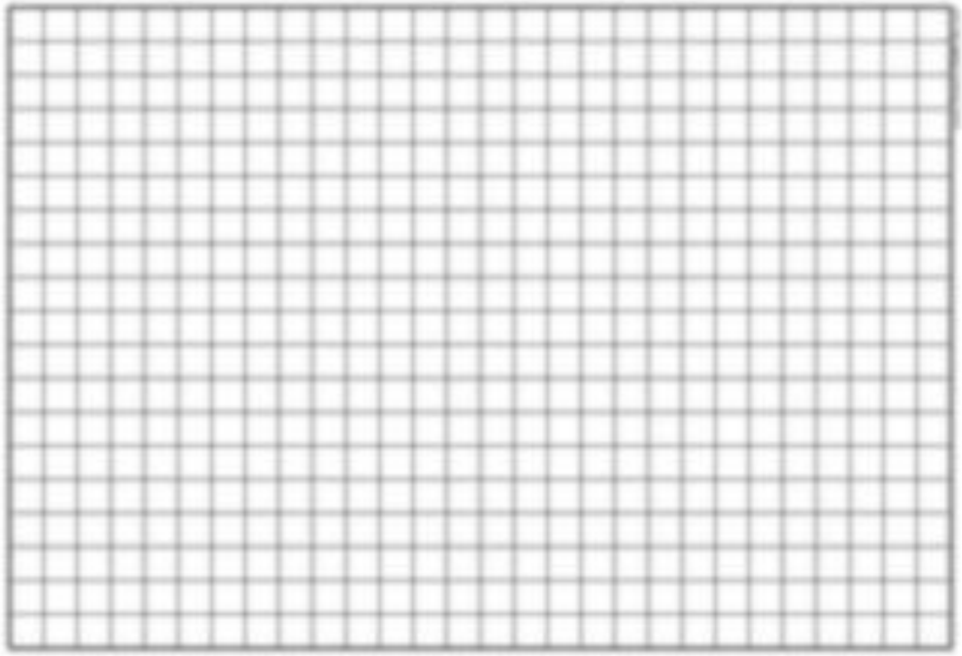
____

____

¿Son funciones las relaciones encontradas?, ¿explique por qué?

____

____



Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

6. Las imágenes siguientes representan tres familias distintas de tres estudiantes del grupo $9-1$. (Camila , Luisa y Pedro no tiene padres)

Fuente: http://ilusionporeducareninfantil.blogspot.com/2015/11/la-familia.html

¿Identificas alguna relación, cuál?

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

¿Son funciones las relaciones encontradas?, explique por qué?

Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

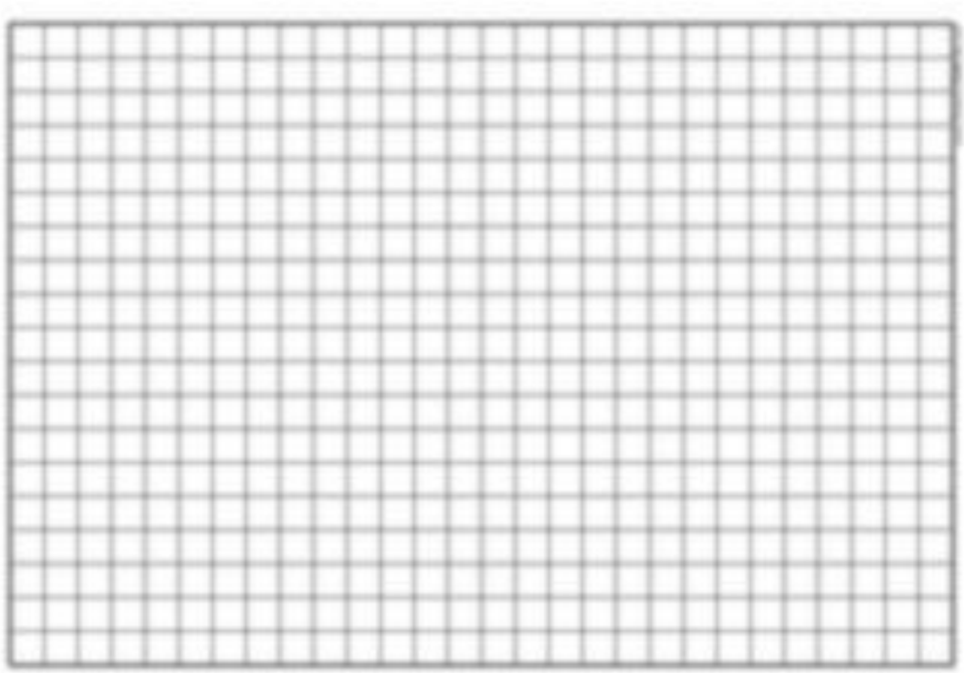
7. En el supermercado Olímpica de Guacarí, sacaron el catálogo de precios con los artículos que José desea comprar: Aceite, Café, crema dental, lavaplatos y juego de sartenes.

Fuente: Catalogo Almacenes Olímpica S.A

¿Identificas alguna relación, cuál?

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

¿Son funciones las relaciones encontradas?, explique por que



Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

8. Las áreas de biología, dibujo, inglés, álgebra, química y su respectivo promedio de notas en el grado 9-1.

Alumno	Biología	Inglés	Química	Álgebra	Dibujo
1	4	2	3,5	1	4,5
2	3,5	4	4,5	2,5	5
3	2	4,5	2	3,5	4
4	4,5	3	3	3	3,5
5	3	3	3	4,5	4
Promedio					

¿Identificas alguna relación, cuál?

¿Identificas otras relaciones, cuáles?

¿Son funciones las relaciones encontradas?,¿explique por qué?

Desarrolla aquí el proceso que te permita verificar si las relaciones encontradas son o no funciones.

2. Diseño tarea escolar intermedia (Situación 2)

Situación 2

Objetivo 2: Discriminar las magnitudes constantes y variables en una situación dada e identificar la relación de dependencia entre ellas.

Actividad 1

En el municipio de Guacarí, están presentes contextos con actividades sociales, económicas y recreativas, las cuales son posibles modelar. A continuación se presentan algunas, en las cuales tienes que identificar las magnitudes constantes y variables, e indicar las variables dependientes e independientes.

1. **Un kilogramo de Papaya cuesta 1000 pesos en el "Surtifruver de Guacarí". Si una persona desea llevar 2 kilogramos cuánto debe pagar, ¿Cuánto hay que pagar por 7 kilogramos? ¿Cuánto dinero hay que pagar por n cantidades kilogramos?**

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

2. Pedro en su bicicleta, recorre 100m por cada vuelta en el parque “José Saavedra Galindo”. ¿Cuánto recorre en tres vueltas en ocho y en n vueltas?

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

---

3. El metro de cable eléctrico cuesta 1500 pesos. ¿Cuál será El costo para 30m, 100m y n metros de cable?

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

4. Un cultivador de plátano recibe ingresos de 70 pesos por cada plátano que vende. Si vende 30 plátanos, 70 plátanos y n plátanos. ¿Cuál será el costo para 30 plátanos, 70 plátanos y n plátanos.

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

5. Un cortero de caña, le pagan 40.000 pesos por día de trabajo. ¿Si trabaja 4, 15, 30 y n días, cuál será su salario?

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

6. De un grifo sale 1 litro y medio de agua por minuto. ¿En 2, 7, 10 y n minutos cuantos litros de agua salen?

Desarrolla aquí los procesos que consideres necesarios

¿Qué magnitudes se presentan en la situación?

¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles no?

¿De las magnitudes que varían cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

¿Construye un modelo matemático que represente la situación?

3. *Diseño tarea escolar final (Situación 3)*

Situación 3

Objetivo 3. Modelar situaciones del contexto geométrico y económico a través de funciones cuadráticas.

Las matemáticas dan la posibilidad de particularizar el contexto que nos rodea, ayudando a entender su comportamiento por medio de las relaciones de sus elementos. Con respecto a lo anterior encontraras dos actividades a modelar por medio de funciones.

Actividad 1

. Proyecto Ambiental Escolar (PRAE)

Dentro de las actividades del proyecto ambiental PRAE, está la adecuación de zonas verdes que embellecen la institución y generan en los estudiantes un buen sentido de pertenencia, por esa razón se desea sembrar en un espacio físico rectangular, plantas ornamentales por parte de los estudiantes. Para encerrar este espacio se tiene disponible 40 m de malla, con lo cual se intenta obtener la mayor área posible.

Fuente: https://www.facebook.com/media_set?set=a.244018882297927&type=3

1. ¿Qué magnitudes identificas en la situación?

___

2. ¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles permanecen constantes?

___

3. De las magnitudes que varían cuál de ellas son independientes y cuáles dependientes.

___

4. Completa la tabla que relaciona todos los valores enteros posibles que representan las longitudes del largo, ancho y área, teniendo en cuenta los 40 m de malla metálica.

Largo (m)	Ancho (m)	Área (m^2)
0	20	0
1	19	19

5. ¿Qué ocurre con el área a medida que aumenta la longitud del largo?¿ Que ocurre con el área cuando el largo es mayor a 10 m?

6. Cuáles de esos valores para el largo y el ancho permiten obtener un área máxima.

7. De acuerdo a la tabla representa gráficamente la relación entre el largo del terreno rectangular y el área obtenida.

8. Tomando como referente la gráfica obtenida en el punto anterior, ¿Para qué valor del largo se obtiene el área máxima?

9. Con ayuda de tu profesor dale un nombre al punto donde se alcanza el área máxima, dale un nombre a la gráfica obtenida.

10. Identifica los puntos de corte de la gráfica respecto al eje horizontal (raíces)

11. Puedes construir el modelo matemático que representa la situación tomando como referencia los puntos de corte de la gráfica con el eje horizontal (raíces). Construye el modelo matemático.

12. Construye la expresión analítica que relaciona al área en función del largo.

13. ¿Cómo son las expresiones algebraicas obtenidas en los puntos 11 y 12.

14. ¿Crees qué este tipo de relación es una función? ¿Por qué?

15. ¿Qué características debe tener una relación para que sea función?

16. Con ayuda de tu profesor dale un nombre a este tipo de funciones.

Actividad 2

Las empanadas de Doña Transito

Quien vive en Guacarí, ha disfrutado de las deliciosas empanadas de Doña Transito; quien vendía 500 empanadas al día cuando las ofrecía a 30 pesos y lograba vender 550 al día cuando las dejaba a 29 pesos. ¿Cuál sería el ingreso de doña tránsito para cualquier cantidad de empanadas vendidas?

Fuente: Libro Fogón Vallecaucano Gobernación del valle.

1. ¿Qué magnitudes identificas en la situación?

____

2. ¿Cuáles de esas magnitudes varían y cuáles permanecen constantes?

____

3. ¿De las magnitudes que varían, cuál es la magnitud independiente y cuál es la dependiente?

____

4. Escribe la relación que existe entre la cantidad de empanadas vendidas y su precio, haciendo uso de diagramas sagitales y posteriormente como producto cartesiano.

5. Con las parejas obtenidas en el punto anterior, tomando la cantidad de empanadas demandadas como la abscisa (coordenada x) y el precio por unidad como la ordenada (coordenada y), grafica en el plano la relación encontrada en el punto anterior y halla su pendiente.

6. Con la pendiente obtenida en el punto anterior y uno de los puntos de la recta, determina el modelo matemático de la relación entre la cantidad de empanadas vendidas y el precio en que cierta cantidad de empanadas puede venderse (ecuación de la recta), conocida como “ecuación de demanda”.

7. A partir de la ecuación anterior representa en una tabla el precio por unidad si se demandan: 20 empanadas, 50, 100, 300, 640, 830 y 1000 empanadas.

8. Tomando como referencia la ecuación obtenida en el punto 6, construye un modelo matemático que permita encontrar el ingreso que recibirá doña Transito para cualquier cantidad de empanadas vendidas.

9. Representa en una gráfica, la relación entre la cantidad de empanadas demandadas y el ingreso logrado.

10. ¿Cuál es el mayor ingreso obtenido en la venta de empanadas de doña Transito?, ¿Cuántas empanadas debe vender doña Transito para lograr el mayor ingreso?

11, Dale un nombre al punto donde se alcanza el máximo ingreso, dale un nombre a la gráfica obtenida.

12. Identifica los puntos de corte de la gráfica respecto al eje horizontal

13. Construye la expresión analítica que relaciona la cantidad de empanadas vendidas con respecto al ingreso desde los puntos de corte obtenidos en el paso anterior.

14. ¿Crees qué este tipo de relación es una función? ¿Por qué?

15. ¿Qué características debe tener una relación para que sea función?

16. ¿Qué nombre le pondrías a este tipo de función?

17. ¿Existe alguna relación entre la situación anterior y ésta?, Explica.