ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Partizioni Piane: Funzione Generatrice e Formula Ricorsiva

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Fabrizio Caselli

Presentata da:
Luca Bartoli

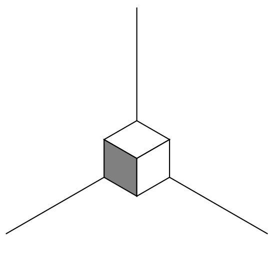
Anno Accademico 2020-2021

Indice

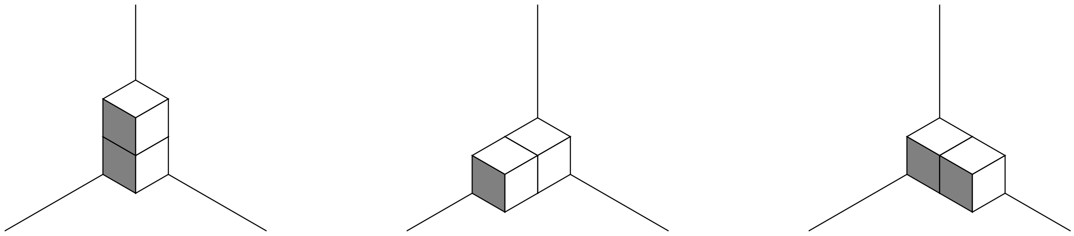
Capitolo 1

Introduzione

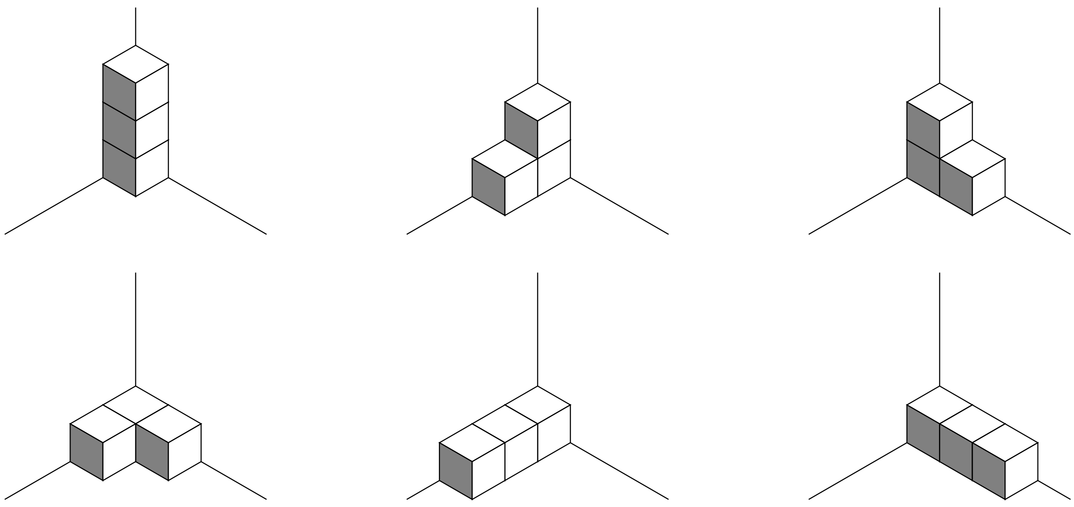
Questo breve percorso nello sterminato panorama della matematica, come spesso accade, prende le mosse da un quesito apparentemente semplice, che presto rivela difficoltà inattese.
Supponiamo di avere un numero finito di cubi di uguali dimensioni, e di volerli disporre in modo ordinato nell'angolo di una stanza; poniamo il primo cubo aderente allo spigolo, poi sistemiamo gli altri, impilati o affiancati, in modo tale che le facce a contatto di due cubi contigui combacino esattamente, con la condizione che non ci siano spazi vuoti tra i cubi, o tra i cubi e le pareti della stanza.
Di fronte alle strutture che si ottengono seguendo queste poche indicazioni - che richiamano vagamente giochi da tavolo o di costruzione - l'occhio del matematico non tarda ad accorgersi della loro chiara natura regolare, formale, *combinatorica* - come accade con oggetti simili, ad esempio pedine disposte su una scacchiera o tabelle di numeri composte secondo certe regole. Prende subito forma la domanda più ovvia, cioè: dato un certo numero di cubi in quanti modi si possono disporre? La risposta risulta banale per i primi casi. Non c'è che un unico modo di posizionare un solo cubo, cioè spingendolo nell'angolo.



Si vede subito che il secondo si può posizionare in tre modi avendo sistemato il primo: sopra, a destra o a sinistra.



Con tre cubi la risposta diventa meno immediata: partendo dalle tre configurazioni del caso precedente si posiziona il terzo cubo in tutti i modi possibili - con la ovvia accortezza di escludere le strutture che si ripetono. Concludiamo che le disposizioni possibili sono sei.



L'enumerazione diventa presto ostica, e ci si accorge già da queste poche istanze che non c'è un modo ovvio per esprimere questo numero direttamente, né di ricavarlo dal caso precedente tramite un ragionamento elementare (come ad esempio con il principio di inclusione-esclusione).
Questi oggetti matematici vengono chiamati *partizioni piane*, e quello appena presentato è un quesito classico della combinatoria. Le partizioni piane sono comparse per la prima volta in un articolo del matematico britannico Percy A. MacMahon pubblicato nel 1897. Il nome per il momento può apparire controintuitivo (la parola "piane" non sembra adeguata a descrivere oggetti tridimensionali), ma è dato da una stretta parentela con un

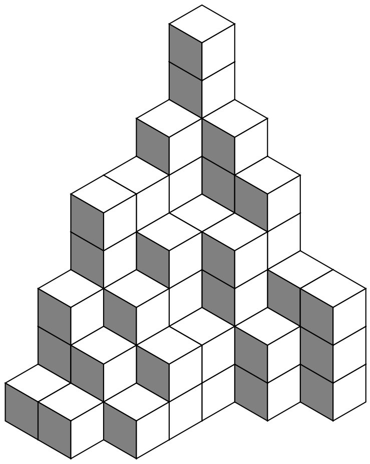


Figura 1.1: Una partizione piana di 70

problema simile: quello delle partizioni di interi - nelle quali ci imbatteremo molte volte nel corso di questa breve ricerca, e alle quali è dedicato il capitolo seguente.

1.1 Partizioni Piane

Procediamo con il formalizzare il quesito. Risulta naturale rappresentare lo spazio in cui disporre i cubi - a cui ci siamo riferiti sopra come "angolo di una stanza" - con il reticolo discreto $\mathbb{N}^3 = \{(i, j, k) | i, j, k \geq 1\}$, e la configurazione di cubi come un sottoinsieme di tale reticolo.

Definizione 1.1.1. Si definisce partizione piana un sottoinsieme finito $\mathcal{P}$ del reticolo tridimensionale $\mathbb{N}^3$, tale che se $(r, s, t) \in \mathcal{P}$ allora $(i, j, k) \in \mathcal{P}$ per $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, $1 \leq k \leq t$.

Chiamiamo $pp(n)$ il numero di partzioni piane $\mathcal{P}$ con cardinalità n.
Adoperando la strategia enumerativa di cui abbiamo dato alcuni esempi, siamo in grado - seppur a fatica - di elencare i primi numeri della sequenza:

n	$pp(n)$
1	1
2	3
3	6
4	13
5	24
6	48
...	...

Come già accennato, l'enumerazione non suggerisce alcuna formula chiusa per $pp(n)$, ma vedremo che si può esprimere $pp(n)$ in funzione dei numeri che lo precedono nella sequenza tramite una espressione ricorsiva.
La strategia che adotteremo per lavorare con i numeri di questa sequenza è quella di considerarli come coefficienti di una serie formale, servendoci cioè di quella che viene chiamata una funzione generatrice.

1.2 Funzione Generatrice

Definizione 1.2.1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di interi, si definisce funzione generatrice della successione la serie formale di potenze di q che ha gli a_n come coefficienti, cioè

$$\sum_{n\geq 0} a_n q^n.$$

Le funzioni generatrici sono un modo alternativo di rappresentare le successioni numeriche, che dota queste ultime di alcune proprietà algebriche altrimenti assenti. Una caratteristica che le rende uno strumento molto potente, è che talvolta si riesce ad esprimere una funzione generatrice con una formula chiusa - cioè una espressione in q costituita da operazioni algebriche - la quale può essere sfruttata per studiare la sequenza. In alcuni casi fortunati se ne ricava una formula chiusa per l'n-esimo elemento, in altri - come negli esempi che studieremo - ci si accontenta di formule di ricorrenza.
La funzione generatrice delle partizioni piane è

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 24q^5 + 48q^6 + \dots$$

Prima di procedere richiamiamo alcuni concetti sulle serie formali: siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ e $\sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$ due serie formali, si definiscono rispettivamente somma e prodotto come

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) q^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \times \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m = \sum_{t=0}^{\infty} c_t q^t,$$

dove il coefficiente $c_t = \sum_{j=0}^{t} a_{t-j} b_j$. L'insieme delle serie formali costituisce quindi un anello con le operazioni appena definite.

Osservazione 1.2.1. Applicando la definizione di prodotto otteniamo

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^k+\cdots) = 1,$$

da cui segue che $1-q$ è invertibile con inversa $\sum_{n\geq 0} q^n$; vale cioè l'identità

$$\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

che corrisponde alla formula della serie geometrica.

Ci tornerà utile definire il prodotto infinito di serie formali, generalizzando il prodotto di due serie: siano $s_i := \sum_{j\geq 0} a_{ij} q^j$ per ogni $i \geq 1$; si definisce prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} s_i = \sum_{k\geq 0} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_k j_k} q^{j_1+j_2+\cdots+j_k}.$$

Avendo introdotto il concetto di funzione generatrice e richiamato queste ultime nozioni di base sulle serie formali, siamo in grado di enunciare il primo dei tre risultati che costituiscono l'obbiettivo del presente elaborato. Il seguente teorema ci da una formula chiusa per la funzione generatrice delle partizioni piane; fu scoperto da MacMahon nel 1897, ma non ne pubblicò una dimostrazione fino al 1912.

Teorema 1.2.1. La funzione generatrice delle partizioni piane è

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^j)^j}.$$

1.3 Formula Ricorsiva

Come accennato sopra, non è nota una formula chiusa che esprima il numero $pp(n)$, ma siamo in grado di provare una formula di ricorrenza, cioè un'espressione di $pp(n)$ in funzione degli elementi che lo precedono nella sequenza.

Teorema 1.3.1. Dato un intero n, le partizioni piane con n cubi sono

$$pp(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1} \sigma_2(j)pp(n-j),$$

dove $\sigma_2(j) := \sum_{k|j} k^2$.

La precedente formula - il secondo dei nostri *teoremi-obbiettivo* - si ricava dall'identità del Teorema 1.2.1. A sua volta quest'ultimo segue dal Teorema che enunceremo nella seguente sezione, il quale risponde alla stessa domanda del Teorema 1.2.1 - fornisce cioè una formula chiusa per la funzione generatrice delle partizioni piane - ma con un'ipotesi aggiuntiva.

1.4 Partizioni Piane Limitate

Vogliamo introdurre dei limiti alle dimensioni di una partizione piana. Definiamo il parallelepipedo di dimensioni r, s e t come $\mathcal{B}(r,s,t) = \{1,2,\dots,r\}\times\{1,2,\dots,s\}\times\{1,2,\dots,t\}$ e indichiamo con $\mathcal{PP}(r,s,t)$ l'insieme delle partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r,s,t)$, alle quali spesso ci riferiremo, per brevità, con *partizioni piane limitate*.
Ci proponiamo di trovare un'espressione per la funzione generatrice di tali partizioni. Notiamo che il termine k-esimo della funzione generatrice ha come coefficiente il numero di partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r,s,t)$ costituite da k cubi; è quindi facile convincersi

che la funzione generatrice sia polinomiale di grado $r \times s \times t$.

$$\sum_{\pi \in \mathcal{PP}(r,s,t)} q^{|\pi|} = 1 + q + 3q^2 + \cdots + q^{rst}.$$

Il seguente è il terzo e ultimo dei tre *teoremi-obbiettivo* di questo lavoro. Anche questa formula comparve nell'articolo di MacMahon del 1897, per poi essere provata dallo stesso in una pubblicazione successiva.

Teorema 1.4.1. La funzione generatrice per le partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r, s, t)$ è

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} \frac{1 - q^{i+j+s-1}}{1 - q^{i+j-1}}.$$

L'identità del Teorema 1.2.1, che riguarda le partizioni piane senza limiti sulle dimensioni, come vedremo nella conclusione, si ottiene dal Teorema 1.4.1, che è l'omologo nel caso limitato, facendo tendere le dimensioni all'infinito.

Capitolo 2

Partizioni di Interi

Le partizioni piane possono essere viste come una generalizzazione delle più note e annose partizioni di interi, il cui studio risale almeno al XVII secolo, con contributi di matematici come Leibnitz e Bernoulli. I due problemi di enumerazione - quello delle partizioni piane e quello delle partizioni di interi - sono strettamente correlati e presentano delle stupefacenti analogie, sia nelle criticità che nelle soluzioni. La struttura del presente capitolo - in cui affrontiamo il secondo problema - replica in scala ridotta quella dell'intero elaborato; infatti dopo aver introdotto il quesito, anch'esso enumerativo e privo di una soluzione diretta, ci serviremo di una funzione generatrice per estrapolare una formula di ricorrenza.

Dato un intero n, una partizione è una sequenza finita di interi - che ordiniamo convenzionalmente in senso decrescente - la cui somma è n. Le partizioni del numero 5 sono

$$5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1.$$

Mentre le partizioni del numero 6 sono

$$\begin{gathered} 6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3{+}3,\ 3+2+1,\ 3+1+1+1, \\ 2+2+2,\ 2+2+1+1,\ 2+1{+}1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1. \end{gathered}$$

Ci chiediamo: dato un intero n, in quanti modi si può scrivere come somma di un numero finito di interi? Per le primissime istanze la risposta è banale, ma analogamente all'esempio riportato nell'introduzione, l'enumerazione diventa molto difficile per numeri poco più grandi, e l'n-esimo numero della sequenza non si lascia descrivere con un'espressione diretta.

Definizione 2.0.1. Sia $n \in \mathbb{N}$; si definisce partizione di n una sequenza finita e debolmente decrescente di numeri $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$n = \sum_{i=1}^{k} \pi_i.$$

Indichiamo con $p(n)$ il numero di partizioni dell'intero n. I primi numeri della sequenza sono:

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
...	...

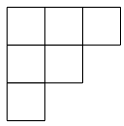
Ma per i successivi dovremo munirci di strumenti più potenti; infatti ci serviremo della funzione generatrice e della sua formula chiusa - passando attraverso il Teorema dei Numeri Pentagonali di Eulero - per stabilire una relazione di ricorrenza tra gli interi della successione.

2.1 Diagrammi di Ferrers

In questa sezione presentiamo un modo alternativo di porre il problema di conteggio delle partizioni di un intero, che rende lampante la parentela che queste hanno con le protagoniste di questo elaborato - le partizioni piane.

Supponiamo di avere un numero finito di tessere quadrate di uguali dimensioni, e di

volerle disporre nell'angolo di una scacchiera con le seguenti regole: i lati a contatto di due tessere contigue devono combaciare esattamente e non si devono lasciare spazi vuoti tra le tessere o tra le tessere e i bordi della scacchiera.
Per esempio una possibile configurazione con 6 tessere è



La domanda che ci poniamo è la solita: dato un certo numero di tessere, in quanti modi si possono disporre?
Un diagramma così fatto è detto *Diagramma di Ferrers* ed è una rappresentazione grafica della partizione di un intero. Data una partizione $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ dell'intero n, il corrispondente diagramma di Ferrers è composto da n caselle, disposte in k righe allineate, tali che la j-esima riga - contando dall'alto - abbia π_j caselle. Il procedimento inverso - per trovare la partizione a partire dal diagramma - è l'ovvio capovolgimento di quello appena descritto. Lo schema di tessere riportato sopra corrisponde quindi alla partizione $6 = 3 + 2 + 1$.
Poiché abbiamo stabilito questa corrispondenza biunivoca, concludiamo che il numero di disposizioni di n tessere è $p(n)$, e quindi la domanda di questa sezione rimanda alla domanda dell'intero capitolo.

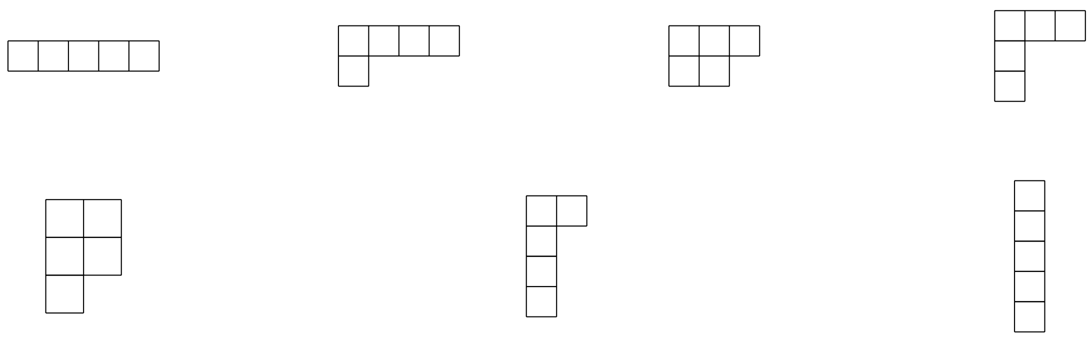


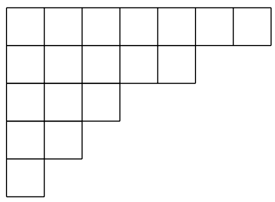
Figura 2.1: Diagrammi di Ferrers delle partizioni del numero 5

Osservazione 2.1.1. Si osserva quindi che le partizioni piane - cioè configurazioni di cubi ordinati in un reticolo tridimensionale - possono essere viste come una generalizzazione a tre dimensioni dei diagrammi di Ferrers.

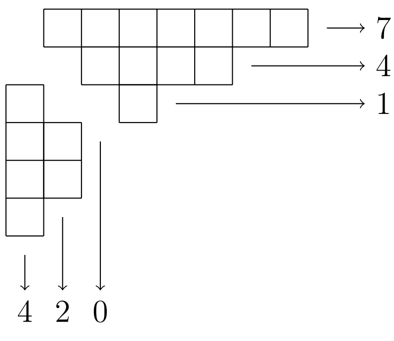
I diagrammi di Ferrers sono rappresentazioni molto intuitive: fanno saltare all'occhio proprietà delle partizioni di interi che altrimenti, avendo di fronte solo delle anonime sequenze di numeri, rimarrebbero oscure. Per esempio il seguente Lemma, che ci servirà nella sezione successiva.

Lemma 2.1.1. Il numero di partizioni di m è uguale al numero di modi in cui si può rappresentare m come somma di interi positivi distinti più un egual numero di interi non negativi distinti.

Non diamo una dimostrazione formale di questo fatto, ma ci limitiamo a illustrare con un esempio - facilmente generalizzabile -, un procedimento che opera sui diagrammi per passare da una partizione generica di un intero ad una del tipo descritto nell'enunciato. Sia la partizione $18 = 7 + 5 + 3 + 2 + 1$, consideriamo il corrispondente diagramma di Ferrers.



Spezziamo il diagramma in due parti, la prima costituita dalle caselle al di sopra della diagonale, compresa quest'ultima, l'altra da quelle al di sotto.



Si può affermare che il numero di righe della parte superiore sia uguale al numero di colonne della parte inferiore, assumendo eventualmente la presenza di una colonna vuota (come nel caso in figura). Si associa quindi a ciascuna di tali righe e colonne un intero pari al numero di caselle che le compone, ottenendo così una partizione costituita

da 3 interi positivi distinti $\{7, 4, 1\}$, più un egual numero di interi non negativi distinti $\{4, 2, 0\}$.
E' facile convincersi che lo stesso procedimento si può applicare ad ogni diagramma di Ferrers, e che quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra i due tipi di partizione, da cui il Lemma 2.1.1.

2.2 Funzione Generatrice

La seguente Proposizione dà una formula chiusa per la funzione generatrice delle partizioni di interi.

Proposizione 2.2.1. La funzione generatrice delle partizioni di interi è

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

Dimostrazione. Fissato $m \in \mathbb{N}$, osserviamo che il prodotto tra binomi

$$(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^m),$$

una volta sviluppato è un polinomio tale che il coefficiente del termine di grado k è il numero di modi in cui si può scrivere k come somma di elementi distinti di $\{1, 2, \dots, m\}$.
Analogamente il prodotto di trinomi

$$(1+q+q^{1+1})(1+q^2+q^{2+2})\cdots(1+q^m+q^{m+m}),$$

è un polinomio tale che il coefficiente del termine di grado k conta in quanti modi si può scrivere k come somma di elementi di $\{1, 2, \dots, m\}$, con la condizione che ciascun elemento può ripetersi al più 2 volte.
Ragionando nello stesso modo, sostituendo ai trinomi le somme infinite

$$(1+q+q^2+q^3+\dots)(1+q^2+q^4+q^6+\dots)\cdots(1+q^m+q^{2m}+q^{3m}+\dots),$$

otteniamo la funzione generatrice delle partizioni di interi con parti minori o uguali ad

m; si può sostituire ogni somma infinita con la corrispondente formula chiusa

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(q^j)^n\right) = \frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^2}\cdots\frac{1}{1-q^m}.$$

Per ottenere la funzione generatrice delle partizioni di interi ci basta quindi sostituire il prodotto tra 1 ed m con un prodotto infinito. $\square$

Osservazione 2.2.1. Una delle stupefacenti analogie a cui si è fatto cenno all'inizio di questo capitolo si vede confrontando la formula della Proposizione 2.2.1 con quella del Teorema 1.2.1: osserviamo che le due formule sono uguali a meno di un esponente.

La successiva sezione - che sfrutta l'identità appena provata per individuare la formula ricorsiva a cui si è accennato sopra - rappresenta una divagazione rispetto al percorso che conduce verso le prove dei Teoremi 1.2.1-1.4.1, ma si è deciso di riportarla poiché ci permette di vedere gli strumenti finora introdotti - e che imbracceremo in seguito per i nostri obbiettivi - all'opera nella risoluzione di un problema analogo a quello delle partizioni piane.

2.3 Formula Ricorsiva

Partiamo dalla seguente osservazione: sviluppando il reciproco della funzione generatrice si ottiene il polinomio

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \ldots$$

e si può notare che i coefficienti sono 0, 1 e -1, e che gli esponenti

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, \ldots, n(3n-1)/2, \ldots$$

compongono una sequenza nota, quella dei *numeri pentagonali.*

Teorema 2.3.1 (Teorema dei Numeri Pentagonali di Eulero)**.** Si ha

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = 1 + \sum_{m=1}(-1)^m\left[q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right].$$

Esistono varie prove di questo Teorema, qua riportiamo quella che passa per l'Identità Tripla di Jacobi.

Teorema 2.3.2 (Identità Tripla di Jacobi)**.** Per ogni $q, x \in \mathbb{R}$ t.c. $|q| < 1$, si ha

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + xq^i)(1 - x^{-1}q^{i-1})(1 - q^i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n.$$

Dimostrazione. Siano $q, x \in \mathbb{R}$ t. c. $|q| < 1$, vogliamo far vedere

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + xq^i)(1 - x^{-1}q^{i-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n. \tag{2.1}$$

Poniamo

$$f(x) := \prod_{i=1}^{\infty}(1 + xq^i)(1 - x^{-1}q^{i-1})$$

e chiamiamo $a_n := a_n(q)$ i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di f, i quali sono polinomi in q. Si ha quindi $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ dove $a_n = a_n(q)$. Si osserva

$$\begin{aligned}
f(xq) &= \prod_{i=1}^{\infty}(1 + xq^{i+1})(1 - x^{-1}q^{i-2}) \\
&= (1 + xq^2)(1 + xq^3) \cdots \times (1 + x^{-1}q^{-1})(1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q) \cdots \\
&= \frac{1 + x^{-1}q^{-1}}{1 + xq} \times (1 + xq)(1 + xq^2) \cdots \times (1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q) \cdots \\
&= x^{-1}q^{-1} f(x).
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo nello sviluppo in serie si ottiene l'identità

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n q^n = f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{n-1} q^{-1}.$$

Ma allora per $n \geq 0$, $a_n q^n = a_{n+1} q^{-1} \Rightarrow a_{n+1} = q^{n+1} a_n$, da cui si ricava

$$\begin{aligned}
a_1 &= qa_0, \\
a_2 &= q^2 a_1 = q^3 a_0, \\
&\ldots,
\end{aligned}$$

$$a_n = q^n a_{n-1} = q^{n+(n-1)+\cdots+1} a_0 = q^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0$$
$$\dots$$

Analogamente per $n < 0$, $a_{n-1}q^{n-1} = a_n q^{-1} \Rightarrow a_{n-1} = q^{-n} a_n$ da cui

$$\begin{aligned}
&a_{-1} = a_0,\\
&a_{-2} = q a_1 = q a_0,\\
&\dots\\
&a_n = q^{n-1} a_{n+1} = q^{(n-1)+\cdots+1} a_0 = q^{\frac{(-n)(-n+1)}{2}} a_0\\
&\dots
\end{aligned}$$

Abbiamo scritto tutti i coefficienti come una funzione di n moltiplicata per a_0, quindi si può riscrivere la serie di Laurent di f come

$$f(x) = a_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n, \tag{2.2}$$

per cui ci rimane da trovare il valore di a_0. Consideriamo ancora il prodotto

$$(1 + xq)(1 + xq^2)(1 + xq^3)\cdots \times (1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q)(1 + x^{-1}q^2)\cdots$$

Si ha che a_0 è la somma di tutti quei termini in cui la x si cancella, cioè quelli che si ottengono come somma di termini del tipo q^m, i quali si ottengono dal precedente prodotto moltiplicando un certo numero di xq^i per un egual numero di $x^{-1}q^j$, da cui risulta

$$a_0(q) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m.$$

con b_m il numero di modi in cui si può rappresentare l'intero m come somma di elementi distinti di $\{1,\ 2,\ 3,\dots\}$ più un egual numero di elementi distinti di $\{0,\ 1,\ 2,\dots\}$; ma per il Lemma 2.1.1 b_m è proprio il numero delle partizioni di m, allora a_0 è la funzione generatrice delle partizioni di interi, cioè per la Proposizione 2.2.1

$$a_0(q) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j};$$

quindi sostituendo questa espressione in (2.2) si ottiene proprio (2.1). $\square$

Il Teorema 2.3.1 dei Numeri Pentagonali di Eulero segue ora in modo pressoché immediato.

Dimostrazione. Si sostituisce q con q^3 nell'identità tripla di Jacobi

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + xq^3 i)(1 - x^{-1}q^{-3-3i})(1 - q^{3i}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{3n^2+3n}{2}} x^n.$$

Si pone $x := -q^{-1}$

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + q^{3i-1})(1 - q^{-3i-2})(1 - q^{3i}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

Notiamo che il prodotto a sinistra si può riscrivere come $\prod_{i=1}^{\infty}(1 - q^i)$. Inoltre per $m \geq 1$ la somma dei coefficienti m-esimo e $(-m)$-esimo della serie è

$$(-1)^{-m} q^{\frac{3(-m)^2-m}{2}} + (-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}} = (-1)^m \left[q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right].$$

Allora, liberandoci degli indici negativi, la serie a destra dell'uguale diventa

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \left[q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right],$$

e l'identità è provata. $\square$

Possiamo quindi concludere con la formula ricorsiva.

Proposizione 2.3.1. Sia t un intero non negativo; il numero di partizioni di t è

$$p(t) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1} \left[p\left(t - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(t - \frac{m(3m+1)}{2}\right)\right].$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.2.1 e il Teorema 2.3.1 si ha:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \left[q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right]\right) = 1, \tag{2.3}$$

poiché i due fattori sono uno il reciproco dell'altro. Chiamiamo $a_n,\ b_m$ i coefficienti delle due serie formali rispettivamente, e ricordiamo che il prodotto di due serie formali si definisce come $\sum_{t=0}^{\infty} c_t q^t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$ con il coefficiente $c_t = \sum_{j=0}^{t} a_{t-j} b_j$. Da cui

$$c_t = p(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[p\left(t - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(t - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right].$$

Ma da (2.3) segue che $c_t = 0$ per ogni $t > 0$ quindi portando la sommatoria all'altro membro

$$p(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[p\left(t - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(t - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right],$$

cioè la tesi. □

Abbiamo trovato una formula efficiente con cui ricavare il t-esimo numero della sequenza dai precedenti. Essendo arrivati ad enumerare fino a $p(6)$ possiamo procedere con le successive istanze

$$\begin{aligned} p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) \\ &= 11 + 7 - 2 - 1 = 15 \\ p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) \\ &= 15 + 11 - 3 - 1 = 22 \\ p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) \\ &= 22 + 15 - 5 - 2 = 30 \\ &\dots \end{aligned}$$

Capitolo 3

Determinanti

In questo capitolo si introducono alcuni concetti e strumenti algebrici - sulle permutazioni e sui determinanti - che ci saranno utili nella dimostrazione del Teorema 1.4.1.

3.1 Definizioni

Richiami sulle Permutazioni Ricordiamo che una *permutazione* di un insieme è una funzione biunivoca da tale insieme in sé stesso.

Definizione 3.1.1. Si definisce gruppo delle permutazioni, e si indica con S_n, l'insieme delle permutazioni su $\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ dotato dell'operazione di composizione.

Inoltre chiamiamo trasposizione una permutazione che scambia due elementi mantenendo fissi tutti gli altri, in simboli

Definizione 3.1.2. Sia $\tau \in S_n$, τ è detta trasposizione se $\exists i, j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ con $i \neq j$ t. c. $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ per ogni $k \neq i, j$.
In particolare τ è detta trasposizione semplice se i, j sono elementi contigui.

Si definisce inoltre

Definizione 3.1.3. Sia $\sigma \in S_n$, e sia (i, j) una coppia di numeri t.c. $1 \leq i < j \leq n$. (i, j) è detta inversione per σ se $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Il numero di inversioni di σ si indica con $\mathcal{I}(\sigma)$.

Si dimostra che ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si può scrivere come composizione di un numero finito di trasposizioni semplici. In particolare, data $\sigma \in S_n$, si può provare che il numero di inversioni di σ è pari al minimo numero di trasposizioni semplici necessarie per ottenere l'identità a partire da σ.

Funzioni Simmetriche e Alternanti Avendo richiamato le permutazioni possiamo ora introdurre due definizioni con cui lavoreremo nella sezione successiva.

Definizione 3.1.4. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Diciamo che f è simmetrica se è invariante rispetto alla permutazione dei suoi argomenti, cioè se per ogni $\sigma \in S_n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Esempio. Sia $f(x, y, z) := xyz + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$; si tratta di una funzione polinomiale simmetrica poiché $f(x, y, z) = f(z, x, y) = \ldots$

Definizione 3.1.5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Diciamo che f è alternante se scambiando due argomenti f cambia di segno, cioè se per ogni trasposizione $\tau \in S_n$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)}).$$

Osservazione 3.1.1. Sia $\sigma \in S_n$, se f è alternante allora

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

3.2 Determinante di Vandermonde

Il determinante di una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si definisce con una somma sull'insieme delle permutazioni di n elementi come

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Consideriamo un caso particolare, quello della *matrice di Vandermonde*: applicando la definizione il suo determinante risulta

$$\det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{n-i}$$

Osservazione 3.2.1. La funzione $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \det \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^n$ è alternante, infatti notiamo che scambiare due argomenti equivale a scambiare due righe della matrice, quindi la funzione cambia di segno per le proprietà del determinante.

Vogliamo provare la seguente identità, di cui poi daremo una versione estesa nella sezione successiva.

Proposizione 3.2.1. Si ha

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^{n-i} = \det \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$

dove quello a destra è detto *prodotto di Vandermonde.*

Per la dimostrazione si sfrutta l'alternanza del determinante di Vandermonde e la seguente proprietà.

Lemma 3.2.1. Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione polinomiale alternante di grado d, allora

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} \tag{3.1}$$

è una funzione polinomiale e simmetrica di grado $d - \frac{n(n-1)}{2}$

Dimostrazione. Le funzioni al numeratore e al denominatore sono alternanti nelle stesse variabili, quindi il loro rapporto è una funzione simmetrica. Inoltre, è facile verificare che il grado del denominatore sia $n(n-1)/2$, mentre quello del numeratore è d per ipotesi; allora se la funzione (3.1) è ancora un polinomio, il suo grado sarà proprio $d - \frac{n(n-1)}{2}$. Perciò, l'unico fatto che dobbiamo provare è che la funzione (3.1) sia polinomiale.

Si consideri $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ come polinomio in x_1 con $x_2, x_3, \ldots, x_n$ fissate. Notiamo che sostituendo x_1 con x_2 e invertendo le prime due variabili, per l'alternanza otteniamo

$$f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_2, x_2, \ldots, x_n),$$

perciò $f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Lo stesso ragionamento vale per le variabili successive, quindi abbiamo provato che $x_2, x_3, \ldots, x_n$ sono radici del polinomio. Ma allora $(x_1 - x_j) | f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ per ogni $j = 2, 3, \ldots, n$ e quindi, poiché l'anello dei polinomi è un dominio a fattorizzazione unica, f si può riscrivere come

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{j=2}^{n} (x_1 - x_j) \tag{3.2}$$

con g funzione polinomiale. Concludiamo per induzione sul numero di variabili:

- Per $n = 2$ è banale poiché
$$g(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1 - x_2}$$
e abbiamo detto che g è polinomiale.

- Supponiamo che la proprietà sia verificata per $n - 1$ variabili. Si osserva che $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è alternante nelle ultime $n - 1$ variabili (per l'equazione (3.2)), quindi per ipotesi induttiva la funzione
$$(x_2, x_3, \ldots, x_n) \mapsto \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$
è polinomiale e simmetrica; inoltre, al denominatore non compare x_1, quindi è ancora polinomiale in tale variabile. Allora sostituendo l'espressione (3.2) nella funzione (3.1) si ottiene
$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} = \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)},$$
che è un polinomio nelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

□

Possiamo quindi provare l'identità di Vandermonde.

Dimostrazione. (della Proposizione 3.2.1)
E' evidente che la funzione

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \det \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^n$$

sia polinomiale di grado $n(n-1)/2$ e alternante per quanto visto nell'Osservazione 3.2.1. Allora per il Lemma 3.2.1 esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ (equivalentemente, un polinomio di grado zero), t.c.

$$\frac{\det \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^n}{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)} = C \Rightarrow \det \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1}^n = C \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Si prova facilmente che C vale 1 confrontando i coefficienti del termine $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$ da entrambe le parti dell'uguale. □

3.3 Formula di Krattenthaler

Si estende l'identità di Vandermonde con la seguente formula, strumento chiave nella prova del Teorema 1.4.1.

Teorema 3.3.1 (Formula di Krattenthaler)**.** Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $a_2, \ldots, a_n$, $b_2, \ldots, b_n$ reali; allora

$$\det \left((x_i + a_n) \cdots (x_i + a_{j+1})(x_i + b_j) \cdots (x_i + b_2)\right)_{i,j=1}^n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (b_i - a_j).$$

Dimostrazione. Il determinante a sinistra dell'uguale è una funzione alternante nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per considerazioni analoghe a quelle dell'Osservazione 3.2.1, quindi per il Lemma 3.2.1 è uguale ad un polinomio simmetrico $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ moltiplicato per il prodotto di Vandermonde. Notiamo che il determinante, una volta sviluppato, ha grado $n-1$ nella variabile x_1, ma anche il prodotto di Vandermonde ha grado $n-1$ nella stessa variabile quindi, ancora per il Lemma, h è costante in x_1. Ma h è simmetrico, quindi concludiamo che è costante in ognuna delle variabili, cioè vale identicamente C, per qualche $C \in \mathbb{R}$. Abbiamo provato

$$\det\big((x_i + a_n)\cdots(x_i + a_{j+1})(x_i + b_j)\cdots(x_i + b_2)\big)_{i,j=1}^n = C \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j),$$

dove C può dipendere dalle a_j e b_j ma non dalle x_i. Per determinare il valore di C poniamo $x_i = -a_i$ per $i = 2, \dots, n$, allora tutti i coefficienti della matrice sotto la diagonale principale si annullano, e il determinante risulta uguale al prodotto dei coefficienti sulla diagonale

$$\begin{aligned}&(x_1 + a_n)\cdots(x_1 + a_2)\\ &\qquad \times \prod_{i=2}^{n}(-a_i + a_n)\cdots(-a_i + a_{i+1})(-a_i + b_i)\cdots(-a_i + b_2) =\\ &\qquad\qquad\qquad C(x_1 + a_2)\cdots(x_1 + a_n) \times \prod_{2\le i\le j\le n}(-a_i + a_j).\end{aligned}$$

Semplificando si ottiene

$$C = \prod_{2\le i\le j\le n}(b_i - a_j),$$

quindi l'identità è provata. $\square$

Capitolo 4

Cammini su Reticoli e Polinomio di Gauss

In questo capitolo introdurremo una particolare interpretazione del coefficiente binomiale: quella dei cammini crescenti su reticoli bidimensionali; e poi additeremo il rapporto combinatorico che questi ultimi possiedono con le partizioni di interi. Infine, passando alle funzioni generatrici, generalizzeremo il coefficiente binomiale, definendo il *polinomio di Gauss* o *coefficiente q-binomiale.*

4.1 Cammini su Reticoli

Dati $n, m \in \mathbb{N}$ si definisce *coefficiente binomiale* di $n + m$ su m il numero

$$\binom{n+m}{m} := \frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

Esistono molte interpretazioni equivalenti del coefficiente binomiale - prima tra tutte il numero di sottoinsiemi di una certa cardinalità di un insieme finito -, ma quella che ci interessa in questa sede è il numero di cammini crescenti su un reticolo bidimensionale, per la sua relazione con le partizioni di interi.
Supponiamo di avere il reticolo bidimensionale $\mathbb{N}^2$, e di voler tracciare un percorso dall'origine fino ad (n, m) passando di vertice in vertice, con la condizione che ogni spostamento unitario sia verso l'alto ($\uparrow$) o verso destra ($\rightarrow$). La domanda è quella con cui siamo fami-

liari: in quanti modi si può raggiungere (n, m)? Formalmente questi oggetti si descrivono come

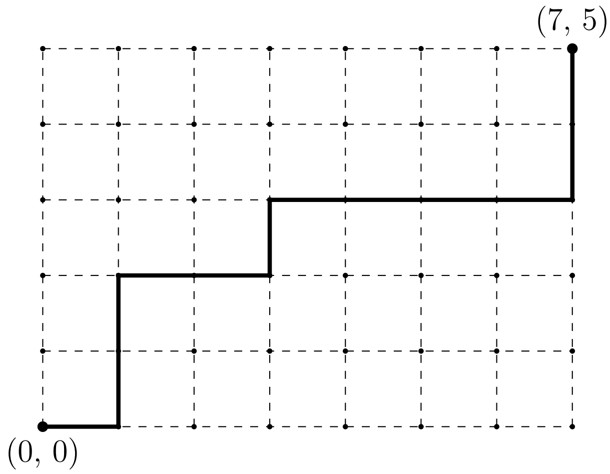
Definizione 4.1.1. Sia $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, si definisce cammino crescente da $(0, 0)$ ad (n, m) una lista di vertici

$$(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$$

tale che $a_0 = b_0 = 0$, $a_k = n$, $b_k = m$ e per ogni $i = 0, 1, \dots, k-1$ risulta

$$(a_{i+1} = a_i + 1 \wedge b_{i+1} = b_i) \vee (a_{i+1} = a_i \wedge b_{i+1} = b_i + 1).$$

Se ad esempio poniamo $n = 7, m = 5$ un cammino crescente da $(0, 0)$ a $(7, 5)$ è



Osservando l'esempio ci si accorge subito che i passi unitari sono esattamente $n + m$, e che ogni cammino si può scrivere come una sequenza binaria; ad esempio quello in figura si scrive come

$$\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$$

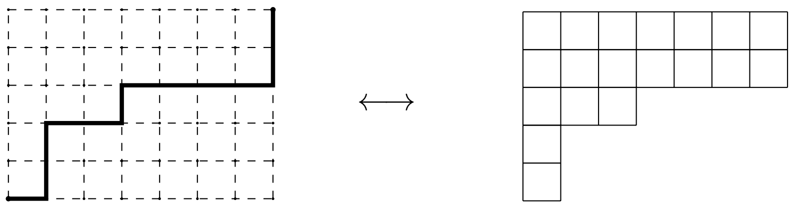
Le stringhe composte di due simboli - in questo caso $\uparrow$, $\rightarrow$ - di lunghezza $n + m$, con esattamente m di uno dei due simboli - qui abbiamo $m \uparrow$ - sono $\binom{n+m}{m}$ da cui

Proposizione 4.1.1. Il numero di cammini crescenti da $(0, 0)$ ad (n, m) è

$$\binom{n+m}{m}.$$

4.2 Cammini e Partizioni di Interi

Supponiamo che n ed m siano fissati, e consideriamo un cammino crescente da $(0,0)$ ad (n,m): osserviamo che la parte del reticolo che sta al di sopra del cammino è un diagramma di Ferrers. In particolare, il diagramma di Ferrers di una partizione di al più m parti e ciascuna parte minore o uguale ad n.



C'è quindi una corrispondenza biunivoca naturale tra i cammini crescenti da $(0,0)$ ad (n,m) e le partizioni di questo tipo. Per questo e per la Proposizione 4.1.1.

Proposizione 4.2.1. Il numero di partizioni con al più m parti e con ogni parte minore o uguale ad n è

$$\binom{n+m}{m}.$$

Questa Proposizione suggerisce una generalizzazione del coefficiente binomiale ai polinomi.

4.3 Polinomio di Gauss

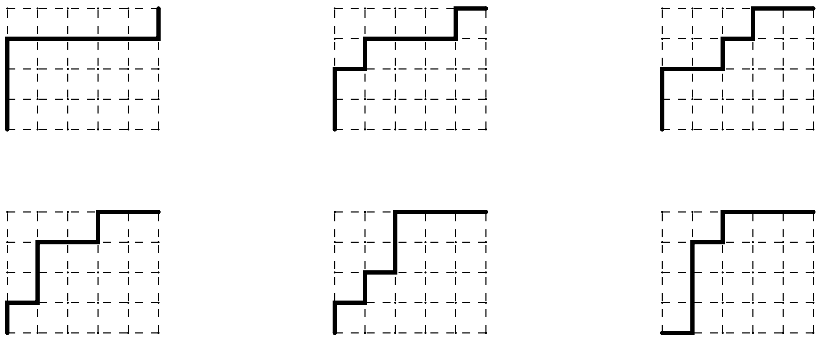
Invece di limitarci a contare le partizioni con al più m parti e con ciascuna parte minore o uguale di n (equivalentemente, i cammini da $(0,0)$ ad (n,m)), vogliamo scriverne la funzione generatrice: cioè la serie formale che ha come coefficiente del termine k-esimo il numero di partizioni dell'intero k con al più m parti e con ogni parte minore o uguale ad n. Osserviamo che l'intero più grande che può essere rappresentato con una di queste partizioni è nm, perciò la funzione generatrice sarà un polinomio di grado nm, che indichiamo con $f_{m,n}$.

Esempio. Per $n=5, m=4$ si ha

$$f_{4,5}(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 6q^5 + 8q^6 + 9q^7 + 11q^8 + 11q^9 + 12q^{10} + 11q^{11} +$$

$$+ 11q^{12} + 9q^{13} + 8q^{14} + 6q^{15} + 5q^{16} + 3q^{17} + 2q^{18} + q^{19} + q^{20}.$$

Enumeriamo per esempio i cammini crescenti da $(0, 0)$ a $(5, 4)$ che danno luogo ad una partizione



Osserviamo che non sono tutte e 7 le partizioni del numero 5 riportate nella Figura 2.1, poiché $1+1+1+1+1$ è costituita da 5 parti, e qui stiamo contando quelle costituite da al più 4 parti.

Osservazione 4.3.1. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, il polinomio $f_{m,n}$ è *palindromo*, cioè la stringa dei coefficienti, letta da sinistra verso destra o da destra verso sinistra è la stessa. Basta osservare che ogni cammino crescente da $(0, 0)$ ad (n, m) divide il reticolo in due parti: quella superiore è il diagramma di Ferrers di una partizione di un intero k compreso tra 0 e nm; l'altra - opportunamente ribaltata rispetto sia all'asse verticale che a quello orizzontale - è a sua volta il diagramma di Ferrers di una partizione, in questo caso dell'intero $|nm - k|$. Quindi le partizioni di k con al più m parti ed ogni parte minore o uguale ad n sono in corrispondenza biunivoca con le partizioni di $|nm - k|$ con al più m parti ed ogni parte minore o uguale ad n, da cui la palindromia.
Nell'esempio precedente abbiamo enumerato tutte e 6 le partizioni di 5. Si osserva che ciascuna di esse corrisponde ad una partizione di $|20 - 5| = 15$, infatti q^5 e q^{15} hanno entrambi coefficiente 6.

Il polinomio $f_{m,n}$ è detto *polinomio di Gauss* ed è una generalizzazione del coefficiente binomiale: si osserva infatti, che sostituendo $q = 1$ si ottiene

$$f_{m,n}(1) = \binom{n+m}{m}.$$

4.4 Coefficiente q-Binomiale

Il polinomio di Gauss viene chiamato anche *coefficiente q-binomiale*: lo indicheremo con la notazione

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q := f_{m,n}(q),$$

dove spesso la variabile q a pedice è sottintesa. Si introduce inoltre il simbolo

$$(q:q)_m := (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m),$$

che ci permette di mostrare una ulteriore analogia con il coefficiente binomiale.

Proposizione 4.4.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, allora

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} &= \frac{(q:q)_{m+n}}{(q:q)_m (q:q)_n} = \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m+n})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \\ &= \prod_{j=1}^{m} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j}.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Esprimiamo il coefficiente q-binomiale mediante una formula ricorsiva, che poi sfrutteremo per mostrare la tesi induttivamente.
Le partizioni in al più m parti, ciascuna delle quali minore o uguale ad n, si dividono in due sottoinsiemi disgiunti:

- Le partizioni tali che tutte le parti sono (strettamente) minori di n, la cui funzione generatrice è
$$\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix}.$$
- Le partizioni tali che la parte più grande vale esattamente n. Ognuna di tali partizioni è composta da n caselle sulla riga più in alto, e da una partizione di $m-1$ parti ciascuna delle quali minore o uguale ad n, sulle restati $m-1$. La funzione generatrice in questo caso è
$$q^n \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}.$$

Ciò prova la formula

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^n \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix},$$

che ci permette di procedere per induzione su $m+n$.

- I casi limite sono $\left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} m \\ m \end{smallmatrix}\right] = 1$.

- Supposto per $n+m-1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^n \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} = \\
&= \prod_{j=1}^{m} \frac{1-q^{n-1+j}}{1-q^j} + q^n \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j} \\
&= \frac{1-q^n}{1-q^m} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j} + q^n \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j} \\
&= \left(\frac{1-q^n}{1-q^m} + q^n \right) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j} \\
&= \prod_{j=1}^{m} \frac{1-q^{n+j}}{1-q^j}.
\end{aligned}$$

$\square$

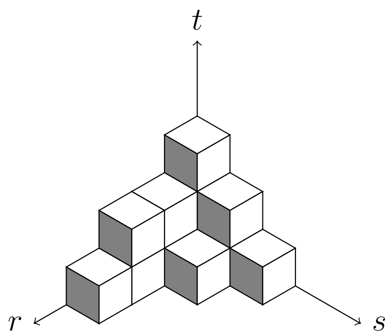
Capitolo 5

Teorema di Viennot-Gessel

A questo punto del testo chi legge si sarà accorto che un filo rosso serpeggia tra gli oggetti che abbiamo descritto; le partizioni di interi sono sequenze decrescenti di numeri, e il modo più naturale di rappresentarle è mediante schemi di tessere quadrate disposte nell'angolo di una scacchiera; a loro volta i profili delle figure così ottenute non sono altro che cammini crescenti su reticoli, con il conteggio dei quali siamo in grado di definire il coefficiente binomiale, e quindi anche il polinomio di Gauss.
In questo capitolo continueremo a seguire diligenti questo filo rosso per scoprire finalmente la relazione che le protagoniste di questo lavoro - le partizioni piane - possiedono con gli oggetti che abbiamo raccolto e con cui ora possiamo dirci familiari. Vedremo che una partizione piana può essere vista come una sequenza di partizioni di interi, e che una partizione piana limitata si può rappresentare con un gruppo di cammini affiancati su di un reticolo. Con quest'ultima costruzione ci avvicineremo alla soluzione del quesito di partenza: infatti, contando fra questi insiemi di cammini innestati, quelli privi di intersezioni, siamo in grado di esprimere il numero delle partizioni piane limitate in modo elegante con il determinante di una matrice di coefficienti binomiali - e con opportune modifiche si può fare lo stesso per la corrispondente funzione generatrice. Questo teorema, che enunceremo e proveremo nelle sue due versioni tra poche pagine, è stato provato da Viennot e Gessel nel 1985, e si basa su un lavoro di Lindström pubblicato nel 1973, e costituisce (parte di) una dimostrazione del Teorema 1.4.1 alternativa a quella di MacMahon del 1912.

5.1 Partizioni Piane e Partizioni di Interi

Dato un diagramma di Ferrers è immediato trovare la corrispondente partizione: si compone una sequenza con tanti interi quante sono le righe del diagramma, il cui j-esimo intero è il numero di caselle della j-esima riga.
Un procedimento analogo ci permette di rappresentare una partizione piana mediante un vettore bidimensionale di interi: si consideri la configurazione di cubi disposti nel reticolo $(O; r, s, t)$, si compone una tabella con tanti interi quante sono le pile di cubi della partizione piana, in cui l'intero che sta sull'intersezione della i-esima riga con la j-esima colonna è il numero di cubi della pila che poggia sulla posizione (i, j) del piano.



$$\begin{array}{c|ccc} & & s \rightarrow & \\ \hline & 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 & \\ r \downarrow & 2 & & \\ & 1 & & \end{array}$$

Figura 5.1: La figura accosta le due rappresentazioni di una partizione piana con 12 cubi.

Ci si accorge subito che la lunghezza delle sequenze di numeri è decrescente dall'alto verso il basso, cioè gli interi sono disposti come le caselle di un diagramma di Ferrers. Inoltre, dalla condizione per la quale i cubi devono essere ordinatamente "spinti contro l'angolo della stanza" è intuitivo constatare che "partendo" dal culmine di una pila e "muovendo un passo" nelle direzioni r o s, o si "rimane alla stessa altezza" o si "scende" di qualche unità (cioè le pile contigue hanno un numero minore o uguale di cubi). Questa osservazione si traduce con la condizione che le sequenze di interi, lungo ogni riga e lungo ogni colonna devono essere *decrescenti*.
A questo punto dell'elaborato al lettore non sarà sfuggito che ogni riga è la partizione di un intero, da cui quanto accennato all'inizio del capitolo: ogni partizione piana corrisponde ad una sequenza di partizioni di interi con la condizione che $(\#)$ *la j-esima parte*

dell'i-esima partizione è minore o uguale alla j-esima parte della $(i-1)$-esima partizione Possiamo quindi dare una definizione alternativa di partizione piana.

Definizione 5.1.1. Sia $n \in \mathbb{N}$, si definisce partizione piana di n un vettore bidimensionale

$$\begin{array}{cccccc} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_{1,r_1} \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \cdots & \cdots & \pi_{2,r_2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & \\ \pi_{k,1} & \pi_{k,2} & \cdots & \pi_{k,r_k} & & \end{array}$$

Con $k \in \mathbb{N}$, $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k$, tale che

- $\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}, \quad \pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}, \forall i, j,$
- $n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \pi_{i,j}$.

E' da questa definizione che si origina il nome partizione *piana*: infatti si tratta di un modo di rappresentare un intero come somma di un numero finito di interi disposti su un piano.

Osservazione 5.1.1. La somiglianza tra la Definizione 5.1.1, di partizione piana, e la Definizione 2.0.1, di partizione di intero, infittisce la rete di analogie tra questi oggetti: avremmo potuto scegliere di definire le partizioni piane in quest'ultimo modo, considerando le configurazioni di cubi come mere rappresentazioni grafiche; così facendo, avremmo stabilito una perfetta simmetria concettuale con le partizioni di interi e i corrispondenti diagrammi di Ferrers.

5.2 Partizioni Piane Limitate e Cammini

Parliamo ora di partizioni piane limitate: si consideri una partizione piana contenuta nel parallelepipedo $\mathcal{B}(r, s, t)$, allora il corrispondente vettore bidimensionale avrà al più r righe e al più s colonne e ogni elemento del vettore, essendo un intero che misura l'altezza di una pila, sarà minore o uguale a t. Perciò il vettore è una sequenza di r partizioni di interi, in cui ogni partizione è costituita da al più s parti, con ogni parte minore o uguale a t.

Ma per quanto visto nel capitolo precedente, una partizione di al più s parti con ogni parte minore o uguale a t può essere rappresentata con un cammino crescente su di un reticolo $t \times s$, perciò ciascuna riga della tabella corrisponde ad un cammino.
Ora, se le partizioni fossero indipendenti l'una dall'altra lo sarebbero anche i cammini, e avremmo già trovato la funzione generatrice delle partizioni piane vincolate - in tal caso sarebbe il prodotto delle r funzioni generatrici dei cammini da $(0,0)$ a (t,s), cioè

$$\begin{bmatrix} s+t \\ s \end{bmatrix}^r .$$

Ma le righe sono legate dalla condizione ($\#$) che ci impone la monotonia lungo le colonne, perciò il problema è lungi dall'essere risolto.
Per avviarci verso il Teorema di Viennot-Gessel, e quindi la soluzione, introduciamo una ulteriore rappresentazione delle partizioni piane, in particolare di quelle limitate.
Fissati i tre interi r, s e t si definisce *tupla di cammini innestati* un insieme di r cammini sul reticolo $\mathbb{N}^2$ tali che un cammino parte da uno dei vertici $(-r+j, r-j)$ per $1 \le j \le r$ e si conclude in uno dei vertici $(t-r+i, s+r-i)$ per $1 \le i \le r$, con la condizione che nessuna coppia di cammini parta dallo stesso vertice o giunga nello stesso vertice.

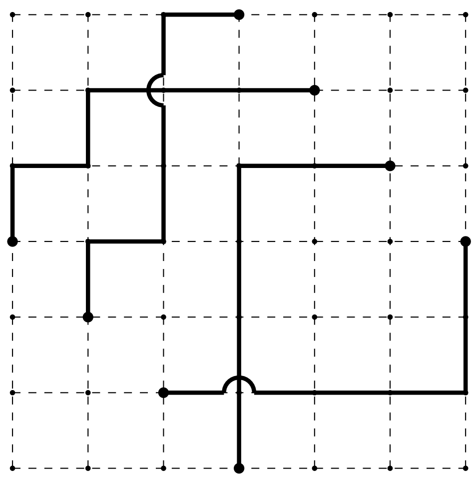
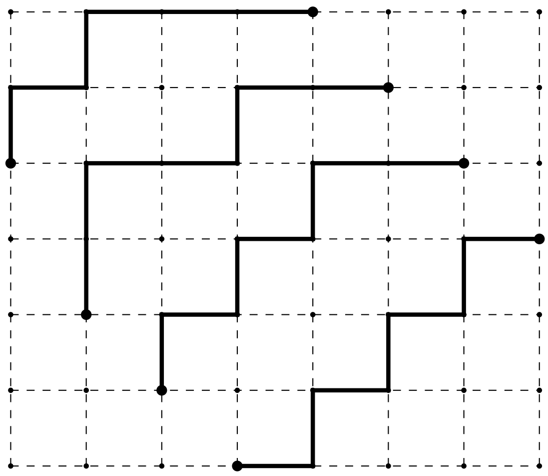


Figura 5.2: Un esempio di tupla di cammini innestati

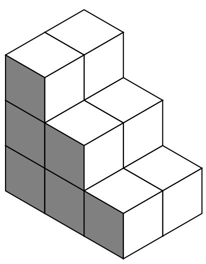
In che modo si rappresenta una partizione piana limitata con una tupla di cammini innestati? Sia una partizione piana limitata scritta come vettore bidimensionale con le righe numerate da 1 ad r, per ogni riga tracciamo il cammino corrispondente: il primo

va da $(0,0)$ a (t,s), il secondo va da $(-1,1)$ a $(t-1,s+1)$, $\ldots$, l'i-esimo che va da $(-(i-1),i-1)$ a $(t-(i-1),s+(i-1))$, e così via fino a l'r-esimo.
Di seguito diamo la rappresentazione della partizione piana nella Figura 5.1 come tupla di cammini innestati, supponendo sia contenuta nel parallelepipedo $\mathcal{B}(4,3,4)$.

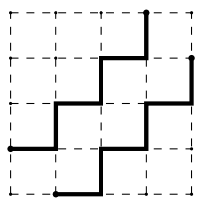


Ovviamente non tutte le tuple corrispondono ad una partizione piana.

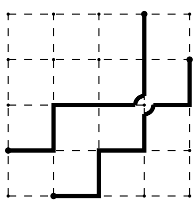
Esempio. Si consideri la seguente partizione piana, rappresentata in tutti e tre i modi



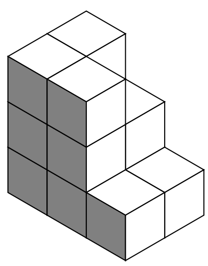
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$



Basta modificare di poco i cammini in modo che si tocchino (come in figura), e già la matrice che si ottiene non soddisfa la condizione (#) e nella configurazione dei cubi corrispondente compaiono degli spazi vuoti.



$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$



Questo esempio illustra

Proposizione 5.2.1. Dati tre interi r, s, t, c'è una corrispondenza biunivoca tra le tuple di r cammini innestati prive di intersezioni e le partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r, s, t)$.

Quindi le tuple di cammini innestati che corrispondono ad una partizione piana sono tutte e sole quelle in cui gli r cammini non si intersecano. Nella sezione successiva conteremo questi cammini.

5.3 Tuple Senza Intersezioni

Alla luce della corrispondenza descritta nella sezione precedente, è nostro obbiettivo individuare la funzione generatrice delle tuple di cammini innestati prive di intersezioni. In primo luogo, nella presente sezione, affronteremo il problema più semplice di trovarne il numero; ci serviremo di un argomento di inclusione-esclusione con una somma sull'insieme delle permutazioni. Lo stesso ragionamento, con pochi adattamenti, ci permetterà, nella sezione successiva, di concludere con la funzione generatrice.

Abbiamo già dato la definizione di tupla di cammini innestati; ora, fissate le dimensioni r, s e t vediamo come associare una permutazione $\sigma \in S_r$ ad una tupla.
Chiamiamo cammino i-esimo quello che arriva in $(t-r+i, s+r-i)$, e punto di partenza j-esimo il vertice $(-r+j, r-j)$. Se il cammino i-esimo della tupla parte dal j-esimo punto di partenza allora si pone $\sigma(i) := j$. La permutazione σ così ottenuta si dice *indotta* dalla tupla.
Per esempio la tupla nella Figura 5.2 induce la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si osserva che più tuple inducono la stessa permutazione, ci chiediamo quante siano. Se $\sigma \in S_r$ fissata, e Γ una tupla che induce σ. Sia $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, allora per la definizione di permutazione indotta, il cammino i-esimo di Γ (cioè quello che si conclude in $(t-r+i, s+r-i)$) parte dal $\sigma(i)$-esimo punto di partenza (cioè da $(-r+\sigma(i), r-\sigma(i))$), si osserva quindi che compie

$$(t - r + i) - (-r + \sigma(i)) = t + i - \sigma(i) \text{ passi verso est}$$
$$(s + r + i) - (r - \sigma(i)) = s - i + \sigma(i) \text{ passi verso nord}$$

Quindi il cammino i-esimo di Γ si può scegliere in

$$\binom{t+s}{s-i+\sigma(i)}$$

modi, da cui esistono

$$\prod_{i=1}^{r} \binom{t+s}{s-i+\sigma(i)}$$

scelte possibili per Γ, avendo fissato σ.

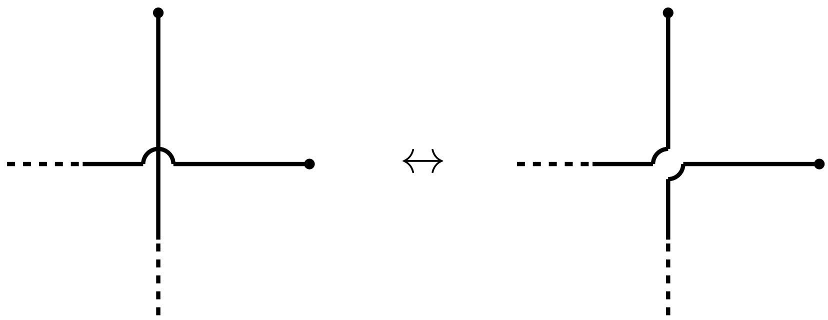
Teorema 5.3.1 (Teorema di Viennot-Gessel, Prima Versione)**.** Dati tre interi positivi r, s, t, il numero di tuple di cammini innestati prive di intersezioni è

$$\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} \binom{t+s}{s-i+\sigma(i)} = \det \left(\binom{t+s}{s-i+j} \right)_{i,j=1}^{r}.$$

Dimostrazione. Fissate le dimensioni r, s, t, chiamiamo $\mathcal{T}(r, s, t)$ l'insieme delle tuple di cammini innestati, e per ogni tupla $\Gamma \in \mathcal{T}(r, s, t)$ indichiamo con σ_Γ la permutazione indotta da Γ.
Il determinante dell'enunciato si ottiene sommando 1 per ogni tupla $\Gamma \in \mathcal{T}(r, s, t)$, con segno positivo se il numero di inversioni di σ_Γ è pari, con segno negativo altrimenti, cioè

$$\det \left(\binom{t+s}{s-i+j} \right)_{i,j=1}^{r} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}(r,s,t)} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma_\Gamma)}.$$

Notiamo che le tuple prive di intersezioni inducono la permutazione identità, e quindi vengono contate con segno positivo. Vogliamo far vedere che, nella sommatoria, gli 1 e -1 relativi a tutte le altre tuple - cioè quelle che hanno almeno una intersezione - si elidono, e quindi che ciò che rimane è proprio il numero di tuple prive di intersezioni.
Sia $\Gamma \in \mathcal{T}(r, s, t)$ una tupla con almeno una intersezione. Si consideri, tra tutte le intersezioni di Γ, quella più a destra, e se ce n'è più di una sulla stessa colonna, quella più in alto. Invertiamo le connessioni in corrispondenza di tale intersezione, come in figura



e chiamiamo $\overline{\Gamma}$ la tupla risultante. Osserviamo che $\sigma_{\overline{\Gamma}}$ è uguale a σ_Γ a meno di una trasposizione semplice, quindi le due permutazioni indotte hanno segno opposto.
Si osserva inoltre che $\overline{\overline{\Gamma}} = \Gamma$, quindi la coppia di tuple $\Gamma, \overline{\Gamma}$ è ben definita, ed è tale che i relativi termini nella sommatoria si elidono, cioè

$$(-1)^{\mathcal{I}(\sigma_\Gamma)} + (-1)^{\mathcal{I}(\sigma_{\overline{\Gamma}})} = (-1)^{\mathcal{I}(\sigma_\Gamma)} - (-1)^{\mathcal{I}(\sigma_\Gamma)} = 0.$$

Questo vale per ogni tupla Γ con almeno una intersezione, perciò sviluppando il determinante tutto si annulla a parte gli 1 relativi alle tuple senza intersezione, da cui il numero cercato. □

Per la corrispondenza biunivoca tra tuple di cammini prive di intersezioni e partizioni piane limitate, segue immediatamente

Corollario 5.3.1. Dati tre interi positivi r, s, t, il numero di partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r, s, t)$ è

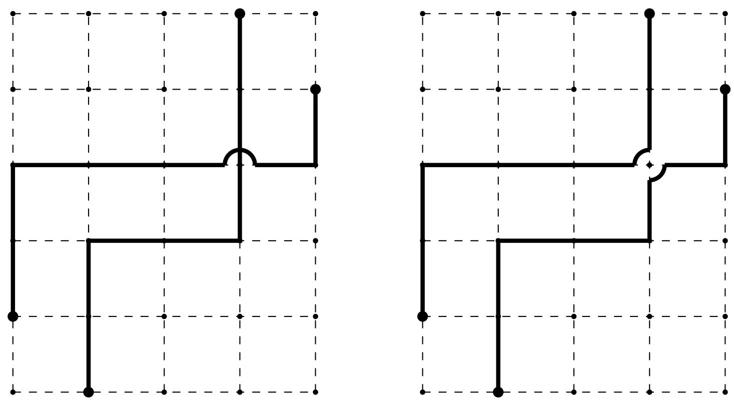
$$\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} \binom{t+s}{s-i+\sigma(i)} = \det\left(\binom{t+s}{s-i+j}\right)_{i,j=1}^{r}.$$

5.4 Funzione Generatrice

Nella presente sezione si vuole passare dal numero di tuple di cammini innestati prive di intersezione alla corrispondente funzione generatrice, in modo concettualmente analogo a quanto abbiamo fatto nel passaggio dal coefficiente binomiale al coefficiente q-binomiale. Un approccio rudimentale a questo problema potrebbe consistere nello scrivere la formula del Teorema 5.3.1 sostituendo il coefficiente binomiale con il coefficiente q-binomiale. Ci si potrebbe aspettare che accada qualcosa di simile a quanto visto nella precedente

dimostrazione: valutando il determinante tutti i termini relativi alle tuple con qualche intersezione si elidono, e ciò che rimane è il polinomio che si ottiene dalla somma dei termini relativi alle tuple senza intersezioni.
Sempre seguendo questo approccio, il determinante in questione si otterrebbe sommando q^k per ogni tupla di cammini innestati, con segno positivo se il numero di inversioni della permutazione indotta dalla tupla è pari, con segno negativo altrimenti, dove k è l'intero partizionato dalla tupla.
Ma arrivati a questo punto ci si accorge che l'approccio finora discusso è fallimentare: infatti non si può applicare ciecamente il ragionamento della dimostrazione precedente, poiché l'operazione che abbiamo definito sulle tuple provviste di intersezioni (che abbiamo indicato con $\bar{\cdot}$), non lascia invariato il totale partizionato dalla tupla.

Esempio. Consideriamo la seguente coppia di tuple, che si ottengono l'una dall'altra scambiando le code.



Si osserva che i totali partizionati sono rispettivamente 10 e 11, perciò i relativi termini del polinomio - sempre riferendoci all'approccio *naive* di cui sopra - non si elidono, cioè $q^{11} - q^{10} \neq 0$.

Quindi per fare in modo che la dimostrazione del teorema precedente sia valida anche per le funzioni generatrici, si deve adattare l'enunciato del Teorema di Viennot-Gessel in modo tale che, nel polinomio che si ottiene dallo sviluppo del determinante, l'esponente a cui è elevata la q del termine relativo ad una tupla sia invariante rispetto all'operazione dello scambio di code.
Si utilizzano le notazioni della dimostrazione del Teorema 5.3.1, inoltre per ogni $\Gamma \in \mathcal{T}(r, s, t)$, indichiamo con k_Γ l'intero partizionato da Γ.

Sia $\Gamma \in \mathcal{T}(r,s,t)$ una tupla dotata di intersezioni: tra queste, si consideri quella più a destra, e se sulla stessa colonna ci sono più intersezioni, quella più in alto. Si osserva che i due cammini coinvolti nell'intersezione sono sempre consecutivi, possiamo indicarli con i e $i+1$. Si distinguono due casi in base alla permutazione σ:

- Se $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ allora dallo scambio il totale aumenta di $\sigma(i) - \sigma(i+1)$
- Se $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ allora dallo scambio il totale aumenta di $\sigma(i+1) - \sigma(i)$

Allora l'intero partizionato è

$$k_{\overline{\Gamma}} = k_\Gamma + (\sigma(i) - \sigma(i+1)).$$

Definiamo quindi, per ogni $\sigma \in S_r$, la quantità complementare

$$f(\sigma) := \sum_{i=1}^{r} i(i - \sigma(i)).$$

Sia $\sigma \in S_r$ fissata, definiamo $\overline{\sigma}$ la permutazione che si ottiene da σ invertendo $\sigma(i)$ e $\sigma(i+1)$, si ha

$$f(\overline{\sigma}) = f(\sigma) - (\sigma(i) - \sigma(i+1))$$

Osservazione 5.4.1. Sia $\Psi \in \mathcal{T}(r,s,t)$ priva di intersezioni, allora σ_Ψ è la permutazione identità, e quindi $f(\sigma_\Psi) = \sum_{i=1}^{r} i(i-i) = 0$.

Allora per ogni $\Gamma \in \mathcal{T}(r,s,t)$ la quantità

$$k_\Gamma + f(\sigma_\Gamma) \tag{5.1}$$

è invariante rispetto all'operazione di scambio delle code.

Teorema 5.4.1 (Teorema di Viennot-Gessel, Funzione Generatrice)**.** Dati tre interi positivi r, s, t, la funzione generatrice delle tuple di cammini innestati prive di intersezioni è

$$\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} q^{i(i-\sigma(i))} \begin{bmatrix} t+s \\ s-i+\sigma(i) \end{bmatrix} = \det \left(q^{i(i-j)} \begin{bmatrix} t+s \\ s-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^{r}.$$

Il determinante dell'enunciato si ottiene sommando q elevato alla quantità (5.1) per ogni tupla $\Gamma \in \mathcal{T}(r,s,t)$, con segno positivo se il numero di inversioni di σ_Γ è pari, con segno negativo altrimenti, cioè

$$\det\left(q^{i(i-j)}\begin{bmatrix} t+s \\ s-i+j \end{bmatrix}\right)_{i,j=1}^{r} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}(r,s,t)} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma_\Gamma)} q^{k_\Gamma + f(\sigma_\Gamma)}.$$

Poiché abbiamo definito l'esponente in modo tale che risulti invariante rispetto all'operazione di scambio di code, il Teorema 5.4.1 si dimostra in modo identico al Teorema 5.3.1, per tutte le considerazioni precedenti.
Vale la pena soffermarci su un aspetto: una volta sviluppato il determinante, non rimane traccia delle quantità complementari che abbiamo aggiunto agli esponenti per far funzionare la dimostrazione, infatti nella somma tutto si elide esclusi i termini relativi alle tuple prive di intersezione, che hanno come esponente proprio l'intero partizionato dalla tupla (per l'Osservazione 5.4.1). Allora nella funzione che risulta dallo sviluppo del determinante, il coefficiente del termine q^k conta il numero di tuple di $\mathcal{T}(r,s,t)$ che partizionano k.
Analogamente a prima, per la corrispondenza tra tuple di cammini innestati prive di intersezioni e partizioni piane limitate, concludiamo.

Corollario 5.4.1. Dati tre interi positivi r, s, t, la funzione generatrice delle partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r,s,t)$ è

$$\sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} q^{i(i-\sigma(i))} \begin{bmatrix} t+s \\ s-i+\sigma(i) \end{bmatrix} = \det\left(q^{i(i-j)}\begin{bmatrix} t+s \\ s-i+j \end{bmatrix}\right)_{i,j=1}^{r}.$$

Capitolo 6

Conclusioni

In questo capitolo giungiamo alla meta del nostro breve percorso: completeremo le dimostrazioni dei tre Teoremi enunciati nell'Introduzione. Il primo di cui daremo la prova è il Teorema 1.4.1, che ci fornisce un'espressione per la funzione generatrice delle partizioni piane limitate, ed è da considerarsi centrale per gli scopi di questo elaborato; infatti - come già anticipato nell'Introduzione - il Teorema 1.2.1 segue da questo con il semplice calcolo di un limite, e il Teorema 1.3.1, a sua volta, si ricava dal Teorema 1.2.1 con pochi passaggi algebrici.

6.1 Funzione Generatrice Partizioni Piane Limitate

La nostra prova del Teorema 1.4.1 si compone in parte di argomenti combinatorici e in parte di argomenti algebrici: i primi li abbiamo già affrontati nel capitolo precedente provando il Teorema di Viennot-Gessel; con i secondi - in questa sezione - arriveremo a valutare il determinante della matrice di coefficienti q-binomiali a cui siamo giunti nel Corollario 5.4.1.

Teorema 1.4.1. Dati tre interi r, s, t, la funzione generatrice per le partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r, s, t)$ è

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\frac{1-q^{i+j+s-1}}{1-q^{i+j-1}}.$$

Forniamo i seguenti Lemmi di supporto.

Lemma 6.1.1. Dati tre interi r, s, t vale la seguente identità

$$\begin{aligned}(-1)^{r(r-1)/2} q^{\sum_{i=1}^{r} t(i-1)-2i(r-i)} \\ \times \prod_{1\le i<j\le r}(q^i - q^j) \prod_{2\le i\le j\le r}(-q^{-t+i-1} + q^{s+j}) = \\ \prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{j-i}) \prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i}).\end{aligned} \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo

$$\prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{j-i}) = \underbrace{\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=i+1}^{r} q^{-i}}_{(\star)} \prod_{1\le i<j\le r}(q^i - q^j)$$

$$\prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i}) = \underbrace{\prod_{i=2}^{r}\prod_{j=i}^{r} -q^{t-i+1}}_{(\#)} \prod_{2\le i\le j\le r}(-q^{-t+i-1} + q^{s+j}).$$

Inoltre abbiamo

$$(\star) = \prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=i+1}^{r} q^{-i} = \prod_{i=1}^{r} q^{-i(r-i)}$$

$$(\#) = \prod_{i=2}^{r}\prod_{j=i}^{r} -q^{t-i+1} = \prod_{i=2}^{r}(-q)^{(t-i+1)(r-i+1)} = (-1)^{r(r-1)/2}\prod_{i=1}^{r} q^{t(i-1)-i(r-i)}$$

Quindi

$$\prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{j-i}) \prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i}) =$$

$$= (-1)^{r(r-1)/2}\prod_{i=1}^{r} q^{t(i-1)-2i(r-i)} \prod_{1\le i<j\le r}(q^i - q^j) \prod_{2\le i\le j\le r}(-q^{-t+i-1} + q^{s+j}).$$

□

Lemma 6.1.2. Dati tre interi r, s, t vale la seguente identità

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(q:q)_{t+i-1}} \prod_{1\leq i<j\leq r} (1-q^{j-i}) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q^{i+j-1}}. \tag{6.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo

$$\prod_{1\leq i<j\leq r} (1-q^{j-i}) = \prod_{i=1}^{r-1}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{r-i}) = \prod_{i=1}^{r}(q:q)_{i-1},$$

dove si è posto $(q:q)_0 := 1$. Allora

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(q:q)_{t+i-1}} \prod_{1\leq i<j\leq r} (1-q^{j-i}) &= \prod_{i=1}^{r} \frac{(q:q)_{i-1}}{(q:q)_{t+i-1}} \\ &= \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1-q^i)(1-q^{i+1})\cdots(1-q^{t+i-1})} \\ &= \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q^{i+j-1}}.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.1.3. Dati tre interi r, s, t vale la seguente identità

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}} \prod_{2\leq i\leq j\leq r} (1-q^{s+t+1+j-i}) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}(1-q^{s+i+j-1}). \tag{6.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo

$$\begin{aligned}\prod_{2\leq i\leq j\leq r} (1-q^{s+t+1+j-i}) &= \prod_{i=2}^{r}(1-q^{s+t+1})(1-q^{s+t+2})\cdots(1-q^{s+t+1+r-i}) \\ &= \prod_{i=1}^{r} \frac{(q:q)_{s+t+r-i}}{(q:q)_{s+t}},\end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}}\prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i}) &= \prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t+r-i}}{(q:q)_{s-i+r}}\\ &= \prod_{i=1}^{r}(1-q^{s+1+r-i})\cdots(1-q^{s+t+r-i})\\ &= \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}(1-q^{s+j+i-1}).\end{aligned}$$

$\square$

Ora si può procedere con la dimostrazione del Teorema.

Dimostrazione. Per il Corollario 5.4.1 del Teorema di Viennot-Gessel la funzione generatrice delle partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r,s,t)$ è

$$\det\left(q^{i(i-j)}\begin{bmatrix}t+s\\ s-i+j\end{bmatrix}\right)_{i,j=1}^{r} = \det\left(q^{i(i-j)}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+j}(q:q)_{t+i-j}}\right)_{i,j=1}^{r}.$$

Non ci rimane che valutare questo determinante: mettiamo in evidenza alcuni fattori per poter applicare la formula di Krattenthaler.
Per ogni i mettiamo in evidenza il fattore $(q:q)_{s+t}/(q:q)_{s-i+r}$ dalla i-esima riga, e per ogni j mettiamo in evidenza il fattore $1/(q:q)_{t+i-1}$ dalla j-esima colonna. Otteniamo

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}(q:q)_{t+i-1}}\\ &\qquad\times\det\big(q^{i(i-j)}(1-q^{s-i+r})(1-q^{s-i+r-1})\cdots(1-q^{s-i+j+1})\\ &\qquad\qquad(1-q^{t+i-j+1})(1-q^{t+i-j+2})\cdots(1-q^{t+i-1})\big)_{i,j=1}^{r}.\end{aligned}$$

Riscriviamo i coefficienti della matrice in modo da isolare q^i dentro ad ogni binomio

$$\begin{aligned}&\det\big((-1)^{j-1}q^{i(i-j)}q^{-i(r-j)}q^{t(j-1)-j(j-1)/2}\\ &\qquad(q^i-q^{s+r})(q^i-q^{s+r-1})\cdots(q^i-q^{s+j+1})\\ &\qquad(q^i-q^{t-j+1})(q^i-q^{t-j+2})\cdots(q^i-q^{t-1})\big)_{i,j=1}^{r}\\ &=(-1)^{r(r-1)/2}q^{\sum_{i=1}^{r}-i(r-i)}q^{\sum_{j=1}^{r}t(j-1)-j(j-1)/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \det\Big((q^i - q^{s+r})(q^i - q^{s+r-1})\cdots(q^i - q^{s+j+1})\\
&\qquad (q^i - q^{t-j+1})(q^i - q^{t-j+2})\cdots(q^i - q^{t-1})\Big)_{i,j=1}^{r}\\
&= (-1)^{r(r-1)/2} q^{\sum_{i=1}^{r} t(i-1)-2i(r-i)}\\
&\times \det\Big((q^i - q^{s+r})(q^i - q^{s+r-1})\cdots(q^i - q^{s+j+1})\\
&\qquad (q^i - q^{t-j+1})(q^i - q^{t-j+2})\cdots(q^i - q^{t-1})\Big)_{i,j=1}^{r}.
\end{aligned}
$$

Poniamo quindi $x_i := q^i$ per ogni i, $a_j := -q^{s+j}$, $b_j := q^{-i+j-1}$ per ogni j e applichiamo la formula di Krattenthaler (Teorema 3.3.1). Si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\det\Big((q^i - q^{s+r})(q^i - q^{s+r-1})\cdots(q^i - q^{s+j+1})\\
&\qquad (q^i - q^{t-j+1})(q^i - q^{t-j+2})\cdots(q^i - q^{t-1})\Big)_{i,j=1}^{r}\\
&= \prod_{1\le i<j\le r}(q^i - q^j)\prod_{2\le i\le j\le r}(-q^{-t+i-1}+q^{s+j}).
\end{aligned}
$$

Applicando i Lemmi 6.1.1-6.1.3, possiamo concludere

$$
\begin{aligned}
\det\left(q^{i(i-j)}\begin{bmatrix} t+s \\ s-i+j\end{bmatrix}\right)_{i,j=1}^{r} &= \prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}(q:q)_{t+i-1}}\\
&\times(-1)^{r(r-1)/2}q^{\sum_{i=1}^{r} t(i-1)-2i(r-i)}\\
&\times\prod_{1\le i<j\le r}(q^i - q^j)\prod_{2\le i\le j\le r}(-q^{-t+i-1}+q^{s+j})\\
&\overset{(6.1)}{=}\prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}(q:q)_{t+i-1}}\\
&\times\prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{j-i})\prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i})\\
&=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(q:q)_{t+i-1}}\prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{j-i})\\
&\times\prod_{i=1}^{r}\frac{(q:q)_{s+t}}{(q:q)_{s-i+r}}\prod_{2\le i\le j\le r}(1-q^{s+t+1+j-i})
\end{aligned}
$$

$$\stackrel{(6.2)+(6.3)}{=} \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\frac{1}{1-q^{i+j-1}}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}(1-q^{s+i+j-1}).$$

□

Osservazione 6.1.1. Vale l'identità

$$\prod_{(i,j,k)\in\mathcal{B}(r,s,t)}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\prod_{k=1}^{s}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}=$$
$$=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\frac{(1-q^{i+j})(1-q^{i+j+1})\cdots(1-q^{i+j+s-2})(1-q^{i+j+s-1})}{(1-q^{i+j-1})(1-q^{i+j})\cdots(1-q^{i+j+s-3})(1-q^{i+j+s-2})}=$$
$$=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\frac{(1-q^{i+j+s-1})}{(1-q^{i+j-1})}.$$

6.2 Funzione Generatrice Partizioni Piane

In questa sezione dimostriamo il Teorema 1.2.1 che ci dà una formula chiusa per la funzione generatrice delle partizioni piane.

Teorema 1.2.1. La funzione generatrice delle partizioni piane è

$$\sum_{n=0}^{\infty}pp(n)q^n=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^j)^j}.$$

Dimostrazione. Il Teorema 1.4.1 fornisce un'espressione per la funzione generatrice delle partizioni piane contenute in $\mathcal{B}(r,s,t)$ in funzione delle dimensioni del parallelepipedo; quindi, facendo tendere $r,s,t\longrightarrow\infty$ si ottiene la funzione generatrice delle partizioni piane contenute in $\mathbb{N}^3$, cioè le partizioni piane in generale. Allora, ricorrendo all'espressione dell'Osservazione 6.1.1, è sufficiente provare

$$\lim_{r,s,t\longrightarrow\infty}\prod_{(i,j,k)\in\mathcal{B}(r,s,t)}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^j)^j}. \tag{6.4}$$

Riscriviamo la produttoria con indice $l = i+j+k$, e osserviamo che $l \in \mathbb{N}$ si può scrivere come somma di tre interi positivi ordinati in $(l-2)(l-1)/2$ modi, da cui

$$\lim_{r,s,t \longrightarrow \infty} \prod_{(i,j,k)\in\mathcal{B}(r,s,t)} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{l=3}^{\infty} \prod_{i+j+k=l} \frac{1-q^{l-1}}{1-q^{l-2}} = \prod_{l=3}^{\infty} \left(\frac{1-q^{l-1}}{1-q^{l-2}}\right)^{\frac{(l-2)(l-1)}{2}}$$

$$= \left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^3}{1-q^2}\right)^3\left(\frac{1-q^4}{1-q^3}\right)^6 \cdots \left(\frac{1-q^{l-1}}{1-q^{l-2}}\right)^{\frac{(l-2)(l-1)}{2}} \left(\frac{1-q^{l}}{1-q^{l-1}}\right)^{\frac{(l-1)l}{2}} \cdots$$

$$= \frac{1}{1-q}\frac{1}{(1-q^2)^2}\frac{1}{(1-q^3)^3} \cdots \frac{1}{(1-q^{l-1})^{l-1}}\frac{1}{(1-q^l)^l} \cdots = \prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^j)^j}.$$

□

6.3 Formula Ricorsiva

Concludiamo con il terzo e ultimo risultato, una formula ricorsiva con cui calcolare efficientemente il numero di partizioni piane con n cubi, avendo la risposta nei casi precedenti.

Teorema 1.3.1. Dato un intero n, le partizioni piane con n cubi sono

$$pp(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1} \sigma_2(j)pp(n-j),$$

dove $\sigma_2(j) := \sum_{k|j} k^2$.

Dimostrazione. Si pone

$$f_k(q) := \frac{1}{(1-q^k)^k}.$$

Osserviamo che derivando il seguente prodotto infinito, per la formula di Leibnitz

$$\frac{d}{dq}\left(\prod_{j=1}^{\infty} f_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k'}{f_k}\prod_{j=1}^{\infty} f_j = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k'}{f_k}\right)\prod_{j=1}^{\infty} f_j.$$

Ma si nota

$$\frac{f_k'}{f_k} = \frac{k^2q^{k-1}}{(1-q^k)^{k+1}}(1-q^k)^k = \frac{k^2q^{k-1}}{1-q^k},$$

quindi derivando ciascun membro dell'identità del Teorema 1.2.1 otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} npp(n)q^{n-1} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2q^{k-1}}{1-q^k}\right)\left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^j)^j}\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2q^{k-1}}{1-q^k}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} pp(m)q^m\right)\end{aligned}$$

e moltiplicando entrambi i membri per q si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} npp(n)q^{n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2q^{k}}{1-q^k}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} pp(m)q^m\right). \tag{6.5}$$

Per la formula della somma della serie geometrica si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2q^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2q^k \sum_{t=0}^{\infty} q^{tk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} q^{k(t+1)}.$$

Poniamo $j := k(t+1)$. Una volta fissato il valore di j, k può essere un qualsiasi intero positivo che divide j, da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2q^k}{1-q^k} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k|j} k^2q^j = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_2(j)q^j.$$

Sostituendo nell'equazione (6.5) otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} npp(n)q^{n} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_2(j)q^j\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} pp(m)q^m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j)pp(n-j)q^n$$

e infine eguagliando i termini n-esimi delle due serie

$$npp(n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_2(j)pp(n-j),$$

da cui la formula dell'enunciato. □

Bibliografia

[1] David M. Bressoud. *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge University Press, 1999.

[2] Ira Gessel e Gérard Viennot. "Binomial determinants, paths, and hook length formulae". In: *Advances in Mathematics* 58.3 (1985), pp. 300–321.

[3] Ira Gessel, Xavier Viennot e Departement Mathematiques. "Determinants, Paths, and Plane Partitions". In: (set. 2000).

[4] Christian Krattenthaler. "Determinant identities and a generalization of the number of totally simmetric self-complementary plane partitions". In: *Electronic Journal of Cominatorics* 4.1 (1997), p. 62.

[5] Bernt Lindström. "On the vector representation of induced matroids". In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 5 (1973), pp. 85–90.