

## Titel: Lebensdauer als Optimierungsziel

### Untertitel: Algorithmische Struktursynthese am Beispiel eines hydrostatischen Getriebes

Angela Vergé, Philipp Pöttgen, Lena Altherr, Thorsten Ederer, Univ.-Prof. Peter F. Pelz

Institut für Fluidsystemtechnik, Technische Universität Darmstadt

*Verfügbarkeit und Nachhaltigkeit sind wichtige Anforderungen bei der Planung langlebiger technischer Systeme. Meist werden bei Lebensdaueroptimierungen lediglich einzelne Komponenten vordefinierter Systeme untersucht. Ob eine optimale Lebensdauer eine gänzlich andere Systemvariante bedingt, wird nur selten hinterfragt. Technical Operations Research (TOR) erlaubt es, aus Obermengen technischer Systeme automatisiert die lebensdaueroptimale Systemstruktur auszuwählen. Der Artikel zeigt dies am Beispiel eines hydrostatischen Getriebes<sup>1</sup>.*

#### Einführung

Die Verfügbarkeit von technischen Systemen ist neben der Effizienz und den Kosten das wichtigste Entscheidungskriterium für oder gegen eine Systemvariante. Durch eine Reduzierung der Ausfallzeit bzw. eine Erhöhung der Lebensdauer der einzelnen Komponenten wird die Verfügbarkeit des Systems gesteigert. Eine hohe Lebensdauer bedeutet eine sichere Funktion, welche heute gefordert ist (DIN EN ISO 13849), beeinflusst aber den ökonomischen Wert des Systems: Ist eine Komponente kostengünstig, muss aber aufgrund der geringen Lebensdauer oft erneuert werden, kann dies hohe Ausfallkosten durch Systemstillstände verursachen. In einem solchen Fall kann es für den Betreiber lohnender sein, eine in den Anschaffungskosten teurere, aber in ihrer Lebensdauer verbesserte Komponente anzuschaffen.

Betrachtet man heute Lebensdauerberechnungen, werden bei diesen die einzelnen Komponenten für eine vordefinierte Systemtopologie in den Mittelpunkt gestellt und optimiert. Unbeantwortet bleibt zumeist jedoch die Frage, ob das Ziel „hohe Verfügbarkeit“ eine ganz andere Topologie, d.h. eine gänzlich andere Systemvariante bedingt. Mit Technical Operations Research - TOR - existiert eine Methodik, welche algorithmisch die lebensdaueroptimale Systemstruktur findet. TOR hat seinen Ursprung an der TU Darmstadt genommen. Es ist ein Ergebnis des Sonderforschungsbereichs 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen“.

Ziel der Methode ist es, Modelle und Algorithmen zur Strukturfindung von komplexen technischen Systemen bereitzustellen. Hierbei können vom Anwender unterschiedliche Gütekriterien wie Kosten,

---

<sup>1</sup> Nach VDI 2127 ist ein hydrostatisches Getriebe ein Druckmittelgetriebe, welches Bewegungen und Kräfte nach dem Verdrängerprinzip unter statischem Druck übertragen kann. Betrachtet wird im Anwendungsbeispiel ein Teilsystem eines solchen Getriebes von einer Konstantdruckpumpe bis zum Linearmotor. Die Optimierungsmethode lässt sich auf das Gesamtsystem anwenden. Im Folgenden wird verkürzt von einem hydrostatischen Getriebe gesprochen.

Effizienz oder Verfügbarkeit definiert werden. Diese werden in der Optimierung automatisiert gegeneinander abgewogen. So wird für den Anwender in kurzer Zeit ein optimaler Lösungsvorschlag generiert. Die TOR-Methodik wurde bereits zur Optimierung verschiedener technischer Systeme, wie Heizungs- [Pöt15] oder Lüftungssysteme [Scä15] eingesetzt. Fernziel ist die vollautomatische Systemauslegung auf Knopfdruck.

### Algorithmische Synthese eines verschleißoptimalen hydrostatischen Getriebes

Als Anwendungsbeispiel wird eine hydraulische Schaltung mittels der TOR-Methodik optimiert. Das Optimierungsmodell basiert auf Techniken der linearen Optimierung, die bereits erfolgreich in der Logistik, Produktionsplanung oder zur Erstellung von Fahrplänen [Suh05] eingesetzt werden, und die nun auch bei der Strukturierung technischer Systeme Anwendung finden. In diesem neuen Kontext ermöglicht diese Technik die algorithmische Synthese von hydraulischen Systemen [Doe14]. Die Modellbildung erfordert ein systematisches Vorgehen, da vor der Optimierung alle Randbedingungen bekannt sein müssen. Die TOR-Pyramide (Abbildung 1) verdeutlicht die einzelnen Schritte. Am Beispiel des hydrostatischen Getriebes werden die ersten vier Schritte behandelt.



Abbildung 1: Die 7 Schritte der TOR-Methodik

**Schritt 1:** Im ersten Schritt wird die Funktion des zu optimierenden Systems beschrieben. Diese ist durch einen Lastzyklus gegeben, den ein Kolben während des Betriebs eines hydrostatischen Getriebes ausführen soll. Das Ausfahren des Kolbens erfolgt gegen eine Last  $F_{aus}$  bei geringer Geschwindigkeit  $V_{aus}$ . Das Einfahren der Kolbenstange erfolgt anschließend gegen eine deutlich geringere Kraft  $F_{ein}$  bei höherer Geschwindigkeit  $V_{ein}$ . Zur Versorgung des Kolbens steht eine Konstantdruckleitung zur Verfügung (vgl. Abbildung 2).

**Schritt 2:** Das Optimierungsziel wird festgelegt. Das Ziel ist immer subjektiv und liegt im Spannungsfeld zwischen Aufwand und Verfügbarkeit. Die Verfügbarkeit des Systems wird neben Spontanausfällen seiner Komponenten auch durch deren Verschleiß beeinflusst. Im Beispiel soll erosiver Verschleiß der verbauten Proportionalventile infolge stark partikelbeladenen Öls betrachtet werden. Der abrasive Verschleiß infolge des Eintauchens des Ventilschiebers in die Hülse wird vernachlässigt. Ist die Funktion eines Ventils durch dessen Verschleiß nicht mehr gewährleistet, muss dieses ausgetauscht werden. Für die Optimierung werden zwei unterschiedliche Zielstellungen betrachtet: (i) der ununterbrochene Systembetrieb der Maschine ohne einen wartungsbedingten Ausfall soll so lange wie möglich gewährleistet sein. Hierbei steht die Verfügbarkeit des Systems im Vordergrund, der Aufwand wird zunächst nicht

berücksichtigt. (ii) geringster Materialeinsatz, d.h. über die gesamte Lebensdauer der Maschine sollen so wenige Ventile wie möglich eingesetzt werden. Dies schließt sowohl die anfangs gekauften Ventile als auch die später durch alterungsbedingten Ausfall auszutauschenden Ventile mit ein. Bei dieser Zielstellung wird ein Gleichgewicht zwischen der Verfügbarkeit und dem zu betreibenden Aufwand hergestellt.

**Schritt 3:** Der Algorithmus der Methode TOR kann verschiedene Ventile aus einem vorgegebenen Komponentenbaukasten wählen und verschalten, d.h. er schafft die Struktur. Welche Komponenten für das optimale Gesamtsystem in beliebiger Kombination verschaltet werden dürfen, wird in diesem Schritt festgelegt. Das Spielfeld zur Optimierung besteht im Anwendungsbeispiel aus vier 2/2-Wege-Proportionalventilen und vier 2/2-Wege-Schaltventilen (Abbildung 2). Die funktionsrelevanten Eigenschaften dieser Komponenten werden durch charakteristische Kurven im Optimierungsprogramm hinterlegt. Die Ventile können zwischen den Anschlüssen an der Druckversorgung, am Tank und am Kolben beliebig miteinander verschaltet werden. Die Emulation eines 4/3-Wege-Proportionalventils - hier mit getrennten Steuerkanten - steht genauso zur Auswahl wie der Einsatz einer Parallel- oder Reihenschaltung. Die Entscheidung, welche Komponente wirklich benötigt und wie sie gegebenenfalls verschaltet wird, trifft der Lösungsalgorithmus.

**Schritt 4:** Nach Vorgabe von Funktion, Ziel und Spielfeld findet der Algorithmus die unter diesen Bedingungen optimale Systemstruktur. Die Optimierung wird nicht nur anhand eines einzelnen Systemmodells durchgeführt, sondern die Obermenge aller möglichen Systeme betrachtet. Der Löser trifft zeitgleich eine Entscheidung für die Komponentenauswahl sowie ihre Verschaltung für einen Betriebspunkt im so konstruierten System.

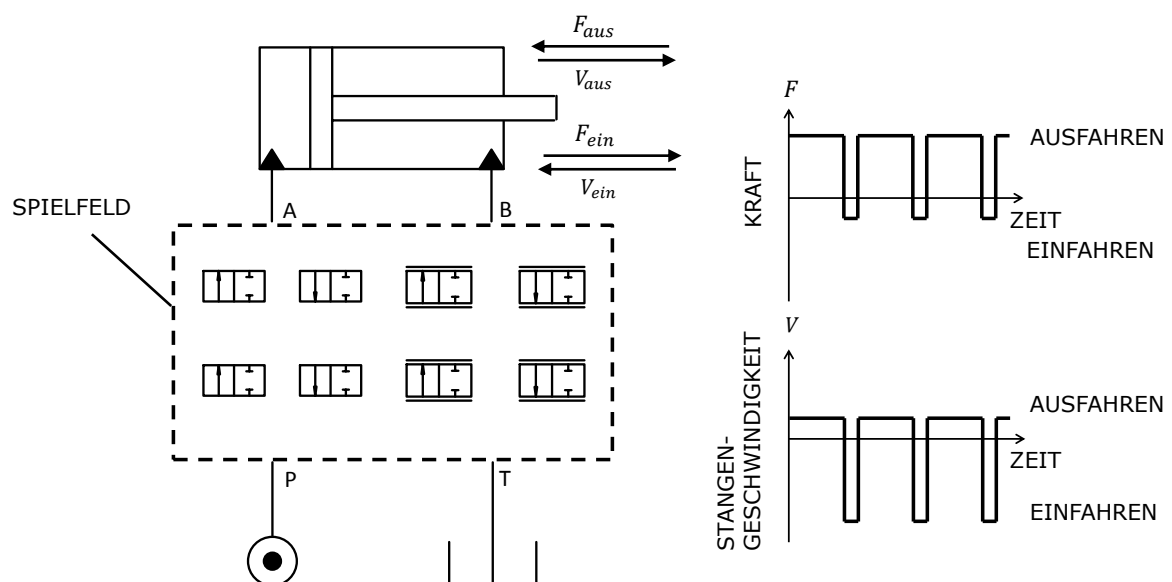


Abbildung 2: Funktion des zu optimierenden Systems und Spielfeld bestehend aus einem Baukasten möglicher Ventile, deren Verschaltung der Algorithmus vornehmen muss.

## Verschleiß als Evolutionsprozess

Eine Systemoptimierung hinsichtlich Lebensdauer benötigt eine analytische Abbildung der im System vorliegenden Alterungs- bzw. Verschleißprozesse. Bei der algorithmischen Strukturfindung muss der im Betrieb auftretende Verschleiß berechenbar und mit anderen Betriebspunkten vergleichbar dargestellt werden.

Verschleiß, als Überbegriff für alle Alterungsvorgänge, ist ein Sättigungsprozess, der im Allgemeinen eindeutig über die Änderung einer Funktionsgröße  $a$  erfasst werden kann

$$F(t) := \frac{a(t) - a_{min}}{a_{max} - a_{min}} \quad (1)$$

Es wird angenommen, dass die zeitliche Änderung des Verschleißes  $F$  selbstähnlich ist und nur über die von Betriebsparametern abhängige Rate  $K$  skaliert wird. In dem Wissen, dass eine konstante Prozessführung (z.B. für alle Zeiten konstanter Ventildurchfluss) technisch nicht sinnvoll ist, wird diese hier dennoch zur Veranschaulichung gezeigt. Da Verschleiß sich immer kumulativ [Pal24][Min45] entwickelt, gilt für die Verschleißrate die Evolutionsgleichung

$$\frac{dF}{dt} = K(\text{Prozess})f(F), \quad \text{mit } F(0) = 0. \quad (2)$$

Der Separationsansatz auf der rechten Seite von Gleichung (2) ist für die meisten technischen Prozesse gültig. In Abbildung 3 sind zur Veranschaulichung drei Verschleißprozesse bei jeweils konstanter Prozessführung dargestellt. Die Rate  $K$  mit der Dimension 1/Zeit ist dann konstant. Eine kleine Verschleißrate impliziert einen schnelleren Verschleiß und umgekehrt.

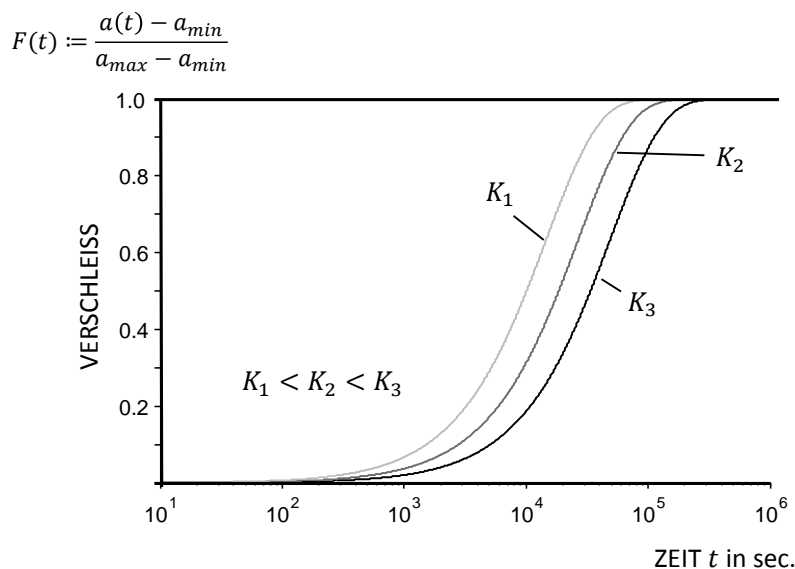


Abbildung 3: Sättigungsprozess mit drei Verschleißraten bei konstanter Prozessführung.

Durch das Integral über  $1 - F$  wird eine *mittlere Verschleißzeit*

$$\tau := \int_0^{\infty} 1 - F \, dt. \quad (3)$$

definiert. Sie ist geometrisch als die von der Verschleißkurve, sowie den Linien  $F = 1$  und  $t = 0$  eingeschlossene Fläche gegeben. Die mittlere Verschleißzeit  $\tau$  hat die Dimension einer Zeit und ist ein Synonym der Rate  $K \sim 1/\tau$ . Bei der Skalierung der Prozesszeit  $t$  mit der mittleren Verschleißzeit  $\tau$  ergibt sich für die dimensionslose Zeit  $s$

$$ds := \frac{dt}{\tau} = K dt, \quad (4)$$

oder für konstante Prozessführung mit  $K = \text{const.}$

$$s = \frac{t}{\tau} = Kt. \quad (5)$$

Bei einem zeitlich veränderlichen Prozess,  $K = K(\text{Prozess}(t))$ , folgt für die dimensionslose Zeit

$$s = \int_0^t K(\text{Prozess}(\bar{t})) d\bar{t}. \quad (6)$$

In jedem Fall ergibt sich für Gleichung (2)

$$\frac{dF}{ds} = f(F), \text{ mit } F(0) = 0. \quad (7)$$

Abbildung 3 zeigt den vollständigen Verschleißprozess. Technisch relevant ist aber nur der beginnende Verschleiß für  $s \ll 1$ . Für diesen gelten die asymptotischen Eigenschaften

$$\frac{dF}{ds} = 1, \text{ mit } F(0) = 0. \quad (8)$$

Kern der Berechnung ist die dimensionslose Zeit  $s$ . Gleichung (4) verdeutlicht die Bedeutung der Reaktionsrate bei der Bestimmung der dimensionslosen Zeit: Bei hoher Verschleißrate  $K$  wird „die reale Verschleißzeit  $t$  gestaucht“ bei geringer Verschleißrate wird „die reale Verschleißzeit  $t$  gedehnt“, so dass die dimensionslose Verschleißzeit aus Gleichung (6) davon unbeeinflusst bleibt.

### Verschleißrate bei hydraulischen Ventilen

Kern der Verschleißberechnung aus Gleichung (4) und (7) ist die Rate  $K$ . Hierzu wurden aufbauend auf experimentellen Ergebnissen vom IFAS, RTWH Aachen, [Scu14] folgende Überlegungen validiert:

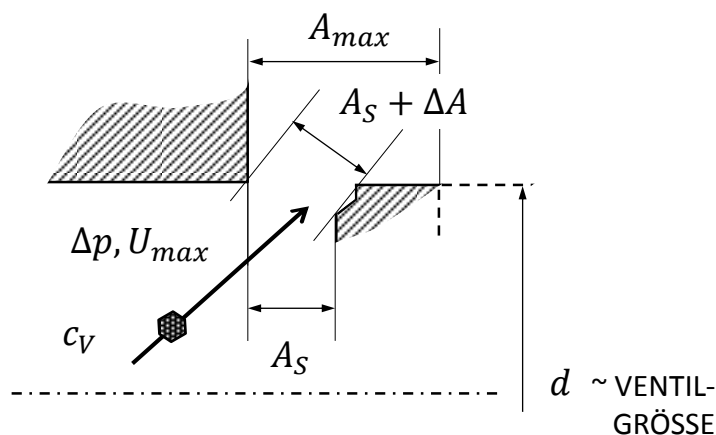


Abbildung 4: Zum Verschleißvorgang bei einem Ventil

Mit der Definition der relativen Ventilöffnungsquerschnitt als

$$S := \frac{A_S}{A_{max}}, \quad (9)$$

ist für die Teilkomponente „Ventil“ mit der Teilfunktion „Druck absenken“ infolge des Carnot'schen Stoßverlustes der Druckverlust proportional dem Quadrat des Volumenstroms und umgekehrt proportional dem Quadrat der Ventilöffnungsquerschnitt:

$$\Delta p = \frac{\rho U_{max}^2}{2} = \frac{\zeta(S)\rho Q^2}{2(A_S + \Delta A)^2}. \quad (10)$$

Dadurch ist ein eindeutiger funktionaler Zusammenhang zwischen Druckverlust, Volumenstrom und gesamter Ventilöffnungsquerschnitt  $A_S + \Delta A$  gegeben (Abbildung 4).  $A_S$  bezeichnet dabei die zu stellende Ventilfläche und  $\Delta A$  die Zunahme der Offenfläche infolge von erosivem Verschleiß. Verschleißursächlich ist das Auftreffen von suspensierten Partikeln auf die Ventilsteuerkanten. Die Aufprallgeschwindigkeit ist von der Größenordnung der maximalen Strömungsgeschwindigkeit  $U_{max}$ .

Damit ist die Verschleißrate eine Funktion der Druckdifferenz  $\Delta p$ , der maximalen Ventilöffnung  $A_{max}$ , der Flüssigkeitsdichte  $\rho$ , der dimensionslosen Größen relative Ventilöffnungsquerschnitt  $S$ , sowie Volumenanteil der Feststoffbeladung  $c_v$ :  $K = K(\Delta p, A_{max}, \rho, S, c_v)$ . Dabei wurde angenommen, dass die Partikel sehr viel kleiner als  $A_{max}^{1/2}$  sind und immer gleiche Materialien betrachtet werden (Ähnlichkeit im Material). Schumacher [Scu14] zeigt, dass die kinematische Ölviskosität  $\nu$  keinen signifikanten Einfluss auf den Verschleiß hat. Eine Dimensionsanalyse [Spu92] führt auf den äquivalenten Zusammenhang

$$K = \sqrt{\frac{\Delta p}{A_{max}\rho}} K_+(S, c_v) \sim \sqrt{\frac{1}{d}}. \quad (11)$$

Die maximale Offenfläche ist im Wesentlichen durch die Schiebergröße  $d$  bestimmt (vgl. Abbildung 4), sofern der Schieberweg  $u_{max}$  durch den Aktor festgelegt und größenunabhängig ist.

Der funktionale Zusammenhang von  $K_+(S, c_v)$  kann aus den IFAS-Messungen [Scu14] im Sinne einer Auswertung nach Gleichung (11) verallgemeinert werden. Das Ergebnis, die dimensionslose Verschleißrate  $K_+(S, c_v)$  als Funktion der relativen Ventilöffnung  $S$  und des Volumenanteils  $c_v$ , zeigt Abbildung 5. Die dimensionslose Verschleißrate  $K_+$  wächst stark mit abnehmender relativer Ventilöffnungsquerschnitt  $S$  und zunehmendem Volumenanteil der Feststoffbeladung  $c_v$ , weshalb trotz des Größeneinflusses in Gleichung (11) oft ein kleines Ventil mit großer Öffnung vorteilhaft sein kann. Dieser Schluss war wesentliches Ergebnis der Aachener Arbeit.

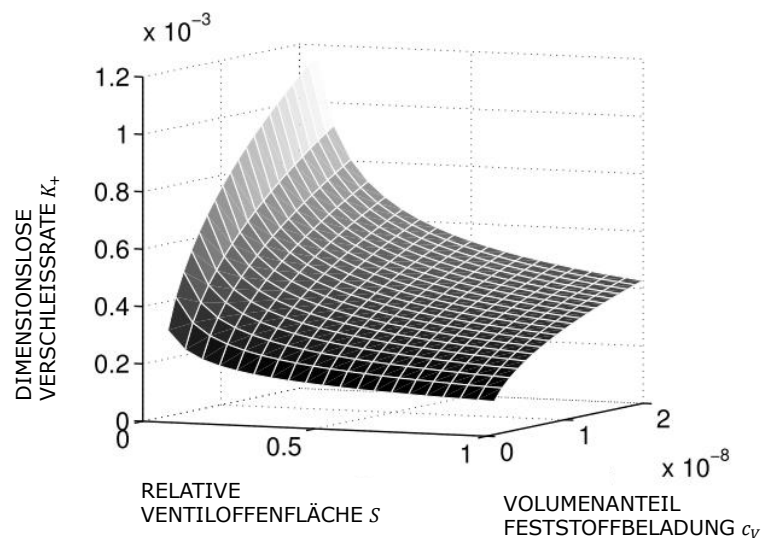


Abbildung 5: Dimensionslose Verschleißrate  $K_+(S, c_v)$  als Funktion der Ventilöffnungsquerschnitt und Feststoffbeladung.

Für die Implementierung des Verschleißmodells in die algorithmische Strukturfindung wird als Optimierungsgröße bei der Betrachtung des hydrostatischen Getriebes die verschleißbedingte Änderung der Ventilöffnungsquerschnitt  $\Delta A$  herangezogen, wobei sich die Änderung maßgeblich auf den Hubweg  $u$  mit dem Materialabtrag  $\Delta u$  auswirkt. Der Verschleiß lässt sich nach Gleichung (7) über Trennung der Veränderlichen für beliebige Prozesse bestimmen. Anhand der Messungen am IFAS [Scu14] und dem Ergebnis aus Gleichung (11) ergibt sich die Verschleißfunktion zu

$$F = 1 - \exp [(-K(\Delta p, A_{max}, \varrho, S, c_v)t)]. \quad (12)$$

Äquivalent kann die Verschleißfunktion  $F$  eindeutig durch die Änderung einer Funktionsgröße  $a$  nach Gleichung (1) erfasst werden. Als Funktionsgröße wird hier die Druckverstärkung  $V_{pu}$  nach Schumacher [Scu14] gewählt

$$F = \frac{V_{pu}(t) - V_{pu,start}}{V_{pu,end} - V_{pu,start}}. \quad (13)$$

Mit  $V_{pu,end} = 0$  ergibt sich aus Gleichung (12) und (13), analog zu den Erkenntnissen von Schumacher [Scu14], die relative Druckverstärkung des verschlissenen Ventils

$$\frac{V_{pu,verschlissen}(t)}{V_{pu,start}} := \exp[-K(\Delta p, A_{max}, \varrho, S, c_v)t]. \quad (14)$$

Mit der Definition der Druckverstärkung

$$V_{pu} := \frac{dp}{du} \quad (15)$$

ergibt sich der Materialabtrag zu

$$\frac{\Delta u}{u} = \exp \left[ -\frac{1}{3} K(\Delta p, A_{max}, \varrho, S, c_v)t \right] - 1. \quad (16)$$

## Mathematisches Programm

Die TOR Methodik erlaubt es, automatisiert die optimale Struktur für ein hydrostatisches Getriebe zu finden. Hierzu werden Funktion, Ziel und Spielfeld aus den Schritten 1-3 der TOR Pyramide in einem Optimierungsmodell abgebildet. Als mathematische Modellierungssprache dient ein gemischt-ganzzahliges nichtlineares Programm (MINLP). Die Menge aller zulässigen Systeme wird dabei sowohl durch kontinuierliche Entscheidungsvariablen (Parameter, physikalische Größen) als auch durch diskrete Entscheidungsvariablen (Kauf-, Schaltentscheidungen) kodiert. Die Beschreibung der kombinatorischen Zusammenhänge und der physikalisch-technischen Nebenbedingungen erfolgt in Form von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen.

Das Spielfeld ist ein Netzwerk mit optionalen Komponenten. Abstrakt kann es durch einen Graphen

$$G = (V, E) \quad (17)$$

mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  beschrieben werden.  $V$  repräsentiert dabei die Menge der Anschlüsse aller Komponenten. Die Kanten  $E$  sind eine Teilmenge von  $V \times V$ , d.h. sie verbinden zwei Anschlüsse miteinander. Sie repräsentieren Komponenten wie Ventile oder Rohre. „Innere Kanten“ verbinden die Anschlüsse desselben Ventils und tragen dessen physikalisch-technische Modellierung. „Äußere Kanten“ identifizieren Anschlüsse miteinander, d.h. sie wirken als ideale verlustfreie Rohre.

Den Knoten und Kanten des Graphen werden physikalische Größen zugeordnet. Durch die Kanten fließt ein quasistationärer Volumenstrom  $Q$ . Auf inneren Kanten müssen zudem technische Informationen hinterlegt werden. Beispielsweise dient eine Binärvariable als Indikator für den Öffnungszustand eines Schaltventils, während eine kontinuierliche Variable den Hub eines Regelventils beschreibt. Knoten können als Messpunkte im System interpretiert werden und tragen Potentialgrößen wie den Druck  $p$ .

Auch die physikalischen Gleichungen lassen sich auf dem Graphen abbilden. An jedem Knoten gilt die Kontinuitätsgleichung, der Volumenstrom ist erhalten:

$$\sum_{i \in In(n)} Q_{i,n} = \sum_{j \in Out(n)} Q_{n,j} \quad \forall n \in V. \quad (18)$$

Die Summe der Volumenströme  $Q_{i,n}$ , die über eine Kante  $(i, n)$  in einen Knoten  $n$  hineinfließen, muss gleich der Summe der Volumenströme  $Q_{n,j}$  sein, die aus dem Knoten  $n$  hinausfließen. Die Summenindizes  $In(n)$  und  $Out(n)$  bezeichnen dabei die Menge der Vorgängerknoten, bzw. die Menge der Nachfolgerknoten von  $n$ .

Auch die Druckfortpflanzung wird im Modell abgebildet. Der Druck wird entlang einer Verbindung  $(i, j)$  propagiert

$$p_j - p_i = \Delta p. \quad (19)$$

Auf inneren Kanten ergibt  $\Delta p$  sich aus der Komponentencharakteristik und auf äußeren Kanten gilt  $\Delta p = 0$ .

In einem nächsten Schritt werden Topologie-Freiheitsgrade eingeführt. Allen Kanten wird eine binäre Entscheidungsvariable  $x$  zugeordnet. Bei inneren Kanten ist sie ein Indikator für den Kauf einer



Komponente (0: kein Kauf, 1: Kauf), bei äußeren Kanten zeigt sie eine Verbindung von Komponenten an (0: Verbindung nicht vorhanden, 1: Verbindung vorhanden). Die Topologie-Freiheitsgrade spiegeln sich auch in den Nebenbedingungen wider. Der Volumenstrom durch eine nichtexistente Komponente oder Verbindung  $(i, j)$  muss verschwinden:

$$x_{i,j} = 0 \Rightarrow Q_{i,j} = 0. \quad (20)$$

Entlang einer inneren Kante wird der Druck erhöht, entlang einer äußeren Kante pflanzt er sich unverändert fort. Beides trifft allerdings nur zu, wenn die Verbindung tatsächlich aufgebaut wird. Andernfalls sind die beiden Drücke unabhängig voneinander:

$$x_{i,j} = 1 \Rightarrow p_j - p_i = \Delta p. \quad (21)$$

Diese logischen Implikationen müssen in der Modellformulierung auf die Form von algebraischen Gleichungen oder Ungleichungen gebracht werden. Es ist möglich, mit linearen Termen auszukommen, sofern alle Variablen beschränkt sind. Dies führt zu sogenannten Big-M Bedingungen, wobei M für eine hinreichend große Zahl steht, die sich aus den Variablenbeschränkungen ableiten lässt. Für den Volumenstrom ergibt sich lediglich eine optionale obere Schranke, während die Druckfortpflanzungsgleichung in zwei abschaltbare Ungleichungen zerfällt:

$$Q_{i,j} \leq M_Q \cdot x_{i,j}, \quad (22)$$

$$p_j - p_i - \Delta p \leq M_p \cdot x_{i,j}, \quad (23)$$

$$p_j - p_i - \Delta p \geq -M_p \cdot x_{i,j}. \quad (24)$$

Die nichtlinearen Nebenbedingungen in den Komponentenbeschreibungen, z.B. in den Ventilkennfeldern, werden durch stückweise Linearisierung in näherungsweise äquivalente gemischt-ganzzahlige lineare Formulierungen überführt. Dabei kann der resultierende Approximationsfehler im Übersetzungsschritt durch die Anzahl der Stützstellen kontrolliert werden. Durch die stückweise Linearisierung entsteht ein Mixed-Integer-Linear-Programm (MILP).

### Minimaler Verschleiß als Zielfunktion in der algorithmischen Struktursynthese mit TOR

Weitere nichtlineare Gleichungen, welche durch stückweise Linearisierung in das MILP integriert werden, beschreiben den Verschleiß eines jeden Regelventils. Zur Illustration der algorithmischen Systemsynthese werden zwei unterschiedliche Zielstellungen betrachtet: (i) Es soll das System gefunden werden, das unter den gegebenen Randbedingungen die maximal mögliche ununterbrochene Betriebszeit ermöglicht. (ii) Es soll das System synthetisiert werden, das den minimalen Materialeinsatz verspricht. In der ersten Zielstellung wird der ununterbrochen mögliche Systembetrieb der Maschine durch die Zeitdauer bis zum ersten notwendigen Austausch eines der Ventile des Systems begrenzt. In der Zielfunktion des Modells wird daher das Maximum des Verschleißes aller Regelventile berechnet und minimiert:

$$\min \left( \max_{\text{Ventile}} \left( \sum_{\text{Lastfälle}} \Delta u(\Delta p, A_{\max}, q, S, c_v) \right) \right). \quad (25)$$

In einem zweiten Modell soll mit der zweiten Zielstellung das System gefunden werden, das den Materialeinsatz minimiert, der zum Betrieb des Getriebes nötig ist. Dies erfordert weitere ganzzahlige Entscheidungsvariablen  $b_{ventil}$ , die für jedes Regelventil angeben, wie oft dieses während des betrachteten Zeitraums aufgrund von zu starkem Verschleiß ausgetauscht werden muss. Wird ein Ventil beispielsweise zu Beginn gekauft und innerhalb des Betrachtungshorizonts dreimal ausgetauscht, ergibt sich  $b_{ventil} = 4$ . Wann ein Regelventil ausgetauscht werden muss, wird dabei durch eine wählbare Verschleißgrenze, in diesem Beispiel durch einen maximalen Materialabtrag  $\Delta u_{max}$ , festgelegt. Die folgende Nebenbedingung, die für jedes zur Auswahl stehende Regelventil jeweils einmal im Modell enthalten ist, stellt sicher, dass mindestens so viele Proportionalventile während des Betrachtungszeitraums gekauft werden, wie innerhalb diesem verschlissen werden:

$$b_{ventil} \geq \frac{\sum_{\text{Betriebspunkte}} \Delta u(\Delta p, A_{max}, Q, S, c_v)}{\Delta u_{max}}. \quad (26)$$

Die Zielfunktion des Modells ist für die Zielstellung „minimaler Materialeinsatz“ gegeben durch

$$\min \left( \sum_{\text{Regelventile}} b_{ventil} + \sum_{\text{Schaltventile}} x_{ventil} \right), \quad (27)$$

d.h. die Summe aus gekauften Regel- und Schaltventilen wird minimiert.

### Der Weg zum globalen Optimum

Nachdem das Optimierungsmodell als MILP aufgestellt wurde, kann nun in Schritt 4 der TOR-Pyramide (vgl. Abbildung 1) die optimale Systemstruktur gefunden werden. Alle Entscheidungsvariablen im MILP werden vom Optimierer so gesetzt, dass einerseits alle gestellten Nebenbedingungen erfüllt werden können, andererseits der Wert der Zielfunktion minimiert wird. Die Struktur des vorliegenden Optimierungsproblems kann dabei als Entscheidungsbaum (Abbildung 6a) dargestellt werden. Jede diskrete Entscheidung für oder gegen den Einsatz eines Ventils oder für oder gegen eine Schaltungsvariante führt in einen neuen Ast des Entscheidungsbaums. Jeder Ast führt auf der unteren Ebene des Baums zu einer Variablenbelegung, welche hinsichtlich der Zielfunktion gut oder schlecht sein kann. Kann infolge einer diskreten Entscheidung die Funktion nicht mehr erfüllt werden, so existiert im gesamten folgenden Ast kein zulässiges System mehr. Die beste bisher gefundene Optimallösung für eine Belegung der Entscheidungsvariablen ist eine sogenannte „Primallösung“ des Optimierungsproblems. Die spezielle Formulierung des Optimierungsproblems generiert auf dem Weg durch den Lösungsbaum eine weitere Information, welche angibt, wie gut die beste Lösung höchstens sein kann. Diese „duale Schranke“ sagt: „Besser geht's nicht!“ [Pel13]. Treffen sich Primallösung und duale Schranke, so ist eine Lösung gefunden, die nicht mehr verbessert werden kann, auch wenn bisher noch nicht der gesamte Entscheidungsbaum erforscht ist (Abbildung 6a). Damit liefert die diskrete Optimierung mittels TOR immer ein globales Optimum im Gegensatz zu anderen Optimierungsstrategien wie genetischen Algorithmen oder viele nichtlineare Optimierungsverfahren. Die Güte eines Systems kann quantifiziert werden, was eine wesentliche Richtschnur im Systementstehungsprozess bedeutet.

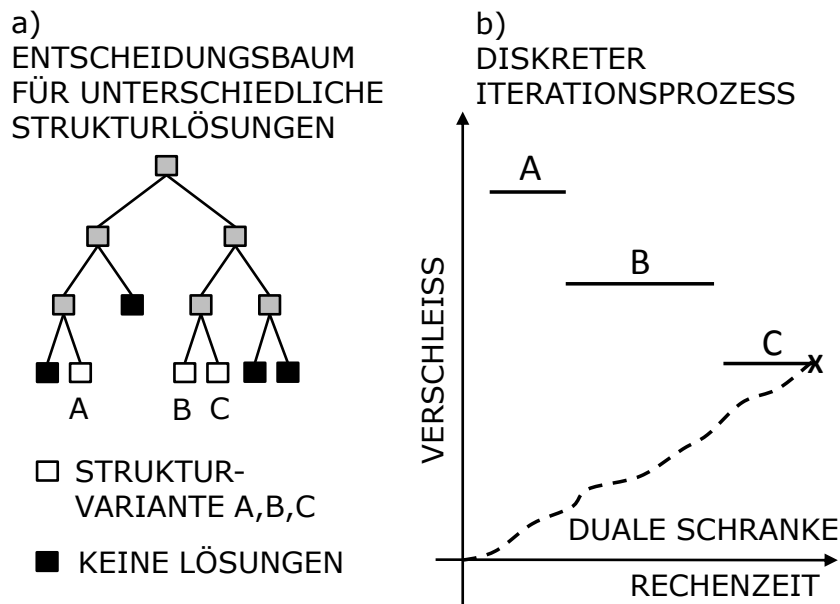


Abbildung 6: a) Schematische Darstellung des Lösungsbaums; b) Verlauf einer Optimierungsrechnung.

#### Algorithmisch gefundene Strukturen für Ziel (i), (ii)

Obwohl das Spielfeld mit einer recht geringen Anzahl an Ventilen gefüllt ist, gibt es bereits über zwanzig Kombinationsmöglichkeiten, die eine Funktionserfüllung des hydrostatischen Getriebes gewährleisten. Hierbei kann die Schaltung der Ventile zusätzlich noch variieren. Die Auswahl der optimalen Topologie ist nicht mehr intuitiv bestimmbar und der menschliche Experte wird überfordert sein, in endlicher Zeit eine globaloptimale Struktur zu finden. Die durch die algorithmische Systemsynthese mit TOR gefundene Optimallösung für die Zielstellung „maximale ununterbrochene Betriebszeit“ ist zudem alles andere als vorhersehbar (Abbildung 7). Alle vier zur Verfügung stehenden Proportionalventile wurden gewählt, sowie drei der im Baukasten verfügbaren Schaltventile. Reflektiert man diese Auswahl, so erkennt man, dass TOR die Belastung möglichst gleichmäßig auf alle Ventile verteilt, so dass die Laufzeit bis zum ersten verschleißbedingten Ausfall maximal wird. Im Vergleich zu einer üblichen Schaltung mit einem 4/3-Proportionalventil wird die Systemlebensdauer mit der Schaltung aus Abbildung 7 um den Faktor 16 erhöht!

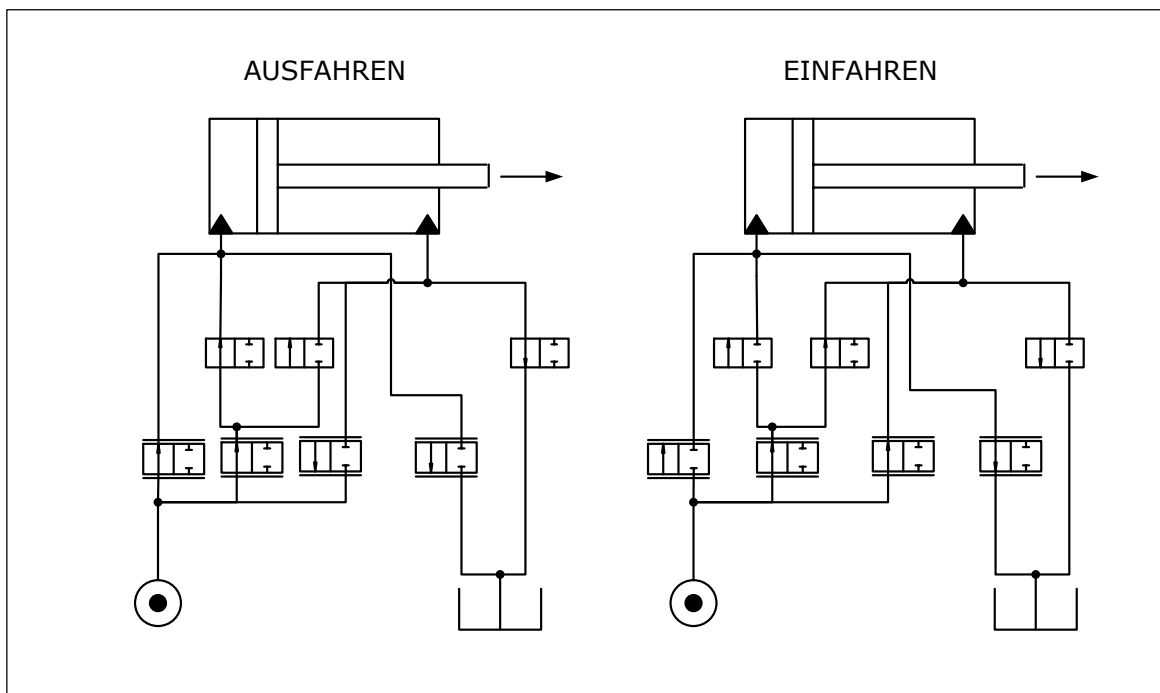


Abbildung 7: Topologie der Lösung für eine möglichst lange Betriebszeit (Ziel (i)).

Für Zielstellung (ii) (geringster Materialeinsatz) entsteht unter Berücksichtigung eines erweiterten Spielfelds mit Proportionalventilen unterschiedlicher Größen eine Topologie, welche zwei Proportional- und zwei Schaltventile verwendet (Abbildung 8). Diese werden so eingesetzt, dass in jedem Lastfall tankseitig die Drosselung erfolgt. Die Proportionalventile werden über die Lebensdauer jeweils drei bzw. vier Mal ausgetauscht. Inklusiv einmaligen Ankaufs von Proportional- und Schaltventilen zu Beginn werden also insgesamt nur 11 Ventile benötigt. Zum Vergleich müsste ein 4/3-Proportionalventil 34 Mal ausgetauscht werden. Die häufigen Ventilwechsel sind auf den Verschmutzungsgrad des Öls zurückzuführen. Die Reinheitsklasse des im Beispiel verwendeten Öls entspricht in etwa 14/12/8.

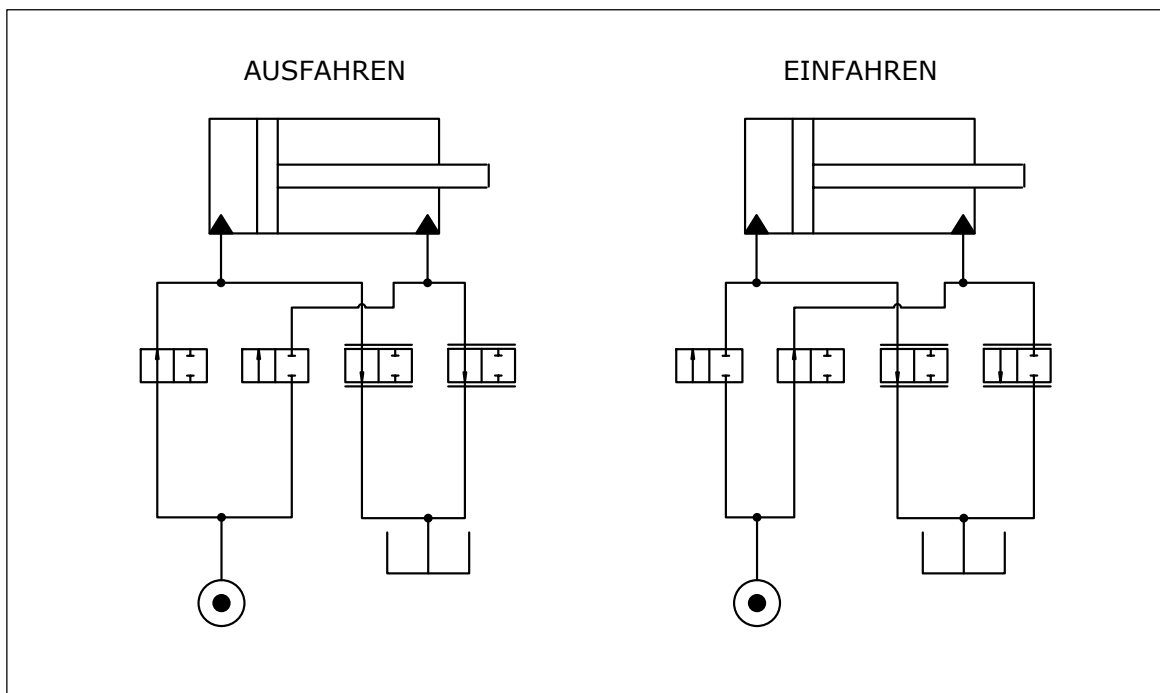


Abbildung 8: Topologie des durch den Algorithmus auf minimalen Materialeinsatz optimierten hydrostatischen Getriebes(ii).

## Fazit

Technische Systeme entstehen im Spannungsfeld von Verfügbarkeit und Nachhaltigkeit. Bei Lebensdaueroptimierungen werden meist nur einzelne Komponenten vordefinierter Systeme untersucht. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass eine Änderung der Systemtopologie die Verfügbarkeit des Systems erhöhen kann. Die Methoden des Technical Operations Research (TOR) erlauben den Vergleich einer Obermenge technischer Systeme und schließen somit die Bewertung verschiedener Topologien hinsichtlich der Zielfunktion ein. Ist die Funktion und das Ziel, in diesem Fall entweder eine maximale Lebensdauer oder minimaler Materialeinsatz während der Einsatzzeit, bekannt, ist TOR in der Lage aus einem gegebenen Spielfeld die beste Systemtopologie auszuwählen. Basierend auf einer analytischen Beschreibung von Betriebsverhalten und Verschleißprozessen können algorithmisch verschiedene Topologien hinsichtlich ihrer Lebensdauer bewertet und das geeignete System automatisiert strukturiert werden. Im Vergleich zu einem Getriebe mit einem 4/3-Proportionalventil, hat ein mit TOR geplantes System eine 16-fach höhere Lebensdauer. Sollen möglichst wenige Komponenten über die Laufzeit hinweg aufgrund von Verschleiß ausgetauscht werden, schafft TOR eine Systemstruktur, die mit 11 Ersatzventilen auskommt. Ein einzelnes 4/3-Proportionalventil müsste hingegen 34 Mal ausgetauscht werden. Das vorgestellte Beispiel bietet die Grundlage um die TOR Methodik zur Auslegung von allgemeinen hydraulischen Systemen zu nutzen.

## Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG für die Finanzierung dieser Forschung im Sonderforschungsbereich (SFB) 805 "Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus".

## Literaturhinweise

- [Doe14] B. Dörig, T. Ederer, P. Hedrich, U. Lorenz, P. Pelz, P. Pöttgen, "Technical Operations Research (TOR) exemplified by a Hydrostatic Power Transmission System", IFK 2014, Aachen, Germany, 2014.
- [Hau77] P. Haupt, „Viskoelastizität und Plastizität“, Springer Verlag, 1977.
- [Min45] M. Miner, et. al., „Cumulative Damage in Fatigue“, Journal of Applied Mechanics, vol. 12, S. 159-164, 1945.
- [Pal24] A. Palmgren, "Die Lebensdauer von Kugellagern," Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Ausgabe 68, S. 339-341, 1924.
- [Pel01] P. Pelz, „Rheologie der Kautschukmischungen“, In „Elastomer Werkstoffe“, 2001.
- [Pel13] P. Pelz, U. Lorenz, „Besser geht's nicht! TOR plant das energetisch optimale Fluidsystem“, delta p, Ausgabe 3, ErP Spezial, 2013.
- [Pfe14] T. Pfeifer, et al., „Masching Handbuch Qualitätsmanagement“, 6. Auflage, Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2014.
- [Pöt15] P. Pöttgen, T. Ederer, L.C. Altherr, U. Lorenz, P.F. Pelz, „Examination and Optimization of a Heating Circuit for Energy-Efficient Buildings“, Energy Technology , Wiley-VCH Verlag, 2015
- [Scu14] J. Schumacher, „Alterungs- und Verschleißverhalten von Druckübertragungsmedien und hydraulischen Ventilen“, Reihe Fluidtechnik, Band 74, Shaker Verlag, Aachen, 2014.
- [Scä15] C. Schänzle ; L. C. Altherr, T. Ederer, U. Lorenz, P.F. Pelz: "As Good As It Can Be - Ventilation System Design By A Combined Scaling And Discrete Optimization Method", Proceedings of FAN 2015, Lyon (France), 2015
- [Spu92] J. H. Spurk, „Dimensionsanalyse in der Strömungslehre“, Springer Verlag, 1992
- [Suh05] L. Suhl, „Optimierungssysteme: Modelle, Verfahren, Software, Anwendungen“, Springer Verlag, 2005.