Errores que presentan estudiantes universitarios en relación al concepto de la derivada

Andrés David Pinto Hurtado

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2018

Errores que presentan estudiantes universitarios en relación al concepto de la derivada

Andrés David Pinto Hurtado

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director: Diego Díaz

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2018

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Resumen

En la Educación Matemática se han presentado diferentes problemáticas, relacionadas al aprendizaje del concepto de la derivada en la Educación Superior. En esta perspectiva, esta investigación tiene como propósito examinar los errores que cometen los estudiantes universitarios en el proceso de aprendizaje de la derivada.

Para ello, se aplicó una prueba de 9 ítems en relación al concepto de la derivada, en un grupo de 23 estudiantes del curso de cálculo I (Diferencial en una variable) que ofrece la Universidad del Valle. Posteriormente se realizó un análisis y clasificación del tipo de respuesta de los estudiantes por cada ítem según la propuesta de López (2005), donde se evidencio que el 55 % de las respuestas fueron contestadas de manera incorrecta. Y a partir de esta información se analizó detalladamente el razonamiento de los estudiantes en cada ítem para identificar algunos errores que ellos cometen utilizando la taxonomía de errores de Radatz (1979). Como resultado de este análisis se identificó una frecuencia de 155 errores cometidos por los estudiantes, en donde se observó que el tipo de error más frecuente en la prueba de evaluación, fue errores debidos al aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Con base en los resultados, se propusieron algunas sugerencias que aspiran a contribuir a la disminución de la incidencia del error, y brindar información a los profesores y estudiantes sobre los errores en el aprendizaje de la derivación que indirectamente permitan la mejora de los procesos pedagógicos y las técnicas de estudio.

Palabras claves: Error, Cálculo Diferencial, Derivada, Matemáticas, Clasificación.

Abstract

In Mathematical Education, different problems have been presented, related to the learning of the concept of the derivative in Higher Education. In this perspective, this research aims to examine the mistakes that university students make in the process of learning the derivative.

For this, a test of 9 items was applied in relation to the concept of the derivative, in a group of 23 students of the cálculo I course (Differential in one variable) offered by University of Valle. Subsequently, an analysis and classification of the type of response of the students for each item was carried out according to the proposal of López (2005), where it was evidenced that 55% of the answers were answered incorrectly. And from this information, the reasoning of the students in each item was analyzed in detail to identify some errors they make using Radatz's taxonomy of errors (1979). As a result of this analysis, a frequency of 155 errors committed by the students was identified, where it was observed that the most frequent type of error in the evaluation test was errors due to the deficient learning of facts, skills and previous concepts.

Based on the results, some suggestions were proposed that aim to contribute to the reduction of the incidence of error, and provide information to teachers and students about the errors in the learning of the derivation that indirectly allow the improvement of pedagogical processes and the study techniques.

Keywords: Error, Differential Calculus, Derivative, Mathematics, Classification.

Introducción

El surgimiento del cálculo entre los siglos XVI y XVII, estuvo determinado por la necesidad de resolver problemas relacionados al movimiento de los cuerpos, la variación de velocidad, el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, el cálculo de tangentes y de los valores máximos y mínimos de una función. En consecuencia, en la búsqueda de resolver estos problemas se dio origen al concepto de la derivada (Apóstol, 1988).

Este concepto, al igual que todo conocimiento científico ha estado acompañado de errores según puede constatarse al revisar su evolución histórica. Ahora bien, el error está también vinculado al proceso de enseñanza y aprendizaje, como en toda actividad humana. Gran parte de la sociedad, relacionada a este proceso, concibe el error como algo negativo. Esta concepción hacia el error, igualmente está muy cercana al ámbito universitario, especialmente en carreras estrechamente relacionadas con la matemática (Franchi y Hernández, 2004).

De acuerdo con Irazoqui (2015), existe una gran preocupación en la comunidad científica por investigar las dificultades y los errores presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Esto lo justifica en razón de la importancia del cálculo en la formación de estudiantes en el nivel de pregrado, en la mayoría de los programas de educación superior. Esto se refleja también en los programas académicos de la Universidad del Valle, siendo el cálculo diferencial un curso obligatorio para los planes de estudio de Ingenierías, Ciencias y Licenciatura en Matemáticas y Física.

En ese sentido, algunas investigaciones como (Tall, 1990, 1992, 1993; Artigue, 1995; Badillo, 2003; Hitt, 2005), señalan que existen diferentes problemáticas asociadas a las dificultades, errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje del cálculo y del concepto de la derivada. Este trabajo se centra particularmente en el error sin desconocer la convergencia de dificultades y obstáculos en el proceso de aprendizaje.

Si bien el error puede tener diversas etiologías, en una perspectiva constructivista del conocimiento, según Socas (1997), debe ser comprendido como *la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción*. De forma similar, "*Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar"* Godino, Batanero y Font (2003, p. 69).

En este sentido, Del Puerto, Minnaard y Seminara, (2006) plantean que e*l error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje*. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratarlos seriamente, discutiendo con los estudiantes sus concepciones erróneas, y presentando luego situaciones matemáticas que les permitan ajustar sus ideas (p. 2).

En esta perspectiva, esta investigación intenta analizar y clasificar los errores utilizando la propuesta de Radatz (1979), a través de la aplicación de una prueba en relación al concepto de la derivada, en un curso de cálculo I (Diferencial en una variable) que ofrece la Universidad del Valle. A partir de las reflexiones efectuadas alrededor de los resultados, se propusieron algunas sugerencias que aspiran a contribuir a la disminución de la incidencia del error, y brindar información a los profesores y estudiantes sobre los errores en el aprendizaje de la derivación que indirectamente permitan la mejora de los procesos pedagógicos y las técnicas de estudio.

1. CAPITULO I. ASPECTOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Problema de Investigación

En la Educación Matemática, se encuentran diferentes investigaciones que han centrado su interés en el aprendizaje y enseñanza del cálculo. Según Bouvier y George, 2000 (citado por Irazoqui 2015), “El aprendizaje del cálculo diferencial, es entendido como la apropiación de las ideas, conceptos y procedimientos relacionados con los infinitésimos y los procesos infinitos en la búsqueda de: tangentes a las curvas, determinación de máximos y mínimos para una función, la resolución de problemas de optimización, de interpolación o de aproximación” (p. 39).

Para Hitt, 2003 (citado por Arango, 2015), la enseñanza del cálculo puede constituirse en una fuente de problemas serios, tanto para estudiantes como para profesores que enfrentan la comprensión de nuevos conceptos. Particularmente el concepto de la derivada, es fundamental para el estudio del cálculo, y tiene una carga que puede provocar en los estudiantes dificultades en su comprensión. A esto el autor asocia el abordaje que se da al concepto en la Educación Media, centrándose en la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos (p. 4).

.

Por su parte, Abrate, Pochulu y Vargas, (2006), en una investigación sobre dificultades y errores en matemática, que articula la Educación Media y Universitaria, consideran que el error no aparece por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos previamente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales son inevitables, pero pueden ser comprendidas, abordadas y superadas (p. 11).

En la Universidad del Valle se tiene estipulado un tiempo de 3 ó 5 años para que los estudiantes aprueben los cursos de los programas académicos y obtengan el título de tecnólogo o profesional respectivamente. Sin embargo, muchos estudiantes no tienen en cuenta la alta exigencia académica de la universidad y los factores externos que pueden dificultar el proceso de adaptación y el desempeño en general. Está es una razón, por la cual se presentan muchos casos en los cuales los estudiantes incurren en bajo rendimiento, rezago o, de manera crítica, en deserción estudiantil.

Con base en esto, en algunos estudios sobre deserción en la Universidad del Valle hasta (2010), se ha reconocido desde los primeros semestres, que la falta de conocimientos o la incidencia de creencias y aptitudes desfavorables hacia las matemáticas son factores determinantes en la deserción estudiantil. Y algunos de estos casos se presentan en el curso de cálculo I, que es el pilar de la formación matemática en los programas de Ciencias, Licenciatura e Ingeniería.

Lo anterior podría asociarse a que los estudiantes al ingresar a la universidad se enfrentan a un conocimiento que algunos suponen inalcanzable, al cual intentan aproximarse con, un método utilitarista de aprendizaje, memorizando procedimientos y hechos, en diferentes situaciones de su formación profesional, así lo plantean diferentes estudios sobre la deserción y el bajo desempeño en los diferentes estudios en la Universidad hasta (2010).

Tras ello, la Universidad del Valle ha diseñado el curso de Pre-cálculo, orientado a la nivelación de los estudiantes, considerando que quienes ingresan no tienen la formación matemática suficiente para afrontar el concepto de la derivación, abordando así sus pre-requisitos. Sin embargo, en algunos casos, este curso tampoco es suficiente para encarar los nuevos aprendizajes que el cálculo plantea.

Así mismo, sin desconocer la influencia de la multiplicidad de factores que pueden incidir en el proceso de aprendizaje de la derivación, se ha señalado como una fuente frecuente de errores una falta de comprensión conceptual (Tall, 2011). De acuerdo con esto, es imprescindible que tanto profesores como estudiantes reconozcan los errores en el aprendizaje de la derivada y asuman el reto de superarlos. A partir de esta situación se formuló la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son los errores que presentan algunos estudiantes al resolver ejercicios en relación al concepto de la derivada en el curso de cálculo diferencial ofrecido en la Universidad del Valle?

1.2. Objetivos

Examinar los errores que cometen los estudiantes al resolver una prueba relacionada al concepto de la derivada, en el curso de Cálculo Diferencial en la Universidad del Valle.

1.2.1. Objetivos Específicos

- Identificar los errores cometidos por los estudiantes al resolver una prueba en relación al concepto de derivada.

- Determinar la naturaleza de algunos errores que cometen los estudiantes al resolver una prueba relacionada al concepto de derivada.

- Proponer sugerencias en relación a los resultados obtenidos como alternativas para reducir la incidencia de los errores identificados.

1.3. Justificación

La Universidad del Valle, es una Institución de Educación Superior, de carácter público, creada en 1945 por la Ordenanza No. 12, de la Asamblea Departamental del Valle del Cauca. Su campus principal se encuentra en la ciudad de Cali y cuenta con sedes regionales en el Valle del Cauca y en el norte del Cauca. Está Universidad tiene más de 30.000 estudiantes, matriculados en los programas de pregrado, especializaciones, maestrías y doctorados. En Ingeniería, Ciencias y Licenciaturas en Matemáticas y Física, se ofrece el curso de cálculo ubicado en los primeros semestres de los programas académicos.

En la Universidad se ha reconocido la importancia de acompañar a los estudiantes en su proceso de adaptación al ingresar a ella. Esta labor se adelanta desde Bienestar Universitario con la Estrategia ASES donde los nuevos estudiantes reciben, entre otros, la asesoría de estudiantes de semestres avanzados, vinculados a los mismos programas académicos, tratando de mejorar la adaptación a la vida universitaria, a las asignaturas entre ellas cálculo y con ello evitar el bajo rendimiento, el rezago y la deserción estudiantil, situaciones definidas en el Acuerdo 009 de 1997.

En ese marco, este trabajo de investigación surge en 2015 desde la experiencia de trabajo de investigador en las monitorias académicas brindadas por la Estrategia ASES, con estudiantes que ingresaban a la Universidad del Valle a las carreras de Ingeniería, Ciencias y Licenciatura. En particular con los estudiantes que asistían al curso de cálculo diferencial, en este proceso se pudo observar que los estudiantes cometían muchos errores al resolver ejercicios con los conceptos relacionados a la derivada. Esta situación alentó el diseño de una propuesta de estudio.

Así pues, el propósito de esta investigación, fue realizar un análisis y clasificación de los errores que cometen los estudiantes al resolver una prueba en relación al concepto de la derivada, en un curso de cálculo diferencial en la Universidad del Valle. A partir de las categorías de errores propuesta por Radatz (1979).

El estudio del cálculo diferencial es un componente importante de los procesos de formación académica que la Universidad ofrece, y esta investigación no solo busca identificar y clasifican los errores en el proceso de aprendizaje, sino que también como plantean Abrate, Pochulu y Vargas, (2006), permite determinar aquello que es necesario que aprendan los profesores en relación con los errores que cometen los estudiantes, ya que esto puede ser un punto de partida para proporcionar estrategias en el momento de llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto matemático de la derivada.

Como plantea Engler et al. (2002), es fundamental identificar los errores en los diferentes contenidos matemáticos, con el fin de superarlos y obtener logros de aprendizaje. Además, que el análisis de estos errores permite a los docentes organizar estrategias para crear condiciones que favorezcan un mejor aprendizaje y corregir dichos errores. En este trabajo, se considera al igual que Rico (1995) que el estudio de los errores pueden ayudar a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas, a las que es difícilmente se puede acercarse por otra vía (p. 95).

Por lo anterior, debido a que el desempeño académico es un factor relevante en la formación profesional de la Universidad del Valle, el análisis de los errores que cometen los estudiantes que inician su proceso formativo, tendrá un impacto en la calidad de su educación, puesto que permite al docente obtener un panorama general de la interpretación y los procedimientos que realizan los estudiantes al resolver problemas y a partir de esto, proponer estrategias específicas y particulares de prevención y corrección en los procesos aprendizaje matemático que les posibilite avanzar en su formación, minimizar el riesgo de bajo desempeño y deserción y así evitar la carga emocional y económica que ello representa.

1.4. Antecedentes

Al considerar la manera como se ha investigado sobre el aprendizaje de la Derivada, Ferrini-Mundy (1994), (citado por Arango, 2015), destaca que las exploraciones adelantadas se han centrado en el significado construido por los estudiantes. Este tipo de trabajos, básicamente describen las características de los significados construidos por los estudiantes, comparándolas con aquellos presentados en los libros de texto. Así, el principal interés se ha puesto en identificar los conflictos e las inconsistencias que tiene lugar entre ambos. En esta misma línea de pensamiento, Sierpinska (1990), afirma que percibir el concepto consiste en intentar aprehender su significado, tarea que posiblemente se constituye en un acto de generalidad y síntesis de significados relacionados a elementos específicos de la estructura o forma de la noción (p. 4).

Artigue (1988), (citado por Arango, 2015) plantea que el problema no sólo radica en la enseñanza del cálculo de Derivadas. Explícita que aunque el docente se esfuerce en enseñar a los estudiantes a calcular derivadas de funciones explícitas y a resolver algunos problemas estándar, frecuentemente se presentan grandes errores al resolver ejercicios que requieren un conocimiento que trascienda el conocimiento del álgebra de derivadas. La autora ejemplifica aludiendo a la evidencia empírica. De tal manera, se refiere a estudiantes que pueden resolver ejercicios que implican la aplicación correcta de 16 de las reglas de derivación, pero se les dificulta aplicar el significado de la derivada, a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente (p. 15).

Por otro lado, Orton (1983) identificó tres tipos de errores que cometían los estudiantes al resolver ejercicios relacionados a la derivación y sus aplicaciones: primero, en errores estructurales, relacionados con los conceptos implicados; segundo, errores arbitrarios, cuando el estudiante se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema y tercero, errores de manipulación, en donde los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

A nivel local se encuentra el trabajo de Delgado, C. y Tenorio, M.C. (2009) quienes abordan la relación entre construcción de conocimiento matemático e inclusión, con población indígena y afrocolombiana en la Universidad del Valle. Los investigadores realizaron un proyecto piloto en torno al cálculo con población multiétnica, donde se propuso una estrategia didáctica socioconstructivista, tratando de transformar la formación matemática de los estudiantes identificados y con ello evitar el fracaso y deserción académica. Así, explicitaron estrategias educativas que posibilitaran asimilar los conocimientos científicos y tecnológicos para responder a las exigencias académicas de la formación profesional en ingenierías.

Por su parte, López, D. (2005), abordó las deficiencias en matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería de una universidad privada de Santander. Desde la perspectiva de Piaget, Vygotsky y Ausubel halló que los estudiantes tuvieron imprecisión en la retención y memorización de reglas; aplicación inadecuada de operaciones con expresiones, fracciones numéricas y algebraicas; empleo erróneo de algoritmos; aplicación inadecuada de propiedades en las operaciones básicas con los números reales; planteamientos inadecuados en relaciones trigonométricas; identificación y ubicación inapropiada de datos, variables o modelos matemáticos confusos alrededor de diagramación y solución de problemas. A las dificultades, la investigadora añadió la desatención y la falta de recursividad para confirmar resultados a través de la aplicación de la reversibilidad. De esta investigación se tomó la idea de clasificar las respuestas de los estudiantes en: Correctas, Incorrectas, Tiene idea pero finalmente no es correcto y no contestó.

En el trabajo anterior, además se pudo identificar una auto-percepción negativa en torno al dominio de los prerrequisitos para el Cálculo Diferencial, lo cual los estudiantes asociaron a factores internos como desconcentración, desmotivación, falta de estudio y de métodos adecuados para ello; y a factores externos como falta de tiempo, deficiente preparación del colegio, la falta de coherencia entre las formas de evaluación en la educación media y la superior. El trabajo del profesor como mediador de procesos de aprendizaje fue reconocido por los participantes como fuente de experiencias positivas o negativas, y por tanto definitivo, en el aprendizaje.

Abrate, Pochulu y Vargas (2006), abordaron las causas de los errores y dificultades en Matemática, en el marco de un proyecto que procuró articular la Escuela Media y la Universidad y con ello facilitar la inclusión de los estudiantes y la mejora de las prácticas educativas. Encontraron que los errores que los estudiantes cometen en Matemática, no se deben específicamente al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos que se trasladan a los nuevos contenidos que se abordan. Esta investigación se realizó bajo el marco teórico de errores propuesta por Luis Rico 1995, y entre ellas la caracterización de errores planteada por Radatz (1979), la cual orientó la presente investigación.

Ramírez, G. y Ordoñez J. (2014) Realizaron un Análisis Didáctico del proceso de enseñanza de la derivada en el curso de Cálculo I, en la Universidad del Valle. En este trabajo tomaron como referencias teóricas a: García, Gavilán & Linares, 2012; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013, y con base en ello, describieron el proceso de la visualización del concepto de la derivada, desde el rol del profesor y los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

2. CAPITULO II. MARCO TEÓRICO

2.1. Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas

Los errores, asunto clave en este trabajo, están relacionados con las dificultades y obstáculos que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, es preciso tener en cuenta que hay una distinción entre estos conceptos, según Socas (1997) las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que pueden abordarse desde diferentes perspectivas, según el énfasis que pongamos en uno u otro elemento: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores. Así, las dificultades son potencialmente fuente de errores en las producciones de un estudiante a lo largo de su proceso de aprendizaje; los errores provienen de ellas (p.125).

Además, Socas (1997, p. 126), señala que a partir de la naturaleza de las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, se pueden identificar cinco categorías de dificultades:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

La idea de dificultad, conduce a otro concepto: obstáculo. Para Socas (1997) los obstáculos en el aprendizaje remiten a la organización de los errores. El concepto de obstáculos fue introducido por Bachelard (1993) en las ciencias experimentales bajo el carácter epistemológico. Para el autor, “es el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos” (p. 15). Así, inciden en el proceso de desarrollo del pensamiento científico, pero no se trata de experiencias de aprendizaje específicas e individuales debidas a la complejidad de los fenómenos o facultades humanas. Estos obstáculos son propios del acto de conocer y aparecen bajo la forma de una inercia que provoca el estancamiento o la regresión. Bachelard identifica varias clases de obstáculos: las tendencias a confiar en experiencias intuitivas engañosas y a la generalización y el lenguaje natural.

De acuerdo con Del Puerto, Minnaard y Seminara (2006), Brousseau (1983) adopta las ideas de Bachelard y las desarrolla en el ámbito específico del aprendizaje de la matemática. En su trabajo distingue entre obstáculos de origen psicogenético, que están vinculados con el estadio de desarrollo propio del aprendiz; los de origen didáctico, vinculados con la metodología que caracterizó el aprendizaje y los de origen epistemológico, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos. En todos los casos se destaca el carácter resistente que presentan estos obstáculos y la identificación necesaria para que tras su superación luego se logren alcanzar nuevos conocimientos.

Por su parte Herscovics (1989), (citado por Socas, 1997) retoma la idea de obstáculo epistemológico y la relaciona con la teoría el aprendizaje de Piaget y particularmente lo inserta en el marco de los procesos de asimilación que remite a la integración de la información a ser conocida en una estructura cognitiva existente y la acomodación de tales datos, o ajustes en la estructura cognitiva requerida por el aprendizaje de nuevos conocimientos. En esta perspectiva el error sería un conocimiento que resulta adecuado durante un tiempo para la resolución de un problema pero que al resultar inadecuado o insuficiente para posibilitar la adaptación a nuevos problemas. Así, un obstáculo no es falta de conocimiento, por el contrario es conocimiento adquirido y de acuerdo con Socas (1997) el obstáculo será más resistente en la medida en que esté mejor aprendido y cuánta mayor eficacia haya mostrado en otros contextos de aprendizaje. Así, la construcción de nuevos esquemas conceptuales en los estudiantes es un proceso cargado de obstáculos.

Hechas estas clarificaciones conviene señalar que este trabajo de investigación se centra en la identificación de los errores es decir de las producciones incorrectas de los estudiantes, observables al resolver una prueba de Cálculo Diferencial en relación al concepto de la derivada. Se reconoce que en los errores que se identifican subyacen dificultades y obstáculos pero su caracterización excede los objetivos de este trabajo.

Para Radatz (1980), (citado por Rico, 1995) "Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta". De tal manera, el concepto de error parte de una valoración dicotómica: correcto e incorrecto, correspondiendo a este último carácter. El error es constitutivo del proceso de aprendizaje, aunque comúnmente resulta ser indeseable tanto para el estudiante como para el docente. El hecho de que los docentes hagan un reconocimiento del error como una parte del proceso de aprendizaje y posibiliten a los estudiantes verlo como tal es condición para aprender a través de él y no dejarse abatir por su presencia en el proceso. De tal manera, se hacen evidentes en las producciones de los alumnos, constituyéndose en datos objetivos que se encuentran en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y tal carácter objetivo remite a la idea de observable, tangible, detectable y corregible.

Mulhern (1989) (citado por Rico, 1995) agrega otras características de los errores tales como la espontaneidad, la persistencia, la dificultad para ser superados, su carácter sistemático o la aparición por azar y frecuentemente la inconsciencia frente a su existencia. El estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha atraído el interés en Educación Matemática, teniendo una larga historia, caracterizada por aproximaciones e intereses desde diferentes perspectivas, orientadas por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología y condicionada por los objetivos y formas de organización del currículo de matemáticas en los correspondientes sistemas educativos.

Pero ¿cómo entender las causas de los errores? De acuerdo con Broussseau, David y Werner, citados por Rico (1995), los errores pueden girar alrededor de grandes concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales, ser el resultado de la aplicación consistente y realizada con confianza, de un procedimiento imperfecto; ser el resultado de la utilización de procedimientos imperfectos, sobre concepciones inadecuadas, no reconocidas por el docente o derivar de la invención, por parte de los estudiantes, de métodos originales, no formales y propios, para la resolución de problemas.

Retomando a Radatz (1979), es preciso reconocer que existe una pluralidad de aproximaciones teóricas y de intentos de explicación sobre las causas de los errores. El autor señala diversas razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación son importantes. Entre ellas, las reformas sucesivas del currículo de matemática muy probablemente han suscitado nuevos errores, debido a que los contenidos específicos, la individualización y diferenciación de la instrucción matemática requieren de una gran destreza en el diagnóstico de dificultades específicas. De tal manera, los profesores necesitarían modelos de actuación para diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.

Además, Rico (1995), identifica cuatro líneas de investigación actual en torno a los errores en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Esta investigación se centró en la primera de estas líneas:

- El análisis de sus elementos constitutivos, sus causas y la construcción de taxonomías para clasificarlos.
- El abordaje curricular de los errores.
- La formación de los docentes para su detección, análisis, interpretación y abordaje.
- El análisis de los errores a través de técnicas estadísticas para contrastar hipótesis.

Por otro lado, investigaciones como las de David, Ashlock, Reisman, Robitaille, Bell, Ginsburg, Erlwanger y otros, citados en Rico (1995, p.80), han señalado cómo los errores en matemática no son azarosos ni accidentales, siendo posible predecirlos bajo la identificación de algunos patrones comunes en distintos individuos. De acuerdo con sus perspectivas, ellos surgen por las estrategias personales usadas en la resolución de problemas, a partir de experiencias e interpretaciones consolidados sobre los conocimientos matemáticos iniciales.

Desde estas perspectivas los errores estarían así en la superficie y a ellos subyacen un nivel más profundo de representación correspondiente al sistema de significados que sustenta las realizaciones observables. En esta misma vía, Socas (1997) enfatiza en que independientemente de la procedencia del error, este debe entenderse como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

2.2. Categorización de Algunos Errores Matemáticos

Rico (1995) señala que los errores son una fuente inagotable de conocimientos que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático. Para lograr esto debemos atender su problemática y no rechazarla e intentar que los mismos se constituyan en un elemento motivador importante. Desde esta perspectiva, en su trabajo explora las categorizaciones de los errores en el aprendizaje de las matemáticas que se han efectuado. A continuación se hace una breve presentación de los estudios más relevantes al respecto, abordados por este autor.

Una de las clasificaciones más destacadas fue realizada por Radatz (1979), centrándose en una teoría del procesamiento de la información para ello. Sobre tal clasificación se apoya este trabajo. En ella se consideran los siguientes cinco tipos de errores:

- **Errores debidos a dificultades de lenguaje**. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extrajera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

- **Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.** Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

- **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase se encuentran los siguientes tipos de errores:

  - Errores por “perseveración”, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.

- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

- **Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes**. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Análogamente, Rico (1995) encuentra que Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos. Así, determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados según su fuente: aquellos que resultan de datos mal utilizados, por interpretación incorrecta del lenguaje o la traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto; los que surgen por las inferencias no válidas lógicamente o falacias de razonamiento; aquellos que derivan de la deformación de un principio, una regla o una definición identificable; los que se asocian a una falta de verificación en la solución y los errores técnicos: de cálculo, en la manipulación de datos o de símbolos algebraicos y en la ejecución de algoritmos básicos.

Sabiendo esto, hay que destacar que las categorizaciones de los errores propuestas por Radatz (1980) y de Movshovitz (1987), están enfocadas en evidenciar errores. Sin embargo, surgen limitaciones para apreciar si el estudiante realmente tiene el conocimiento o simplemente sabe realizar ciertos procesos, por ejemplo, comprender y dar cuenta de la noción de derivada y su aplicación en el mundo real.

De manera complementaria, la teoría de obstáculos profundiza en ello. En esta perspectiva, Brousseau citado por Barrantes (2006) propone una arqueología de los obstáculos, donde plantea los diversos orígenes según el desarrollo del sujeto y la incursión en modelos culturales específicos: el ontogénico, que alude a lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo; el didáctico, que incluye las dificultades asociadas al modo de enseña y los epistemológicos, propios del concepto.

2.3. La Derivada en el Cálculo Diferencial

En la Universidad del Valle, el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas ofrece el curso presencial de Cálculo I, el cual tiene cuatro créditos, una intensidad semanal de cinco horas y es habilitable. De acuerdo con el programa, sus objetivos son capacitar al estudiante para manejar con destreza las técnicas propias del cálculo diferencial y sus aplicaciones a la resolución de problemas y ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes. Sus contenidos giran alrededor de 3 unidades temáticas:

Números, funciones y gráficas, que considera como temas: funciones y sus gráficas; operaciones con funciones; composición de funciones; función inversa; funciones algebraicas, trigonométricas y sus inversas: función exponencial y función logarítmica.

Derivada de una función, considera: la definición de límite de una función; límites laterales. Teoremas sobre límites: límites infinitos y al infinito; continuidad y discontinuidad de funciones; álgebra de funciones continúas; Teorema de Bolzano y del valor intermedio; definición de la velocidad y tasas de cambio; derivada, su interpretación geométrica, reglas de derivación, regla de la cadena: derivación implícita; derivación de función inversa; derivación de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; derivadas de orden superior; Teorema de Rolle y Teorema del valor medio.

Aplicaciones de la Derivada, donde se aborda: el cálculo de derivadas, incrementos diferenciales y aproximación lineal; funciones crecientes y decrecientes; máximos y mínimos relativos y absolutos; criterio de la primera derivada; concavidad y puntos de inflexión; criterio de la segunda derivada; dibujo de gráficas; razones relacionadas y problemas de máximos y mínimos.

En consecuencia, para comprender la idea básica del Cálculo diferencial, es necesario comprender el concepto de derivada. Para ello, se darán algunos conceptos fundamentales, con base en lo planteado por Larson, R; y Edwards, H. (2010) en el texto *Cálculo en una variable*, Ed 9 y por Stewart, J. (2012) en el texto *Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas*. Ed 7. Estos textos tienen un uso extendido y son conocidos por los estudiantes participantes de la investigación, según reportaron.

Larson y Edwards (2010), señalan que el cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII, como son: El problema de la recta tangente, el problema de la velocidad y la aceleración, el problema de los máximos y mínimos y el problema del área (p. 96).

En relación al problema de la recta tangente, Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales.

Sin embargo, el cálculo fue formalizado por Sir Isaac Newton (1642 – 1727) quien fue el primero en establecer muchos de los principios básicos del cálculo en manuscritos no publicados sobre el *método de fluxiones,* en 1665. La palabra *fluxión* se originó por el concepto de cantidades que “fluyen”; es decir, cantidades que cambian a cierta razón. Y por otro lado, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) al que le debemos la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada de una función y también, fue Leibniz quien introdujo la palabra *función* en la literatura matemática.

Por lo que se refiere al cálculo diferencial, Stewart (2012) reconoce que su principal concepto es la derivada, la cual permite cuantificar y predecir las variaciones entre variables relacionadas, y nos permite modelar una situación problemática en particular. Así mismo, define el concepto de la derivada, desde el punto de vista de la física como la rapidez de cambio y geométricamente como la pendiente a una curva (pp. 143-148).

En relación a lo anterior, desde el punto de vista físico, si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f\ (t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como función posición del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ hasta $t\ =\ a + h,$ el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Vease la figura 1.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es:

$$Velocidad_{promedio} = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

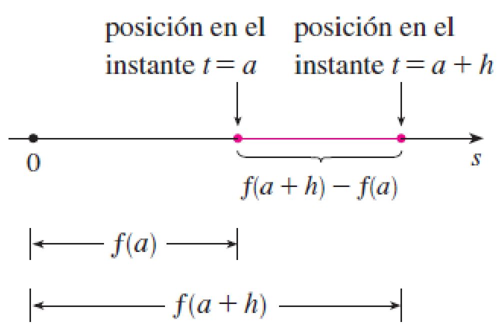

Figura 1. Función posición de un objeto en un intervalo de tiempo. (Tomado de Stewart, J. 2012, p. 145).

Lo cual, es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 2. Si se calculan las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos, es decir, haciendo que h tienda a 0, la velocidad instantánea $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

$$\boxed{v(a)_{instantanea} = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

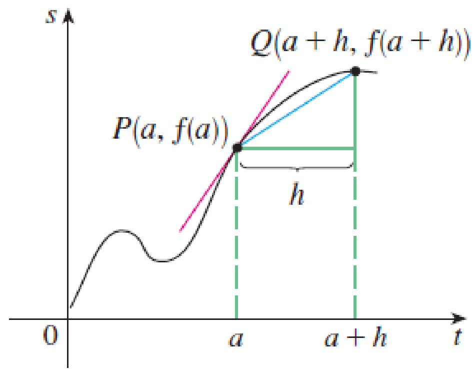

Figura 2. Pendiente de la recta secante PQ. (Tomado de Stewart, J. 2012, p. 145).

Análogamente, Stewart desarrolla una interpretación geométrica de la derivada como una pendiente**.** En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la recta secante que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, con coordenadas de los dos puntos $(c, f(c)$ y $(c+h, f(c+h)$, respectivamente como se muestra en la figura 3.

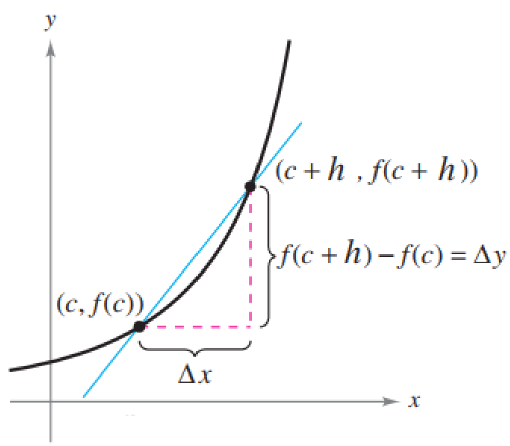

Figura 3. Recta secante que pasa por $(c, f(c)$ y $(c+h, f(c+h))$. (Adaptado de Larson y Edwards, 2010, p. 97).

Si $(c, f(c))$es el punto de tangencia y $(c+h, f(c+h))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Esta ecuación representa el cociente de incremento o de diferencias. El denominador Δx es el cambio (o incremento) en x y el numerador $\Delta y = f(c+h) - f(c)$ es el cambio (o incremento) en y.

Definición. Si f está definida en un intervalo abierto que contiene un punto c y además existe el límite.

$$\operatorname{Lim}_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m$$

Entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con pendiente m es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también pendiente de la gráfica de f en $x = c$. Además, el límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir la derivación.

Definición. La derivada de f en c está dada por:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre que exista ese límite. Para todos los c para los que exista este límite, f' es una función de c.

Enseguida, si se escribe $x = c + h$, entonces $h = x - c$ y h tiende a 0 si y solo si x tiende a c. En consecuencia, se puede expresar de manera equivalente la definición de la derivada, como la búsqueda de rectas tangentes.

Definición. Si f está definida en un intervalo abierto que contiene un punto c, se dice que f es derivable en ese punto si existe el límite.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

A partir de las defunciones anteriores, Stewart (2010), enuncia notaciones comunes de la derivada de una función $y = f(x)$ para distinguir la variable independiente x de la dependiente y, además muestra algunas notaciones comunes de la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y $\frac{dy}{dx}$, los llama operadores de derivación, porque indican la operación de derivación. La notación $\frac{dy}{dx}$ introducida por Leibniz, es un sinónimo de $f'(x)$**.** No obstante, en especial cuando se usa en la notación de incrementos, se puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por otro lado, si una función $y = f(x)$ es derivable, entonces su derivada $(f)'(x)$ también es una función; Es decir una función derivada puede derivarse generando una nueva función y es denotada por $(f')'(x) = f''(x)$. A esta nueva función se denota como segunda derivada de f. Generalizando:

$$f^1(x) = f'(x)$$
$$f^2(x) = f''(x)$$
$$f^3(x) = f'''(x)$$
$$f^n(x) = (f')^n(x)$$

A estas nuevas funciones se les conoce como derivadas superiores. Ahora bien, si se utiliza la notación de Leibniz, la segunda derivada de una función $y = f(x)$ se escribe:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Posteriormente, cuando nos encontramos con funciones compuestas y queremos calcular su derivada, se hace uso de un método llamado **regla de la cadena,** el cual se hace explícito en el siguiente teorema**.**

Teorema. Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f_o g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y $F´(x)$ esta dada por el producto

$$F´(x) = f´\big(g(x)\big).g´(x)$$

En la notación de Leibniz, si $F = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ahora bien, se han definido unas reglas de derivación que permiten calcular de manera práctica derivadas de funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. A continuación algunas reglas que comúnmente se usan para resolver problemas relacionados al cálculo diferencial.

Tabla 1

Reglas de Derivación

Derivadas.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}, g \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivadas de Funciones Logaritmo y Exponencial.

$$\frac{d}{dx}(ln\, u) = \frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(log\, u) = \frac{log\, e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(log_a u) = \frac{log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\, ln\, a \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivadas de Funciones Trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}(sen\, u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -sen\, u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc u \cdot \cot u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cdot \cot u \frac{du}{dx}$$

Derivadas de Funciones Trigonométricas Inversas.

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} u\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} u\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u\right) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} u\right) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} \begin{cases} +\, si\, u > 1 \\ -\, si\, u < -1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} u\right) = \mp\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} \begin{cases} -\, si\, u > 1 \\ +\, si\, u < -1 \end{cases}$$

Habiendo conocido algunas derivadas de funciones, es importante señalar que en los problemas del cálculo se encuentran funciones de la forma explícita e implícita; la primera de ellas se reconoce por tener la forma $y = f(x)$, donde la variable y está escrita explícitamente en función de x. Sin embargo, algunas funciones se enuncian de manera implícita en una ecuación. Algunos ejemplos de ello son:

Forma explícita	Forma implícita	Forma implícita
$y = \frac{1}{x}$	$xy = 1$	$x^2y + 2y^3 = 3x$

Un interrogante que surge al trabajar con las funciones es ¿cómo encontrar la derivada dy/dx de una función en su forma implícita?

Para ello, Larson y Edwards (2010), plantean una estrategia para encontrar la derivación implícita, usando la regla de la cadena de la siguiente forma (p. 142):

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x.
2. Agrupar todos los términos en que aparezca dy/dx en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar dy/dx del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar dy/dx.

Sabiendo usar la regla de la cadena para encontrar dy/dx de manera implícita, Stewart (2012, p. 221), sugiere que para realizar el cálculo de derivadas de funciones complicadas que involucran productos, cocientes o potencias se debe usar un método llamado derivación logarítmica, el cual consiste:

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para $y´$.

Otra aplicación relevante de la regla de la cadena consiste en encontrar razones de cambio de dos o más variables relacionadas que están cambiando respecto al tiempo. Este tipo de problemas son conocidos como razones de cambio relacionadas**.** En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea principal es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (por lo general se representan con situaciones y fenómenos de la vida real). El procedimiento consiste en determinar una ecuación que relacione las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros respecto al tiempo. Al respecto se han efectuado algunas recomendaciones para la solución de problemas de este tipo. Stewart (2012, p. 246) recomienda las siguientes estrategias:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

Algunas de las aplicaciones más importantes de la derivada son los *problemas de optimización*, estos exigen minimizar un costo o maximizar un área, o bien, encontrar el mejor resultado posible para una situación. Estos problemas pueden reducirse a localizar los valores máximos y mínimos de una función, veamos un caso donde se represente esta situación.

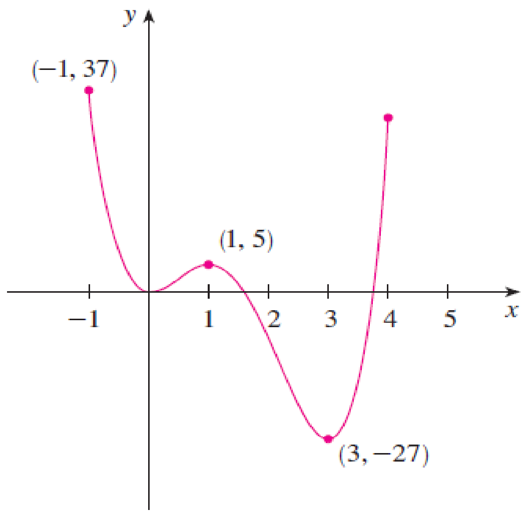

Figura 4. Gráfica de una función con máximos y mínimos. (Tomado de Stewart, J. 2012, p. 275).

En la figura 4, se muestra la gráfica de una función f, en la que el punto más alto es $(-1, 37)$. Es decir, el valor más grande de f es $f(-1) = 37$, este es conocido como máximo absoluto. Asimismo, el valor más pequeño de f es $f(3) = 27$, o mínimo absoluto. En general, para comprender esta idea usamos la siguiente definición.

Definición de extremos. Sea f una función sobre un intervalo I que contiene a un punto c.

1. $f(c)$ es el **máximo de f en I** si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en I
2. $f(c)$ es el **mínimo de f en I** si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en I

Los mínimos y máximos de una función en un intervalo son los **valores extremos**, o simplemente **extremos**, de la función en el intervalo. El mínimo y el máximo de una función en un intervalo también reciben el nombre de **máximo absoluto** y **mínimo absoluto** en el intervalo.

Por otro lado, en la figura 4, el punto $(0, 0)$ es un *valle* en la gráfica de la función f, en otras palabras $f(0) = 0$ se conoce como mínimo relativo de f. De la misma forma $f(1) = 5$ es una *cresta* en la gráfica de f y se conoce como máximo relativo. Lo cual se ve reflejado en la siguiente definición.

Definición de extremos relativos.

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en** $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$**.**

2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo** de f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en** $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$**.**

El plural de máximo relativo es máximos relativos, y el plural de mínimo relativo es mínimos relativos. Un máximo relativo y un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

Es importante mencionar que una función no siempre tiene un mínimo o un máximo en un intervalo. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

Teorema del valor extremo. Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto en $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

Por consiguiente, habría que examinar que sucede con las derivadas de una función en los extremos relativos. Para esto, veamos la siguiente definición.

Definición de número o punto crítico. Sea f definida en c. Si $f'(c) = 0$ o si f no es derivable en c, entonces c es un punto crítico de f.

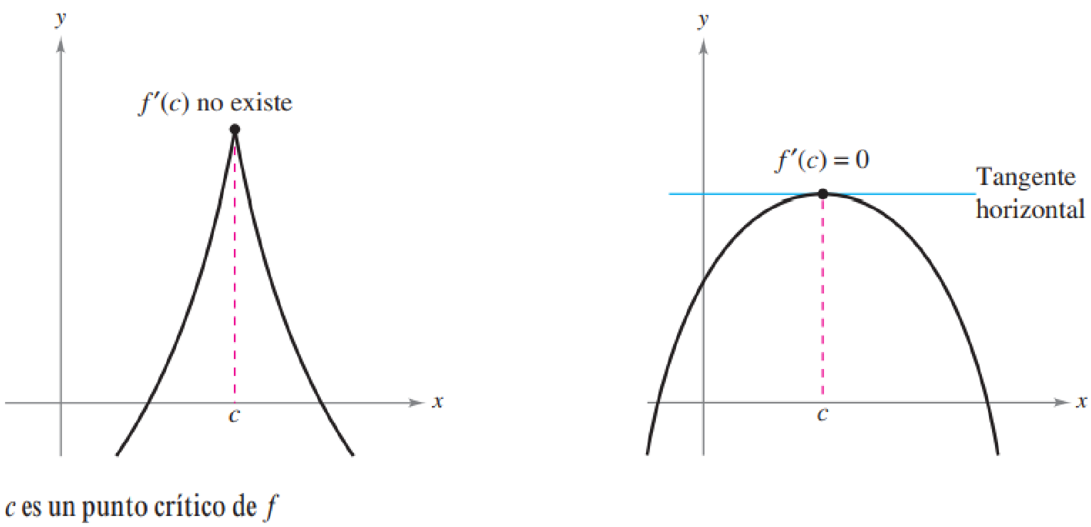

Figura 5. Representación de puntos críticos. (Tomado de Larson y Edwards. 2010, p. 166).

En la figura 5, muestra dos tipos de números críticos. Obsérvese en la definición anterior, que el número crítico c debe estar en el dominio de f, sin embargo, c no tiene que estar en el dominio de f'. Además, observamos que en la imagen del lado izquierdo la derivada no existe en c, análogamente, en la imagen de la derecha podemos notar que en c hay un máximo relativo. Incluso, en este punto la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Luego, sabiendo que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto, entonces eso implicaría que $f'(c) = 0$. El teorema siguiente afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

Teorema de Fermat[1]. Si f tiene un máximo o un mínimo relativos en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

El teorema de Fermat, señala que los extremos relativos de una función sólo pueden ocurrir en los puntos críticos de la función. Sabiendo lo anterior, Larson y Edwards, (2010), plantean las siguientes estrategias para determinar los extremos en un intervalo cerrado (p. 167).

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado.

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se siguen estos pasos.

1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b).
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b).
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$.
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

[1] **Pierre de Fermat (**1601 -- 1665). Fue un matemático Francés, realizó muchas contribuciones a la geometría analítica, la teoría de números, el cálculo y la probabilidad. En cartas a sus amigos, escribió muchas de las ideas fundamentales del cálculo, bastante antes de Newton o Leibniz.

3. CAPITULO III. METODOLOGÍA

Este capítulo presenta el tipo de investigación, y el procedimiento que se llevó a cabo para desarrollar los objetivos de la investigación. También, se describen los participantes y el instrumento que se ha utilizado para obtener la información.

3.1. Tipo de Investigación

La investigación presentada es de tipo exploratorio y descriptivo. Se realizó con el propósito de identificar y describir los errores, que presentan algunos estudiantes al resolver ejercicios en torno al concepto de la derivada, en el curso de Calculo Diferencial en la Universidad del Valle y que afectan significativamente su aprendizaje.

3.2. Procedimiento

Para obtener la información y posteriormente realizar el análisis de los errores que cometen los estudiantes al resolver ejercicios en relación al concepto de la derivada, en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle, se realizó el siguiente procedimiento:

Inicialmente, se realizaron 4 jornadas de formación académica, propuestas por el Programa de Acompañamiento ASES, los días sábados de 8:00 am a 12:00 m, en donde los estudiantes asistentes realizarán talleres de los diferentes conceptos de Cálculo Diferencial y con esto se procuró tener un primer acercamiento a los errores que presentan los estudiantes.

Posteriormente, se identificaron los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes por cada pregunta del instrumento, enseguida se agruparon estos datos de acuerdo a las categorías de respuestas: Correctas, no correctas, tiene idea pero finalmente no es correcto, y no contestó. Finalmente se categorizaron los errores de manera general según las categorías propuestas por Radatz (1979), teniendo en cuenta las implicaciones y relaciones entre los errores. Esta información se presenta en la Tabla 2.

Por último, se realizó un análisis de los errores por cada una de las preguntas, donde se describieron las características de algunos errores.

3.3. Participantes

Este trabajo, involucra a algunos estudiantes que ingresaron a los programas académicos de la Universidad del Valle, en el semestre Febrero-Junio de 2017, y estaban matriculados en un curso de Cálculo I. Sus edades se ubican en el rango de 16 a 19 años.

Dentro de los cursos de Calculo I, brindados por el Departamento de Matemáticas, se eligió el curso que estuvo a cargo del profesor Humberto Mora ya que tenía la particularidad de ser el más numeroso del semestre I de 2017 en la Universidad, con un total de 265 estudiantes matriculados, distribuidos en 11 grupos de 24 estudiantes en promedio.

En ese sentido, se escogió un grupo de 23 estudiantes como muestra, usando un muestreo no probabilístico por conveniencia.

3.4. Instrumento de Recolección de Información

La información fue recolectada utilizando un instrumento de evaluación diseñado por el profesor Humberto Mora (Ver Anexo 1), el cual se aplicó a once grupos de estudiantes que estaban matriculados en el curso de Calculo diferencial y estaban a cargo de este profesor, para el desarrollo de esta investigación se tuvo en cuenta uno de los once grupos comprendido de veintitrés estudiantes. El instrumento está compuesto por cuatro preguntas, en donde la pregunta número uno tiene los ítems a, b, c y d y la pregunta número cuatro los ítems a, b y c. Estas preguntas contemplan los contenidos relacionados al proceso de derivación y algunas de sus aplicaciones, de las cuales el profesor creyó convenientes de incluir y son fundamentales para el aprendizaje del cálculo diferencial.

4. CAPITULO IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se presenta la forma en que se realizó el análisis de los errores a partir de las respuestas de los estudiantes en las cuatro preguntas del instrumento de evaluación. En total se analizaron 207 respuestas por separado brindadas por los veintitrés estudiantes.

En principio, se realizó una categorización donde se analizó el tipo de respuesta de cada una de las preguntas resueltas por los estudiantes, según las categorías propuestas por López (2005), en donde las respuestas son: **Correctas**: cuando el estudiante al desarrollar el ejercicio concluía un resultado acertado. **Incorrectas**: cuando el estudiante al desarrollar el ejercicio presentaba un razonamiento inadecuado y llegaba a una conclusión equivocada. **Tiene idea pero finalmente no es correcto**: cuando el estudiante al desarrollar el ejercicio realizaba un razonamiento adecuado sin embargo concluía un resultado equivocado. **No contesto**: Cuando el estudiante no desarrollo el ejercicio**.**

A partir de esta información, se realizó un análisis de respuestas por pregunta, con el fin de estudiar más a fondo el comportamiento de los estudiantes al desarrollar los ejercicios e identificar los errores que presentaban en este proceso, para ello, se examinó detalladamente el razonamiento expuesto por cada uno de los estudiantes en cada pregunta y se agruparon en las categorías propuesta por Radatz (1979) en **E1**: errores debidos a dificultades de lenguaje. **E2**: errores debidos a dificultades para obtener información espacial. **E3**: errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. **E4**: errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. **E5**: errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Seguido de esto, al tener los errores identificados, se describieron algunos de los errores más comunes que presentaban los estudiantes al resolver cada una de las preguntas del instrumento en relación a los ejes temáticos del curso de cálculo diferencial expuestos anteriormente. Y se agruparon en: *Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar, factorización de polinomios y productos notables, aplicación de operaciones algebraicas,* *aplicación de cálculos accidentales o incorrectos, interpretación incorrecta del lenguaje, traducción incorrecta al realizar una representación geométrica.*

Es necesario recalcar que, en algunas de las respuestas en la categoría *no contesto* planteadas por los estudiantes, que aparecían preguntas totalmente en blanco y también se presentaron casos en los estudiantes escribieron el enunciado de la pregunta, sin dar respuesta alguna, para el análisis de esta investigación, es de gran relevancia tenerlas en cuenta, y se organizaron dentro de la categoría de ***Errores debidos a el aprendizaje de hechos y conceptos previos*** propuesta por Radatz (1979) y se reconocerán por la ausencia de conocimientos previos, o el tiempo estipulado para realizar el instrumento no fue suficiente para que el estudiante desarrollara el ejercicio. Los errores totales que se presentaron en la investigación se muestran en la Tabla 2.

En la tabla 2, se observa la frecuencia con que se presentaron los errores de acuerdo a las categorías propuestas por Radatz (1979) y que fueron descritas anteriormente. Además, se muestra las frecuencias según el tipo de respuestas propuesta por López (2005) que dieron los estudiantes al resolver el instrumento.

Tabla 2
Análisis global de errores según las categorías de Radatz

PREGUNTAS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN		CATEGORIAS DE ERRORES (RADATZ)					RESPUESTAS (LOPEZ)			
		Al lenguaje matemático	A dificultades para obtener información espacial	A el aprendizaje de hechos y conceptos previos	A asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento	A la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes	Correctas	Incorrectas	Tiene idea pero finalmente no es correcto	No Contesto
Aplicaciones de la Derivada	**1.a.**	1	0	16	3	0	9	7	3	4
	1.b.	1	0	10	3	0	12	2	4	5
	1.c.	1	0	7	3	1	14	4	3	2
	1.d.	0	0	18	2	0	5	3	7	8
Razones de Cambio Relacionadas y Optimización	**2.**	8	7	10	1	1	9	5	4	5
	3.	2	2	17	1	0	5	1	9	8
Derivación	**4.a.**	1	0	4	1	0	18	1	0	4
	4.b.	2	0	6	6	0	12	5	4	2
	4.c.	2	0	13	5	0	8	5	4	6
TOTALES		18	9	101	25	2	92	33	38	44

Figura 6. Distribución global de respuestas por pregunta.

El análisis evidenció que el 55% de las preguntas fueron resueltas de manera inapropiada, siendo un dato bastante alarmante. Las respuestas están concentradas bajo la forma: No correctas, tiene idea pero finalmente no es correcto y no contestó.

Así mismo, se encontró que hay una asociación en los ítems de las preguntas 1 y 4, puesto que, para la primera pregunta solo dos estudiantes respondieron los cuatro ítems correctamente, mientras que seis estudiantes respondieron tres de los cuatro ítems correctamente. De manera similar, en la pregunta cuatro, seis estudiantes respondieron los tres ítems correctamente, y solamente ocho estudiantes respondieron dos ítems de manera correcta.

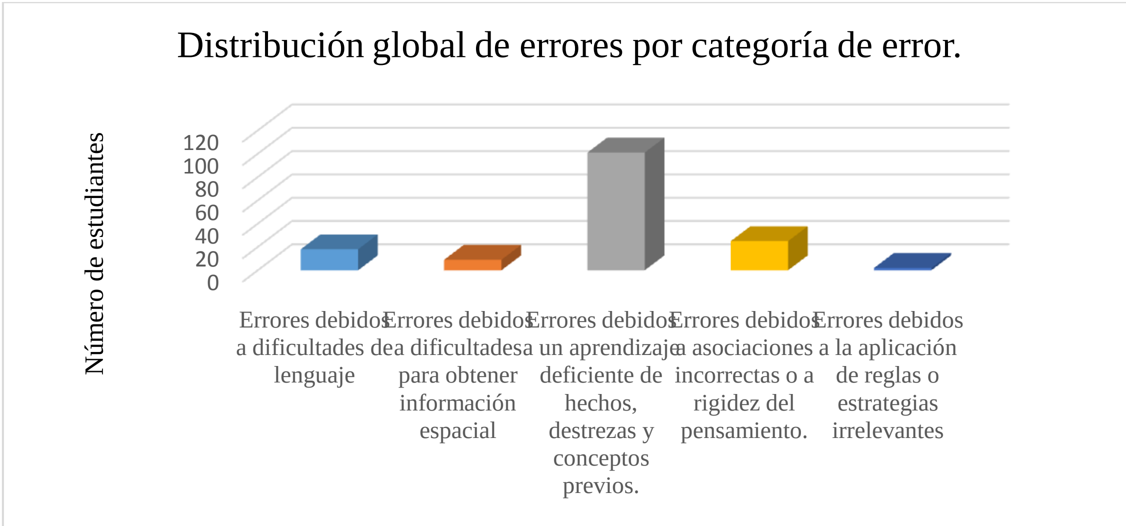

Figura 7.Distribución global de errores por categoría de error.

En relación a las categorías propuestas por Radatz (1979), se identificaron 155 errores totales, de los cuales 101 errores fueron debidos al aprendizaje de hechos y conceptos previos, siendo las preguntas 1.a, 1.b y 3 donde más se presentó este tipo de error.

4.1. Análisis de Respuestas por Pregunta

A continuación se retoman inicialmente los enunciados de cada pregunta de la prueba aplicada para analizar las categorías de respuestas propuestas por López (2005) en cada uno de los estudiantes. Además, los errores encontrados son clasificados tomando en cuenta la siguiente categorización:

Tabla 3
Categorías de errores de Radatz 1979 por sigla.

Categorías de Errores Radatz (1979).	**Sigla**
Errores debidos a dificultades de lenguaje.	E1
Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	E2
Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	E3
Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.	E4
Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.	E5

1. a. Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$, en intervalo $[-1,\ 1]$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 1. a. se encontró que nueve estudiantes (39%) contestaron correctamente esta pregunta, siete estudiantes (31%) lo hicieron de manera incorrecta, tres estudiantes (13%) tenían idea pero finalmente no llegaron a la respuesta correcta y cuatro estudiantes (17%) no contestaron esta pregunta. Como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Distribución de respuestas pregunta 1.a

En esta pregunta, se observó que algunos errores que cometieron los estudiantes son:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en cuatro casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso particular, tuvo lugar cuando los estudiantes realizaban la derivada de una potencia y cometían errores con los exponentes de las fracciones algebraicas.

Factorización de polinomios y productos notables: Este error se presentó en seis ocasiones referidas a la aplicación defectuosa de casos de factorización y al desarrollar un producto notable. Los estudiantes no aplicaron correctamente el factor común y además no reconocieron la diferencia de cuadrados.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas. También se observaron errores al transponer términos, y usar las leyes de los exponentes en la función $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se evidenció en seis casos al sustituir y realizar operaciones elementales con los valores candidatos a máximos y mínimos en la función.

A continuación se muestran algunos casos que ejemplifican lo anterior:

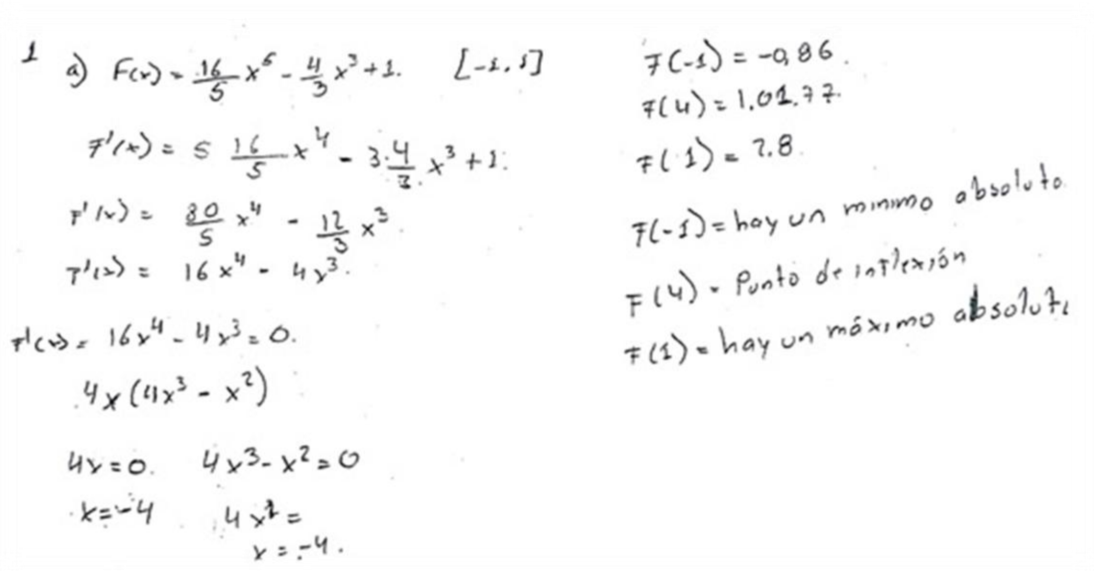

Figura 9. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 1.a.

En este caso, el estudiante usa el algoritmo de la derivada de una potencia incorrectamente en la función polinómica $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$, específicamente al derivar el segundo término del polinomio $\frac{4}{3}x^3$, se observa que el estudiante multiplica por 3 el coeficiente de x^3, sin embargo no le resta la unidad al exponente. Seguido de esto, da como respuesta $f'(x) = 16x^4 + 4x^3$, de ahí iguala $f'(x) = 0$ y al factorizar el polinomio obtiene $4x(4x^3 - x^2) = 0$ de donde deduce que $x = -4$ es solución para ambos casos. A pesar de estas deficiencias, el estudiante al evaluar los candidatos a máximos y mínimos llega a la respuesta correcta que son $f(1)$ y $f(-1)$ respectivamente. Este error hace parte de la **categoría E3.**

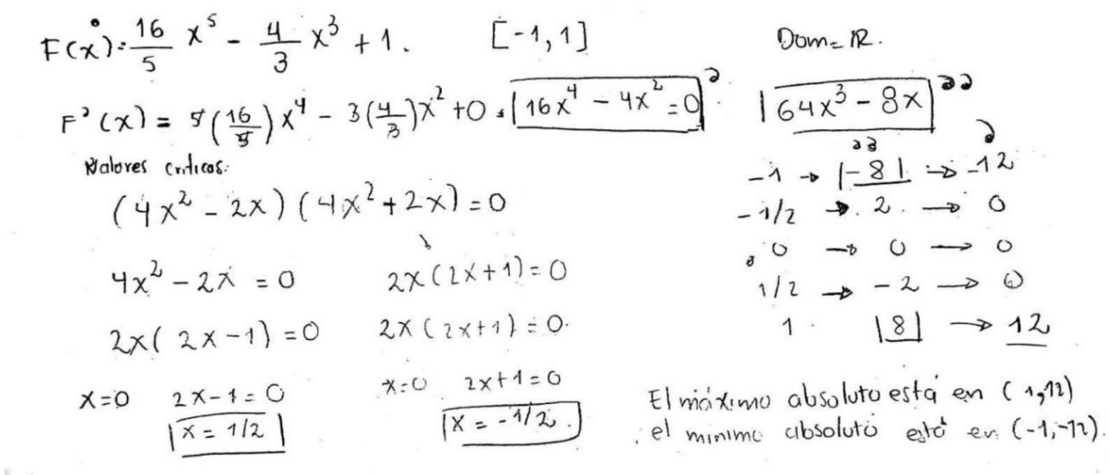

Figura 10. Caso donde se presenta error de categoría E4 en la pregunta 1.a

En esta ocasión, el estudiante realiza la primer y segunda derivada de la función, de manera correcta. De ahí, iguala a cero y en la factorización utiliza la diferencia de cuadrados, obteniendo los valores críticos esperados. Sin embargo, al momento de dar respuesta a la pregunta, el estudiante hace una asociación incorrecta de lo que representa los valores máximos y mínimos evalúa los posibles candidatos en la funciones primera y segunda derivada, lo cual le da un resultado incorrecto. Este error está en la **categoría E4.**

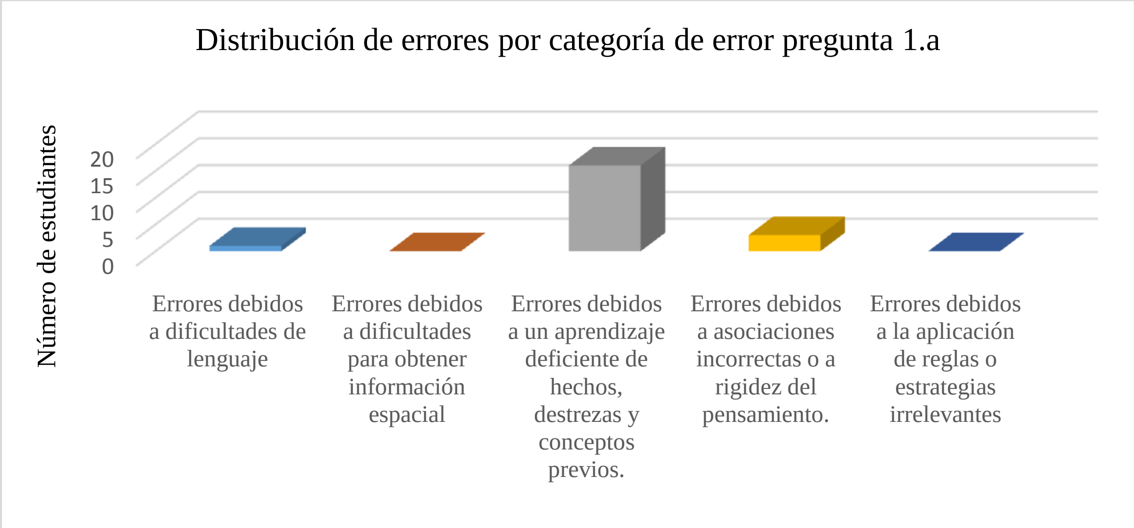

Figura 11. Distribución de errores por categoría de error pregunta 1.a

Finalmente, en esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se evidenció que el 80% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 15% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Y el 5% a errores debidos a dificultades del lenguaje. Como se muestra en la figura 11.

1. b. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $2xy^3 + y + 1 = x - 3$, en el punto en que $y = 0$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 1. b. se observó que doce estudiantes (52%) contestaron correctamente, dos estudiantes (9%) lo hicieron de manera incorrecta, cuatro estudiantes (17%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y cinco estudiantes (22%) no contestaron. Como se muestra en la figura 12.

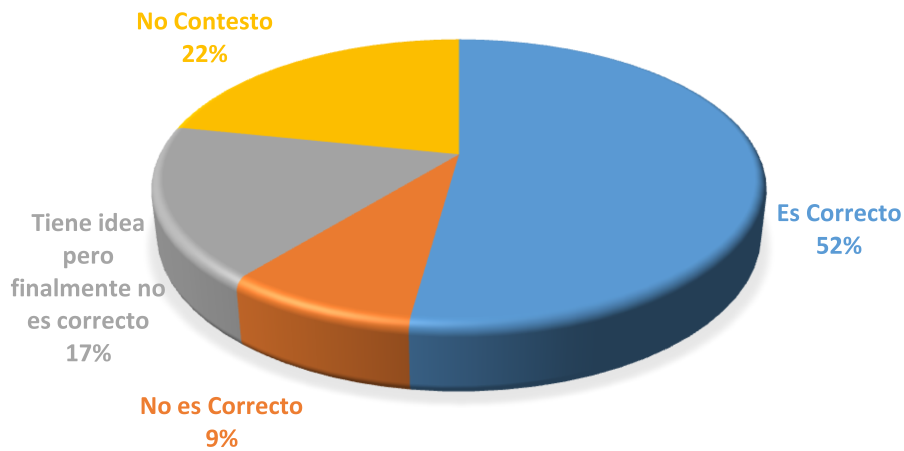

Figura 12. Distribución de respuestas pregunta 1.b

En esta pregunta los errores más frecuentes cometidos en esta pregunta fueron:

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en dos casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas. También se observaron errores al transponer términos, y usar las leyes de los exponentes, para encontrar la pendiente.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se evidenció en tres casos al encontrar la coordenada x del punto cuando $y = 0$, dando como respuestas los puntos $({}^{1}/_{3}, 0)$; $(-2,0)$ y $(0, -3)$ y también, los estudiantes cometieron errores al encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto.

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en cuatro casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso particular cuando los estudiantes realizaban la derivada de la función definida implícitamente como $2xy^3 + y + 1 = x - 3$.

Algunos casos reflejan los errores.

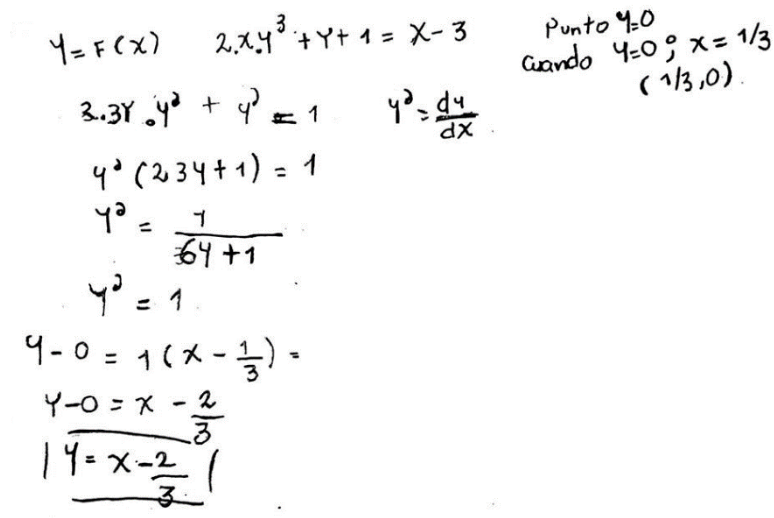

Figura 13. Caso donde se presentan errores de categorías E4 y E3 en la pregunta 1.b

El estudiante al realizar la derivación implícita de la función deriva incorrectamente el término $2xy^3$, puesto que no usa la regla del producto para derivar, Pese a reconocer la particularidad de la situación hace una inferencia incorrecta. Sin embargo, más adelante al evaluar los datos, llega a la respuesta correcta $\frac{dy}{dx} = 1$. Este error se considera en la **Categoría E4**.

Por otro lado, el estudiante al hallar el punto da como respuesta $\left(1/_3\,,0\right)$. Aunque el proceso no se hace explicito, se puede intuir que al evaluar la función en $y = 0$ obtuvo la ecuación $1 = x - 3$, de donde hace una transposición de términos equivocada para despejar x, confundiendo la operación resta con el producto y da como resultado $x = 1/_3$. Finalmente, teniendo los resultados anteriores, utiliza la ecuación punto pendiente y expresó la ecuación de la recta tangente que no es la correcta. Este error se considera en la **categoría E3**.

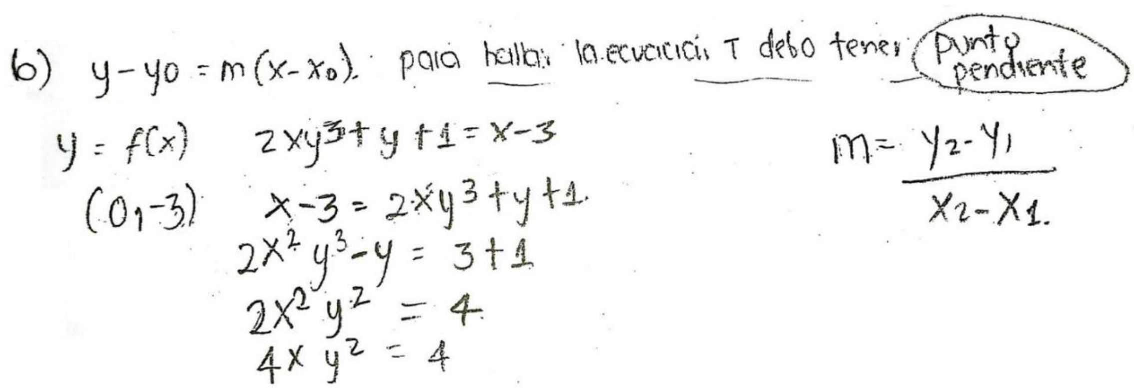

Figura 14. Caso donde se presenta error de categoría E3 y E4 en la pregunta 1.b

En esta respuesta, podemos observar que el estudiante en principio reconoce que debe aplicar la ecuación punto pendiente, seguido de esto procede a encontrar el punto y la pendiente. Sim embargo, expresa una respuesta del punto $(0, -3)$. Se puede interpretar que el estudiante hace una asociación equivocada de la ordenada y con la abscisa x. Este error se considera en la **Categoría E3**.

Además, se puede identificar que intentó despejar la variable x de la función implícita para expresarla de la forma $y = f(x)$, se puede decir que el estudiante una asociación incorrecta, ya que no es consciente de que la situación es diferente a los ejercicios de encontrar la ecuación de una recta. También, en este proceso hace una transposición de términos errada de la ecuación $x - 3 = 2xy^3 + y + 1$ primero deja las variables al lado izquierdo y las constantes al lado derecho de la ecuación sin hacer un buen tratamiento algebraico y uso de las operaciones básicas. Este error se considera en la **categoría E4.** Finalmente el estudiante deja el ejercicio incompleto al no tener éxito en el despeje de la función.

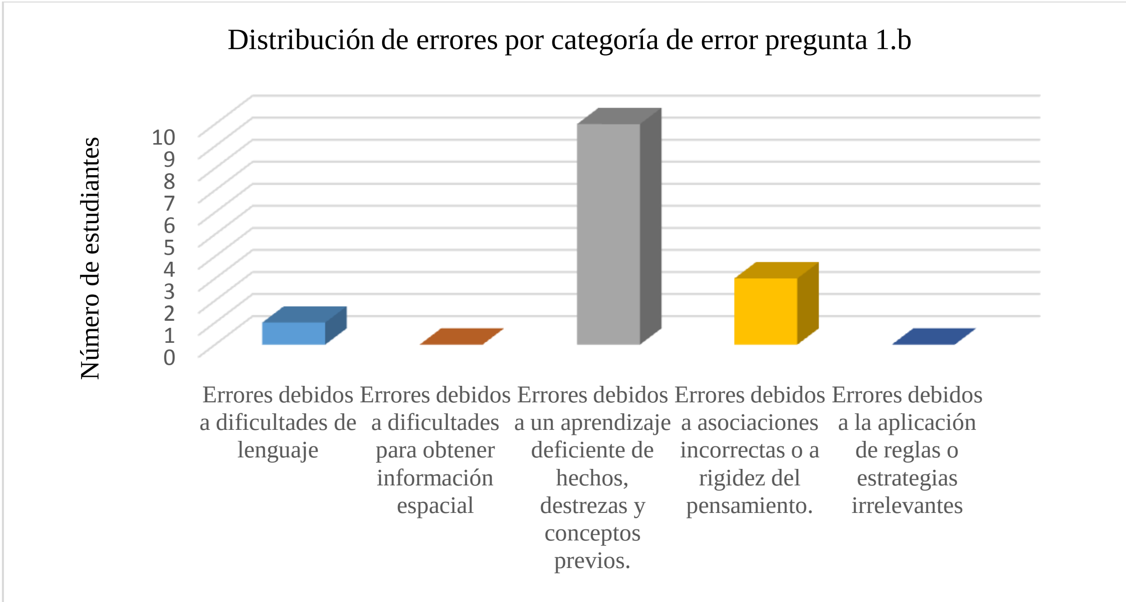

Figura 15. Distribución de errores por categoría de error pregunta 1.b

En particular, según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 71% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 21% debido a asociaciones incorrectas y el 7% a errores debidos a dificultades del lenguaje, como lo muestra la figura 15.

1. c. Si $y^2 = 3x^2 + 4z$, $\frac{dz}{dt} = -2$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, calcule $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$ y $y = 1$.

Por su parte en el ejercicio 1.c. se encontró que catorce estudiantes (61%) contestaron correctamente, cuatro estudiantes (17%) lo hicieron de manera incorrecta, tres estudiantes (13%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y dos estudiantes (9%) no contestaron. Así se observa en la figura 16.

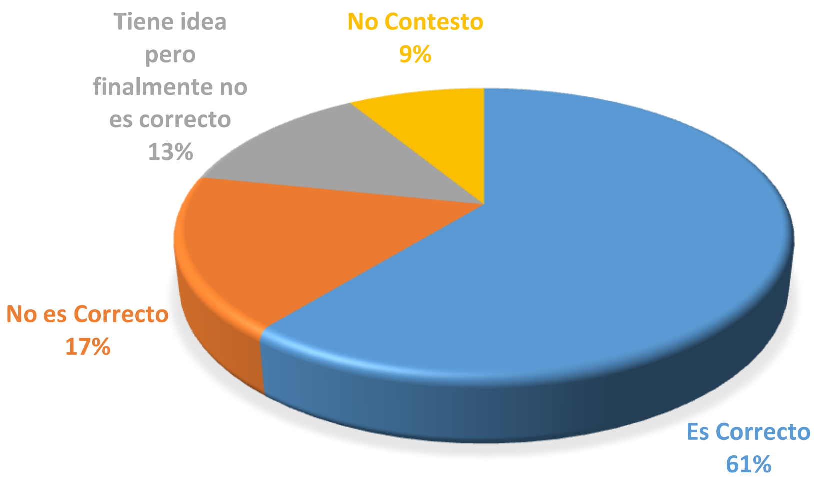

Figura 16. Distribución de respuestas pregunta 1.c

Los errores más frecuentes en este apartado fueron:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en tres casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso, los estudiantes cometieron errores al realizar la derivación implícita de la función $y^2 = 3x^2 + 4z$.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se cometió en dos casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas. También se observaron errores al transponer términos, y usar las leyes de los exponentes.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se presentó en tres casos cuando los estudiantes realizaron cálculos al evaluar los valores de las derivadas y realizar las operaciones para encontrar la respuesta. A continuación se muestran algunos casos:

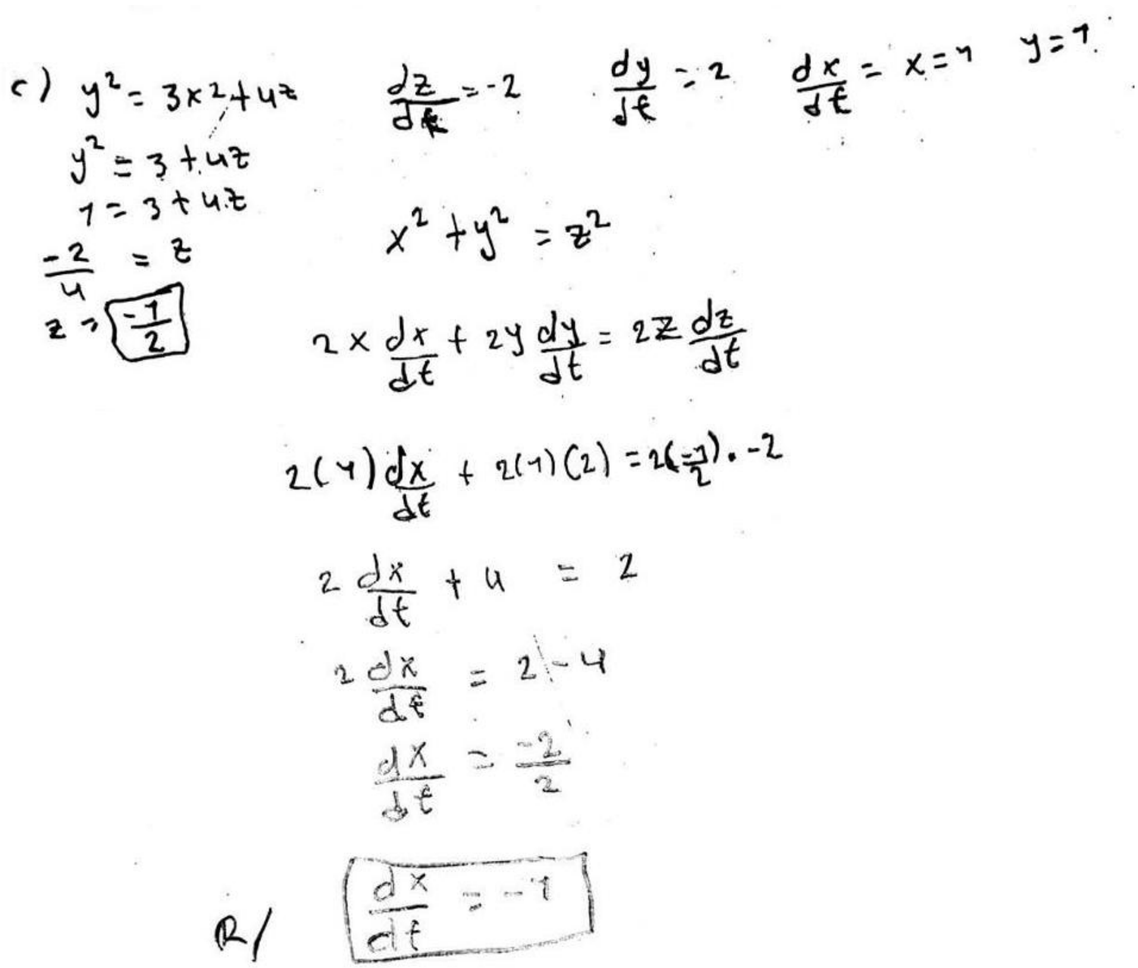

Figura 17. Caso donde se presentan errores de categorías E5 y E4 en la pregunta 1.c

En primer lugar, el estudiante con base a los datos suministrados en el ejercicio, encuentra el valor de la variable z, a partir de la ecuación $y^2 = 3x^2 + 4z$. Seguido de esto, aplica el teorema de Pitágoras dando como respuesta $x^2 + y^2 = z^2$ (según la información de la respuesta no es fácil conocer la razón por la cual el estudiante usa este teorema en el ejercicio) y cree que es completamente pertinente para resolver el ejercicio. Este error se considera en la **Categoría E5.** Luego realiza la deriva implícita con respecto a t y hace una asociación incorrecta de los resultados para remplazar los datos del ejercicio, para finalmente despejar $\frac{dx}{dt}$. Este error se considera en la **categoría E4.**

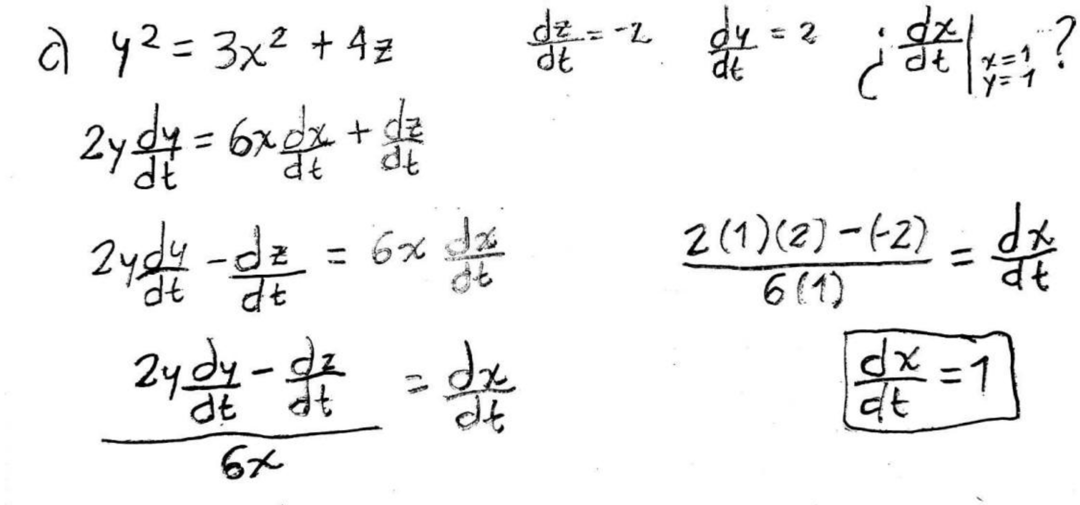

Figura 18. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 1.c

En este caso el estudiante, hace una buena lectura del ejercicio y realiza la derivada implícita con respecto a t de la ecuación $y^2 = 3x^2 + 4z$, pero ejecuta incorrectamente el algoritmo para derivar el término $4z$ ya que da como respuesta $\frac{dz}{dt}$. Luego procede a despejar el diferencial $\frac{dx}{dt}$ y llega a una respuesta incorrecta. Este error se considera de la **categoría E3.**

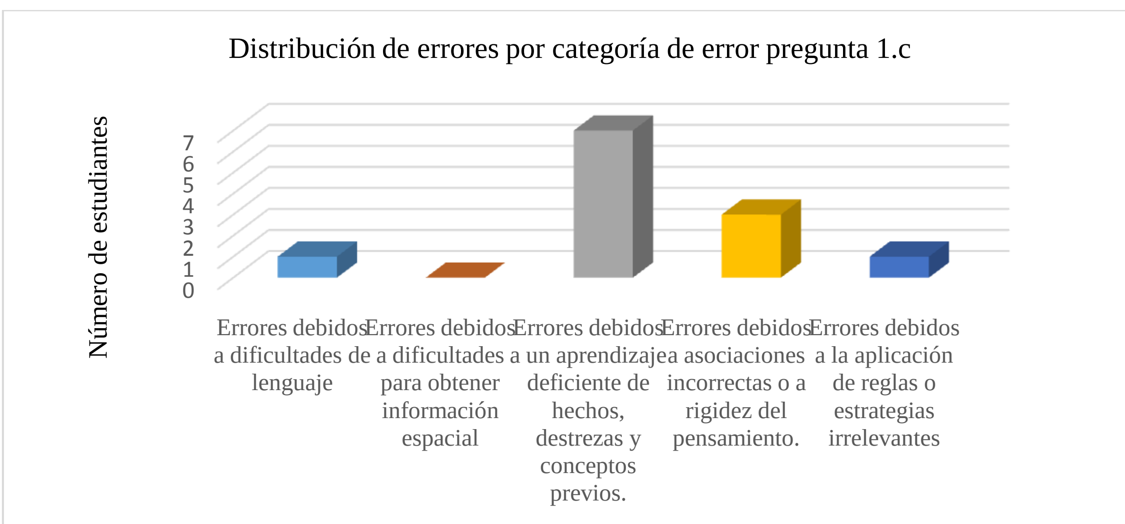

Figura 19. Distribución de errores por categoría de error pregunta 1.c

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 59% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 25% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, el 8% a errores debidos a dificultades del lenguaje, y el 8% a errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Como lo muestra la figura 19.

1. d. Calcule el valor de $h'(2)$, si se sabe que $h(x) = g(x^2).g^2(x)$, $g(2) = 2$, $g'(4) = -\frac{1}{4}$, $g'(2) = -1$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 1. d. Cinco estudiantes (22%) contestaron correctamente, tres estudiantes (13%) lo hicieron de manera incorrecta, siete estudiantes (30%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y ocho estudiantes (35%) no contestaron. Como se observa en la figura 20.

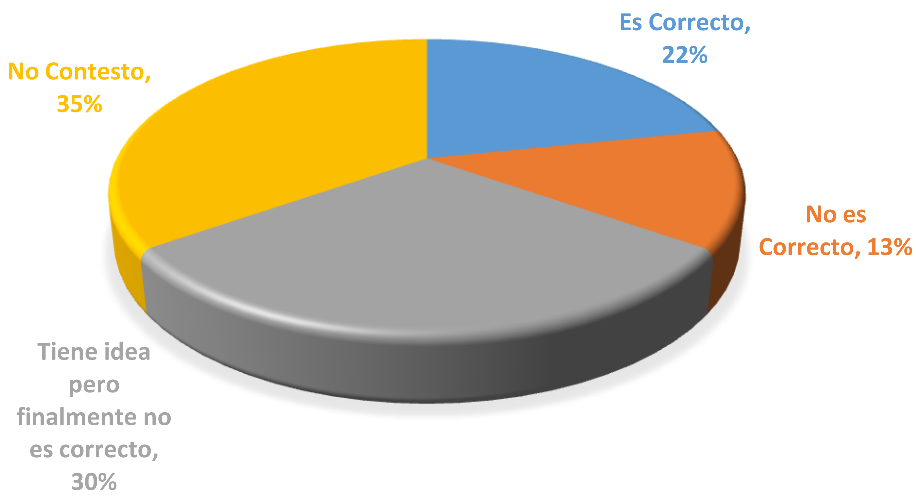

Figura 20. Distribución de respuestas pregunta 1.d

Los errores más recurrentes en este apartado fueron:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó siete caos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso, estudiantes cometieron errores al realizar la derivada mediante la regla de la cadena de la función $h(x) = g(x^2).g^2(x)$.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se presentó en cinco casos, cuando realizaron los cálculos al evaluar los datos de la función derivada. Entre las respuestas incorrectas destacan resultados como $h'(2) = 0$ con tres casos, y $h'(2) = -5$ presentados en dos casos.

A continuación se muestran algunos casos en que los estudiantes cometen estos errores.

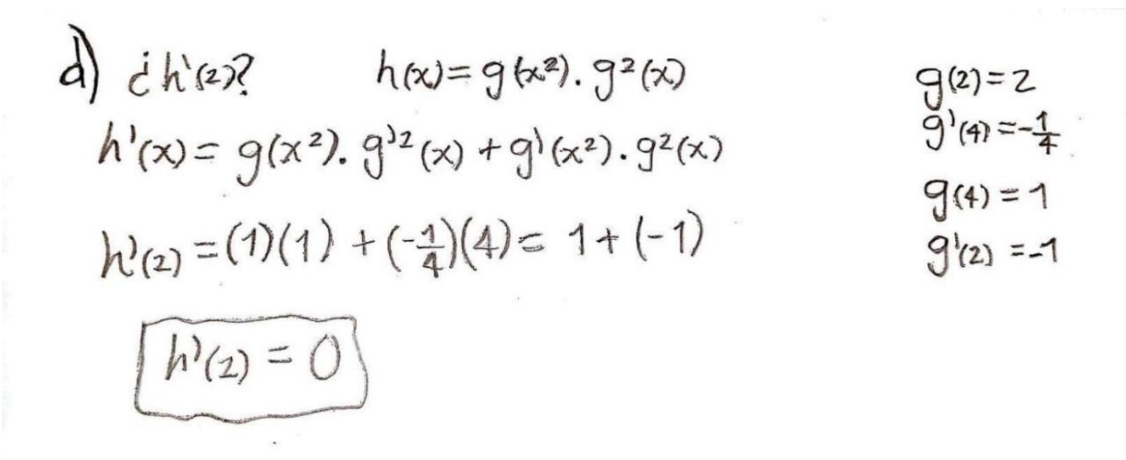

Figura 21. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 1.d

En esta respuesta el estudiante aplica equivocadamente la regla de la cadena para la función $h(x)$, el resultado $h'(x) = g(x^2).g'^2(x) + g'(x^2).g^2(x)$ verifica que realizo el algoritmo para la derivada del producto, sim embargo, al tratarse de funciones compuestas, olvido las derivadas internas en el primer término $g'(x)$ y en el segundo término $2x$. Finalmente evalúa los datos en la derivada y llega a una respuesta incorrecta. Este error se considera en la **categoría E3.**

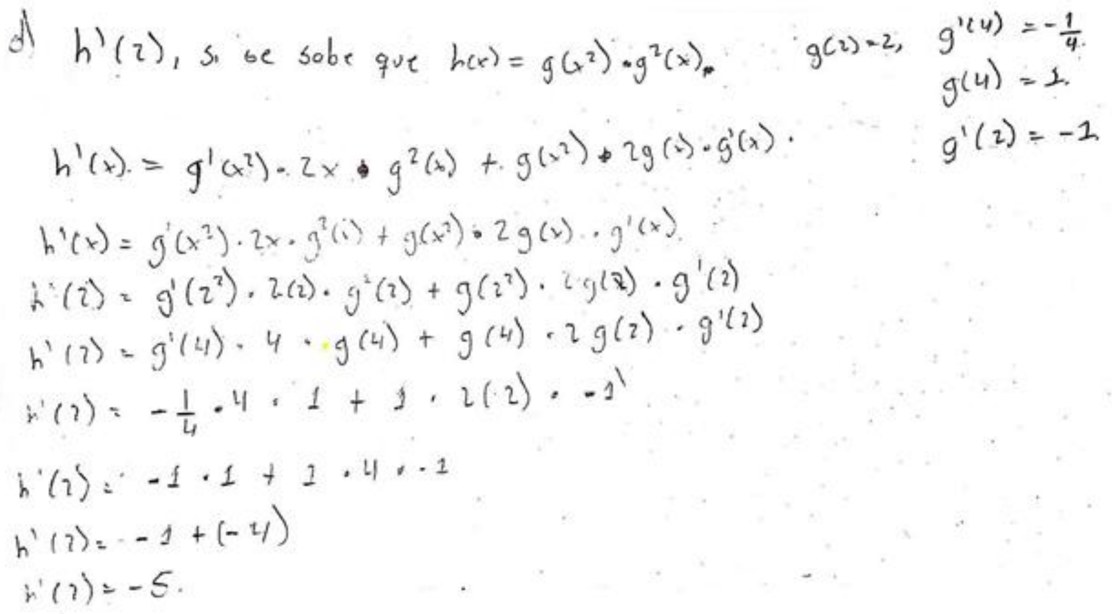

Figura 22. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 1.d

En este caso, el estudiante realiza correctamente la derivada de la función $h(x)$ mediante regla de la cadena dando como solución $h´(x) = g´(x^2).2x.g^2(x) + g(x^2).2g(x).g´(x)$, Aunque, al evaluación la función en $x = 2$ hace un cálculo incorrecto en la ejecución de la operación $g^2(2)$ que la representa como $g(4)$ esto genera una inconsistencia en el resultado y no llega a la respuesta correcta. Este error se considera en la **categoría E3**.

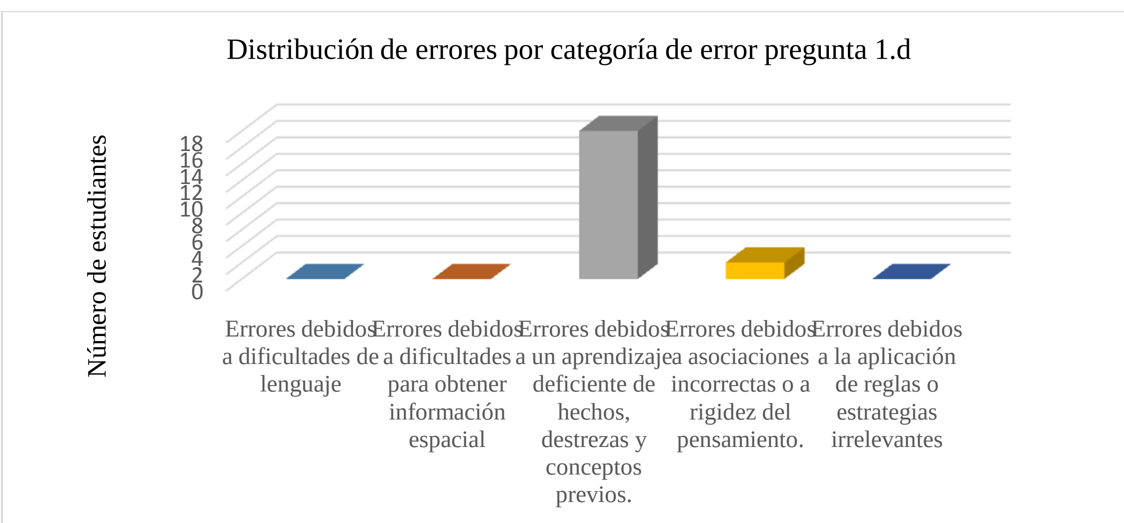

Figura 23. Distribución de errores por categoría de error pregunta 1.d

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 90% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, y el 10% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Como lo muestra la figura 23.

2. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de $3\ millas$ a una velocidad de $480\ millas\ por\ hora$, pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión una hora después?

Al analizar el desarrollo del ejercicio 2, nueve estudiantes (39%) contestaron correctamente, a pesar de eso, cinco estudiantes (22%) lo hicieron de manera incorrecta, cuatro estudiantes (17%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y cinco estudiantes (22%) no contestaron. Como se muestra en la figura 24.

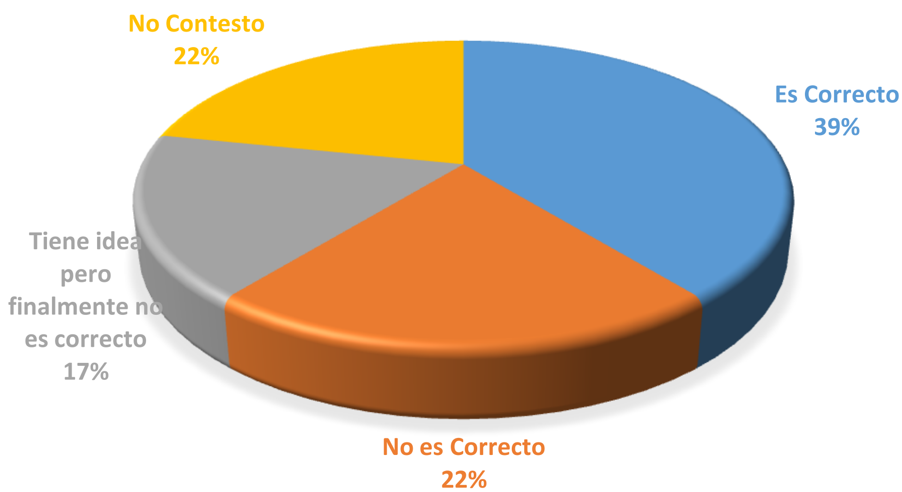

Figura 24. Distribución de respuestas pregunta 2.

Los errores más recurrentes en este apartado fueron:

Aplica incorrectamente el teorema de Pitágoras: Este error se presentó en tres casos en el que los estudiantes aplicaron de manera errónea la relación del teorema de Pitágoras cuando plantearon el triángulo rectángulo que represaba la situación. Y además, no escribieron una notación conveniente.

Interpretación incorrecta del lenguaje: Se incluyen aquí tres casos de errores cometidos por los estudiantes, debido a una traducción errónea de conceptos o símbolos matemáticos, dados en lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Además, algunos estudiantes no lograron entender el problema, es decir no hicieron una lectura adecuada de la situación y no identificaron los datos tanto conocidos como desconocidos.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas y al transponer términos. Y realizar operaciones con las fracciones algebraicas y leyes de los exponentes.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se evidencio en dos casos al evaluar los datos representados en el problema.

Traducción incorrecta al realizar una representación geométrica: Este error se presentó en tres casos en donde los estudiantes usan inadecuadamente escalas para representar gráficamente la situación.

Algunos casos reflejan los errores como se muestra a continuación.

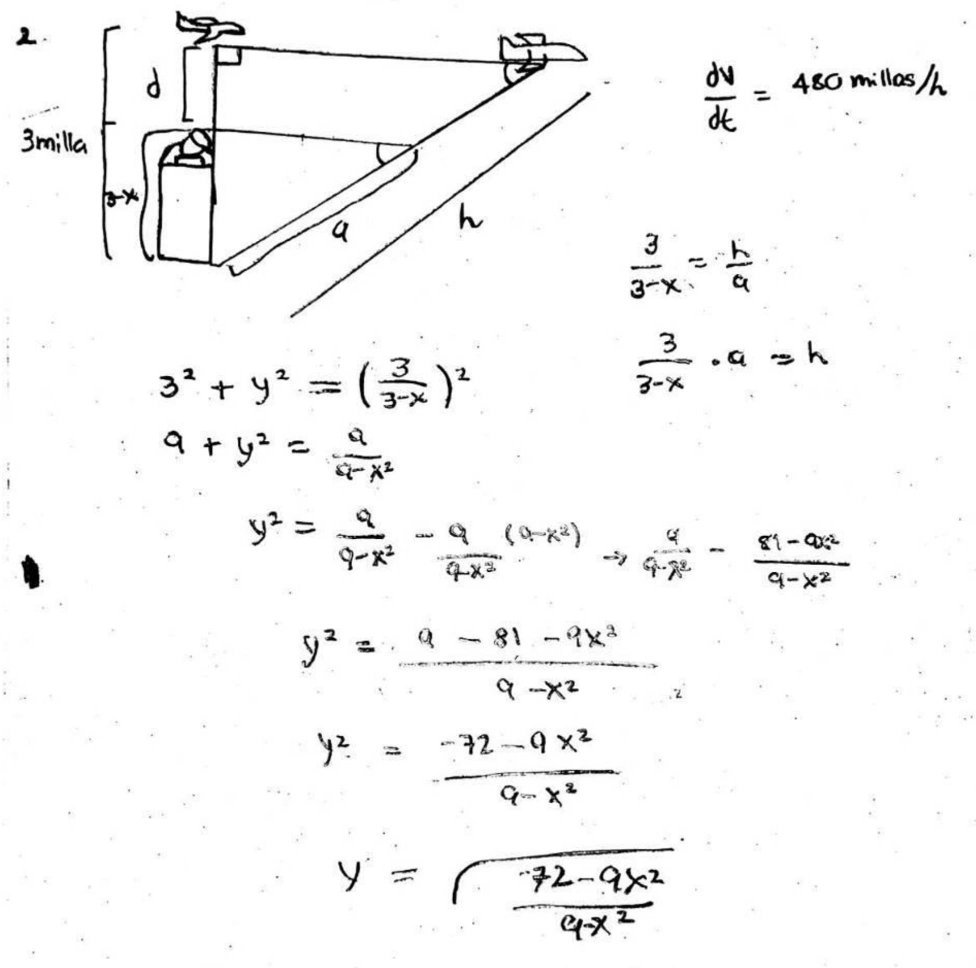

Figura 25. Caso donde se presentan errores de categorías E1, E2 y E4 en la pregunta 2.

En este caso, el estudiante hace una mala lectura de la situación y eso se ve reflejado, en la representación gráfica que hace del problema, observando la respuesta se puede intuir que intenta establecer relaciones entre el observador y el avión formando dos triángulos rectángulos mediante semejanza de triángulos y estable la siguiente relación:

$$\frac{3}{3-x} = \frac{h}{a}$$

Donde 3 es la distancia del suelo al avión, 3-x es la altura del observador y h y a son las medidas de la hipotenusa de los triángulos rectángulos grande y pequeño respectivamente. Estos errores se consideran en la **Categoría E1 y E2.** De ahí, despeja $h = \frac{3a}{3-x}$ y aplica el teorema de Pitágoras como $3^2 + y^2 = \left(\frac{3a}{3-x}\right)^2$, de esta ecuación despeja la variable y de la cual no se tiene información, En general, al realizar este proceso el estudiante incurrió en asociaciones incorrectas aplicar reglas y propiedades que son válidas en contextos parecidos, pero no funciona en esta situación. Por lo cual se considera en la **categoría E4.**

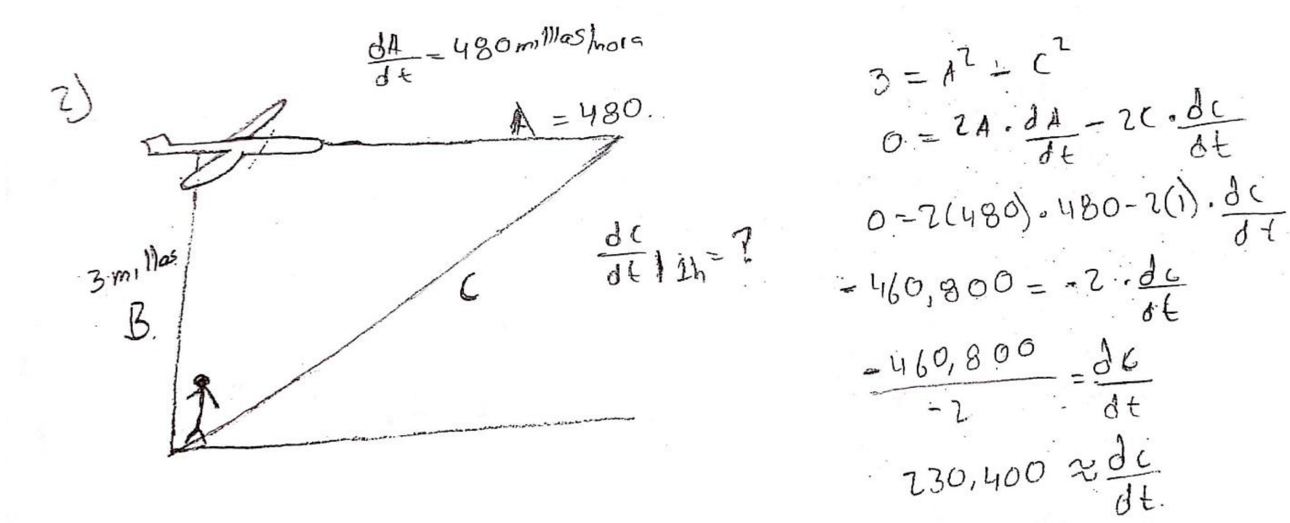

Figura 26. Caso donde se presentan errores de categorías E1 y E2 en la pregunta 2.

Esta ocurrencia muestra, que el estudiante hace una buena interpretación del problema y se ve reflejado en el gráfico que plantea de la situación. Sin embargo, al momento de relacionar la información mediante fórmulas lo hace de manera equivocada, es decir a partir del gráfico, establece el teorema de Pitágoras como $3 = A^2 - C^2$, siendo 3 y A los catetos y C la hipotenusa. Seguido de esto realiza la derivación implícita en términos de t, obteniendo como resultado $0 = 2A\frac{da}{dt} - 2C\frac{dc}{dt}$, evidentemente el estudiante sabe que debe hallar el diferencial $\frac{dc}{dt}$, aunque no conoce el valor de la variable C, es allí donde le asigna el valor de $C = 1$, y no especifica de donde lo encontró. Finalmente remplaza los valores y despeja $\frac{dc}{dt}$ llegando a una respuesta incorrecta. Este tipo de erro se considera en las **categorías E1 y E2.**

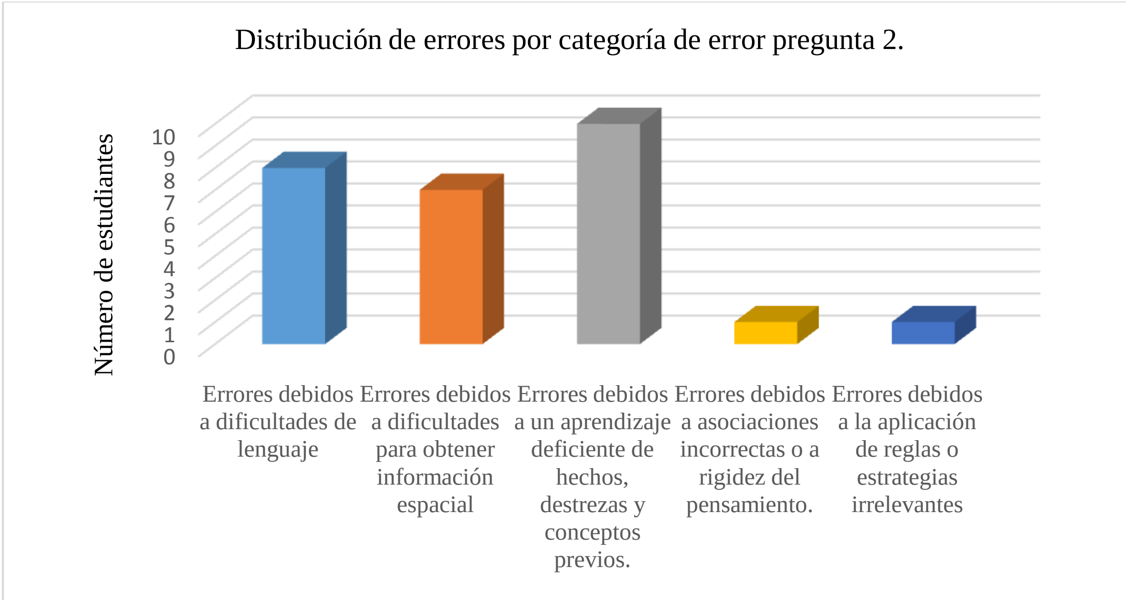

Figura 27. Distribución de errores por categoría de error pregunta 2.

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 29% de los estudiantes cometieron errores debidos a dificultades de lenguaje, el 26% Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, el 37% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 25% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, el 4% a errores debidos a dificultades del lenguaje, y el 4% a errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Como lo muestra la figura 27.

3. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata cilíndrica de menor área superficial, sabiendo que su volumen es de 350 cm^3?

Al analizar el desarrollo del ejercicio 3, Cinco estudiantes (22%) contestaron correctamente, un estudiante (4%) lo hicieron de manera incorrecta, nueve estudiantes (39%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y ocho estudiantes (35%) no contestaron. Esto se ve reflejado en la figura 28.

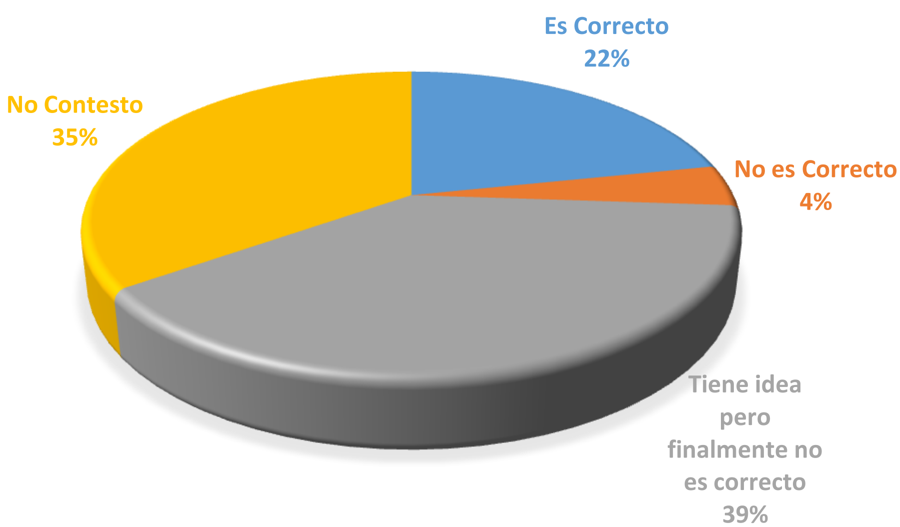

Figura 28. Distribución de respuestas pregunta 3.

Interpretación incorrecta del lenguaje: Este error se presentó en ocho casos en donde los estudiantes en la resolución del problema no plantearon las ecuaciones para relacionar la información conocida con la desconocida.

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En este caso, estudiantes cometieron errores al realizar la derivada de la función de área superficial del cilindro en términos del radio r.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en tres casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas y al transponer términos. Y realizar operaciones con las fracciones algebraicas y leyes de los exponentes.

Aplicación de cálculos accidentales o incorrectos: Este error se presentó en cuatro casos, donde los estudiantes realizaron la sustitución de la información numérica conocida. Sin percatarse que la sustitución se realiza después la derivación.

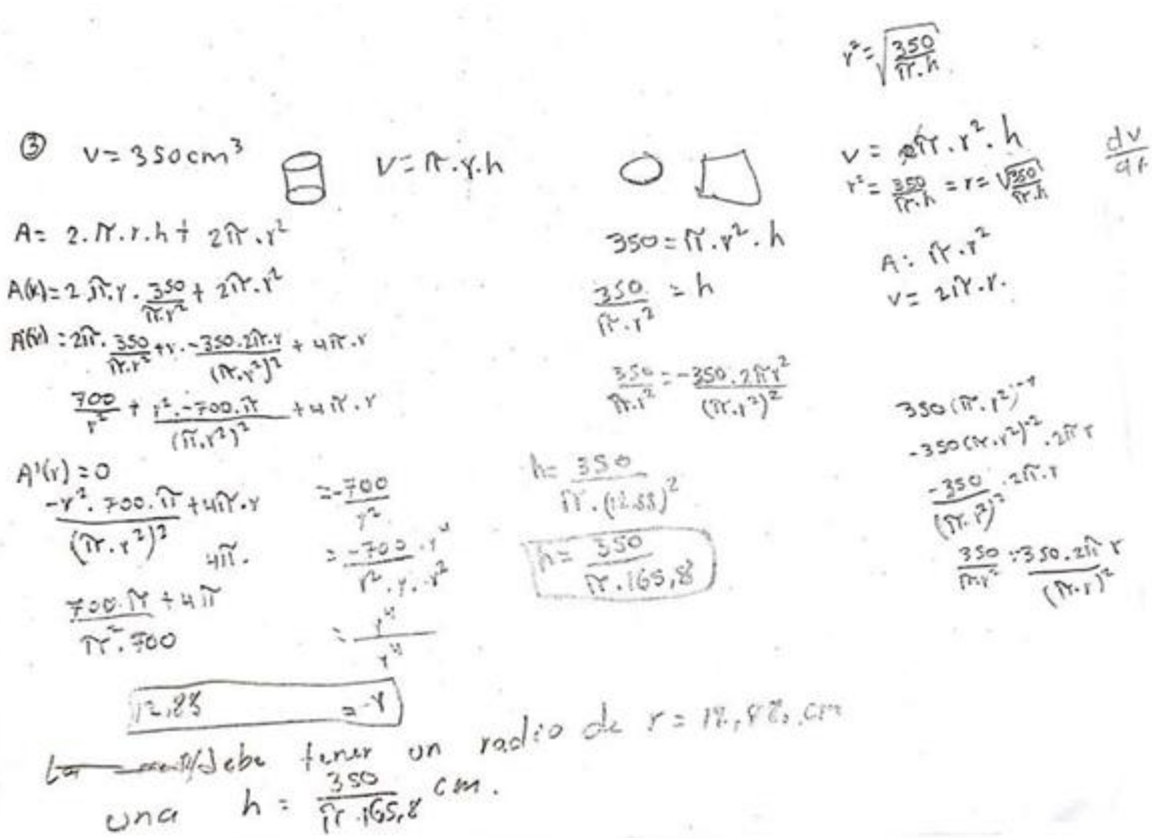

Figura 29. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 3.

En esta situación, el estudiante hace una interpretación correcta del problema y relaciona las fórmulas del volumen del cilindro y el área superficial de manera adecuada, dando como respuesta $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{350cm^3}{\pi r^2}\right)$, A pesar de ello comete un error al realizar la derivada de la función $A(r)$, específicamente en la expresión $2\pi r\left(\frac{350cm^3}{\pi r^2}\right)$, de la cual uso los algoritmos del producto y consiente para derivar, este tipo de error pudo ser evitado si el estudiantes se percata que en esa expresión podía simplificar algunos términos previamente a la derivación. Seguido de esto hace $A'(r) = 0$ y encuentra un valor de r del radio del cilindro que no es el esperado como solución del ejercicio. Y en consecuencia el valor de la altura h encontrado tampoco corresponde. Este error se considera en la **categoría E3.**

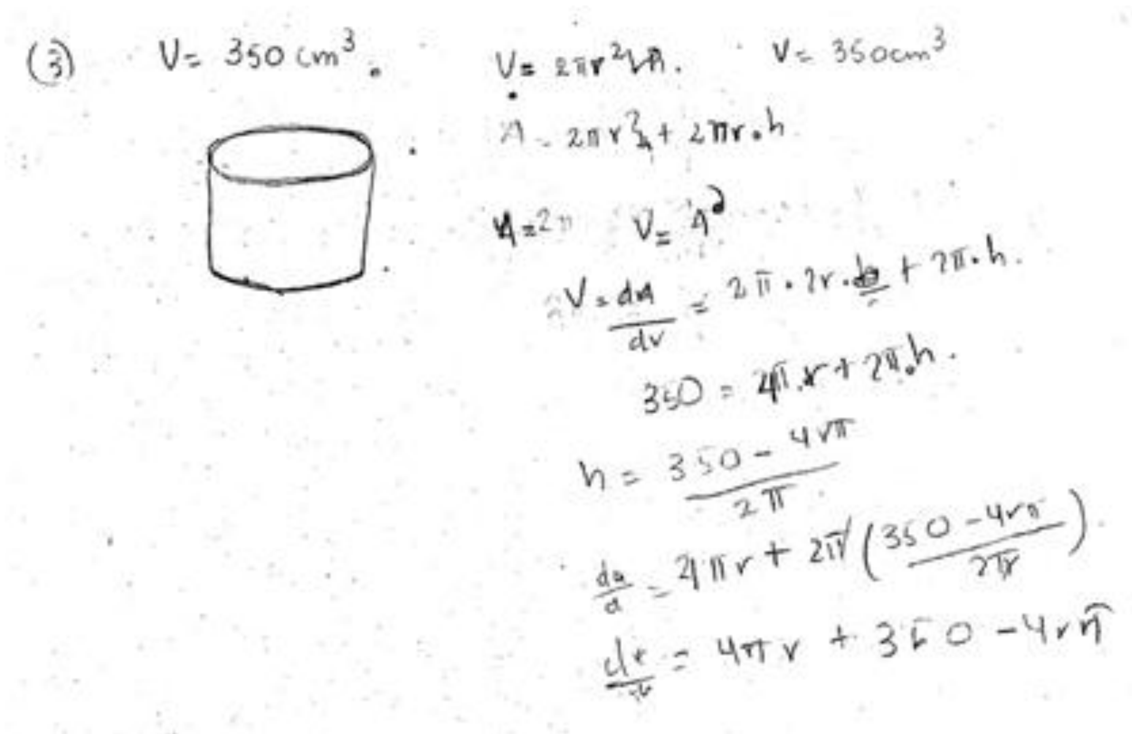

Figura 30. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 3.

En este caso, se puede observar que el estudiante establece las fórmulas de manera correcta, según los datos del ejercicio, sin embargo, realiza una asociación incorrecta al plantear la ecuación $V = \frac{dA}{dr}$, es decir, relacionar el volumen del cilindro con el área superficial, dando como resultado $350 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, de ahí despeja la variable h, y hace una sustitución en la ecuación anterior. Finalmente con ese resultado, el estudiante deja el ejercicio incompleto. Este error se considera en la **categoría E3.**

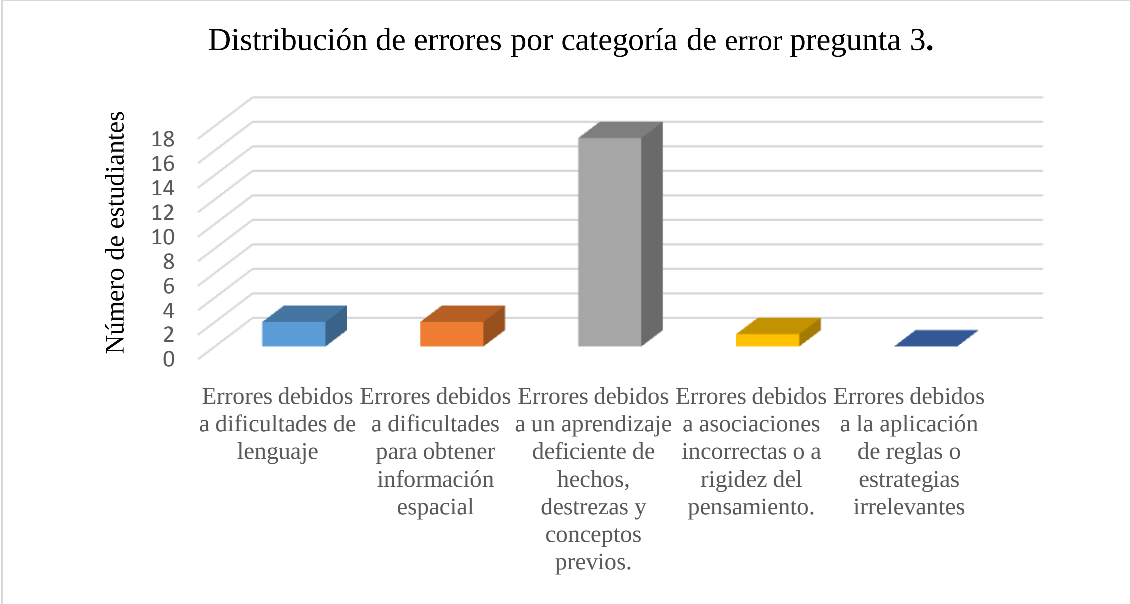

Figura 31. Distribución de errores por categoría de error pregunta 3.

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 9% de los estudiantes cometieron errores debidos a dificultades de lenguaje, el 9% Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, el 77% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, y el 5% debido a asociaciones incorrectas. Como lo muestra la figura 31.

4. a. Calcular la derivada de la función $f(x) = cos^3(2x^3 + x)$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 4. Dieciocho estudiantes (78%) contestaron correctamente, un estudiante (4%) lo hicieron de manera incorrecta, y cuatro estudiantes (18%) no contestaron. Como se muestra en la figura 32.

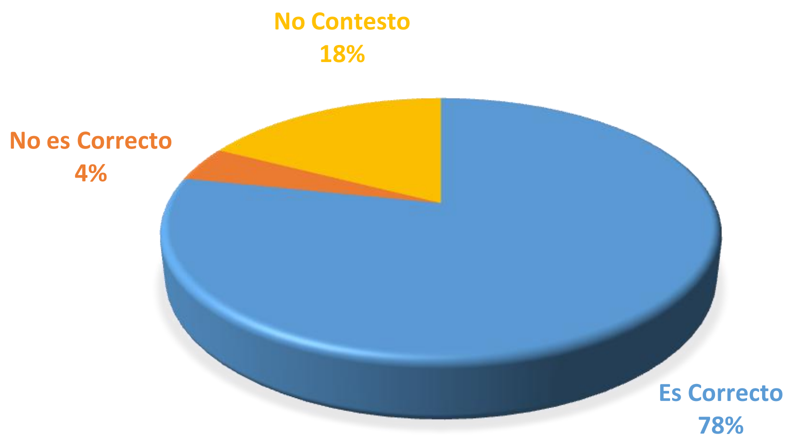

Figura 32. Distribución de respuestas pregunta 4.a.

Los errores que cometieron los estudiantes al resolver este ejercicio fueron debidos:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en un caso al realizar la derivada de la función $f(x) = cos^3(2x^3 + x)$ mediante la regla de la cadena.

A continuación se muestra el caso:

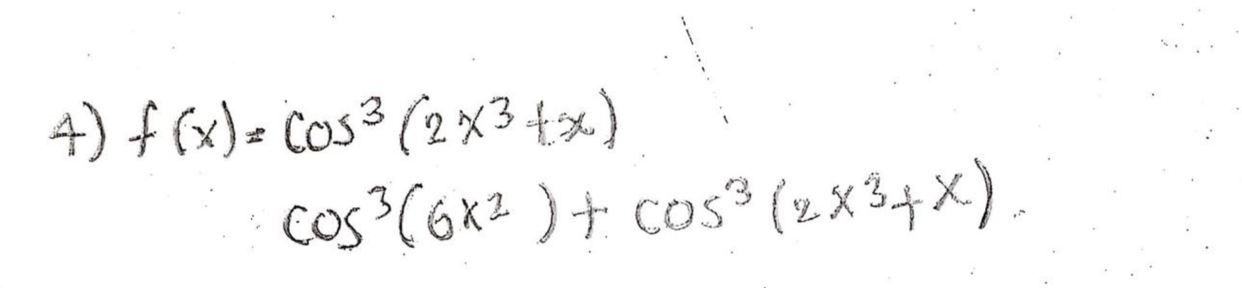

Figura 33. Caso donde se presenta error de categoría E4 en la pregunta 4.a.

En esta respuesta, el estudiante hace una asociación incorrecta para resolver el ejercicio, puesto que, no tiene claro el método para derivar la función, que este caso sería regla de la cadena. Aunque el error puede tener diferentes causas, se puede intuir que el estudiante no reconoce la semántica $cos^3(x)$ y a partir de allí realiza la derivada con un algoritmo desconocido, para dar como respuesta $cos^3(6x^2) + cos^3(2x^3 + x)$, siguiendo esa idea, se puede pensar que el estudiante realizo la derivada de un producto, sin embargo la respuesta no corresponde con el algoritmo descrito. Este error se considera en la **categoría E4.**

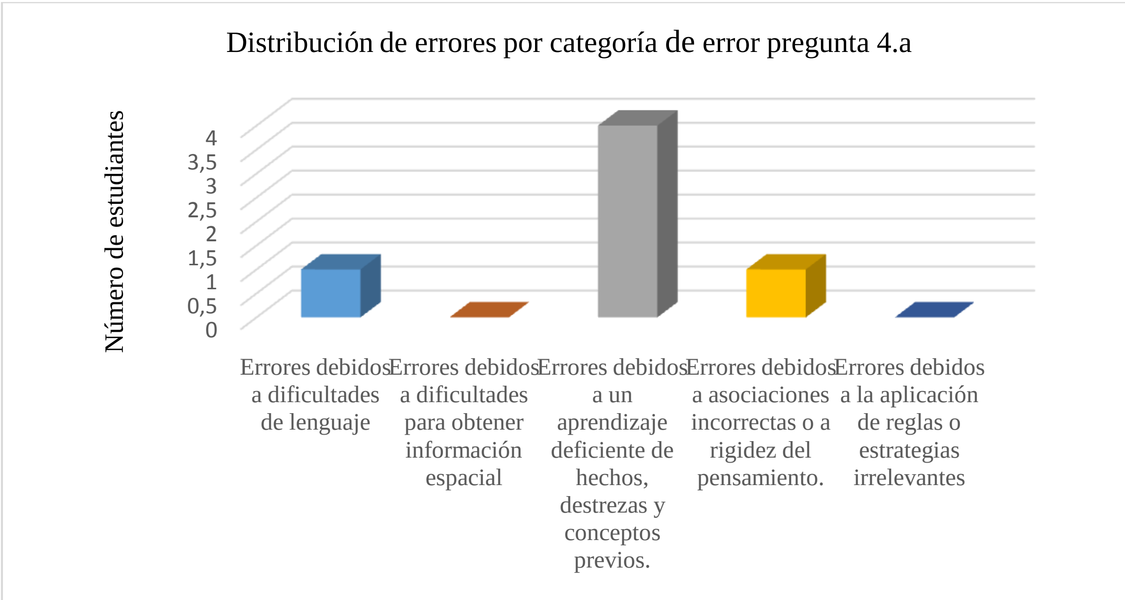

Figura 34. Distribución de errores por categoría de error pregunta 4.a

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 67% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 17% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, y el 16% a errores debidos a dificultades del lenguaje. Como lo muestra la figura 34.

4. b. Calcular la derivada de la función $g(z) = \frac{3+z}{z^2-2}$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 4. b. doce estudiantes (52%) contestaron correctamente, a pesar de eso, cinco estudiantes (22%) lo hicieron de manera incorrecta, cuatro estudiantes (17%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y dos estudiantes (9%) no contestaron. Como se ve reflejado en la figura 35.

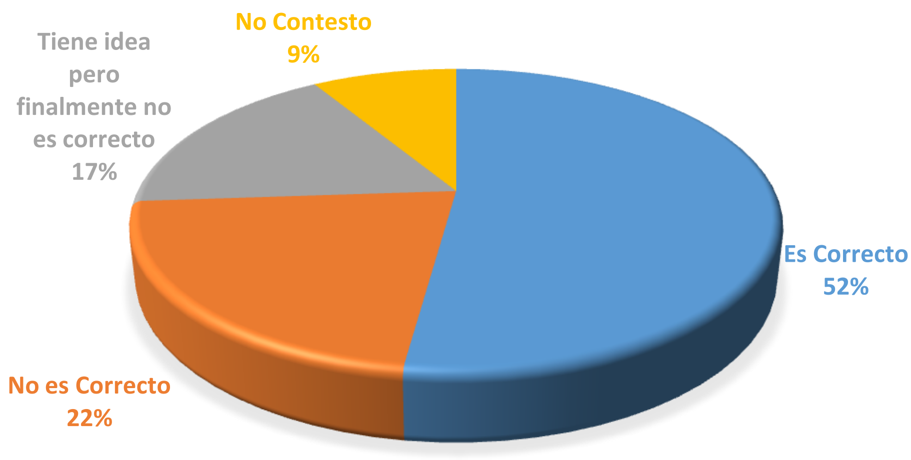

Figura 35. Distribución de respuestas pregunta 4.b

Los errores que cometieron los estudiantes al resolver este ejercicio fueron debidos:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta. En particular, al realizar la derivada del cociente de la función $g(z) = \frac{3+z}{z^2-2}$.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en cuatro casos al realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de las expresiones algebraicas

A continuación se muestran algunos casos.

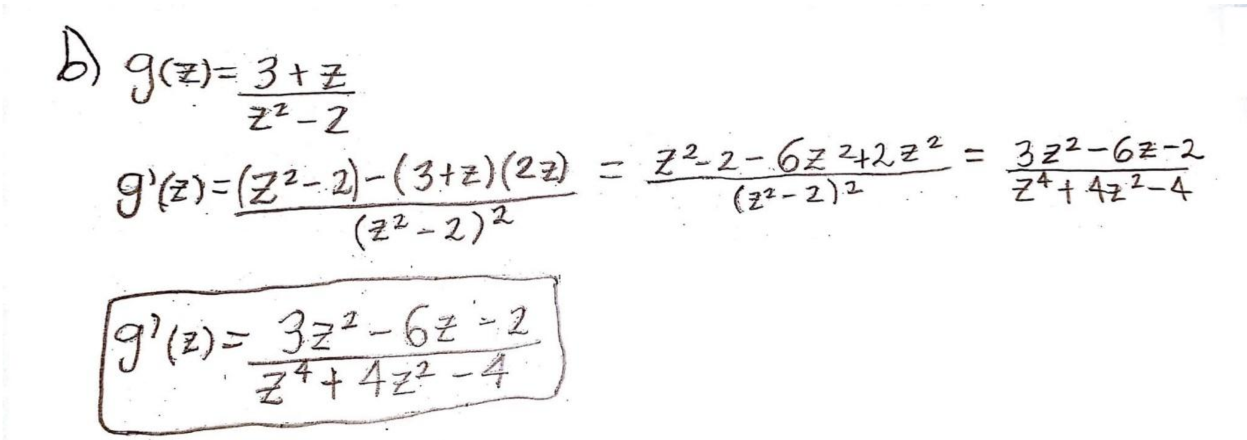

Figura 36. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 4.b.

En esta situación, el estudiante realiza la derivada del cociente de manera correcta, al dar como respuesta $g'(z) = \frac{(z^2-2)-(3+z)(2z)}{(z^2-2)^2}$, pero al resolver las operaciones entre los paréntesis hace cálculos incorrectos al operar con las operaciones básicas, puesto que en el numerador realiza la propiedad distributiva en el término $(3+z)(2z)$, pero no lo hace de correctamente con el signo negativo del término, llegando a una respuesta incorrecta. Este error se considera en la **categoría E3.**

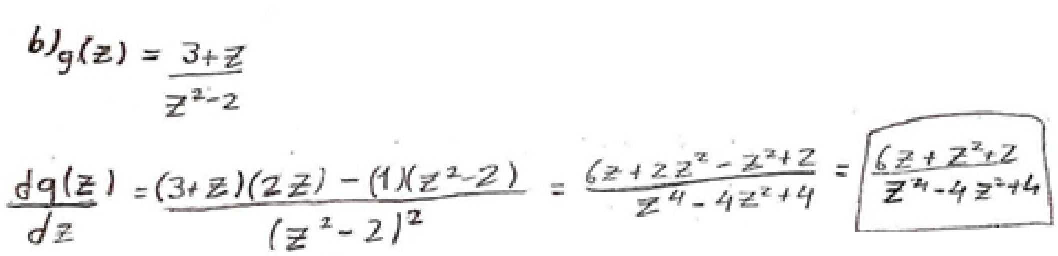

Figura 37. Caso donde se presenta error de categoría E3 en la pregunta 4.b.

En este caso el estudiante, al realizar la derivada del cociente, intercambia la posición del minuendo con la del sustraendo de los términos del numerador, sin darse cuenta que la operación resta no tiene la propiedad conmutativa, por ende el resultado obtenido no es el esperado. **Categoría E3.**

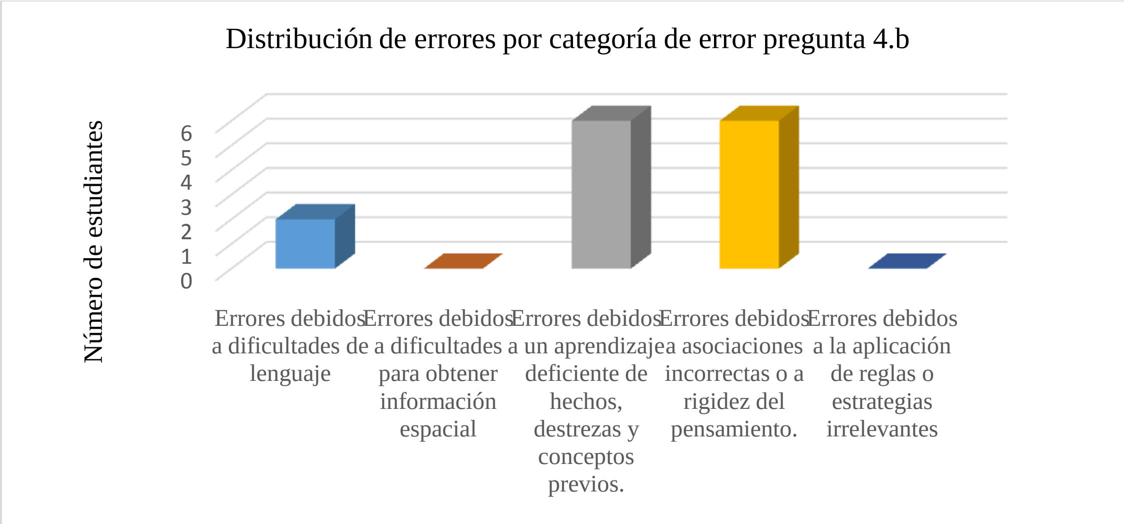

Figura 38. Distribución de errores por categoría de error pregunta 4.b.

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 43% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 43% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, y el 14% a errores debidos a dificultades del lenguaje. Como se indica en la figura 38.

4. c. Calcular la derivada de la función $h(t) = (\sec(t))^{ln(t^2)}$.

Al analizar el desarrollo del ejercicio 4.C, ocho estudiantes (35%) contestaron correctamente, cinco estudiantes (22%) lo hicieron de manera incorrecta, cuatro estudiantes (17%) tenían idea pero finalmente no fue correcto y seis estudiantes (26%) no contestaron. Como se observa en la figura 39.

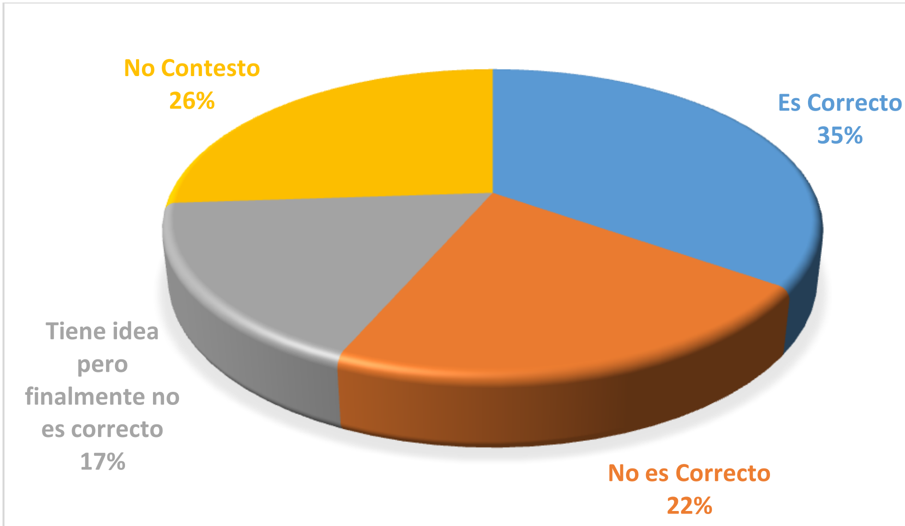

Figura 39. Distribución de respuestas pregunta 4.c.

Los errores que cometieron los estudiantes al resolver este ejercicio fueron debido a:

Aplicación incorrecta del algoritmo para derivar: Este error se presentó en cinco casos al aplicar una propiedad, regla o definición de forma inadecuada, alterando la fórmula o presentando una incoherencia en la respuesta, al realizar la derivada mediante la regla de la cadena, donde están involucradas las derivadas de los logaritmos y las funciones trigonométricas tangentes y secante.

Aplicación de operaciones algebraicas: Este error se contempló en cuatro casos al aplicar el logaritmo natural en la función $h(t) = (\sec(t))^{ln(t^2)}$ y realizar las reglas pertinentes correspondientes a los logaritmos.

Algunos casos reflejan lo siguiente.

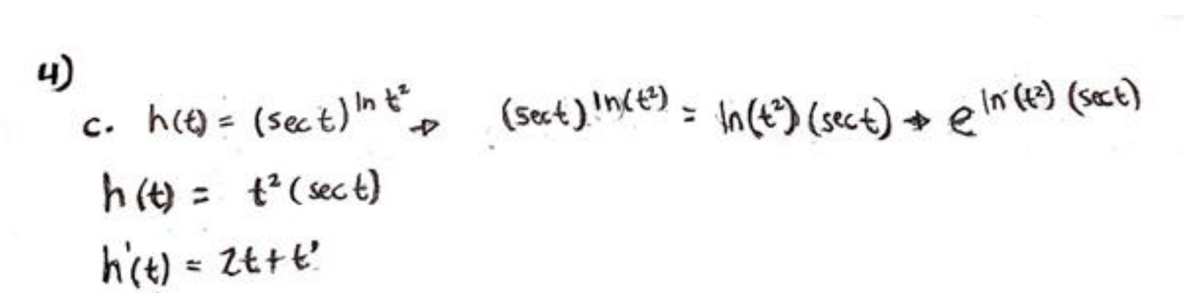

Figura 40. Caso donde se presentan errores de categorías E4 y E3 en la pregunta 4.c.

En esta situación el estudiante pone en evidencia la carencia de aprendizajes sobre las propiedades de los logaritmos y exponentes, de la siguiente manera: al tener la función $h(t) = (\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)}$, realiza un procedimiento para que el logaritmo que se encuentra como exponente, quede multiplicando la expresión de secante, mediante con una propiedad inexistente. Este error se considera en la **categoría E4.** Seguido de esto se olvida de la igualdad y aplica base Euler solo al lado izquierdo de la ecuación para simplificar el logaritmo natural, luego rescribe la función como $h(t) = t^2(\sec t)$ que al derivar da como respuesta $h'(t) = 2t + t'$, observando esta respuesta no se puede reconocer claramente el método con el que derivo ni especificar el patrón de error. Este tipo de error se considera en la **categoría E3.**

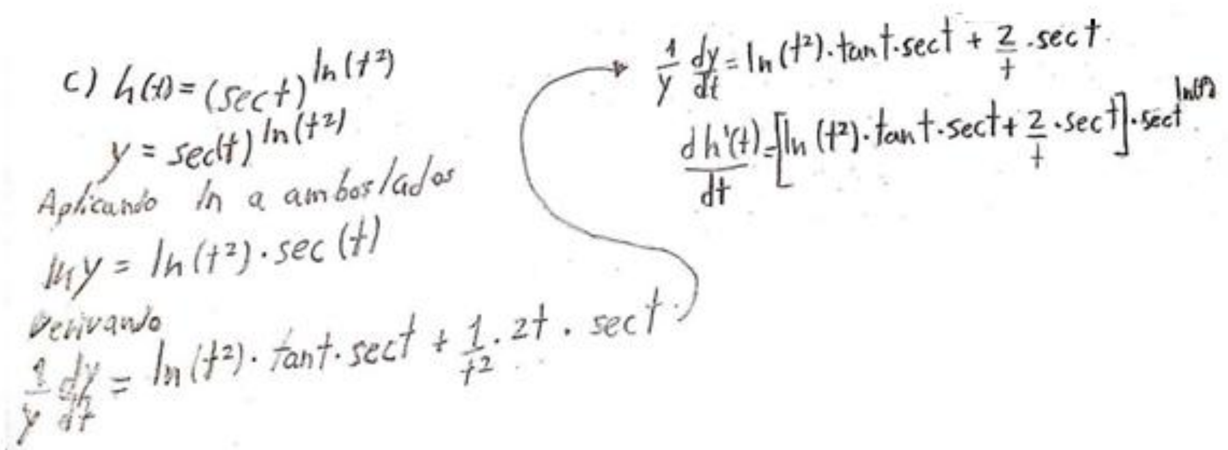

Figura 41. Caso donde se presentan errores de categorías E4 y E3 en la pregunta 4.c.

En este caso el estudiante rescribe la función como $y = (\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)}$, y aplica el logaritmo natural a dicha función, sin embargo, muestra una inconsistencia al escribir la expresión del lado derecho como un solo logaritmo, esto puedo ser debido a un cálculo accidental o un desconocimiento de la propiedad. A pesar de ello, el estudiante realiza correctamente la derivada pero no llega a la respuesta correcta condicionado por el error cometido anteriormente. Este procedimiento erróneo se considera en las **categorías E3 y E4**.

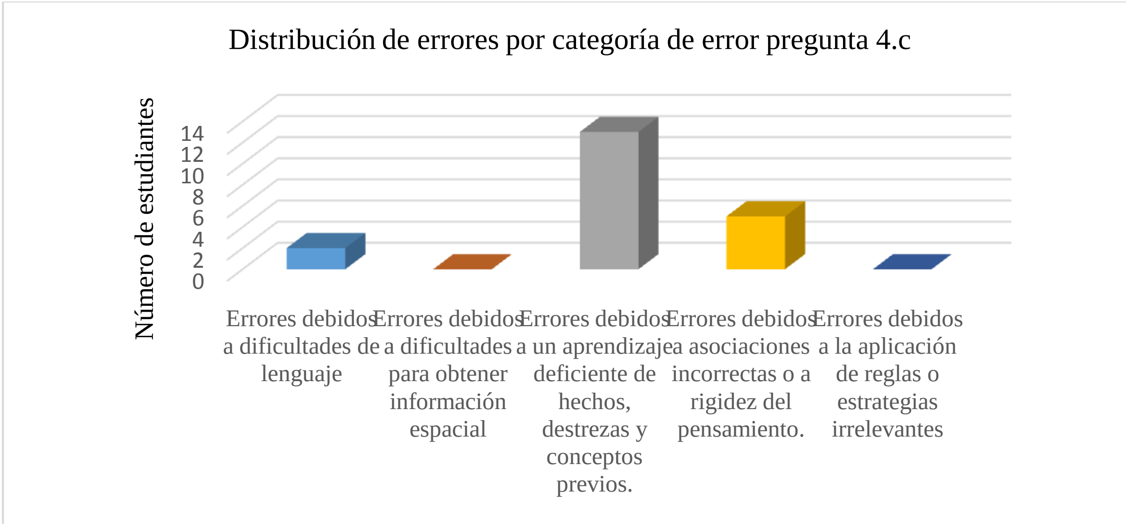

Figura 42. Distribución de errores por categoría de error pregunta 4.c

En esta pregunta según las categorías propuestas por Radatz, se observó que el 65% de los errores eran debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, el 25% debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, y el 10% a errores debidos a dificultades del lenguaje. Como lo muestra la figura 42.

4.2. Discusión de los Resultados

El análisis anterior, permitió realizar una clasificación de los errores que cometen los estudiantes, a partir de propuesta de López, se evidenció que al analizar las respuestas entregadas por los estudiantes en el instrumento de evaluación, el 55 % fueron contestadas incorrectamente, lo cual pone en manifiesto la gran cantidad de errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a problemas relacionados con la derivación. Y en consecuencia, de manera general afecta el bajo desempeño que tienen los estudiantes en el curso de cálculo diferencial, como lo indicaban los estudios relacionados al rendimiento en la Universidad del Valle.

De igual forma, se identificó una frecuencia de 155 errores cometidos por los estudiantes en relación a las categorías propuestas por Radatz, en donde se observó que el tipo de error más frecuente en el instrumento de evaluación, fue errores debidos al “aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”, con 101 incidencias siendo las preguntas 1.a, 1.b y 3 donde más se presentó este tipo de error.

Por otro lado, los errores debidos “a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento”, tuvo una frecuencia de 25 errores, Y en cambio, errores debidos a “dificultades del lenguaje” una frecuencia de 18 errores. Además, errores debidos “a dificultades para obtener información espacial.” Una frecuencia de 9 errores. Y errores debidos “a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.” 2 errores presentados.

5. CAPITULO V. CONCLUSIONES

El análisis de los errores cometidos por los estudiantes en su proceso de aprendizaje da cuenta de información acerca de cómo desarrollan el conocimiento matemático en particular al concepto de la derivada. Por otro lado, constituye una excelente herramienta que proporciona a los estudiantes la posibilidad de reconocer errores, detectar las causas de los mismos y los ayuden a proponer alternativas para solucionarlos.

Asimismo, este estudio permitió reconocer algunas concepciones que tienen los estudiantes al resolver los problemas de razones relacionadas, y optimización, pues al analizar las incidencias de los errores, se observa que en gran parte son debidos al realizar una inadecuada interpretación de los fenómenos físicos, y en ocasiones los estudiantes no son capaces de reconocer las variables que intervienen en un fenómeno que varía con el tiempo.

En consecuencia, se identificaron errores en los estudiantes, al usar incorrectamente algoritmos para derivar, aplicar casos de factorización, productos notables, aplicación de las operaciones básicas para realizar cálculos aritméticos y con expresiones algebraicas, mal uso de las propiedades de los logaritmos, representación gráfica de una situación, expresar características de un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras, y expresar incorrectamente el área superficial y volumen de un cilindro de radio r y altura h.

Considerando lo anterior, se pueden realizar algunas hipótesis del ¿por qué? de los bajos rendimientos en el curso de cálculo. Sin embargo, se desconoce la etiología de estos errores. Es probable que ellos sean ocasionados por deficiencias o vacíos conceptuales de los estudiantes en su formación matemática en niveles de educación media, anteriores a su ingreso a la educación superior. Aunque, no se desconoce que también las formas de enseñanza y evaluación puedan contribuir en ello, pero rastrear estos asuntos supera los objetivos de esta investigación.

Independientemente de la etiología de los errores, es preciso proponer alternativas para superar esta situación y prevenirla en futuros estudiantes. En cuanto al aprendizaje del cálculo diferencial estos resultados proporcionan tanto a los profesores en ejercicio como en formación, un insumo para proponer estrategias para identificar problemáticas con la enseñanza de este concepto y al analizarlos disminuir su incidencia.

En cuanto a esto, para tratar de reducir las incidencias del error, se podría proponer que en el curso de cálculo los estudiantes puedan hacer uso de medios tecnológicos como una vía alternativa para la comprensión de los conceptos relacionados a la derivada, donde el estudiante en algunos casos pueda visualizar e interactuar con la abstracción de este objeto matemático.

También, que los profesores propongan actividades complementarias a las temáticas trabajas que permitan una interacción activa del profesor y el estudiante, priorizando dar lugar al error, con el fin de que el estudiante pueda reconocer los posibles métodos de solución, y pueda comparar los conceptos validos con las respuestas erróneas.

Asimismo, plantear actividades en las que los estudiantes, puedan investigar sobre los antecedentes históricos de la derivada, para contemplar los errores en la evolución de este concepto, y de este modo enriquecer el contexto de los problemas o situaciones que comúnmente desarrollan en el curso.

5.1. Limitaciones de la Investigación

En cuanto a las limitaciones de la investigación, debe considerarse que la muestra que se tomó correspondió a un solo grupo de Cálculo Diferencial en la Universidad del Valle. Por lo cual al escoger un tamaño de muestra más grande se podrían comparar los grupos y los programas de estudio y esto reflejaría una información más completa en términos de los resultados.

Otro aspecto importante, a tener en cuenta, se refiere al instrumento de evaluación, puesto que este ya se encontraba diseñado por el profesor a cargo del curso, lo que implicó que la investigación se centrara en el análisis de las respuestas de los estudiantes a este. El trabajo no consideró como se realizó el instrumento o las condiciones de aplicación podía o no inducir a errores y en razón de la delimitación del problema ello se deja a futuras investigaciones.

No obstante, es preciso señalar que el instrumento, dejó por fuera algunos temáticas relacionados al concepto de la derivada, que son importantes, como el teoremas de valor medio, el teorema de Rolle, entre otros, en los cuales se hubieran reconocido diferentes errores para analizar.

Otra limitante fue el tiempo que no permitió realizar entrevistas a cada uno de los estudiantes, con el fin de conocer sus percepciones acerca del concepto matemático de la derivada, y así, identificar el origen del error.

5.2. Posibles vías de Investigación

Para continuar con una investigación posterior en la misma perspectiva, se propone aumentar el tamaño de la muestra, con el fin de tener una información más precisa sobre los errores que cometen los estudiantes.

También se puede considerar el análisis cuantitativo de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje o la enseñanza del cálculo diferencial, a partir de las entrevistas con los estudiantes y profesores, enriquecerían el estudio.

Igualmente proponer otras posibles categorías de errores propias al concepto matemático trabajado o tomar diferentes tipologías de errores. Además de ello, se puede realizar el instrumento de evaluación de acuerdo a las propuestas didácticas y las temáticas que se van a analizar. También se puede considerar como objeto de estudio el instrumento realizado por los docentes, con el fin de evaluar la manera de cómo incide o no a los errores.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*, 1ª ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Apóstol, T. (1988). *Calculo con funciones de una variable, con una introducción al Algebra Lineal*. Bogotá: Reverté.

Arango, G. (2015). *Significados institucionales del objeto matemático derivada en el curso de matemáticas I en la universidad tecnológica de Pereira. Recuperado de: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/5703/51533C121.pdf?sequence=1*

Artigue, M. (1988). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 1(1), 40.55.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del Cálculo*: problemas epistemológicos cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática, p. 97-140.

Artigue, M (1995b). *La enseñanza de los principios del cálculo*. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2000).*Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France*. Incluido en *Research in Collegiate Mathematics Education. IV, by Dubinsky et al.* Recuperado de www.ResearchinCollegiateMathematicsEducation.IV

Bachelard, G. (1993). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI Editores.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia.* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Barrantes, H. (2006). *Los Obstáculos Epistemológicos*. Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, UNED.

Brousseau, G. (1983). *Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemáticas*. Distribución en Internet: http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

Delgado, C, A., Tenorio, M, C. (2009). *Construcción de conocimiento matemático e inclusión. Experiencia con indígenas y afrocolombianos en la Universidad del Valle.*

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas.* Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., Hecklein, M. (2002). *Los Errores en el Aprendizaje de Matemática,* Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

Franchi, L. y Hernández, A. (2004). *Tipología de errores en el área de la geometría plana.* En Educere (Revista Venezolana de Educación*).* Año 8. Nº 24, pp. 63 – 71.

Godino, J; Batanero, C Y Font V, (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros.* Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Herscovics, N. (1989) *Cognitive Obstacles Encounteres in the Learning of Algebra.* Research Agenda for Mathematics Education. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del càlculo.* XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia (México).

Hitt, F.; (2005). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico), pp. 81-108.

Irazoqui, E. (2015). *El Aprendizaje Del Cálculo Diferencial: Una Propuesta Basada en la Modularización*. (Tesis Doctoral) Universidad Nacional De Educación A Distancia UNED. Recuperado de: http://e-spacio.uned.es/fez/view/tesisuned:Educacion-Esirazoqui

Larson, R; Edwards, *H. (2010). Cálculo en una variable,* Ed 9. México: McGraw-Hill.

López, A. (2005). *Deficiencias Matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería de una universidad privada*. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Educación, Maestría en Pedagogía, Bucaramanga.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., Inbar, S. (1987). *An empirical classification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 18, pp. 3-14.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Radatz, H. (1979). *Error Analysis in Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 9, pp. 163-172.

Radatz, H. (1980). *Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey*. For the Learning of Mathematics. Vol. 1 (1), pp. 16-20.

Ramirez, G., Ordoñez, J. (2014) *La visualización Didáctica en la formación inicial de profesores de Matemáticas en la Universidad del Valle: el caso de la Derivada en un curso de Cálculo I.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas*, cap. 3. pp. 69-108. En: Kilpatrik, J.; Gómez, P., Y Rico, L. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico.

Sierpinska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics*. For the learning of mathematics, pp. 24-41.

Socas, M. (1997): *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, cap. 5., pp. 125-154. En: Rico, L. y otros. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Editorial Horsori, Barcelona.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas*. Ed 7. México: Cengage Learning Latinoamericana.

Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis*. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.2793&rep=rep1&type=pdf

Tall, D. (1992). *Students' Difficulties in Calculus.* Plenary presentation in Working Group 3, ICME. Québec. Canada. Recuperado de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf

Tall, D. (1993). *Students' Difficulties in Calculus***.** *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME-7, Québec, Canada, pp. 13-28.

Tall, D. (2011). *Looking for the Bigger Picture. For the Learning of Mathematics*. 31 (2), pp. 17-18.

Universidad Del Valle. Consejo Superior. *Acuerdo No. 009* de noviembre 13 de 1997. Recuperado de http://www.univalle.edu.co/reglamento/

Universidad del Valle Departamentos de Matemáticas, *Cálculo I*. Disponible en: http://matematicas.univalle.edu.co/?s=secciones/web/1.%20Departamento/3.%20Programas%20oficiales%20de%20cursos&nm=Calculo%20I%20(111050M)

Universidad del Valle (2010). *Estudios sobre deserción en Univalle*. Disponible en http://uniculturas.univalle.edu.co/Pdfs/SISTEMA%20PERMANENCIA/ESTUDIOS%20DESERCION%20EN%20UNIVALLE%E2%80%93HASTA%202010.docx

7. ANEXOS

7.1. Anexo 1: Instrumento de Evaluación

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
QUIZ # 4 DE CÁLCULO I

NOMBRE CÓDIGO

TIEMPO MÁXIMO: 90 MINUTOS

1. (2.4 ptos.)

(a) Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$, en el intervalo $[-1, 1]$.

(b) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $2xy^3 + y + 1 = x - 3$, en el punto en que $y = 0$.

(c) Si $y^2 = 3x^2 + 4z$, $\frac{dz}{dt} = -2$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, calcule $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$ y $y = 1$.

(d) Calcule el valor de $h'(2)$, si se sabe que $h(x) = g(x^2).g^2(x)$, $g(2) = 2$, $g'(4) = -\frac{1}{4}$, $g(4) = 1$, $g'(2) = -1$.

2. (0.8 ptos.) Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas a una velocidad de 480 millas por hora, pasa directamente sobre un observador en el piso. £Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión una hora después?

3. (0.8 ptos.) £Cuáles son las dimensiones de la lata cilíndrica de menor área superficial, sabiendo que su volumen es de $350\,cm^3$?

4. Calcule la derivada de las funciones cuyas expresiones se dan a continuación:

(a) (0.3 ptos.) $f(x) = \cos^3(2x^3 + x)$ (b) (0.3 ptos.) $g(z) = \frac{3+z}{z^2 - 2}$ (c) (0.4 ptos.) $h(t) = (\sec t)^{\ln(t^2)}$

7.2. Anexo 2: Solución del Instrumento

En base a las definiciones y teoremas propuestos en el marco teórico, la tabla 1, y las consideraciones del profesor Humberto Mora, se plantea una solución para los ejercicios propuestos en el instrumento:

1. a. Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1$, en intervalo $[-1,\ 1]$.

Para calcular los valores máximos y mínimos de la función f en un intervalo $[-1,\ 1]$,

$$f(x) = \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1 \qquad (1)$$

Se procede a realizar la derivada de (1), entonces:

$$f'(x) = 16x^4 - 4x^2 \qquad (2)$$

Del resultado (2) se iguala a cero $f'(x) = 0$ y al resolver se encuentran los puntos críticos:

$$x = 0 \ \text{ ó } \ x = \frac{1}{2} \ \text{ ó } \ x = -\frac{1}{2}$$

Luego, se evalúan los puntos críticos y los extremos del intervalo en (1) y se obtiene:

$f(0) = 1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{15},\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{15},\quad f(1) = \frac{43}{15}\quad f(-1) = -\frac{13}{15}$

Por lo tanto $f(1) = \frac{43}{15}$ es el máximo absoluto y $f(-1) = -\frac{13}{15}$ es el mínimo absoluto.

1. b. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, definida implícitamente por la ecuación $2xy^3 + y + 1 = x - 3$, en el punto en que $y = 0$.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida implícitamente

$$2xy^3 + y + 1 = x - 3 \tag{1}$$

Se encuentra la coordenada de la abscisa de $y = 0$ en (1) y al resolver:

$$x = 4$$

Luego se deriva implícitamente la ecuación (1):

$$2y^3 + 6xy^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 \tag{2}$$

Y se evalúa en el punto $P(4,0)$ en (2) y al despejar $\frac{dy}{dx}$ se encuentra la pendiente:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \tag{3}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente a la curva (1), con pendiente dada en la ecuación (3) y que pasa por el punto $P(4,0)$ es:

$$y = x - 4$$

1. c. Si $y^2 = 3x^2 + 4z$, $\frac{dz}{dt} = -2$ y $\frac{dy}{dt} = 2$, calcule $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$ y $y = 1$.

Para calcular $\frac{dx}{dt}$, se procede a derivar implícitamente la ecuación (1) con respecto a t:

$$y^2 = 3x^2 + 4z \tag{1}$$

Entonces, se obtiene:

$$2y\frac{dy}{dt} = 6x\frac{dx}{dt} + 4\frac{dz}{dt} \tag{2}$$

Despejando $\frac{dx}{dt}$ de la ecuación (2):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2y}{6x}\frac{dy}{dt} - \frac{4}{6x}\frac{dz}{dt} \tag{3}$$

Entonces si se evalúan las siguientes condiciones en (3):

$$\frac{dz}{dt} = -2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2,$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

Se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

1. d. Calcule el valor de $h'(2)$, si se sabe que $h(x) = g(x^2).g^2(x)$, $g(2) = 2$, $g'(4) = -\frac{1}{4}$, $g'(2) = -1$.

Para calcular $h'(2)$, se procede a derivar mediante regla de la cadena la ecuación (1):

$$h(x) = g(x^2).g^2(x) \tag{1}$$

$$h'(x) = g'(x^2)(2x)g^2(x) + g(x^2)2g(x)g'(x) \tag{2}$$

Luego evaluamos en el punto $x = 2$ en la ecuación (2), entonces:

$$h'(2) = g'(4)(4)g^2(2) + g(4)2g(2)g'(2) \tag{3}$$

Al sustituir las condiciones:

$$g(2) = 2$$

$$g'(4) = -\frac{1}{4}$$

$$g'(2) = -1$$

En la ecuación (3), entonces:

$$h'(2) = -8$$

2. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de $3\,millas$ a una velocidad de $480\,millas\;por\;hora$, pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión una hora después?

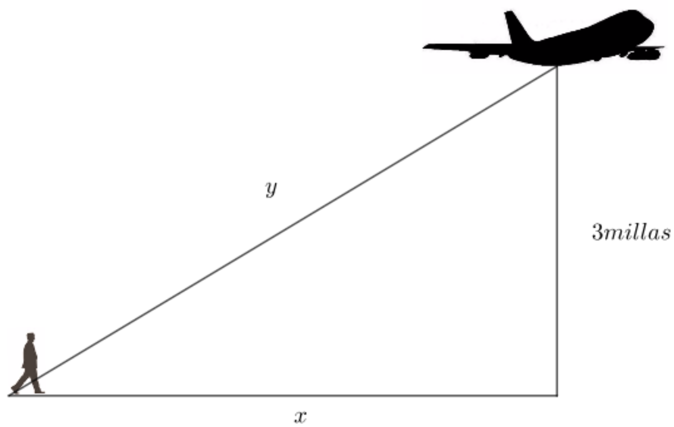

Figura 43. Representación de la situación del problema 2.

Al analizar la información del problema se identifica que el avión vuela horizontalmente a una altura de $3\,millas$ y con una velocidad de $\frac{dx}{dt} = 480\frac{millas}{hora}$, el cual pasa sobre un observador en el piso, se quiere determinar $\frac{dy}{dt}$, es decir, la variación de la distancia y del observador al avión respecto al tiempo en el instante que $t = 1\,hora$. Se procede a realizar un bosquejo de la situación con las condiciones del ejercicio:

Si se utiliza el teorema de Pitágoras para relacionar las distancias en la figura 43 entonces:

$$y^2 = x^2 + 3^2 \tag{1}$$

Como $\frac{dx}{dt} = 480\frac{millas}{hora}$, al cabo de una hora recorre una distancia $x = 480\,millas$, al remplazar x en (1), entonces:

$$y^2 = (480)^2 + 3^2 \tag{2}$$

Efectuando la operación, entonces:

$$y = 480{,}0093749\,millas \tag{3}$$

Ahora bien, para encontrar $\frac{dy}{dt}$, se deriva implícitamente la ecuación (1) con respeto a t:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

Y se toma $x = 480\,millas$ y el resultado (3), al sustituir en la ecuación (4), se obtiene:

$$\frac{dy}{dt} = 479.99\frac{millas}{hora} \tag{5}$$

Se puede dar una respuesta aproximada de (5) como:

$$\frac{dy}{dt} \approx 480\frac{millas}{hora}$$

3. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata cilíndrica de menor área superficial, sabiendo que su volumen es de $350\ cm^3$?

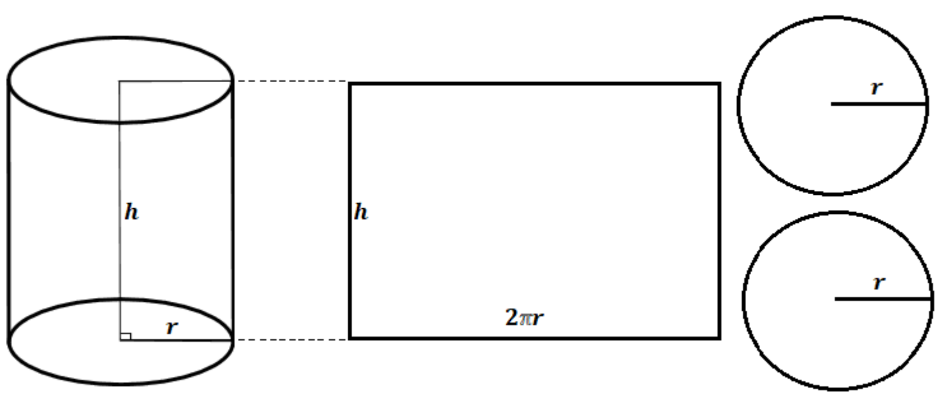

Figura 44. Representación de la situación del problema 3.

Se define a r como el radio y h la altura de una lata cilíndrica como se muestra en la figura 44.

Como el volumen de la lata es $V = 350cm^3$, entonces:

$$\pi r^2 h = 350cm^3 \quad (1)$$

Al despejar h de la ecuación (1) se obtiene:

$$h = \frac{350cm^3}{\pi r^2} \quad (2)$$

Luego, el área superficial de la lata cilíndrica con tapa está dado por la ecuación:

$$Área_{superficial} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (3)$$

Al remplazar la ecuación (2) en (3) se obtiene:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{350cm^3}{\pi r^2}\right) \quad (4)$$

Derivando la ecuación (4) con respecto a r, entonces:

$$A^{'}(r) = 4\pi r - \frac{700cm^3}{r^2} \quad (5)$$

Al hacer $A'(r) = 0$ y despejar r, entonces:

$$r^3 = \frac{700cm^3}{4\pi} \quad (6)$$

De la ecuación (6) se obtiene el punto crítico:

$$r = \sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}cm \quad (7)$$

De la ecuación (5) se deriva y al aplicar el criterio de la segunda derivada

$$A^{''}(r) = 4\pi + \frac{1400cm^3}{r^3} \quad (8)$$

Ahora se sustituye la ecuación (7) en (8), entonces:

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\,cm\right) = 12\pi \tag{9}$$

Luego $A''\left(\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\,cm\right) > 0$, entonces en $r = \sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\,cm$ el área es mínima.

Ahora se obtiene la altura h de la lata cilíndrica, sustituyendo la ecuación (7) en (2):

$$h = \frac{350}{\pi\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}^{2}}\,cm \tag{10}$$

4. a. Calcular la derivada de la función $f(x) = cos^3(2x^3 + x)$.

Sea la función $f(x)$:

$$f(x) = cos^3(2x^3 + x)$$

Para derivar la función $f(x)$, se utiliza la regla de la cadena. Entonces:

$$f´(x) = -3cos^2(2x^3 + x)(sen(2x^3 + x))(6x^2 + 1)$$

4. b. Calcular la derivada de la función $g(z) = \frac{3+z}{z^2-2}$.

Sea la función $g(z)$:

$$g(z) = \frac{3 + z}{z^2 - 2}$$

Para encontrar $g´(z)$ se utiliza la derivada del cociente:

$$g'(z) = \frac{(z^2 - 2) - (2z(3 + z))}{(z^2 - 2)^2}$$

$$g'(z) = \frac{z^2 - 2 - 6z - 2z^2}{(z^2 - 2)^2}$$

$$g'(z) = \frac{-z^2 - 6z - 2}{(z^2 - 2)^2}$$

4. c. Calcular la derivada de la función $h(t) = (\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)}$.

Sea la función $h(t)$:

$$h(t) = (\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)} \quad (1)$$

Para realizar esta derivada primero se utiliza el logaritmo natural a la función $h(t)$

$$\ln(h(t)) = \ln((\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)}) \quad (2)$$

Ahora se utiliza la propiedad del exponente en los logaritmos en (2), entonces:

$$\ln(h(t)) = ln(t^2)(ln(\sec(\mathrm{t})) \quad (3)$$

Luego se deriva a (3) con las reglas de derivación del logaritmo y el producto:

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{2t\left(ln(\sec(\mathrm{t}))\right)}{t^2} + \frac{\sec(t)\tan(t)(ln(t^2))}{\sec(t)} \quad (4)$$

Seguido de esto despejamos $h'(t)$ y se sustituye la ecuación (1) en (4) y se obtiene:

$$h'(t) = \left(\frac{2ln(\sec(\mathrm{t}))}{t} + \tan(t)\,(ln(t^2))\right)(\sec(\mathrm{t}))^{ln(t^2)}$$