

# Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zur robusten Radschlupfregelung für Antiblockiersysteme

Vom Fachbereich  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

**Patrick Vogt, M. Sc.**

geboren in Fulda

Referent: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Stephan Rinderknecht

Tag der Einreichung: 15. Oktober 2020  
Tag der Prüfung: 16. Dezember 2020



Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zur robusten Radschlupfregelung für Antiblockiersysteme

Genehmigte Dissertation von Patrick Vogt, M. Sc.

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 2020

D 17 · Darmstadt 2021

### **Elektronische Version**

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,  
E-Publishing-Service der TU Darmstadt  
<https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>  
[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-17835

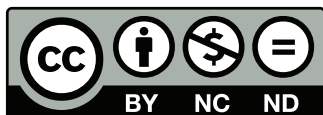
URI: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/178358>

### **Gebundene Version**

Erhältlich im Buchhandel oder bei:  
Neopubli GmbH, Berlin, Deutschland  
<https://www.epubli.de/shop>

ISBN: 987-3-754113-43-1

### **Lizenz**



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative-Commons-Lizenz:  
Namensnennung – Nicht-kommerziell – Keine Bearbeitung 4.0 International  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de>

### **Impressum**

Patrick Vogt, c/o AutorenServices.de, Birkenallee 24, 36037 Fulda, Deutschland

---

# Vorwort

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski am Fachgebiet für Regelungstechnik und Mechatronik der TU Darmstadt im Rahmen einer Forschungskoooperation mit der ROBERT BOSCH GmbH.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski für die Betreuung der Arbeit. Als Fachgebietsleiter trug er durch seinen Führungsstil maßgeblich zur herausragenden Arbeitsatmosphäre am Fachgebiet bei, indem er durch vertrauensvolle und motivierende Diskussionen fachliche Anregungen gab und bei Fragen und Problemen stets ein offenes Ohr hatte sowie den nötigen Freiraum zur Bearbeitung der Aufgabe ermöglichte. Außerdem danke ich Prof. Dr.-Ing. Stephan Rinderknecht für die freundliche Übernahme des Korreferats und das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Den Mitarbeitern des Projektes „Vehicle Dynamics 2.0“ bei der ROBERT BOSCH GmbH, Helge Westerfeld, Andreas Klug, Dr.-Ing. Nils Guse, Philipp Weingart, Andreas Zöbele und Nicole Scherer, danke ich für die fachlichen Gespräche und Diskussionen, die anregende Impulse gaben und zum Fortschritt dieser Arbeit beitrugen sowie die Unterstützung bei der Steuergerätecodeerstellung. Für ihre Arbeit an Seminar- und Abschlussarbeiten möchte ich mich bei den von mir betreuten Studenten bedanken, die dadurch ihren Teil zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Ich möchte mich herzlich bei allen Mitarbeitern und Kollegen am Fachgebiet für das familiäre Arbeitsklima und das motivierende Arbeitsumfeld bedanken. Dies betrifft zum einen die Mitarbeiterinnen des Sekretariats, Corina Fischer, Ilse Brauer und Brigitte Hoppe, sowie Systemadministrator Alfred Gross, die bei allen organisatorischen und technischen Problemen stets engagiert und unkompliziert zur Verfügung standen. Mein Dank gilt den Kollegen am Fachgebiet für viele fachliche und persönliche Gespräche und Diskussionen sowie die abseits der Arbeit verbrachte Zeit bei Spieleabenden, beim Bouldern oder im Kleinwalsertal. Besonderer Dank gilt dabei David Augustin und Jeremias Schucker für das Korrekturlesen eines Teil der Arbeit sowie Dr.-Ing. Eric Lenz für das Korrekturlesen der Arbeit sowie seine zahlreichen Ratschläge und Verbesserungsvorschläge zu meinen Veröffentlichungen und Programmen, insbesondere *gamma*syn.

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Albert und Andrea, danke ich für die liebevolle Unterstützung und dafür, dass sie den Grundstein für meine akademische Laufbahn legten, indem sie mir das Studium der Elektrotechnik und Informationstechnik an der Technischen Universität Darmstadt ermöglicht haben.

Petersberg, September 2020

*Patrick Vogt*



# Inhaltsverzeichnis

|   |            |
|---|------------|
| <b>Abkürzungsverzeichnis</b>                                    | <b>IX</b>  |
| <b>Symbolverzeichnis</b>  | <b>XI</b>  |
| <b>Zusammenfassung</b>  | <b>XV</b>  |
| <b>Abstract</b>   | <b>XVI</b> |
| <b>1 Einführung</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Problemstellung . . . . .                                   | 4          |
| 1.2 Zielsetzung und Stand der Technik . . . . .                 | 5          |
| 1.2.1 Regelung von Radgrößen im Bremsfall . . . . .             | 5          |
| 1.2.2 Maximierung der Verzögerung . . . . .                     | 10         |
| 1.2.3 Regelung von Radgrößen im Antriebsfall . . . . .          | 11         |
| 1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .                             | 12         |
| <b>2 Modellbildung und Systemanalyse</b>                        | <b>13</b>  |
| 2.1 Aktormodelle . . . . .                                      | 13         |
| 2.1.1 Reibungsbremse . . . . .                                  | 13         |
| 2.1.2 Elektrischer Bremsenaktor . . . . .                       | 16         |
| 2.1.3 Modellklassen der Aktoren . . . . .                       | 17         |
| 2.2 Fahrzeugmodelle . . . . .                                   | 21         |
| 2.2.1 Reifenmodelle . . . . .                                   | 22         |
| 2.2.2 Einradmodell . . . . .                                    | 28         |
| 2.2.3 Gesamtfahrzeugmodell . . . . .                            | 30         |
| 2.3 Sensormodelle . . . . .                                     | 32         |
| 2.3.1 Raddrehzahlsensor . . . . .                               | 32         |
| 2.3.2 Schlupfsensor . . . . .                                   | 33         |
| 2.3.3 Beschleunigungssensor . . . . .                           | 33         |
| 2.4 Diskretisierung . . . . .                                   | 33         |
| 2.4.1 Diskretisierung des nichtlinearen Einradmodells . . . . . | 33         |
| 2.4.2 Diskretisierung des linearen Einradmodells . . . . .      | 37         |
| 2.5 Identifikation . . . . .                                    | 39         |
| 2.5.1 Identifikation Hydraulikmodelle . . . . .                 | 39         |
| 2.5.2 Identifikation Fahrzeugparameter . . . . .                | 40         |
| 2.6 Systemanalyse . . . . .                                     | 42         |
| 2.6.1 Strukturmaße . . . . .                                    | 43         |
| 2.6.2 Strukturanalyse . . . . .                                 | 44         |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>3</b> | <b>Regelungskonzept zur Regelung des Radschlupfes</b>                    | <b>50</b>  |
| 3.1      | Anforderungen an den Reglerentwurf . . . . .                             | 50         |
| 3.2      | Auswahl geeigneter Regelungsverfahren . . . . .                          | 51         |
| 3.2.1    | Lineare Regelungsmethoden . . . . .                                      | 51         |
| 3.2.2    | Gain-Scheduling-Regelung . . . . .                                       | 52         |
| 3.2.3    | Inversionsbasierte Regelungsverfahren . . . . .                          | 52         |
| 3.2.4    | Gleitzustandsregelung . . . . .  | 53         |
| 3.2.5    | Modellprädiktive Regelung . . . . .                                      | 54         |
| 3.3      | Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden . . . . .                        | 55         |
| 3.3.1    | Vorsteuerung . . . . .   | 55         |
| 3.3.2    | Regelung . . . . .   | 56         |
| 3.3.3    | Extremwertsuche . . . . .  | 58         |
| <b>4</b> | <b>Generierung von Vorsteuertrajektorien für die Radschlupfregelung</b>  | <b>60</b>  |
| 4.1      | Konzept der modellbasierten Trajektoriengenerierung . . . . .            | 60         |
| 4.2      | Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für ein Einradmodell . . . . .   | 66         |
| 4.3      | Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für ein Zweispurmodell . . . . . | 68         |
| 4.3.1    | Regelgesetz . . . . .  | 70         |
| 4.3.2    | Interne Dynamik . . . . .  | 71         |
| 4.4      | Simulationsergebnisse der Vorsteuerung . . . . .                         | 72         |
| <b>5</b> | <b>Robuste strukturbeschränkte dynamische Ausgangsrückführung</b>        | <b>74</b>  |
| 5.1      | Gain-Scheduling Ansatz . . . . .   | 74         |
| 5.2      | Robuste Polbereichsvorgabe . . . . .                                     | 75         |
| 5.2.1    | Problemstellung . . . . .  | 76         |
| 5.2.2    | Gradientenberechnung . . . . .   | 85         |
| 5.2.3    | Beschränkungen der Reglerkoeffizienten . . . . .                         | 88         |
| 5.2.4    | Ausgangsreglerformulierungen . . . . .                                   | 90         |
| 5.3      | Robuste Polbereichsvorgabe für ein Einradmodell . . . . .                | 91         |
| 5.4      | Praktische Aspekte der Reglerimplementierung . . . . .                   | 97         |
| 5.4.1    | Stoßfreies Umschalten . . . . .  | 97         |
| 5.4.2    | Anti-Windup-Maßnahmen . . . . .  | 97         |
| 5.5      | Stabilitätsanalyse des geschlossenen Regelkreises . . . . .              | 98         |
| 5.6      | Simulationsergebnisse der Zwei-Freiheitsgrade Regelung . . . . .         | 105        |
| <b>6</b> | <b>Ansatz zur Optimierung der Kraftschlussausnutzung</b>                 | <b>110</b> |
| 6.1      | Regelungsverfahren zur Extremwertsuche . . . . .                         | 110        |
| 6.1.1    | Extremwertsuche . . . . .  | 110        |
| 6.2      | Extremum-Seeking für ein Einradmodell . . . . .                          | 115        |
| 6.3      | Simulationsergebnisse der reibwertoptimalen Regelung . . . . .           | 116        |
| <b>7</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                      | <b>120</b> |
| 7.1      | Zusammenfassung . . . . .  | 120        |
| 7.2      | Ausblick . . . . .   | 121        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Anhang</b>                              | <b>123</b> |
| A.1 Diskretisierung Einradmodell . . . . . | 123        |
| A.2 Diskrete Strukturmaße . . . . .        | 123        |
| A.3 Eigenwertgradienten . . . . .          | 125        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                | <b>128</b> |





---

# Abkürzungsverzeichnis

|      |   |
|------|---|
| ABA  | <i>Notbremsassistent</i> (engl. Automatic Brake Assist). 2,   |
| ABS  | <i>Antiblockiersystem</i> . 1–10, 12, 14, 15, 26, 40, 41, 50, 58, 117, 120                          |
| ACC  | <i>adaptive Geschwindigkeitsregelung</i> (engl. adaptive cruise control). 2,                        |
| ASR  | <i>Antriebsschlupfregelung</i> . 11   |
| AWP  | <i>Anfangswertproblem</i> . 33,   |
| BBW  | <i>Brake-by-Wire</i> . 15   |
| CA   | Control Allokation ( <i>control allocation</i> ). 16  |
| DGL  | <i>Differentialgleichung</i> . 24, 36, 113  |
| EAL  | <i>exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung</i> . XIV, XV, 9, 52–56, 60, 62, 65, 66, 68, 72, 73, 120 |
| EHB  | <i>elektrohydraulisches Bremssystem</i> . 15, 16,   |
| EMB  | <i>elektromechanisches Bremssystem</i> . 15, 16   |
| ES   | <i>Extremum Seeking</i> . XII, XV, XVI, 11, 50, 55, 58, 110–121                                     |
| ESP  | <i>elektronisches Stabilitätsprogramm</i> . 1, 2, 14,   |
| GCC  | <i>Global Chassis Control</i> . 2,  |
| GMA  | <i>Giermomentaufbauverzögerung</i> . 122  |
| GS   | <i>Gain-Scheduling</i> . 9,   |
| HAL  | Hydraulikabstraktionsschicht (engl. <i>Hydraulic Abstraction Layer</i> ).                           |
| HSRI | <i>Highway Safety Research Institute</i> . 25–27  |
| IMC  | Internes-Modell Regelung ( <i>internal model control</i> ).   |
| IMM  | <i>Interacting Multiple Model Filter</i> .  |
| IP   | <i>Innere Punkte Verfahren</i> . 82   |

|         |  |
|---------|--|
| LDW     | <i>Spurhalteassistent</i> (engl. lane departure warning). 2,   |
| LMI     | <i>lineare Matrixungleichung</i> . 51, 52, 54, 100–103, 105  |
| LOLIMOT | <i>lokal linearer Modellbaum (local linear model tree (LoLiMoT))</i> . XI, 17–20, 39–41, 55, 107, 108, 117–119 |
| LQR     | <i>linear-quadratische Regelung</i> .  |
| LS      | Methode der kleinsten Quadrate (engl. <i>Least Squares</i> ). 25, 39,  |
| LuGre   | <i>LuGre</i> . 24, 26, 27  |
| MIMO    | <i>Multiple-Input-Multiple-Output</i> . 68,  |
| MLS     | <i>Maximum Likelihood Schätzer</i> . 10,   |
| MPC     | modellprädiktive Regelung ( <i>model predictive control</i> ). 16, 54,   |
| MPSA    | <i>Motor-Pumpen-Speicheraggregat</i> . 15,   |
| NHTSA   | <i>National Highway Traffic Safety Administration</i> . 1,   |
| NLP     | <i>nichtlineares Problem</i> . 54, 81, 89  |
| PDE     | <i>partielle Differentialgleichung</i> . 24,   |
| QP      | <i>quadratisches Problem</i> . 54,   |
| RBF     | <i>radiale Basisfunktion</i> . 17, 18, 58  |
| RK      | <i>RUNGE-KUTTA Verfahren</i> . 34–36,  |
| RLS     | rekursive Methode der kleinsten Quadrate (engl. <i>Recursive Least Squares</i> ). 10                           |
| RMSE    | <i>mittlerer quadratischer Fehler</i> . 116,   |
| SMC     | <i>Gleitzustandsregelung</i> . 8, 54,  |
| SQP     | <i>sequentiell quadratisches Problem</i> . 94  |
| XBS     | <i>Extended Braking Stiffness</i> . 10, 11   |
| ZOH     | <i>Abtast-Halteglied nullter Ordnung</i> . 32, 38, 64,   |

# Symbolverzeichnis

## Funktionen

|                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| $J_B$                                | Bewertungsfunktion zur Bewertung eines Polgebietes.   |
| $\ \mathbf{A}\ _F$                   | FROBENIUS-Norm $\ \mathbf{A}\ _F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n  a_{ij} ^2}$ .   |
| $J$                                  | Gütemaß.  |
| $\mathcal{L}_{f(x)}^i \mathbf{g}(x)$ | LIE-Ableitung $i$ -ter Ordnung nach $x$ der Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ . |
| $\Phi(x, i)$                         | Aktivierungsfunktion eines LoLiMoT-Modells.   |
| $\phi(x, i)$                         | Zugehörigkeitsfunktion eines LoLiMoT-Modells.   |
| $z$                                  | Randfunktion eines Polgebietes.   |
| $J_S$                                | Straffunktion zur Bewertung eines Polgebietes.  |

$\text{vec}(\mathbf{A})$       Vektorisierung einer Matrix mit  $\text{vec} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$ .

## Symbole

|               |  |
|---------------|--|
| $x^{(n)}$     | $n$ -te Ableitung der Variablen $x$ nach der Zeit $t$ mit $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ . |
| $\xi_{C,i}$   | Beobachtbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ .  |
| $\xi_{C,i}^d$ | diskretes Beobachtbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ .                                      |
| $S_i$         | Dominanzmaß eines Eigenwertes $i$ .  |

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $S_i^d$                   | diskretes Dominanzmaß eines Eigenwertes $i$ .   |
| $\kappa_{\mathbf{B},i}$   | Entkopplungsmaß eines Eigenwertes $i$ nach BENNINGER.                                 |
| $\kappa_{\mathbf{B},i}^d$ | diskretes Entkopplungsmaß eines Eigenwertes $i$ nach BENNINGER.                       |
| $\mathbf{A}$              | Matrixvariable.   |
| $x^*$                     | Lösung eines Optimierungsproblems.  |
| $\mathcal{W}$             | Indexmenge der Räder $\mathcal{W} = \{\text{VL}, \text{HL}, \text{HR}, \text{VR}\}$ . |
| $\xi_{\mathbf{B},i}$      | Steuerbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ .   |
| $m_{\mathbf{B},i}$        | Steuerbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ nach BENNINGER.                               |
| $m_{\mathbf{B},i}^d$      | diskretes Steuerbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ nach BENNINGER.                     |
| $\xi_{\mathbf{B},i}^d$    | diskretes Steuerbarkeitsmaß eines Eigenwertes $i$ .                                   |
| $\mathbf{T}$              | Transformationsmatrix.  |
| $\tilde{x}$               | transformierter Zustand eines Systems.  |
| $\mathbf{a}$              | Vektorvariable.   |
| $\mathcal{A}$             | Menge.  |

### Variablen

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $a$                      | Fahrzeugbeschleunigung.                   |
| $s_{\mathbf{B}}$         | Aktorpol.                                 |
| $\tilde{a}_{\mathbf{B}}$ | Aktorverstärkung.                         |
| $c^*$                    | Bremsenbeiwert.                           |
| $\omega_{\text{ES}}$     | Anregungsfrequenz beim Extremum Seeking.  |
| $h_{\text{ES}}$          | Hochpasspollage beim Extremum Seeking.    |
| $\kappa$                 | Stabilitätsreserve des Extremum Seekings. |
| $F_z$                    | Aufstandskraft.                           |
| $F_{\text{Bremsse}}$     | Bremskraft.                               |
| $z$                      | Fahrzeugaufbauweg.                        |

---

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $F_x$                   | Längskraft oder Reifenkraft.  |
| $F_B$                   | Zuspannkraft.   |
| $\lambda$               | Schlupf.  |
| $\lambda_{\text{krit}}$ | kritischer Schlupf.   |
| $\mathbf{P}$            | LYAPUNOV-Matrix.  |
| $M_A$                   | Antriebsmoment.   |
| $M_B$                   | Bremsmoment.  |
| $\mu$                   | Reibwert.   |
| $\theta$                | Nickwinkel.   |
| $\omega$                | Raddrehzahl.  |
| $p_B$                   | Bremsdruck.   |
| $\mathbf{K}_D$          | Differentialanteil eines PID-Reglers.                                   |
| $\mathbf{K}_I$          | Integralanteil eines PID-Reglers.                                       |
| $\mathbf{K}_P$          | Proportionalanteil eines PID-Reglers.                                   |
| $p_{B,\text{soll}}$     | Solldruck.  |
| $p_{B,r,\text{soll}}$   | Solldruck aus dem Rückführungsanteil der Zwei-Freiheitsgrade Regelung.  |
| $p_{B,s,\text{soll}}$   | Solldruck aus dem Vorsteuerungsanteil der Zwei-Freiheitsgrade Regelung. |
| $p_{B,s}$               | Bremsdruck im Vorsteuerungsanteil der Zwei-Freiheitsgrade Regelung.     |
| $\mathbf{F}$            | Vorfiltermatrix.  |
| $\mathbf{K}$            | differentielle Rückführungsmatrix.                                      |
| $\mathbf{R}$            | proportionale Rückführungsmatrix.                                       |
| $\delta$                | relativer Grad eines Systems.   |
| $\delta$                | totaler relativer Grad eines Systems.                                   |
| $\beta$                 | Scheduling Variable.  |
| $T$                     | Abtastzeit eines zeitdiskreten, dynamischen Systems.                    |
| $T_{\text{aus}}$        | Totzeit am Ausgang eines Systems.                                       |
| $T_{\text{ein}}$        | Totzeit am Eingang eines Systems.                                       |

|                  |  |
|------------------|--|
| $v$              | Fahrzeuggeschwindigkeit.   |
| $\eta_\mu$       | Ausnutzung des vorhandenen Reibwertes.   |
| $\bar{\eta}_\mu$ | mittlere Ausnutzung des vorhandenen Reibwertes.                                |
| $\xi$            | Zustände der externen Dynamik bei der exakten Eingangs-/Ausganglinearisierung. |
| $\eta$           | Zustände der internen Dynamik bei der exakten Eingangs-/Ausganglinearisierung. |

# Zusammenfassung

Die Regelung des gebremsten Rades eines gummibereiteten Fahrzeugs stellt seit vier Jahrzehnten Generationen von Ingenieuren vor schwierige Herausforderungen und es wurden bereits zahlreiche Ansätze dazu erdacht und implementiert. Eine wesentliche Herausforderung der Regelstrecke ist die mit der Fahrzeuggeschwindigkeit skalierte Dynamik, wenn der Radschlupf als relative Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Fahrzeug und Radaufstandspunkt geregelt werden soll, sowie die hohe Nichtlinearität der Reifenkraftschlusskennlinie in Abhängigkeit des Schlupfes. In der tatsächlichen Implementierung kommt darüber hinaus noch der Abtastcharakter der Regelung auf einem digitalen Mikrocontroller hinzu, der im Rahmen dieser Arbeit systematisch in den Entwurf mit einbezogen werden soll. Dazu wird zuerst ein physikalisches Modell des Fahrzeugs einschließlich der Bremsenaktuatorik aufgestellt und dieses anschließend mittels Strukturmaßen untersucht sowie Schlüsse für die notwendige Reglerstruktur aus dieser Untersuchung abgeleitet.

In dieser Arbeit wird ein modellbasierter Ansatz zur Regelung des Radschlupfes vorgeschlagen, der aus einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit nichtlinearer modellbasierter Vorsteuerung und einer robust entworfenen Rückführung mittels Gain-Scheduling besteht. Für die Vorsteuerung wird ein Ansatz über die exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung gewählt, mit dem sich das nichtlineare System bezogen auf das Ein-/Ausgangsverhalten wie ein lineares System regeln lässt. Für die Rückführung wird ein Gain-Scheduling über die Schedulingparameter Fahrzeuggeschwindigkeit und Radschlupf durchgeführt, um den durch die hohe Parameterunsicherheit in der Reifenkennlinie und die reziproke Abhängigkeit der Systemdynamik von der Geschwindigkeit variablen Parameterbereich in kleinere Unsicherheitsbereiche zu unterteilen, für die anschließend ein linearer Regler mit fester Struktur über die Methode der robusten Polbereichsvorgabe entworfen wird. Basierend auf diesem Schlupfregler wird in einem zweiten Schritt ein Algorithmus verwendet, der in der Lage ist, das Maximum der Reibwertkennlinie einzuregeln, um den verfügbaren Kraftschluss bestmöglich auszunutzen, das sog. Extremum Seeking. Der gesamte Reglerentwurf erfolgt dabei rein zeitdiskret, um die charakteristischen Effekte der Diskretisierung bei einer digitalen Regelung behandeln zu können.

Die vorgeschlagene Reglerstruktur wird dabei in Simulationen für unterschiedliche Reibwerte der modellbasierten Vorsteuerung und der realen Strecke untersucht und dabei gezeigt, dass die Regelung mit Extremwertsuche auch in der Lage ist, das Maximum zu finden, wenn die Reibwertkurve ihr Maximum verändert.

# Abstract

The control of the braked wheel of a vehicle has posed a difficult challenge for generations of engineers for four decades and numerous approaches have been conceived and implemented. A major challenge of the controlled system is the scaling of the dynamics with the vehicle speed, if the wheel slip as a relative speed difference between the vehicle and the wheel contact point is to be controlled, as well as the high nonlinearity of the tire friction curve as a function of the slip. In addition to that the sampling character of the control loop comes into play in the actual implementation on a digital microcontroller, which shall be systematically included in the design process within the scope of this thesis. For this purpose, a physical model of the vehicle including the brake actuators is first set up and then examined by means of structural measures. Conclusions for the necessary controller structure are derived from this examination.

In this thesis, a model-based approach for the control of the wheel slip is proposed, which consists of a two degree of freedom structure with nonlinear model-based feedforward control and a robustly designed feedback control using gain scheduling. For the feedforward control, an approach via exact feedback linearization is chosen, which allows to control the nonlinear system like a linear system with respect to the input/output behaviour. For feedback, gain scheduling is performed using the scheduling parameters vehicle speed and wheel slip in order to subdivide the variable parameter range into smaller uncertainty ranges due to the high parameter uncertainty in the tire characteristic and the reciprocal dependence of the system dynamics on the vehicle speed. A linear controller with a fixed structure is then designed for these uncertainty ranges using the method of robust pole region assignment. Based on this slip controller, an algorithm is used, which is able to search for the maximum of the friction characteristic in order to use the available frictional value in the best possible way, the so called extremum seeking. The entire controller design is purely time-discrete in order to be able to deal with the characteristic effects of discretization in digital control.

The proposed controller structure is examined in simulations for different friction coefficients of the model-based feedforward control and the real system. It is shown that the control with extremum seeking is also able to find the maximum when the friction characteristic changes its maximum.



# 1 Einführung

Die Automobilindustrie wurde in den letzten Jahren und Jahrzehnten durch zwei große Problemfelder maßgeblich beeinflusst und wird dies auch noch in den nächsten Jahren weiter werden: Der Reduktion von Schadstoffemissionen als Beitrag zum Umweltschutz und dem Trend zur Automatisierung von Fahrfunktionen zur Komfortsteigerung und Verbesserung der Fahrsicherheit. Im Bereich der Senkung von Schadstoffemissionen sind in den letzten Jahren beträchtliche Fortschritte erzielt worden und es ist gelungen, bestärkt durch gesetzgeberischen Druck, bspw. den  $\text{NO}_x$ -Ausstoß von  $0,25 \frac{\text{g}}{\text{km}}$  für Fahrzeuge der Klasse EURO4 um 68 % auf  $0,08 \frac{\text{g}}{\text{km}}$  für Fahrzeuge der Schadstoffklasse EURO6dTemp zu senken [56]. Es werden jedoch in Zukunft bedingt durch eine restriktivere Gesetzgebung weitere Anstrengungen unternommen werden müssen, um die Vorgaben zum Schadstoffausstoß von gesetzgeberischer und gesellschaftlicher Seite einhalten zu können, wozu in [169] erste vielversprechende Ansätze aufgezeigt werden.

Ein ebenso weites Feld für Verbesserungen bietet die Automatisierung von Fahrfunktionen, mit der auf der Stabilitätsebene vor allem die Sicherheit der Fahrzeuge durch Unterstützung des Fahrers in fahrdynamisch oder perzeptiv anspruchsvollen Situationen erhöht werden soll und auf höheren Ebenen der Automatisierung vor allem der Komfort für den Fahrzeugführer erhöht werden soll, bis auf der höchsten Automatisierungsstufe schließlich das Fahrzeug alle Führungsaufgaben selbsttätig übernimmt [22, S. 662].

Einen wesentlichen Beitrag zur Erhöhung der Fahrsicherheit im Bereich der aktiven Sicherheitssysteme leistete das bereits 1928 von WESSEL in [227] erdachte, 1931 von MÖHL in [128] auf hydraulische Bremsen erweiterte und 1978 von der ROBERT BOSCH GmbH als erste elektronische Variante in Serie gebrachte Antiblockiersystem (ABS) [27, S. 273]. Für einen weiteren geschichtlichen Überblick über die Entwicklung des Antiblockiersystems sei bspw. auf [89] verwiesen. Das Ziel des Antiblockiersystems besteht vor allem darin, das Blockieren der Räder beim Bremsen des Fahrzeugs zu verhindern und so den maximalen Kraftschluss zwischen Reifen und Fahrbahn zu erreichen und gleichzeitig die Lenkbarkeit des Fahrzeugs aufrecht zu erhalten. So konnte die Anzahl an Verkehrstoten in Deutschland durch Maßnahmen der passiven Sicherheit, der Einführung des ABS sowie der Serienentwicklung des elektronischen Stabilitätsprogramms (ESP) zu Beginn der 1990er Jahre von über 20.000 pro Jahr in 1970 auf etwa 3.000 in 2018 gesenkt werden, während gleichzeitig die Anzahl an Fahrzeugen um etwa Faktor 3 zugenommen hat, wie Abbildung 1.1 zeigt. Nach den für den Zeitraum 1995 bis 2007 ausgewerteten Daten der National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) wirkt sich das ABS insbesondere auf die Verhinderung von schweren Unfällen auf nasser Straße und leichten Unfällen im Allgemeinen positiv aus [91].

Nach der Entwicklung grundlegender Längs- und Querdynamikregelsysteme wurden in den folgenden Jahren zunehmend Systeme entwickelt, die nicht nur für die Fahrstabilität verantwortlich

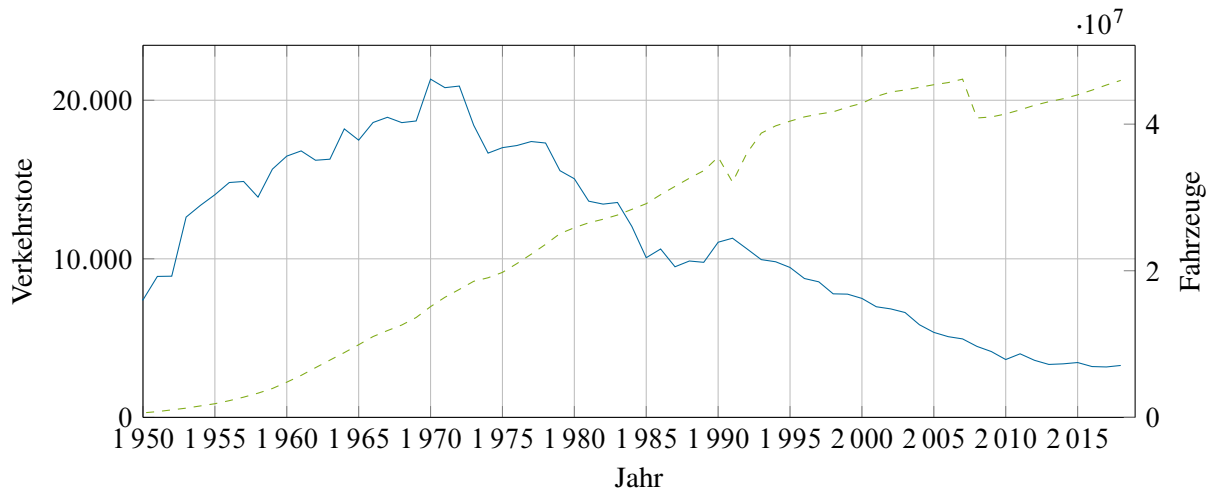


Abbildung 1.1: Anzahl an Verkehrstoten (—) und Fahrzeugen in Gesamtdeutschland (- - -) von 1950 bis 2018 nach [193].

sind, sondern auch Aufgaben der Fahrzeugführung übernehmen, wie die adaptive Geschwindigkeitsregelung (ACC), der Notbremsassistent (ABA) und der Spurhalteassistent (LDW) [229]. In den letzten Jahren schreitet die Automatisierung dieser Fahrzeugführungssysteme immer weiter voran und es ist bereits möglich, mit Seriensensorik auf der Autobahn vollautomatisierte Fahrstreifenwechsel durchzuführen oder auf die Autobahn auf- und abzufahren, wie in [73] und [183] gezeigt, und auch im fahrdynamischen Grenzbereich den Betrieb eines Fahrzeugs ohne Fahrereingriffe zu bewerkstelligen [71].

All diese Systeme kommen jedoch nicht ohne eine Ansteuerung der Aktoren, die direkt das Radverhalten beeinflussen - dem Motor und der Radbremse - aus, da der Reifen für das Fahrzeug die einzige Stelle ist, an der Kräfte auf die Straße übertragen werden können, um eine Änderung bspw. der Fahrtrichtung oder der Fahrgeschwindigkeit erreichen zu können [22, S. 66]. Da in aktuellen Serienfahrzeugen jedoch sowohl die seit Jahrzehnten erprobten Fahrdynamikregelsysteme wie ABS und ESP als auch in zunehmendem Maße neuartige Fahrerassistenzsysteme Eingriffe in die Bremsdynamik vornehmen, stellt die Arbitrierung der Anforderungen der unterschiedlichen Systeme eine große Herausforderung dar. Diese lässt sich zum einen durch integrierte Ansätze, wie bspw. in [79] oder Global Chassis Control (GCC) der BMW AG erreichen, bei denen die verschiedenen Regelungssysteme integriert werden und damit keine getrennten Systeme mehr sind, die widerstrebende Anforderungen an die Aktorik geben könnten. Da es in der Automobilindustrie jedoch mit der traditionellen Zulieferindustrie hochspezialisierte Partner bei der Entwicklung verschiedener Regelsysteme gibt, die untereinander in Wettbewerb stehen, ist eine Trennung der Verantwortlichkeiten der unterschiedlichen Regelsysteme schon aus betriebswirtschaftlichen Gründen gegeben, solange die Fahrzeughersteller nicht allesamt auf integrierte Ansätze zur Fahrdynamikregelung umsteigen [83, S. 335–343]. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine zum integrierten Entwurf der Fahrdynamikregelung alternative Herangehensweise zu betrachten, bei der den Gegebenheiten in der Automobilindustrie zum jetzigen Zeitpunkt Rechnung getragen werden kann, indem die verschiedenen Regelsysteme nach wie vor getrennt bleiben. Ein solcher Ansatz ist bspw. eine kaskadierte Systemstruktur, wie in Abbildung 1.2 darge-

stellt, bei der die Regelungsaufgaben von der untersten Ebene mit der Ansteuerung der Aktoren immer weiter abstrahiert werden, bis auf der obersten Ebene, bspw. beim automatisierten Fahren, nur noch eine gewünschte Route vorgegeben wird [229, S. 1090 f.]. In diesem Sinne übernimmt das Antiblockiersystem dann nicht mehr nur die traditionellen Funktionen im Fall einer starken Bremsung, sondern ist für die Ansteuerung der Bremsenaktorik in jedem Bremsfall zuständig und stellt eine geeignete Schnittstelle bereit, über die überlagerte Regler für bspw. Längsverzögerung  $a$  oder Gierwinkel  $\psi$  entsprechende Kraftanforderungen absetzen können.

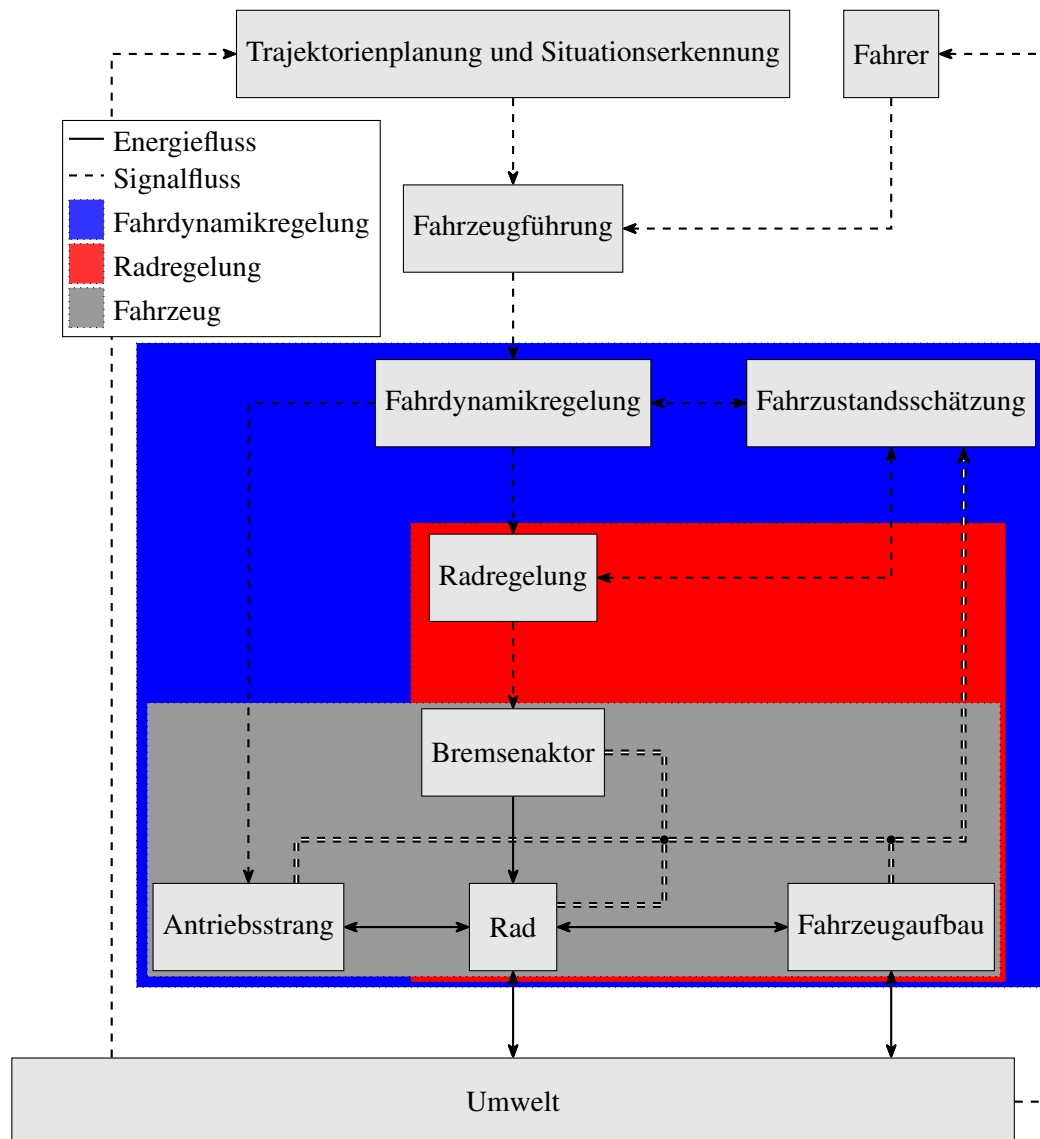


Abbildung 1.2: Kaskadierte Fahrdynamikregelung in Anlehnung an [83, S. 365] und [184].

Eine weitere Herausforderung in diesem Zusammenhang sind die unterschiedlichen Typen von Bremsenaktoren, die sich teilweise seit Jahrzehnten in Serienfahrzeugen finden, wie die hydraulische Bremse oder zur Serienreife oder zumindest zum Prototypenstadium entwickelt wurden, aber noch nicht in großem Stil eingesetzt werden, wie die elektrohydraulische und elektromechanische Bremse, oder die im Zuge der Elektrifizierung des Antriebsstranges zur Vermeidung

von zu hohem Schadstoffausstoß zunehmend verfügbare rein elektrische Bremse durch generatorische Verzögerung, auch wenn diese nur für Teilbremsungen genutzt werden können [22, S. 383–490]. Alle diese Aktoren unterscheiden sich durch ihre speziellen Charakteristika und stellen bei der Auslegung der Fahrdynamikregler große Herausforderungen an die Entwickler, da ein entwickelter Regelalgorithmus potentiell in der Lage sein muss, mit allen unterschiedlichen Typen von Aktoren funktionsfähig zu sein. Dies erhöht den Applikationsaufwand beträchtlich und es soll daher ein Ziel dieser Arbeit sein, Wege aufzuzeigen, wie sich verschiedene Aktoren anhand ihres dynamischen Verhaltens in Klassen einteilen lassen, für die ein einheitlicher Reglerentwurf durchgeführt werden kann, um so den Aufwand für die Einstellung von Reglerparametern insbesondere durch Fahrzeugtests zu verringern. Dazu bietet sich vor allem der modellbasierte Entwurf von Reglern an, bei dem das Fahrzeug nach [83, S. 1–22] und [22, S. 365 ff.] als mechatronisches Gesamtsystem betrachtet wird und dessen einzelne Teile mittels physikalischer Modelle beschrieben werden können.

Neben dem Vorhandensein von verschiedenen Aktortypen entsteht darüber hinaus durch die hohe Zahl an Konfigurationsmöglichkeiten beim Zusammenstellen eines Automobils für den Endkunden eine große Zahl an unterschiedlich ausgestatteten Fahrzeugen, für die die eingesetzten Fahrsicherheitssysteme zuverlässig funktionieren müssen. Hinzu kommt ein enormer Kostendruck sowohl bei der Entwicklung als auch bei der Ausstattung von Fahrzeugen mit zusätzlichen oder hochgenau zu fertigenden Komponenten. Dies äußert sich in hohen Anforderungen an die Robustheit des zu entwerfenden Regelsystems, da sich sowohl die Strecke selbst in ihrer Parametrierung, bspw. durch Verwendung unterschiedlicher Bremscheiben oder Reifen sowie durch unvermeidbare Fertigungstoleranzen, als auch in ihrer Struktur verändert, wenn unterschiedliche Bremssysteme verwendet werden. Hinzu kommt darüber hinaus noch, dass einige der fahrdynamisch relevanten Größen, wie bspw. der Reibwert oder das Bremsmoment, nicht mit vertretbarem Kostenaufwand gemessen werden können und daher nicht für eine Regelung zur Verfügung stehen. Da insbesondere der Reibwert bzw. die daraus resultierende Längskraft nicht gemessen wird, muss von einer hohen Unsicherheit bezüglich der Parametrierung des Reifenverhaltens ausgegangen werden und ein Regelungskonzept gefunden werden, das mit dieser Unsicherheit umgehen kann.

In der vorliegenden Arbeit soll die robuste Regelung unter Parametervariationen des gebremsten Rades einen Schwerpunkt der Untersuchungen für den Fall des Geradeausbremsens mit aktiviertem Antiblockiersystem darstellen und ein Weg aufgezeigt werden, wie sich ein robuster Regler für nur prototypisch bekannte Kraftschlusszusammenhänge mit unsicheren Parametern modellbasiert entwerfen lässt, der in der Lage ist, ein Blockieren der Räder zu verhindern und ggf. die auf die Straße abgesetzte Kraft zu maximieren.

## 1.1 Problemstellung

Die vorliegende Arbeit entstand zum Teil im Rahmen des Kooperationsprojektes „Vehicle Dynamics 2.0“ des Fachgebietes für Regelungstechnik und Mechatronik der Technischen Universität Darmstadt mit der ROBERT BOSCH GmbH. Das Projekt wurde im Rahmen der Überarbeitung der

Fahrdynamikregelungsalgorithmen bei der ROBERT BOSCH GmbH als Machbarkeitsstudie mit dem Ziel durchgeführt, auszuloten, welche Vorteile und Nachteile das Ersetzen des vorhandenen Regelalgorithmus für das Antiblockiersystem (ABS) durch einen physikalisch motivierten, modellbasierten Regler mit sich bringen würde. Der modellbasierte Reglerentwurf soll dabei helfen, den Regler schneller an sich ändernde Fahrzeuge mit u. U. verschiedenen Sensor- und Aktorkonzepten applizieren zu können und Kundenwünsche einfacher in die bestehende Reglerstruktur einfließen lassen zu können sowie die Verständlichkeit des Regelungsansatzes zu verbessern.

Da der Reifen das zentrale Element eines Fahrzeugs zur Übertragung einer Kraft auf die Straße darstellt, soll ein Modell des Kontaktes zwischen Reifen und Straße ausgewählt werden, das die verschiedenen Varianten von Reifen, die an ein Fahrzeug montiert werden können, hinsichtlich ihres Verhaltens beim Kraftaufbau und der Kraftübertragung auf die Straße beschreibt. Der zu entwerfende Regler soll dieses Modell systematisch berücksichtigen, wobei jedoch davon ausgegangen werden soll, dass weder der konkrete Zusammenhang zwischen den Radgrößen, wie Radrehzahl  $\omega$  oder Reifenschlupf  $\lambda$ , und der entstehenden Kraft oder deren Ableitung und Krümmung bekannt noch auf einfache Weise oder überhaupt schätzbar ist, sondern als in gewissen Grenzen variabel anzunehmen ist. Neben diesen unbekanntenen Größen existieren darüber hinaus strukturelle Variationen in den in verschiedenen Fahrzeugen verbauten Aktoren und Sensoren, die eine systematische Behandlung erfordern. So unterscheiden sich bspw. ein hydraulischer Bremsenaktor, eine elektrohydraulische Bremse, eine elektromechanische Bremse oder eine rein elektrische Bremse in ihren dynamischen Eigenschaften wesentlich. Schwerpunktmäßig wird jedoch nur der rein hydraulische Bremsenaktor betrachtet, da dieser bei weitem am meisten verbreitet ist und dessen regelungstechnische Eigenschaften ihn zu einem verglichen mit einem elektrischen Aktor schwer zu regelnden Teilsystem machen. Für die betrachteten Sensorvarianten wird davon ausgegangen, dass nur ein Raddrehzahlsensor sowie ein Vordrucksensor und die bspw. in [14] verwendete Sensorik zur Schätzung des Reifenschlupfes zur Verfügung steht.

Da der Regelalgorithmus auf einem digitalen Steuergerät mit  $T = 5 \text{ ms}$  Abtastzeit laufen soll, muss der Regler als zeitdiskreter Regler ausgelegt werden, um die speziellen Probleme, die bei der Diskretisierung von dynamischen Systemen entstehen, zu berücksichtigen.

## 1.2 Zielsetzung und Stand der Technik

Im Folgenden sollen die Anforderungen an den zu entwerfenden ABS-Regler dargestellt werden und ein Überblick über bereits vorhandene Ansätze zum Erreichen der Anforderungen gegeben werden, wobei sowohl auf signalbasierte und datenbasierte, als auch auf modellbasierte Ansätze eingegangen wird.

### 1.2.1 Regelung von Radgrößen im Bremsfall

Zur Regelung der Radgrößen im Bremsfall gibt es im Wesentlichen drei große Klassen von Regelungsansätzen, die jeweils zur Regelung unterschiedlicher Radgrößen eingesetzt werden können.

Die historisch ältesten zur Radregelung eingesetzten Ansätze sind signalbasiert und werden in Abschnitt 1.2.1.1 beschrieben. Neben den signalbasierten Ansätzen sind die modellbasierten Ansätze weit verbreitet und es lässt sich über die Entwicklung von ABS-Algorithmen beobachten, dass sich signal- und modellbasierte-Regelungsverfahren in wiederkehrenden Zyklen abwechseln. Mit der in den letzten Jahren zunehmenden Rechenleistung von Mikrocontrollern ist darüber hinaus eine dritte Gruppe von Verfahren hinzu gekommen, bei denen basierend auf der Verarbeitung großer Datenmengen und deren Interpretation mittels Lernalgorithmen eine Regelstrategie festgelegt wird, wie in Abschnitt 1.2.1.2 beschrieben.

Die Notwendigkeit einer ABS-Regelung besteht darin, dass das Bremsmoment, das der Fahrer bei einer panikartigen Betätigung des Bremspedals durch den hohen entstehenden Radbremsdruck erzeugt, dazu führt, dass sehr schnell ein großer Schlupf am Rad entsteht und das Maximum des Reibwertes erreicht wird. Wenn in diesem Fall nicht durch den Fahrer der Bremspedaldruck und damit in der Folge der Radbremsdruck zurückgenommen wird, erhöht sich der Schlupf weiter und bedingt durch die der Gummireibung inhärente Form der Reibwertkurve mit einem stetigen Abfall nach dem Maximum nimmt die auf die Straße übertragbare Kraft ab, während das Rad in immer höheren Schlupf gerät. Reagiert der Fahrer auch jetzt noch nicht, so kann das Rad innerhalb von einigen hundertstel oder zehntel Sekunden zum Blockieren gebracht werden [127, S. 250], da mit dem Überschreiten des Maximums der Reibwertkurve ebenfalls die Grenze zwischen stabilem und instabilem Verhalten des Systems überschritten wird, sodass die Lenkbarkeit des Fahrzeugs verloren geht [189, S. 8].

### 1.2.1.1 Signalbasierte Regelungsansätze

Bei den signalbasierten Ansätzen werden keine Informationen aus einem physikalisch hergeleiteten Modell der Strecke verwendet, sondern stattdessen die Messwerte analysiert und anhand ihres Verlaufes eine geeignete Stellgröße bestimmt. Zur Regelung des Radschlupfes wurden bereits unterschiedliche signalbasierte Verfahren vorgeschlagen, von denen die frühesten vor allem auf einer Umschaltung des Druckes in verschiedenen Phasen je nach Verlauf der gemessenen Signale basieren, während bei neueren Ansätzen Gleitzustandsregler oder singuläre Steuerungen [26, S. 286] verwendet werden, um einen ähnlichen Effekt zu erzielen. Die grundlegende Idee hinter den signalbasierten Verfahren mit mehreren Phasen besteht darin, das oben beschriebene Verhalten des Rades durch verschiedene Signale zu charakterisieren und geeignete Gegenmaßnahmen einzuleiten, um das Blockieren des Rades zu verhindern. Bei den in heutigen Serienfahrzeugen verwendeten Ansätzen erfolgt die Erkennung des Radverhaltens vor allem anhand des Verlaufes des Radschlupfes sowie der Radbeschleunigung und in der einfachsten Form werden drei Arten von Maßnahmen eingeleitet, wenn die beschriebenen Größen gewisse Schwellwerte überschreiten oder unterschreiten: Der Druckaufbau, das Druckhalten und der Druckabbau [22, S. 466 f.]. Wie in Abbildung 1.3 gezeigt, wird zu Beginn der Bremsung der vom Fahrer vorgegebene Druck auf den Radbremszylinder durchgeleitet, da die Einlassventile zum Bremszylinder des Hydroaggregates geöffnet und die Auslassventile geschlossen sind. Wenn nun die Radbeschleunigung einen unteren Schwellwert  $a_{\text{Rad}}^-$  unterschreitet, werden die Einlassventile geschlossen und eine weitere Erhöhung des Druckes verhindert, wodurch ein weiteres Ansteigen des Radschlupfes verlangsamt wird.

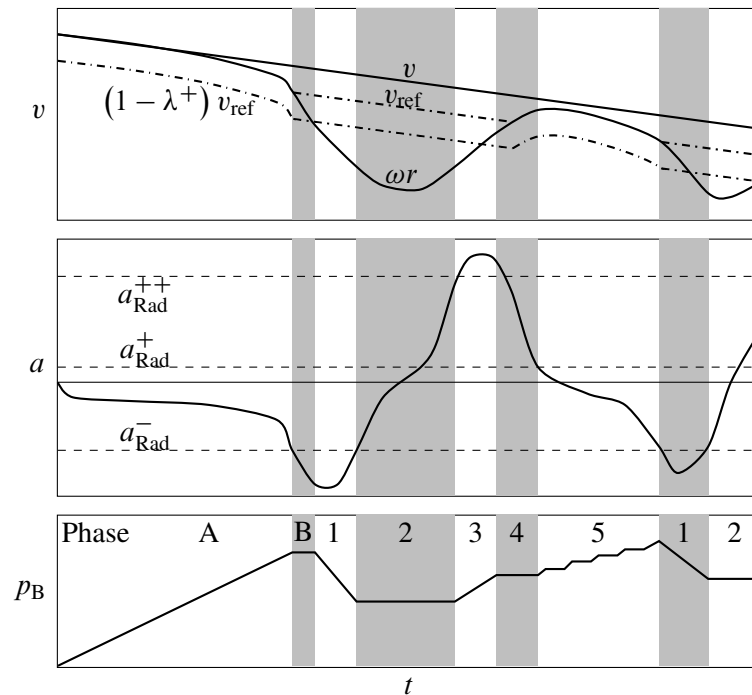


Abbildung 1.3: Signalbasiertes Konzept einer ABS-Regelung mit fünf Phasen nach [22, S. 466].

Überschreitet nun der geschätzte Radschlupf einen Schwellwert  $\lambda^+$  wird eine Druckabbauphase eingeleitet, die so lange andauert, bis die Radbeschleunigung wieder größer als  $a_{\text{Rad}}^-$  wird, damit das Rad nicht in einen Schlupf gebracht wird, der zu weit vom kritischen Schlupf, bei dem das Maximum der Reibwertkurve erreicht wird, entfernt ist. Anschließend wird der Radbremsdruck konstant gehalten, bis eine positive Radbeschleunigung  $a_{\text{Rad}}^{++}$  erreicht wird, bei der durch Öffnen der Einlassventile ein erneuter Druckaufbau solange zugelassen wird, bis die Schwelle  $a_{\text{Rad}}^{++}$  wieder unterschritten wird und erneut die Einlassventile geschlossen und damit der Radbremsdruck konstant gehalten wird. Wird nun eine kleinere positive Radbeschleunigung  $a_{\text{Rad}}^+$  erreicht, so wird durch zyklisches Öffnen und Schließen der Einlassventile ein gepulster Druckaufbau eingeleitet, da das Rad sich in einem Schlupf befindet, der im stabilen Bereich zu weit vom kritischen Schlupf entfernt ist, bis schließlich erneut die Radbeschleunigung  $a_{\text{Rad}}^-$  unterschritten wird und der gesamte Vorgang von vorne beginnt, bis das Fahrzeug zum Stillstand kommt oder der Fahrer den Bremsdruck reduziert. In [226] wird ein solcher Regler mit feinerer Aufteilung der Schaltschwellen für drei Phasen ohne gepulsten Druckaufbau entworfen und dessen Regelbasis anhand von stückweise linearen Systemen untersucht, während in [105] ein zeitgesteuerter Ansatz mit vier Phasen vorgeschlagen wird. Das Konzept der fünf Phasen wird in [147] dahingehend erweitert, dass keine Messung des Schlupfes mehr nötig ist. Auf die Messung des Radschlupfes wird ebenfalls in [40] verzichtet und stattdessen die Reifenkraft gemessen, womit sich ein Zwei-Phasen-Algorithmus entwerfen lässt, in dem die Radbeschleunigung auf einen positiven oder negativen Sollwert eingeregelt wird.

Neben den auf Schaltschwellen basierenden Algorithmen sind bspw. in [35], [52] und [212] Gleitzustandsregler vorgeschlagen worden, um eine Radregelung durchführen zu können, die den

Schlupf als Regelgröße verwenden. In [222] wird zusätzlich zur Längsdynamik auch die Querdynamik des gebremsten Rades betrachtet und in den Entwurf des Gleitzustandsreglers einbezogen.

Die Diskretisierung der Schwellwertalgorithmen ist im Allgemeinen einfach zu bewerkstelligen, wobei jedoch vielfach keine rigorosen Stabilitätsbetrachtungen durchgeführt werden und bei den auf Gleitzuständen basierenden Ansätzen ist mit [98] eine Möglichkeit zur Diskretisierung gegeben, die eine bei Verwendung der EULER-Diskretisierung entstehende Instabilität verhindern kann. Der Entwurf der hier angegebenen Verfahren für Antiblockiersysteme erfolgt jedoch ausschließlich zeitkontinuierlich.

### 1.2.1.2 Datenbasierte Regelungsansätze

Im Gegensatz zu den signalbasierten Ansätzen aus Abschnitt 1.2.1.1 wird bei datenbasierten Methoden zur Regelung des Antiblockiersystems vor allem auf neuronale Netze oder Fuzzy-Systeme zurückgegriffen, die entweder, wie bspw. in [123] oder [233], direkt zur Regelung des Systems verwendet werden, wie bspw. in [39], [88], [107] oder [160], zur Adaption von Reglerparametern eines modellbasierten Schlupfregleransatzes verwendet werden, oder, wie in [87], zur Vorsteuerung in Kombination mit einem PID-Regler verwendet werden. Der Vorteil datenbasierter Methoden gegenüber modellbasierten Methoden liegt darin, dass zum Entwurf und Betrieb des Reglers keine Modellbeschreibung des Systems mit Parametern vorliegen muss, sondern lediglich eine geeignete Datenbasis vorhanden sein muss, mittels derer das Regelverhalten antrainiert werden kann. Dies ist gleichzeitig auch ein großer Nachteil, da die entsprechende Datenbasis erst durch aufwendige Fahrzeugmessungen aufgenommen werden muss und u. U. nicht vollständig genug ist, um in jedem Betriebsfall ein sinnvolles Lernverhalten zu erreichen [133, S. 569]. In [110] wird darüber hinaus eine Gleitzustandsregelung mit einem Fuzzy-System kombiniert, bei dem die wesentlichen Nichtlinearitäten durch den Fuzzy-Regler kompensiert werden und für das entstehende System eine Gleitzustandsregelung entworfen wird. Ein ähnlicher Ansatz, bei dem der Fuzzy-Regler jedoch durch einen GREY-Prädiktor und ein adaptives neuronales Netz ersetzt wird, ist in [94] vorgeschlagen. Ein weiterer auf Gleitzustandsregelungen basierender Ansatz wird in [81] verfolgt, bei dem die Unsicherheit bzw. Parametervariabilität in der Reifenkennlinie sowie den Systemparametern durch einen Störgrößenbeobachteransatz mittels neuronaler Netze geschätzt und anschließend kompensiert wird. Schließlich wird in [158] eine Art des Reinforcement Learnings, das Q-Learning, angewandt, um den Radschlupf zu regeln.

Der Entwurf der datenbasierten Ansätze erfolgt meist zeitkontinuierlich, sofern Gleitzustandsregler verwendet werden und zeitdiskret oder mit un spezifiziertem Abtastverhalten, wenn Fuzzyregler oder neuronale Netze zur Anwendung kommen.

### 1.2.1.3 Modellbasierte Regelungsansätze

Zuletzt existiert noch die große Gruppe der modellbasierten Ansätze, die den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit darstellen und auf Regelgesetzen basieren, die anhand der physikalischen



Modellgleichungen des zu regelnden Systems entworfen werden. Wie schon bei den signalbasierten Ansätzen unterscheiden sich die modellbasierten Algorithmen vor allem durch die Wahl der Regelgröße, wobei entweder die Radbeschleunigung oder der Radschlupf geregelt werden, in seltenen Fällen auch eine Kombination von beidem, wie bspw. in [178]. Eine besondere Herausforderung bei Verwendung des Schlupfes als Regelgröße stellt die Skalierung der Schlupfdynamik mit der reziproken Fahrzeuggeschwindigkeit dar, da das System für  $v \rightarrow 0$  unendlich schnell wird. Regler, die die Radbeschleunigung als Regelgröße verwenden, sind u. a. der in [85] vorgeschlagene nichtlineare PID Regler oder der adaptive Regler aus [148] bzw. [149], die jedoch beide zusätzlich den Radschlupf als Regelgröße verwenden. Im Bereich der reinen Schlupfregelung als Grundlage für einen ABS-Algorithmus sind vier wesentliche Regelungsmethoden stark verbreitet, die mit unterschiedlichen Erweiterungen versehen werden. Dies ist zum einen die Klasse der adaptiven Regelungen, die teilweise mit den bereits in Abschnitt 1.2.1.2 beschriebenen Verfahren kombiniert werden, wie [223], oder über LYAPUNOV-Ansätze die Stabilität des Adaptiongesetzes garantieren, wie bspw. [210], [219] oder [232], und zum anderen die Verwendung von PID-Reglern. Neben den reinen PID- bzw. Ausgangsregleransätzen, die bspw. in [4], [10], [11], [36] oder [38] verwendet wurden, sind verschiedene Erweiterungen auf nichtlineare PID-Regler bzw. allgemeine dynamische Ausgangsrückführungen durchgeführt worden, u. a. in [85] mittels nichtlinearer Verzerrung des Regelfehlers und in [202] und [203] durch Auslegung eines nichtlinearen Ausgangsreglers anhand der Methode von LYAPUNOV. Darüber hinaus wurde in [45] ein Ansatz mit Zurücksetzen der Reglerzustände bei einem PI-Regler für den Radschlupf untersucht. Zu den reinen PID-Regleransätzen kommen noch solche, bei denen ein Gain-Scheduling über verschiedene Regler gleicher Struktur durchgeführt wird, wie bspw. in [191] mit robust entworfenen PID-Reglern, die stückweise im Arbeitsraum gültig sind, oder in [224] mit als Lösung eines „simultaneous stabilization problems“ erhaltenen PI-Reglern. Der Entwurf robuster Regler in einem Gain-Scheduling-Schema bildet auch die Grundlage für den in [152] und [153] durchgeführten Entwurf basierend auf einem linear-quadratischen Regelungsansatz.

Neben den reinen Schlupf- und Radbeschleunigungsreglern existieren darüber hinaus auch einige Verfahren, die zusätzlich die Fahrzeuggeschwindigkeit als Regelgröße verwenden, so z. B. der in [206] vorgeschlagene Backsteppingregler oder der auf dem Konzept der Flachheit basierende Regler in [1], da die Fahrzeuggeschwindigkeit für das verwendete Einradmodell einen flachen Ausgang darstellt [48]. Eng verwandt mit den flachheitsbasierten Regelungen ist die vierte verbreitete Methode zum Entwurf von Schlupfreglern. Dies ist die exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung (EAL), wie sie bspw. in [115], [124], [139] und [189] verwendet wird und bei der je nach Ansatz unterschiedliche Erweiterungen der Reglerstruktur vorgenommen werden, um die Robustheit des Reglers zu erhöhen oder dessen Leistung zu verbessern.

Fast alle der hier angegebenen modellbasierten Ansätze verwenden kontinuierliche Modelle zum Entwurf der Regelung und es wird nur bei einigen knapp darauf eingegangen, dass für die Implementierung auf dem Steuergerät ein Abtastsystem vorliegt, wie in [152], oder die Abtastung wird im Kontinuierlichen als Totzeitglied modelliert, wie in [11].

Für weitere, an dieser Stelle nicht betrachtete Ansätze sei bspw. auf [5] und [157] verwiesen.

### 1.2.2 Maximierung der Verzögerung

Neben der grundlegenden Funktionalität des Antiblockiersystems, das Blockieren des gebremsten Rades zu verhindern, ist es darüber hinaus wünschenswert, wenn der Regelalgorithmus den Bremsweg möglichst kurz werden lässt bzw. den maximal vorhandenen Reibwert optimal ausnutzt. Dazu sind seit Entwicklung des ersten serienmäßigen elektronischen ABS ebenfalls verschiedene Ansätze erdacht worden, die im Folgenden überblicksartig dargestellt werden.

Im einfachsten Fall wird ein fester kritischer Schlupf vorgegeben, wie bspw. in [126] für einen über einen Optimalsteuerungsansatz entworfenen Schlupfregler durchgeführt, bei dem der Sollschlupf einem Referenzwert im typischen Bereich des optimalen Reibwertes folgen soll.

Daneben gibt es im Wesentlichen drei Klassen von Algorithmen zur Maximierung der Verzögerung, die zur Laufzeit den Reibwert aktiv maximieren. Zum einen solche, die den optimalen Reibwert schätzen und daraus einen Sollwert für eine unterlagerte Regelung ableiten und zum anderen solche, die direkt eine auf Optimierung der Längskraft basierende Regelstrategie verfolgen und schließlich solche, bei denen die Maximierung durch die ohnehin vorhandenen Eigenschaften des Regelungsansatzes über Parameterveränderungen erreicht wird.

Zur ersten Klasse gehören bspw. die in [30], [70] oder [96] vorgeschlagenen Algorithmen, bei denen durch Beobachteransätze oder die rekursive Methode der kleinsten Quadrate (engl. Recursive Least Squares (RLS)) eine Schätzung für den aktuellen Reibwert bzw. verschiedene Arten von Straßenbeschaffenheiten mit unterschiedlichen kritischen Schlüpfen ermittelt werden. Der optimale Bremschlupf kann dann bspw. wie in [70] durch Abgleich der identifizierten Straßenbeschaffenheit mit einem Kennfeld ermittelt werden oder durch direkte Identifikation einer prototypischen Reibwertkurve, wie in [204] mittels eines Maximum Likelihood Schätzers durchgeführt, erhalten werden. Anstatt den optimalen Schlupf über den Umweg des Reibwertes zu ermitteln, kann auch durch eine Frequenzanalyse des Raddrehzahlsignales die Tatsache ausgenutzt werden, dass das gebremste Rad bei etwa 40 Hz eine Resonanzfrequenz besitzt, die beim Bremsen am Maximum der Reibwertkurve angeregt wird und durch Bestimmung der Resonanzverstärkung ein Regelgesetz hergeleitet werden kann, dass in der Lage ist, die Längskraft zu maximieren, wie in [199] gezeigt. Ebenfalls auf einer Frequenzanalyse, jedoch der des Schlupfes, basiert die in [189] vorgeschlagene Methode, bei der der Stick-Slip Effekt des Reifens im Frequenzband von 8 Hz bis 11 Hz ausgenutzt wird und über eine Vorzeichenwechselsuche im zweiten Koeffizienten der zugehörigen FOURIER-Reihe der optimale Schlupf bestimmt wird. Diese Methoden dienen dazu, die sog. Extended Braking Stiffness (XBS)  $\frac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda}$  zu schätzen, die in der Folge zu 0 geregelt werden kann, da dort die maximale Verzögerung erreicht werden kann, wie bspw. mit dem in [47] und [46] vorgeschlagenen expliziten Beobachter für die Reifensteifigkeit und einem entsprechenden Regler.

Vor allem bei klassischen signalbasierten Ansätzen, die auf der Entstehung eines Grenzyklusses beruhen, lässt sich die Maximierung der Verzögerung dadurch erreichen, dass die Amplitude des Grenzyklus verkleinert und so das zu weite Einlaufen in den stabilen oder instabilen Bereich der Reibwertkurve verhindert wird oder indem an der Hinterachse ein grenzyklenbasierter Ansatz

verwendet wird, über dessen Analyse auf den kritischen Schlupf geschlossen werden kann, der dann an der Vorderachse als Sollgröße für einen Schlupfregler verwendet werden kann, wie in [38] vorgeschlagen.

Zu den expliziten Optimierungsstrategien zur Verzögerungsmaximierung gehört bspw. der in [208] vorgeschlagene Optimalsteuerungsansatz für die Fahrzeugbeschleunigung, bei dem allerdings sowohl die maximal mögliche Längskraft als auch der zugehörige Schlupf bekannt sein müssen, um den optimalen Schlupf einregeln zu können. Wenn der optimale Schlupf nicht bekannt ist, lassen sich dagegen verschiedene Arten von Optimierungsverfahren verwenden, um diesen während der Bremsung zu ermitteln [234]. In [108] wird dies bspw. dadurch erreicht, dass ein gradientenfreier Optimierungsalgorithmus in Form des in [205] vorgeschlagenen neuronalen Optimierers angewandt wird, um die Verzögerung zu maximieren. Eine weitere Art, mittels gradientenfreier Optimierung das Maximum der Reibwertkurve zu finden, besteht im sog. Extremum Seeking (ES), bei dem ein periodisches Anregungssignal auf die Strecke gegeben wird und über die Streckenantwort ein Schätzwert für den Gradienten der Reibwertkurve ermittelt wird, der anschließend, ähnlich wie beim XBS-Regler, nach 0 geregelt wird, wie bspw. in [9] oder [49] vorgeschlagen, wobei jedoch teilweise die periodische Anregung durch einen Gleitzustand ersetzt wird, wie in [52].

### 1.2.3 Regelung von Radgrößen im Antriebsfall

Neben dem Bremsfall kann auch der Antriebsfall, bei dem die sog. Antriebsschlupfregelung (ASR) verwendet wird, betrachtet werden, wenn zusätzlich zur Radbremse auch der Antriebsmotor als Aktor berücksichtigt wird. Die grundsätzliche Funktionsweise für ein Antriebsschlupfregelung ist bspw. in [22, S. 467 ff.], [164, S. 50–56] und [216] beschrieben. Weitere Ansätze dazu für Elektrofahrzeuge bzw. elektrische Aktoren in den Rädern ist bspw. in [185] und [196] gegeben und im ähnlich gelagerten Fall von elektrischen Bahnen kann mit den bspw. in [28] und [186] vorgeschlagenen Maximumsuchverfahren eine Maximierung der Kraftschlussausnutzung erreicht werden. Der Antriebsfall wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der modellbasierten Regelung des Radschlupfes im Bremsfall unter besonderer Berücksichtigung des Abtastcharakters des zu regelnden Systems, der in der Literatur überwiegend nur am Rande in die Betrachtungen mit einbezogen wird. Dies stellt eine besondere Herausforderung dar, da die Rückführverstärkung durch den Diskretisierungsvorgang eine obere Schranke erhält, die im kontinuierlichen Fall nicht existiert. Darüber hinaus stellt die robuste Regelung im Rahmen einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur einen methodischen Schwerpunkt der Arbeit dar, die in der Literatur bisher vor allem durch Gleitzustandsregelungen oder Gain-Scheduling Ansätze erreicht wird.

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Anschließend an die Einleitungen in diesem Kapitel werden in Kapitel 2 die in dieser Arbeit verwendeten Modelle des gebremsten Rades sowie des Fahrzeugs einschließlich des Reifen-Straße Kontaktes und der unterschiedlichen Bremsenaktoren sowie der zur Messung der Regelgrößen benötigten Sensoren vorgestellt. Darüber hinaus wird eine strukturelle Untersuchung der Modelle durchgeführt, um anhand dessen eine geeignete Reglerstruktur für das gebremste Rad festlegen zu können.

In Kapitel 3 wird die Reglerstruktur unter Einbeziehung der in Kapitel 2 herausgearbeiteten strukturellen Anforderungen basierend auf den Anforderungen an ein Antiblockiersystem abgeleitet und vorgestellt.

Kapitel 4 befasst sich mit dem Vorsteuerungsanteil des entworfenen Regelungskonzeptes und beschreibt dessen Grundlagen und Auslegung sowohl für das einzelne gebremste Rad als auch im Gesamtfahrzeugkontext.

Der Rückführanteil der vorgeschlagenen Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ist mitsamt den benötigten Grundlagen für den Entwurf in Kapitel 5 beschrieben. Dort wird ebenfalls auf zu berücksichtigende praktische Aspekte bei der Implementierung des Reglers eingegangen und eine Stabilitätsuntersuchung der Rückführung durchgeführt.

Kapitel 6 widmet sich schließlich der Bremsung unter optimaler Ausnutzung des Reibwertes und abgeschlossen wird die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 7.

---

## 2 Modellbildung und Systemanalyse

---

In diesem Kapitel werden die Modelle für die zu regelnden Teilsysteme vorgestellt. Dies sind zum einen die verschiedenen Modelle für unterschiedliche Aktorkonzepte, in denen eine Radbremse ausgestaltet sein kann, mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad für die spätere Verwendung in Regelung und Simulation und zum anderen die Fahrzeugmodelle einschließlich Reifenverhaltensmodellen für die Regelung des gebremsten Rades am Einzelrad mit dem Einradmodell sowie im Gesamtfahrzeugkontext mit dem Zweispurmodell. Darüber hinaus wird eine Zeitdiskretisierung der Modelle durchgeführt und das Einradmodell mittels Strukturmaßen auf strukturelle Aussagen über die nötige Reglerstruktur untersucht.

---

### 2.1 Aktormodelle

Zur Modellierung des Verhaltens der Bremsenaktoren bei Vorgabe eines Solldruckes bzw. -bremsmomentes sind unterschiedliche Modelle verwendbar, die sich je nach Einsatzzweck im Grad ihrer Detailtiefe unterscheiden. Es sind verschiedene Arten von Aktoren gebräuchlich, insbesondere:

- Reibungsbremse
  1. hydraulische Bremse
  2. elektrohydraulische Bremse
  3. elektromechanische Bremse
- elektrische Bremse

Die Aktoren lassen sich auf unterschiedliche Weise beschreiben, entweder als lineare Übertragungsglieder erster oder zweiter Ordnung, die im gesamten Arbeitsraum gültig sind, als Überlagerung solcher Glieder, die jeweils in Teilbereichen des Arbeitsraumes gültig sind, oder über spezielle, detaillierte, nichtlineare Modelle, die das jeweilige konkrete Aktorverhalten abbilden.

#### 2.1.1 Reibungsbremse

Bei der Reibungsbremse wird das Bremsmoment  $M_B$  durch Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme erzeugt, indem ein Reibbelag gegen ein am Rad befestigtes Teil, im Fall der Trommelbremse das Innere der Bremstrommel und im Fall der Scheibenbremse die Brems Scheibe,

gedrückt wird, wodurch eine kraftschlüssige Verbindung entsteht, die über den wirksamen Radius zum Bremsmoment führt. Dazu wird eine Zuspännkraft  $F_B$  durch die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Wirkprinzipien erzeugt, aus der die Bremskraft

$$F_{\text{Bremsse}} = c^* (F_B) \quad (2.1)$$

entsteht, die vom sog.  $c^*$ -Wert abhängt, der sich je nach Bauart der Bremse unterscheidet [18, S. 645]. Für Scheibenbremsen ergibt sich bspw. der lineare Zusammenhang

$$c^* (F_B) = 2\mu_B F_B \quad (2.2)$$

mit dem Belagreibwert  $\mu_B$ , der in erster Näherung als konstant angenommen werden kann, jedoch nach [43] und [187] in hohem Maße von der Temperatur abhängt. Der Belagreibwert liegt üblicherweise im Bereich zwischen 0,35 und 0,5 [18, S. 660].

Das Bremsmoment entsteht aus der Bremskraft durch den effektiven Reibradius  $r_B$  über

$$M_B = r_B c^* (F_B) , \quad (2.3)$$

wobei auch der effektive Reibradius von der Temperatur der Brems Scheibe abhängig ist, wie Untersuchungen in [44, S. 10 f.] gezeigt haben.

### 2.1.1.1 Hydraulische Bremsenaktoren

Da sie in heutigen Serienfahrzeugen am weitesten verbreitet sind und aufgrund der hohen Leistungsdichte trotz einiger Bestrebungen zur Einführung einer „trockenen Achse“ auch noch langfristig erhalten bleiben werden, um die Leistungsanforderungen beim Bremsen erfüllen zu können, werden in dieser Arbeit schwerpunktmäßig hydraulische Bremsenaktoren betrachtet. Es werden dabei unterschiedlich detaillierte Modellstufen des Aktorverhaltens verwendet, je nachdem, ob das Aktormodell für den Reglerentwurf oder die Simulation verwendet werden soll. Im Falle eines hydraulischen Bremskreises als Radbremsaktor wird ein System bestehend aus dem Hauptbremszylinder, dem Hydroaggregat mit Einlass- und Auslassventilen für die vier Räder sowie der Rückförderpumpe, den Bremsleitungen und den Bremszylindern, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, verwendet.

Im Fall der hydraulischen Bremse führt der in der Hydraulik erzeugte Bremsdruck  $p_B$  zur Zuspännkraft

$$F_B = A_K p_B \quad (2.4)$$

über die Kolbenfläche  $A_K$  des Bremszylinders [22, S. 114].

Da in der vorliegenden Arbeit der Fall einer Bremsung betrachtet werden soll, wird davon ausgegangen, dass der vom Fahrer vorgegebene Druck im Hauptzylinder  $p_{HZ}$  ausreichend hoch ist, um einen vom ABS-Regler angeforderten Radbremsdruck einzustellen und Änderungen in  $p_{HZ}$  somit nur eine externe Störung darstellen. Andernfalls ist es bei Fahrzeugen mit ESP möglich,

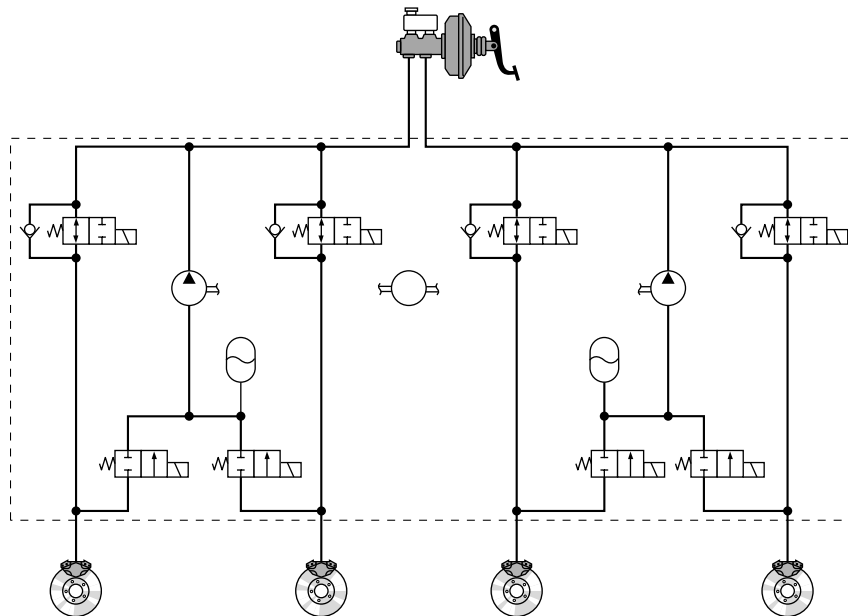


Abbildung 2.1: Hydraulischer Schaltplan einer Zweikreis Bremsanlage mit ABS-Ventilen nach [163, S. 143].

den Vordruck aktiv auf den benötigten Systemdruck zu erhöhen. Es wird daher das Aktorverhalten für eine Anforderung eines Solldruckes  $p_{B,soll}$  durch den Regler und dessen Auswirkung auf den Radbremsdruck  $p_B$  benötigt. Es wird in diesem Sinne davon ausgegangen, dass der hydraulische Aktor von einem unterlagerten Hydraulikregler geregelt oder zumindest für den benötigten Zweck gut genug gesteuert wird, sodass kein Übertragungsverhalten der Ventilansteuerungen auf den Radbremsdruck benötigt wird. Diese Annahme ist in soweit gerechtfertigt, als in heutigen Serienhydroaggregaten eine solche Steuerung des Radbremsdruckes vorgenommen wird [22, S. 475] und sich andernfalls bspw. über die in [21] oder [235] vorgeschlagenen Algorithmen eine sensorlose Druckregelung implementieren ließe, welche die Annahme erfüllt. Beim elektrohydraulischen Bremssystem und elektromechanischen Bremssystem ist eine unterlagerte Regelung ohnehin aktiv.

Neben den rein hydraulischen Aktoren sind auch solche in Benutzung, bei denen der Fahrer von der Bremshydraulik entkoppelt ist, wie bspw. beim elektrohydraulischen Bremssystem.

### 2.1.1.2 Elektrohydraulisches Bremssystem (EHB)

Wird bei dem in Abbildung 2.1 dargestellten Hydraulikplan der Hauptbremszylinder durch einen Hauptbremszylinder mit Pedalgefühlssimulator sowie ein Motor-Pumpen-Speicheraggregat (MP-SA) ersetzt, wodurch die hydraulische Kopplung zwischen Hauptbremszylinder und Hydroaggregat durch eine elektrische Kopplung ersetzt wird, erhält man ein sog. elektrohydraulisches Bremssystem (EHB) [189, S. 44 ff.]. Ein elektrohydraulisches Bremssystem ist daher zur Umsetzung der Brake-by-Wire (BBW) Funktionalität geeignet [189, S. 44 f.]. Diese wurde zu Beginn der 2000er Jahre u. a. in der MERCEDES BENZ E-Klasse von der ROBERT BOSCH GmbH in Serie gebracht sowie im Golf IV von der CONTINENTAL AG als Versuchsträger erprobt [189]. Das elektrohy-

draulische Bremssystem kann durch ein lineares Ersatzmodell in Form eines  $PT_1$ -Gliedes nach [176, S. 55] oder eines  $PT_2$ -Gliedes beschrieben werden [189].

### 2.1.1.3 Elektromechanisches Bremssystem (EMB)

Wird im Vergleich zum elektrohydraulischen Bremssystem noch ein Schritt weiter in Richtung „trockener Achse“ gegangen und die hydraulische Komponente des Bremssystems vollständig entfernt und durch einen elektrischen Antrieb ersetzt, so gelangt man zum elektromechanischen Bremssystem. Bei diesem Bremssystem besitzt jedes Rad einen elektrischen Antrieb, der über ein Spindelgetriebe die Zuspännkraft erzeugt, die beim hydraulischen Bremssystem durch den Druck im Bremszylinder hervorgerufen wird [18, S. 689 f.]. Es sind auch Kombinationen von elektrohydraulischem Bremssystem und elektromechanischem Bremssystem gebräuchlich, bei denen die Hinterachse mit elektromechanischem Bremssystem und die Vorderachse mit elektrohydraulischem Bremssystem ausgelegt wird [229, S. 579 ff.]. Die EMB kann ebenfalls durch ein lineares Übertragungsverhalten erster [151, S. 22] oder nach [11, S. 58] und [188, S. 31] zweiter Ordnung modelliert werden.

## 2.1.2 Elektrischer Bremsenaktor

Schließlich kann auch durch einen rein elektrischen Aktor beim generatorischen Bremsen durch den Fahrzeugantrieb eine Bremswirkung erreicht werden, die im Zuge der Elektrifizierung der Antriebe in immer mehr Fahrzeugen zur Verfügung steht [101]. Da sich auf diese Weise jedoch nur eine geringe Verzögerung [229, S. 565] und auch nur für geringe Geschwindigkeiten erreichen lässt [22, S. 255 ff.], wird dies vorwiegend im Teilbremsbereich bei niedrigen Verzögerungen durchgeführt und in diesem Fall die Reibungsbremse nicht verwendet [127, S. 279 f.]. Soll dies auch bei höheren Verzögerungswerten in Kombination mit der Reibungsbremse erreicht werden, sind geeignete Strategien zu wählen, wie die unterschiedlichen Aktorkonzepte überblendet werden können. Dazu ist es bspw. möglich, einen integrierten Entwurf durchzuführen, wie in [176] mittels einer modellprädiktiven Regelung gezeigt, was an dieser Stelle jedoch nicht weiter verfolgt werden soll, da von einer hierarchischen Reglerstruktur ausgegangen wird. Alternativ kann eine Control Allokation (control allocation (CA)) Strategie verwendet werden, bei der die unterlagerte Aktorregelung für die Aufteilung der Bremsmomentanforderungen auf den elektrischen und den über die Reibungsbremse wirkenden Aktor zuständig ist wie bspw. in [168, S. 317 f.] oder [176, S. 7] ausgeführt, womit der elektrische Aktor sich in das hierarchische Regelungskonzept einfügen lässt. Aus diesem Grund soll im Folgenden nicht weiter auf elektrische Bremsenaktoren eingegangen werden.



## 2.1.3 Modellklassen der Aktoren

### 2.1.3.1 Lineare Modellierung

Für den rein hydraulischen Bremsenaktor wird als einfachstes, für den gesamten Arbeitsbereich gültiges, im linearen Reglerentwurf verwendetes, dynamisches Modell ein Verzögerungsglied erster Ordnung mit der Dynamik

$$\dot{p}_B = s_B p_B + \tilde{a}_B p_{B,\text{soll}} \quad (2.5)$$

zwischen dem Sollruck  $p_{B,\text{soll}}$  und dem Bremsdruck  $p_B$  angenommen. Die zugehörige Übertragungsfunktion von Sollruck  $p_{B,\text{soll}}$  auf Bremsmoment  $M_B$  ist

$$G_{M_B \leftarrow p_{B,\text{soll}}}(s) = \frac{a_B}{s - s_B} = \frac{\frac{\partial c^*}{\partial p_B} r_B A_K \tilde{a}_B}{s - s_B} \quad (2.6)$$

mit der Verstärkung  $a_B = \frac{\partial c^*}{\partial p_B} r_B A_K \tilde{a}_B$ , deren Parameter in Abschnitt 2.5.1 angegeben sind.

Alternativ kann der hydraulische Aktor, vor allem zur Abbildung der Schwingungsfähigkeit und da er aus zwei physikalischen Domänen mit entsprechenden Energiespeichern besteht [11, S. 57], auch als  $PT_2$ -Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G_{M_B \leftarrow p_{B,\text{soll}}}(s) = \frac{\frac{\partial c^*}{\partial p_B} r_B A_K \tilde{a}_B^c}{(s - s_B)(s - s_c)} \quad (2.7)$$

modelliert werden. Die lineare Modellierung als  $PT_1$ - oder  $PT_2$ -Glied ist dabei sowohl für den rein hydraulischen Aktor nach [82, S. 362 f.], [168, S. 314], [225, S. 43] und [62, S. 30 f.] als auch für den elektrohydraulischen nach [62, S. 32 ff.], [176, S. 54 ff.], [189, S. 104] und [83, S. 150] sowie den elektromechanischen Aktor nach [151, S. 22] und [11, S. 58] gebräuchlich.

Neben der einfachen linearen Modellierung des Aktors werden auch nichtlineare Modelle zum Abbilden des Verhaltens der Hydraulik betrachtet. Dies sind zum einen lokal lineare Modelle ohne Unstetigkeiten, wie Totzonen oder Lose, und zum anderen komplexere Modelle, die diese Effekte ebenfalls abbilden können.

### 2.1.3.2 LoLiMoT-Modell

Für die Ermittlung eines nichtlinearen Hydraulikmodells wird auf das am Institut für Automatisierungstechnik von O. NELLES u. a. entwickelte LoLiMoT-Verfahren, das für lokal linearer Modellbaum (local linear model tree (LoLiMoT)) steht, zurückgegriffen [132]. Dieses zerteilt den Raum der Eingangs- und Ausgangsgrößen, d. h. den Raum von  $p_{B,\text{soll}}$  und  $p_B$ , automatisiert so, dass für jeden Teilbereich ein lokal gültiges lineares Modell mit dem höchsten Gütefunktionswert einer für die Identifikation vorgebbaren Gütefunktion identifiziert werden kann. Der Gesamtausgang des Modells ergibt sich durch Überlagerung der Teilmodelle mittels radialer Basisfunktionen als Aktivierungsfunktionen für die verschiedenen Ausgänge der lokalen Modelle, wie in Abbildung 2.2 schematisch dargestellt. Das LoLiMoT-Verfahren ist in der Lage, nichtlineare Funktio-

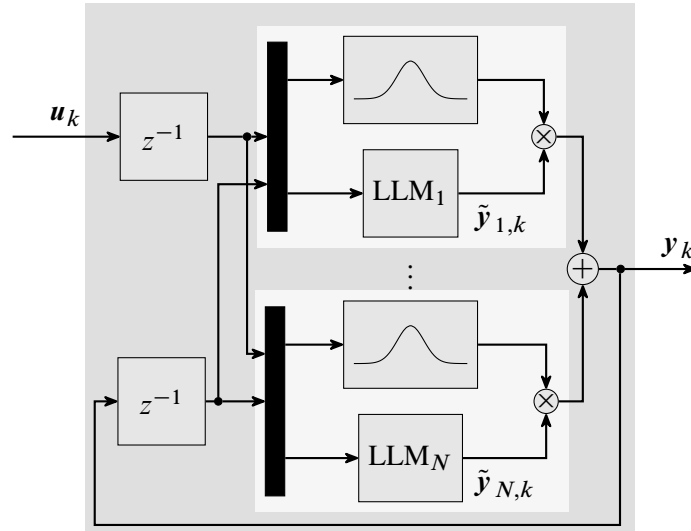


Abbildung 2.2: Blockschaltbild eines LoLiMoT nach [133, S. 603].

nen  $f$  der Form

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-1}, \dots, \mathbf{u}_{k-m}, \mathbf{y}_{k-1}, \dots, \mathbf{y}_{k-m}) \quad (2.8)$$

mit den Eingängen  $\mathbf{u}_k$  und den Ausgängen  $\mathbf{y}_k$  abzubilden, wobei im vorliegenden Fall  $m = 1$  mit  $\mathbf{u}_{k-1} = p_{B,\text{soll},k-1}$  und  $\mathbf{y}_{k-1} = p_{B,k-1}$  gilt, um eine Differenzgleichung erster Ordnung zu erhalten. Diese lässt sich durch Verwendung von  $N$  lokalen linearen Modellen (LLM $_i$ ) der Form

$$\tilde{y}_{k+1}^i = s_B^i \tilde{y}_k^i + a_B^i u_k, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

mit den Eigenwerten  $s_B^i$  und den Verstärkungen  $a_B^i$ . Zusammen mit den aus radialen Basisfunktionen bestehenden *Zugehörigkeitsfunktionen*

$$\phi(\mathbf{x}, i) = e^{-\frac{(x_1 - \mu_{1i})^2}{2\sigma_{1i}^2} - \dots - \frac{(x_n - \mu_{ni})^2}{2\sigma_{ni}^2}} \quad (2.10)$$

mit den Zentrumskoordinaten  $\mu_{ji}$  und den Standardabweichungen  $\sigma_{ji}$  des  $i$ -ten Modells und des  $j$ -ten Modellgültigkeitsbereiches für die Ein- und Ausgangsdaten  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{u}$ , die die *Aktivierungsfunktionen*

$$\Phi(\mathbf{x}, i) = \frac{\phi(\mathbf{x}, i)}{\sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{x}, j)} \quad (2.11)$$

bilden, folgt dann

$$p_{B,k+1} = \sum_{i=1}^N (s_B^i p_{B,k} + a_B^i p_{B,\text{soll},k}) \Phi\left(\begin{bmatrix} p_{B,k} \\ p_{B,\text{soll},k} \end{bmatrix}, i\right), \quad (2.12)$$

wobei

$$\sum_{i=1}^N \Phi(\mathbf{x}, i) = 1 \quad (2.13)$$

gilt [134, S. 846]. Die Modellparameter  $s_B^i$  und  $a_B^i$  werden in Abschnitt 2.5.1 identifiziert.

**Invertierung des LoLiMoT-Modells** Da in der Regelstrategie die Modellgleichung des Aktors invertiert werden muss, wird im Folgenden untersucht, wie sich dies für das LoLiMoT-Modell in Gl. (2.12) erreichen lässt. Aufgrund der Abhängigkeit des gesuchten Stelleinganges  $p_{B,\text{soll},k}$  von Termen der Form  $xe^{x^2}$  ist eine analytische Lösung des Inversionsproblems nicht möglich und es muss ein numerisches Verfahren gefunden werden. Ein Ansatz dazu ist in [137] angegeben, der darauf basiert, die Modellgleichung in einen bekannten Teil, der von den bekannten aktuellen und vorangegangenen Ausgängen und Eingängen sowie den gewünschten zukünftigen Ausgängen abhängt, und einen unbekanntem Teil, der von den zu ermittelnden Eingängen abhängt, für den die Zugehörigkeitsfunktionen durch stückweise lineare Funktionen auf dem Gültigkeitsbereich der lokalen Modelle ersetzt werden, zu zerlegen. Dazu wird zuerst der Modellausgang Gl. (2.12) zu

$$\begin{aligned}
p_{B,k+1} = & \sum_{i=1}^N \frac{\overbrace{s_B^i p_{B,k}}^{y_c} e^{-\frac{(p_{B,k}-\mu_{1i})^2}{2\sigma_{1i}^2}} e^{-\frac{(p_{B,\text{soll},k}-\mu_{2i})^2}{2\sigma_{2i}^2}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\frac{(p_{B,k}-\mu_{1j})^2}{2\sigma_{1j}^2}} e^{-\frac{(p_{B,\text{soll},k}-\mu_{2j})^2}{2\sigma_{2j}^2}}} + \dots \\
& \dots + \sum_{i=1}^N \frac{a_B^i p_{B,\text{soll},k} e^{-\frac{(p_{B,k}-\mu_{1i})^2}{2\sigma_{1i}^2}} e^{-\frac{(p_{B,\text{soll},k}-\mu_{2i})^2}{2\sigma_{2i}^2}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\frac{(p_{B,k}-\mu_{1j})^2}{2\sigma_{1j}^2}} e^{-\frac{(p_{B,\text{soll},k}-\mu_{2j})^2}{2\sigma_{2j}^2}}}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

ausgeschrieben. Anschließend wird der vom gesuchten Eingang abhängige Anteil der Zugehörigkeitsfunktion durch

$$\phi_u = \begin{cases} \frac{\beta}{\sigma_{2i}} (p_{B,\text{soll},k} - \mu_{2i}) + 1, & \mu_{2i} - \frac{\sigma_{2i}}{\beta} \leq p_{B,\text{soll},k} < \mu_{2i} \\ \frac{\beta}{\sigma_{2i}} (-p_{B,\text{soll},k} + \mu_{2i}) + 1, & \mu_{2i} \leq p_{B,\text{soll},k} \leq \mu_{2i} + \frac{\sigma_{2i}}{\beta} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.15}$$

mit einem Parameter  $\beta$  approximiert und die Gleichung in das quadratische Polynom

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{i=1}^N \left( a^i \phi_c \left( \mp \frac{\beta}{\sigma_{2i}} + 1 \right) - (p_{B,k+1} - y_c) \phi_c \left( \pm \frac{\beta}{\sigma_{2i}} \right) \right) p_{B,\text{soll},k} + \dots \\
& \dots + \sum_{i=1}^N \pm a^i \phi_c \frac{\beta}{\sigma_{2i}} p_{B,\text{soll},k}^2 - \sum_{i=1}^N (p_{B,k+1} - y_c) \phi_c \left( \mp \frac{\beta}{\sigma_{2i}} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

umgeformt [125, S. 265]. Diese kann nun für die Gültigkeitsbereiche der lokalen Modelle gelöst werden, sodass  $2N$  mögliche Lösungen entstehen, die auf ihre Eignung geprüft werden müssen. Wenn nach Elimination der gefundenen Lösungen außerhalb der Modellgültigkeitsbereiche noch mehrere Lösungskandidaten übrig sind, kann entweder, wie in [137, S. 161] vorgeschlagen, diejenige Lösung ausgewählt werden, die der zuletzt berechneten Lösung am nächsten liegt, oder das gesamte LoLiMoT mit den Lösungskandidaten für einen Schritt „simuliert“ werden und so Lösungskandidaten, die zu großen Abweichungen zum gewünschten Modellausgang führen eliminiert werden. Die Anwendung dieser Methode erfordert u. U. jedoch  $2N$  Simulationen des

Modells und ist damit sehr rechenintensiv. Eine höhere Genauigkeit in der Invertierung lässt sich erreichen, wenn die erhaltenen Lösungskandidaten erneut in die Aktivierungsfunktion eingesetzt werden und weitere Lösungskandidaten  $p'_{B,\text{soll},k}$  über

$$p'_{B,\text{soll},k} = \frac{p_{B,k+1} - \sum_{i=1}^N s_B^i p_{B,k} \Phi \left( \begin{bmatrix} p_{B,k} \\ p_{B,\text{soll},k} \end{bmatrix}, i \right)}{\sum_{i=1}^N a_B^i \Phi \left( \begin{bmatrix} p_{B,k} \\ p_{B,\text{soll},k} \end{bmatrix}, i \right)} \quad (2.17)$$

berechnet werden.

Alternativ kann auch die in [136] vorgeschlagene und in [135] zur Inversion verwendete Zugehörigkeitsfunktion bestehend aus Summen von GAUSSglocken verwendet werden, die jedoch keine wesentliche Verbesserung der Inversionsgüte zur Folge hat. Für eine allgemeine Vorgehensweise bei beliebigen Zugehörigkeitsfunktionen sei auf [54] verwiesen.

Wie in Abbildung 2.3 anhand des Vergleichs von einem zufällig vorgegebenen  $p_{B,\text{soll}}$  und dem invertierten Aktoreingang  $p_{B,\text{soll,inv}}$  zu sehen ist, kann insbesondere im Randbereich der Gültigkeit der lokalen Modelle und bei Vorhandensein von instabilen lokalen Modellen in den zugehörigen Bereichen kein zufriedenstellendes Ergebnis für die Inversion der Nichtlinearität erreicht werden. In [136, S. 161] wird ein Inversionsfehler von 10%-15% erreicht, was durch die Änderungen an den Zugehörigkeitsfunktionen und ein iteriertes Vorgehen teilweise verbessert werden kann, jedoch ist die Güte der Inversion insgesamt nicht hoch genug, um das Verfahren für die Regelung einzusetzen.

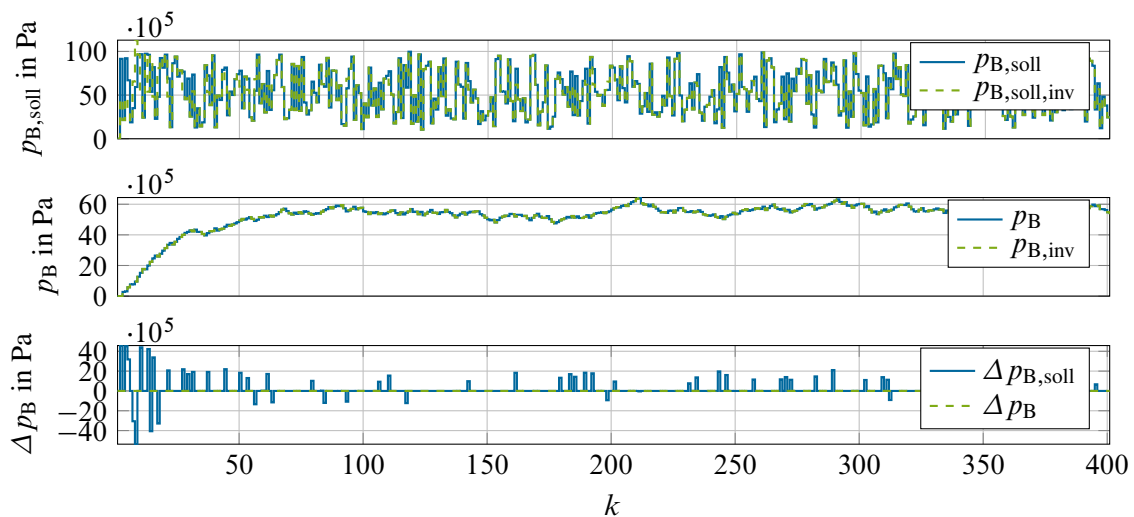


Abbildung 2.3: Simulation der vorgegebenen und invertierten Eingangstrajektorie für ein LoLiMoT-Modell.

Aus diesem Grund wird in der Regelung ein vereinfachtes LoLiMoT-Modell, das nur aus den lokal linearen Modellen und einem Überblenden der Modellausgänge anhand der vorangegangenen Modellausgänge, anstatt, wie beim vollständigen LoLiMoT, auch der vorangegangenen Modelleingänge, besteht, verwendet. Das vereinfachte Modell besteht aus  $N$  lokal linearen Modellen

der Form

$$p_{B,k+1}^i = s_B^i p_{B,k} + a_B^i p_{B,\text{soll},k}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.18a)$$

$$p_{B,k+1} = \sum_{i=1}^N p_{B,k+1}^i \frac{e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^i}{\sigma^i}\right)^2}{2}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^j}{\sigma^j}\right)^2}{2}}} \quad (2.18b)$$

und lässt sich bei bekanntem aktuellem Ausgang  $p_{B,k}$  und gewünschtem zukünftigen Ausgang  $p_{B,k+1}$  im nächsten Zeitschritt mittels

$$p_{B,\text{soll},k} = \frac{\sum_{i=1}^N s_B^i p_{B,k} \frac{e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^i}{\sigma^i}\right)^2}{2}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^j}{\sigma^j}\right)^2}{2}}}}{\sum_{i=1}^N a_B^i \frac{e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^i}{\sigma^i}\right)^2}{2}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\frac{\left(\frac{p_{B,k}-\mu^j}{\sigma^j}\right)^2}{2}}}} \quad (2.19)$$

analytisch invertieren. Dies lässt sich leicht auf Aktormodelle höherer Ordnung erweitern, wie in [133, S. 607] angegeben ist, was an dieser Stelle jedoch nicht weiter ausgeführt wird.

### 2.1.3.3 „Unstetige“ nichtlineare Modelle

Darüber hinaus wurden zur Modellierung der Hydraulik in der Simulation auch nichtlineare Modelle mit Unstetigkeiten verwendet, die vom Projektpartner ROBERT BOSCH GmbH zur Verfügung gestellt wurden. Sie zeichnen sich jedoch im Vergleich zu den oben beschriebenen nichtlinearen Modellen vor allem durch Totzonen beim Druckabbau sowie Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen aus.

## 2.2 Fahrzeugmodelle

Der neben dem Bremssystem zweite wichtige Modellteil ist der des Fahrzeugs. In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Detaillierungsstufen zur Abbildung des Fahrzeugverhaltens verwendet: Ein auf die reine Raddynamik reduziertes Einradmodell für den eigentlichen Bremsenreglerentwurf und ein Gesamtfahrzeugmodell mit Nickfreiheitsgrad, um die Regelung der einzelnen Räder im Gesamtfahrzeugkontext einsetzen zu können. Da nur der Fall einer Geradeausbremsung betrachtet wird, verfügen die Fahrzeugmodelle nicht über Freiheitsgrade in Querrichtung und damit entfallen beim Gesamtfahrzeug die Lenk- und Wankdynamik und der Antriebsstrang wird

ebenfalls nicht modelliert, da davon ausgegangen wird, dass der Fahrer beim Einleiten der Bremsung das Kupplungspedal getreten hat, wodurch der Antriebsstrang von den Rädern getrennt ist. Das betrachtete Gesamtfahrzeug besteht demgemäß aus den in Abbildung 2.4 dargestellten Komponenten nach [189, S. 14] und es ist zu erkennen, dass der Reifen als einziger Kontaktpunkt mit der Straße das zentrale Element bei der Betrachtung der Fahrdynamik darstellt.

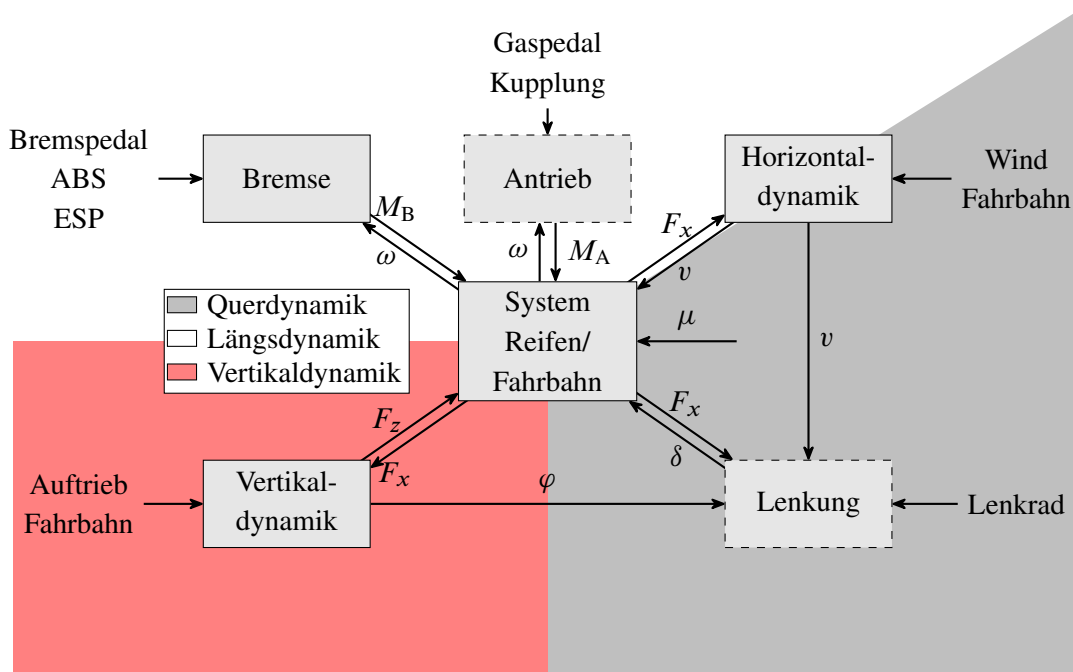


Abbildung 2.4: Komponenten eines Gesamtfahrzeugmodells nach [189, S. 14] und [83, S. 33].

### 2.2.1 Reifenmodelle

Da der Reifen bzw. die Modellierung des Reifen-Straße-Kontaktes von wesentlicher Bedeutung für die Modellbildung des Fahrzeugs ist, werden im Folgenden verschiedene Ansätze zur Modellierung dieses Teilsystems angegeben und hinsichtlich ihrer Eignung für den Entwurf eines Radschlupfreglers diskutiert.

Im Gegensatz zur formschlüssigen Kraftübertragung in bspw. Zahnradgetrieben findet die Kraftübertragung beim Reifen kraftschlüssig statt und bedingt durch die spezifischen Reibeigenschaften von Gummi ist dazu eine Differenzgeschwindigkeit zwischen dem Reifen und der Fahrbahn nötig. Diese Geschwindigkeitsdifferenz wird, normiert auf die Geschwindigkeit der Radaufstandsfläche, des sog. Latsches, als Schlupf  $\lambda$  bezeichnet und ist nach der Definition von BURCKHARDT und REIMPELL in [27, S. 17] als dimensionslose Größe

$$\lambda = \frac{v - \omega r}{v} \quad (2.20)$$

in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Fahrzeugs  $v$ , der Drehzahl des Rades  $\omega$  und des effektiven Reifenradius  $r$  definiert. Der Reibwert

$$\mu = \frac{F_x}{F_z} = \mu(\lambda) , \quad (2.21)$$

definiert als das Verhältnis von Aufstandskraft  $F_z$  zu Längskraft  $F_x$ , der sich durch diese Abhängigkeit ergibt, hängt darüber hinaus von vielen verschiedenen Faktoren, wie der Straßenbeschaffenheit, dem Fülldruck des Reifens, der Art des Reifens oder der Profilbeschaffenheit des Reifens, ab, die an dieser Stelle in ihrer Gesamtheit jedoch nicht weiter betrachtet werden sollen. Der wesentliche Einflussfaktor ist dabei die Beschaffenheit des Untergrundes und die  $\mu$ - $\lambda$ -Kurve besitzt qualitativ die in Abbildung 2.5 dargestellte Form für unterschiedliche Untergründe. Es ist zu er-

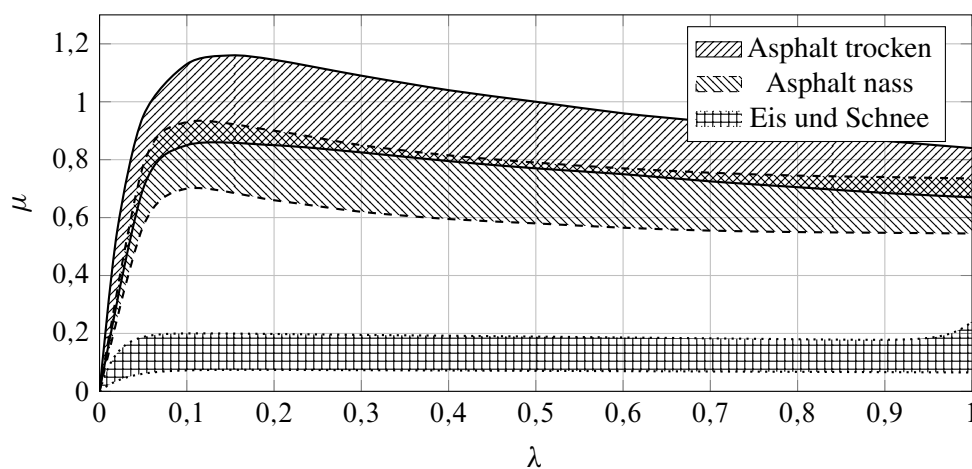


Abbildung 2.5:  $\mu$ -Schlupf-Kurve für unterschiedliche Straßenbeschaffenheiten nach [173, S. 50].

kennen, dass die Kurven für hohe Reibwerte für Werte im Bereich von 10 % bis 30 % Schlupf ein deutliches Maximum aufweisen [75, S. 61] und danach bis auf den Gleitreibwert abfallen, während auf Schnee bedingt durch die Keilbildung des Schnees vor dem Reifen das Maximum beim blockierenden Rad, d. h. Schlupf 1, zu finden ist [127, S. 24]. Der zum Maximum der  $\mu$ -Schlupf-Kennlinie gehörende Schlupf wird mit

$$\lambda_{\text{krit}} = \arg \max_{\lambda} (\mu(\lambda)) \quad (2.22)$$

bezeichnet und wird auch „kritischer Schlupf“ genannt [127, S. 22]. Es wird im Rahmen dieser Arbeit vereinfachend angenommen, dass der Reibwert selbst nicht von der Aufstandskraft abhängt, obwohl eine solche Abhängigkeit, wie in [27, S. 53 f.] und [181, S. 164 f.] gezeigt, in der Realität vorliegt.

Zur Beschreibung des in Abbildung 2.5 dargestellten Verhaltens wurden in der Literatur verschiedene Modelle vorgeschlagen, von denen im Folgenden einige vorgestellt werden. Dabei ist zwischen statischen Modellen, die bei Bedarf um dynamische Elemente erweitert werden können, und dynamischen Modellen zu unterscheiden.

### 2.2.1.1 Dynamische Reifenmodelle

Bei dynamischen Reifenmodellen wird der Zusammenhang zwischen Schlupf und Reifenkraft üblicherweise aus der physikalischen Betrachtung des Reibvorganges hergeleitet. Dazu wird ein sog. Bürstenmodell verwendet, bei dem der Reifen als aus kleinen Bürsten bestehend gedacht wird, die sich als Feder-Dämpfer-Elemente mit dem Untergrund beim Eintreten in den Latsch verzahnen und beim Verlassen des Latsches entspannen [181, S. 154 ff.]. Werden die Bürsten als infinitesimal klein betrachtet, gelangt man zur Darstellung des Reibvorganges über partielle Differentialgleichungen, für die jedoch verschiedene Methoden entwickelt wurden, sie in gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL) mit konzentrierten Parametern zu überführen. In vertikaler Richtung kann bspw. eine starre Karkasse mit einem starren Reifengürtel über Feder- und Dämpferelemente gekoppelt werden, was auf das sog. „Rigid Ring“-Modell führt, das für Betrachtungen im dynamischen Bereich bis etwa 100 Hz geeignet ist [109, S. 162]. Alternativ werden kompliziertere Modelle vorgeschlagen, die auch Gürtelbewegungen orthogonal zur Karkasse erlauben oder aus finite-Elemente-Modellen bestehen, die an dieser Stelle jedoch nicht beachtet werden sollen, da ihr Detaillierungsgrad für den Reglerentwurf deutlich zu hoch ist [109, S. 159].

Ein Vorgehen über partielle Differentialgleichungen wird bspw. beim sog. Lund-Grenoble Reifenmodell (LuGre) aus [29] gewählt, das in [31] zur Modellierung des Reifen-Straße-Kontaktes vorgeschlagen wird. Dieses Modell besitzt die Form

$$\dot{\tilde{\mu}} = v - \omega r - \frac{\sigma_0 |v - \omega r|}{\mu_C + (\mu_S - \mu_C) e^{-\sqrt{\left(\frac{v - \omega r}{v_S}\right)^2}}} \quad (2.23a)$$

$$\mu = \sigma_0 \tilde{\mu} + \sigma_1 \dot{\tilde{\mu}} + \sigma_2 (v - \omega r) \quad (2.23b)$$

mit dem internen Reibungszustand  $\tilde{\mu}$  und den Parametern  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ , COULOMB-Reibwert  $\mu_C$  und STRIBECK-Reibwert  $\mu_S$  und STRIBECK-Geschwindigkeit  $v_S$ , die anhand physikalischer Parameter des Reifens ermittelt werden können. Sollte das dynamische Verhalten des Reifenkraftaufbaus nicht notwendig sein, existiert mit der in [32] angegebenen Parametrierung auch eine statische Variante des Lund-Grenoble Reifenmodells, für die der stationäre Zustand des Reibungszustandes  $\tilde{\mu}$  über die gesamte Fläche des Latsches als Mittelwert betrachtet wird.

Die statische Variante des Lund-Grenoble Reifenmodells hat die Form

$$\mu(\lambda) = g(\lambda) \left( 1 + \frac{g(\lambda)}{\sigma_0 l_L \lambda} \left( e^{-\frac{\sigma_0 l_L \lambda}{g(\lambda)}} - 1 \right) \right) + \mu_0 \sigma_2 v \lambda \quad (2.24a)$$

mit

$$g(\lambda) = \mu_C + (\mu_S - \mu_C) e^{-\sqrt{\frac{v \lambda}{v_S}}}, \quad (2.24b)$$

wobei die Parameter des dynamischen Modells erhalten bleiben und zusätzlich noch die Latschlänge  $l_L$  benötigt wird und nähert das in Messungen von Reifenverhalten zu beobachtende Verhalten des Reibwertes über dem Schlupf gut an, wobei darüber hinaus eine Abhängigkeit des Reibwertes von der Fahrzeuggeschwindigkeit abgebildet wird, die sich darin äußert, dass der Reibwert mit zunehmender Geschwindigkeit abnimmt [32, S. 190].



### 2.2.1.2 Statische Reifenmodelle

Statische Modelle zur Beschreibung des Reifenverhaltens basieren zum großen Teil auf prototypischen Reifenkurven bestehend aus einfachen mathematischen Funktionen, die an gemessene Reifenkraftverläufe durch Ausgleichsrechnung angepasst werden. Eine physikalische Modellvorstellung des Kraftaufbaus im Latsch liegt ihnen üblicherweise nicht zu Grunde [181, S. 168].

Das einfachst denkbare Modell dieser Art ist ein linearer Zusammenhang

$$\mu(\lambda) = \mu_0 c_\lambda \lambda \quad (2.25)$$

zwischen dem Reibkoeffizienten  $\mu$  und dem Schlupf, das das reale Verhalten eines Reifens jedoch nur für kleine Schlüpf über die Längsreifensteifigkeit  $c_\lambda$  realitätsnah wiedergeben kann, da das für Gummireibung typische Maximum des Reibwertes und der anschließende Abfall auf einen kleineren Reibwert nicht abgebildet werden.

Ein einfaches Modell, das diese Charakteristik abbilden kann, ist das als mathematische Approximation von gemessenen Verläufen ermittelte sog. BURCKHARDT-Modell

$$\mu(\lambda) = \mu_0 \left( c_1 \left( 1 - e^{-c_2 \lambda} \right) - c_3 \lambda \right) e^{-c_4 \lambda v} \quad (2.26)$$

mit den Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und dem Nässekennwert  $c_4$ , bei dem das Abfallen nach dem Maximum durch die Kombination von Exponentialfunktionen mit einem linearen Anteil erreicht wird [27, S. 24–44].

Als Näherung für das BURCKHARDT-Modell mit linearer Parameterabhängigkeit existiert darüber hinaus das sog. KIENCKE-Modell

$$\mu(\lambda) = \mu_0 \frac{C_1 \lambda}{C_3 \lambda^2 + C_2 \lambda + 1}, \quad (2.27)$$

dessen Parameter sich daher über die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen lassen, mit den Parametern  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  [96, S. 17].

Ein physikalisches Modell, das neben dem Längsschlupf auch den Schräglaufwinkel

$$\alpha = \arctan \left( \frac{v_y}{v_x} \right) \quad (2.28)$$

berücksichtigen kann, ist das am Highway Safety Research Institute (HSRI) entwickelte HSRI-Modell, bei dem eine Unterteilung des Kontaktbereiches in einen Haftbereich und einen Gleitbereich angenommen wird. Zur Unterscheidung der beiden Bereiche wird die dimensionslose Größe

$$s_R = \frac{\sqrt{c_\lambda^2 \lambda^2 + c_\alpha^2 \tan^2(\alpha)}}{\mu_0 \left( 1 - k_R \tanh \left( a(v - \omega r) \sqrt{\lambda^2 + \tan^2(\alpha)^2} \right) \right)} F_z (1 - \lambda)$$

definiert, mit der der Reibwert zu

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} \mu_0 c_\lambda \lambda & s_R \leq 0,5 \\ \frac{c_\lambda \lambda (s_R - 0,25)}{s_R^2 (1-\lambda) F_z} & s_R > 0,5 \end{cases} \quad (2.29)$$

mit der Umfangssteifigkeit  $c_\lambda$ , der Schräglaufsteifigkeit  $c_\alpha$  und den Parametern  $a$  und  $k_R$  angegeben werden kann [181, S. 179 ff.].

Das wohl verbreitetste Reifenmodell ist das durch Kurvenanpassung geeigneter Funktionen an reale Messdaten ermittelte PACEJKA-Modell

$$\mu(\lambda) = \mu_0 D \sin\left(C \arctan\left(B\lambda - E(B\lambda - \arctan(B\lambda))\right)\right) \quad (2.30)$$

mit den Parametern  $B$ ,  $C$ ,  $D$  und  $E$ , wobei  $BCD$  der Umfangssteifigkeit  $\frac{c_\lambda}{\mu_0}$  entspricht [146].

Die verschiedenen statischen Reifenkennlinien sind in Abbildung 2.6 mit ihren ersten Ableitungen für die in Tabelle 2.1 angegebenen Parameter bei ungefähr gleicher Anfangssteigung dargestellt. Es zeigt sich, dass die fünf nichtlinearen Modelle Gl. (2.26), Gl. (2.27), Gl. (2.29), Gl. (2.24) und Gl. (2.30) die grundlegende Anforderung, dass ein ausgeprägtes Maximum der Kurve vorhanden sein muss, erfüllen, während das lineare Modell diese nicht erfüllt. Ein Abfall auf einen geringeren Wert als  $\mu(\lambda_{\text{krit}})$  lässt sich ebenfalls bei allen fünf nichtlinearen Modellen beobachten, jedoch ist dieser beim BURCKHARDT-Modell prinzipbedingt stärker ausgeprägt, wenn der Nässekennwert  $c_4$  nicht zu 0 gewählt wird, sodass auch dieses Modell nicht für die Modellierung des Reifens verwendet wird. Darüber hinaus ist die Krümmung des BURCKHARDT-Modells für Schlüpf oberhalb des Maximums fast konstant, während sie für das PACEJKA-Modell größer ist, und somit ein stärkerer Abfall direkt hinter dem Maximum zu beobachten ist. Da das KIENCKE-Modell sich ähnlich wie das BURCKHARDT-Modell verhält und die Parameterschätzung mittels linearer Methoden keinen Schwerpunkt der Arbeit darstellt, wird auch das KIENCKE-Modell nicht weiter verwendet. Obwohl sich das HSRI-Modell bereits bei der Entwicklung des ABS 8 bewährt hat, wird in dieser Arbeit aus den Tabelle 2.2 zu entnehmenden Gründen jedoch das PACEJKA-Modell verwendet, da dieses einen ähnlichen Verlauf aufweist, aber stetig differenzierbar am Übergang zwischen linearem und nichtlinearem Bereich bei einem Schlupf von etwa  $\lambda = 0,01$  ist und die Geschwindigkeitsabhängigkeit des LuGre Modells nicht benötigt wird. Das verwendete PACEJKA-Modell ist in Abbildung 2.7 mit dem linearen, stabilen und instabilen Schlupfbereich dargestellt.

Für den Fall, dass es nötig ist, ein dynamisches Modell für den Kraftaufbau mit einem statischen Reifenmodell zu verwenden, kann über

$$G_{F_x \leftarrow F_{x, \text{Straße}}}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 \zeta s + \omega_0^2} \quad (2.31)$$

ein dynamisches Verhalten im Kraftaufbau abgebildet werden, das als lineare Näherung für das Rigid Ring Modell dient. Dieses Modell besitzt nach [209] dominante Eigenfrequenzen bei etwa  $\omega_0 = 11 \text{ Hz}$  bzw.  $\omega_0 = 90 \text{ Hz}$  und die Dämpfung  $\zeta$  und kann die Kraftübertragung von der

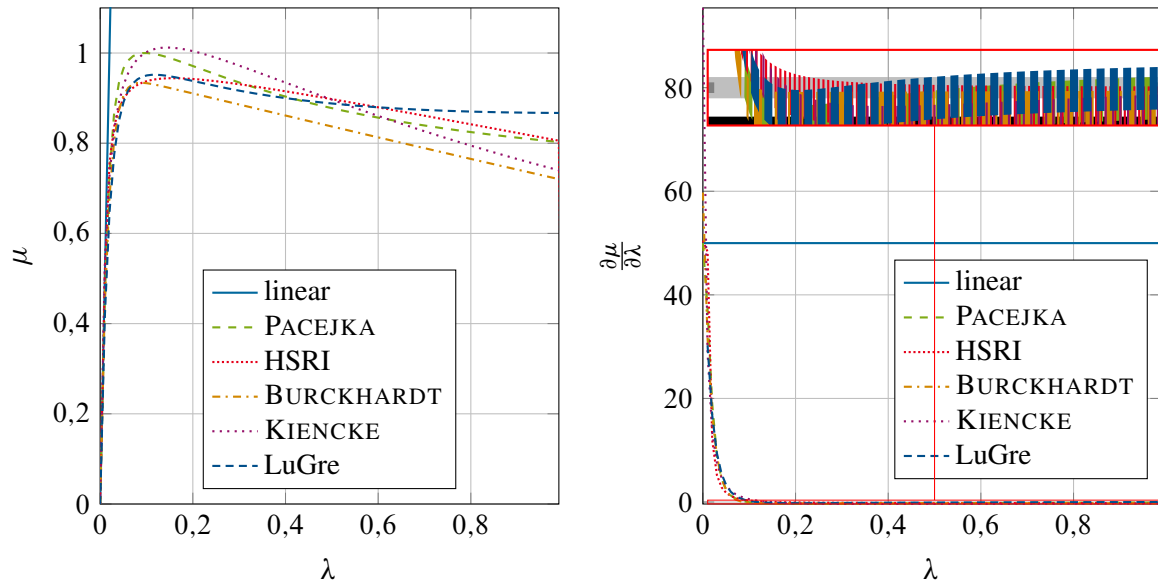


Abbildung 2.6:  $\mu$ -Schlupf-Kurve und Ableitung der  $\mu$ -Schlupf-Kurve.

| Modell     | Parameter            |                     |                       |                  |               |
|------------|----------------------|---------------------|-----------------------|------------------|---------------|
| linear     | $c_x$<br>49,99       |                     |                       |                  |               |
| BURCKHARDT | $c_1$<br>1,021       | $c_2$<br>62,471     | $c_3$<br>0,231        | $c_4$<br>0,001   |               |
| KIENCKE    | $C_1$<br>95,4        | $C_2$<br>80,4       | $C_3$<br>48           |                  |               |
| HSRI       | $k_R$<br>8,614       | $a$<br>0,023        | $c_\lambda$<br>50,486 | $c_\alpha$<br>15 |               |
| PACEJKA    | $B$<br>32,609        | $C$<br>1,533        | $D$<br>1              | $E$<br>0,8       |               |
| LuGre      | $\sigma_0$<br>544,62 | $\sigma_2$<br>0,002 | $\mu_C$<br>0,75       | $\mu_S$<br>1,35  | $v_S$<br>6,57 |

Tabelle 2.1: Parameter der verschiedenen Reifenmodelle.

|            | Maximum | degressiv | stetig differenzierbar |
|------------|---------|-----------|------------------------|
| linear     | ✗       | ✗         | ✓                      |
| BURCKHARDT | ✓       | ✗         | ✓                      |
| KIENCKE    | ✓       | ✗         | ✓                      |
| HSRI       | ✓       | ✓         | ✗                      |
| PACEJKA    | ✓       | ✓         | ✓                      |
| LuGre      | ✓       | ✓         | ✓                      |

Tabelle 2.2: Auswahlkriterien für Reifenmodelle.

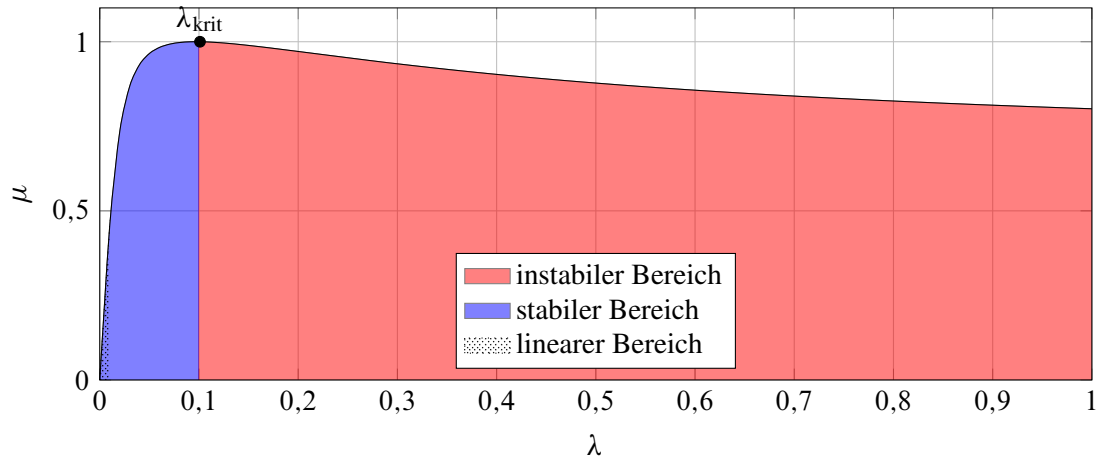


Abbildung 2.7:  $\mu$ -Schlupf-Kurve für das PACEJKA-Modell mit den verschiedenen Schlupfbereichen.

Straßenkraft  $F_{x,\text{Straße}}$ , die sich aus dem Reifenmodell ergibt, auf die an der Karkasse wirksame Kraft  $F_x$  abbilden.

Eine weitere Möglichkeit, das dynamische Reifenverhalten abzubilden, besteht in der Berücksichtigung der Einlaufänge  $l_{\text{Einlauf}}$ , d. h. der Entfernung, die der Reifen zurücklegen muss, bis der stationäre Zustand wieder erreicht ist, bei der der Kraftaufbau durch ein  $PT_1$ -Glied der Form

$$G_{F_x \leftarrow F_{x,\text{Straße}}}(s) = \frac{1}{\tau_{\text{Einlauf}}s + 1} \quad (2.32)$$

mit der geschwindigkeitsabhängigen Zeitkonstante  $\tau_{\text{Einlauf}} = \frac{l_{\text{Einlauf}}}{\omega r}$  modelliert wird, die von der Einlaufänge des Reifens abhängt und üblicherweise eine halbe Umdrehung beträgt [177, S. 24] oder aus dem Verhältnis von Längs- und Quersteifigkeit ermittelt werden kann [18, S. 704].

## 2.2.2 Einradmodell

Zur Abbildung des Verhaltens des gebremsten Rades ist neben der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Kraftentstehung im Reifen-Straße-Kontakt ein Modell für das dynamische Verhalten des Rades sowie des Fahrzeugs nötig, das im einfachsten Fall durch die Reduktion auf ein einziges Rad mit einer bewegten Masse, dem sog. Einradmodell, erreicht werden kann, das in Abbildung 2.8 dargestellt ist.

Durch Anwendung des Schwerpunkt- und Drallsatzes auf das in Abbildung 2.8 gezeigte Freikörperbild erhält man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J\dot{\omega} \\ m_v\dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rF_x - M_B + M_A - d\omega \\ -F_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} rF_z\mu \left( \frac{v-\omega r}{v} \right) - M_B + M_A - d\omega \\ -F_z\mu \left( \frac{v-\omega r}{v} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33a)$$

für die Raddrehzahl  $\omega$  und die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  in Abhängigkeit des Bremsmomentes  $M_B$  und des Antriebsmomentes  $M_A$ . Mit dem Bremschlupf Gl. (2.20) ergibt sich daraus mit  $\dot{\lambda} = -\frac{r}{v}\dot{\omega} + \frac{r\omega}{v^2}\dot{v}$  und  $\omega = \frac{v}{r}(1 - \lambda)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -J\frac{v}{r}\dot{\lambda} + J\frac{1-\lambda}{r}\dot{v} \\ m_V\dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rF_z\mu\left(\frac{v-\omega r}{v}\right) - M_B + M_A - d\omega \\ -F_z\mu\left(\frac{v-\omega r}{v}\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{Jv}M_B - \frac{r}{Jv}M_A - \frac{F_z\mu(\lambda)}{v}\left(\frac{1-\lambda}{m_V} + \frac{r^2}{J}\right) + \frac{d}{J}(1-\lambda) \\ -\frac{F_z}{m_V}\mu(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33b)$$

als Schlupfdynamik [177, S. 25 f.]. Dabei bezeichnet  $F_z$  die Reifenaufstandskraft und ist im nominalen Fall  $m_V g$ , wobei  $m_V$  einem Viertel der Fahrzeuggesamtmasse  $m_F$  entspricht. Der Parameter  $d$  modelliert die Reibung in den Lagern, den Rollwiderstand des Reifens und sonstige lineare Reibeffekte und  $J$  bezeichnet das Trägheitsmoment der rotierenden Massen. Das Antriebsmoment wird im Rahmen der Arbeit zu 0 angenommen, da nur der Bremsfall betrachtet werden soll. Anschließend wird das System noch um das in Abschnitt 2.1 beschriebene Aktormodell

$$\dot{p}_B = h(p_B, p_{B,\text{soll}}) \quad (2.34)$$

erweitert.

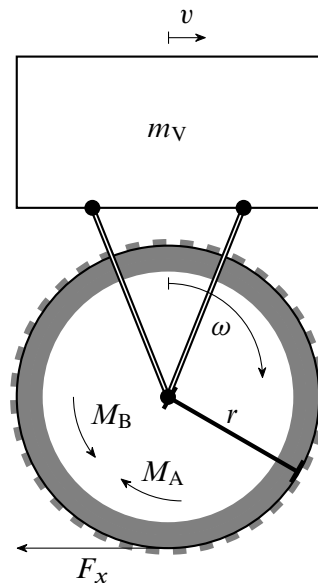


Abbildung 2.8: Freikörperbild des Einradmodells.

Durch eine Linearisierung erhält man daraus das System

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\lambda} \\ \Delta\dot{v} \\ \Delta\dot{p}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_z\mu(\lambda) - m_V F_z \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{m_V} + \frac{r^2}{J}\right) - \frac{dm_V v}{J}}{\frac{m_V v}{-\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} m_V}} & \frac{F_z\mu(\lambda)\left(\frac{1-\lambda}{m_V} + \frac{r^2}{J}\right) - \frac{r}{J}}{v^2} & \frac{r \frac{\partial c^*}{\partial p_B}}{Jv} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial p_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta v \\ \Delta p_B \end{bmatrix} + \dots$$

$$\cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial p_{B,\text{soll}}} \end{bmatrix} \Delta p_{B,\text{soll}} \quad (2.35)$$

mit den Zuständen  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta v$  und  $\Delta p_B$ . Unter der Annahme  $v = \text{const.}$  d.h.  $\Delta\dot{v} = 0$ , die in Abschnitt 2.6 eingehender analysiert wird, ergibt sich das reduzierte System

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\dot{\lambda} \\ \Delta\dot{p}_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{F_z \mu(\lambda) - m_V F_z \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \left( \frac{1-\lambda}{m_V} + \frac{r^2}{J} \right)}{m_V v} & -\frac{d}{J} & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \\ 0 & & \frac{J v}{\frac{\partial h}{\partial p_B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta p_B \end{bmatrix} + \cdots \\ &\cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial h}{\partial p_{B,\text{soll}}} \end{bmatrix} \Delta p_{B,\text{soll}} \cdot \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit den Zuständen  $\Delta\lambda$  und  $\Delta p_B$ .

### 2.2.3 Gesamtfahrzeugmodell

Zusätzlich zum in Abschnitt 2.2.2 angegebenen Einradmodell wird darüber hinaus noch ein Modell für das gesamte Fahrzeug bestehend aus vier Rädern und einem Aufbau mit Nick- und Hubfreiheitsgrad benötigt, damit auch die Veränderungen der Aufstandskräfte, die beim Bremsen zu beobachten sind, abgebildet werden können. Die Nick- und Hubdynamik des in Abbildung 2.9 dargestellten Fahrzeugs lässt sich mittels der NEWTON'schen Gleichungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung sowie der Kreiselgleichung für den Nickwinkel  $\theta$  angeben. Da nur der Fall des Geradeausbremsens betrachtet werden soll, wird keine Quer-, Gier- und Wankdynamik für die Quergeschwindigkeit  $\dot{y}$ , den Gierwinkel  $\psi$  und den Wankwinkel  $\phi$  modelliert. Sie ließe sich bei Bedarf jedoch noch in das verwendete Modell einfügen. Für weitergehende Informationen zum Fahrzeugmodell sei auf [14, S. 31–40], [79, S. 13–28] und [181, S. 265 ff.] und die darin angegebenen Quellen verwiesen. Es ergeben sich mit dem Reifenmodell und den dynamischen Aufstandskräften  $F_{z,\text{dyn}}$

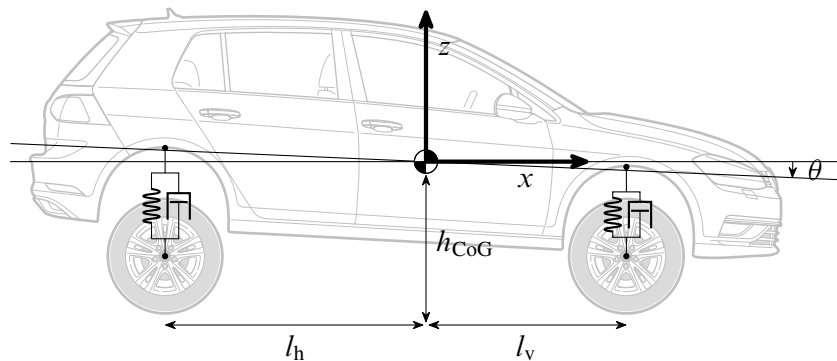


Abbildung 2.9: Fahrzeug mit Koordinatensystemen nach [79, S. 14] und [220].

die Differentialgleichungen

$$\dot{v} = \frac{-F_{x,\text{VL}} - F_{x,\text{HL}} - F_{x,\text{HR}} - F_{x,\text{VR}} - c_w A_B \frac{\rho}{2} v^2}{m_F} - \dot{\theta} \dot{z} \quad (2.37)$$

in  $x$ -Richtung in Abhängigkeit der Gesamtfahrzeugmasse  $m_F$ , des Strömungswiderstandskoeffizienten  $c_w$ , der Querspanfläche  $A$  und des Luftdruckes  $\rho$  sowie

$$\ddot{z} = \frac{F_{z,\text{dyn},\text{VL}} + F_{z,\text{dyn},\text{HL}} + F_{z,\text{dyn},\text{HR}} + F_{z,\text{dyn},\text{VR}}}{m_A} + \dot{\theta}v \quad (2.38)$$

in  $z$ -Richtung in Abhängigkeit der Aufbaumasse  $m_A$ . Für die Nickdynamik ergibt sich

$$\ddot{\theta} = \frac{(F_{z,\text{dyn},\text{HL}} + F_{z,\text{dyn},\text{HR}})l_h - (F_{z,\text{dyn},\text{VL}} + F_{z,\text{dyn},\text{VR}})l_v - m_F\dot{v}(h_{\text{CoG}} + z)}{J_y} \quad (2.39)$$

mit dem Nickträgheitsmoment des Aufbaus  $J_y$  und der Schwerpunkthöhe  $h_{\text{CoG}}$  sowie den Schwerpunktsabständen  $l_v$  und  $l_h$  wie in Abbildung 2.9 dargestellt. Für die kinematischen Beziehungen zwischen den Feder-Dämpfer-Systemen der einzelnen Räder und dem Aufbau ergeben sich die Positionen zu

$$z_{\text{VL}} = -z - \frac{b_v}{2} \sin(\phi) + l_v \sin(\theta) \quad (2.40a)$$

$$z_{\text{HL}} = -z - \frac{b_h}{2} \sin(\phi) - l_h \sin(\theta) \quad (2.40b)$$

$$z_{\text{HR}} = -z + \frac{b_h}{2} \sin(\phi) - l_h \sin(\theta) \quad (2.40c)$$

$$z_{\text{VR}} = -z + \frac{b_v}{2} \sin(\phi) + l_v \sin(\theta) \quad (2.40d)$$

und die Geschwindigkeiten zu

$$\dot{z}_{\text{VL}} = -\dot{z} - \frac{b_v}{2} \cos(\phi) \dot{\phi} + l_v \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.41a)$$

$$\dot{z}_{\text{HL}} = -\dot{z} - \frac{b_h}{2} \cos(\phi) \dot{\phi} - l_h \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.41b)$$

$$\dot{z}_{\text{HR}} = -\dot{z} + \frac{b_h}{2} \cos(\phi) \dot{\phi} - l_h \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.41c)$$

$$\dot{z}_{\text{VR}} = -\dot{z} + \frac{b_v}{2} \cos(\phi) \dot{\phi} + l_v \cos(\theta) \dot{\theta} \quad (2.41d)$$

mit den Spurbreiten  $b_v$  und  $b_h$  der Vorder- und Hinterachse sowie dem Wankwinkel  $\phi$ . Die dynamischen Aufstandskräfte  $F_{z,\text{dyn}}$  ergeben sich daraus über die aus den Aufbaufedern und Aufbaudämpfern resultierenden Kräften zu

$$F_{z,\text{dyn},\text{VL}} = k_{\text{VL}}(z_{\text{VL}}) + \zeta_{\text{VL}}(\dot{z}_{\text{VL}}) \quad (2.42a)$$

$$F_{z,\text{dyn},\text{HL}} = k_{\text{HL}}(z_{\text{HL}}) + \zeta_{\text{HL}}(\dot{z}_{\text{HL}}) \quad (2.42b)$$

$$F_{z,\text{dyn},\text{HR}} = k_{\text{HR}}(z_{\text{HR}}) + \zeta_{\text{HR}}(\dot{z}_{\text{HR}}) \quad (2.42c)$$

$$F_{z,\text{dyn},\text{VR}} = k_{\text{VR}}(z_{\text{VR}}) + \zeta_{\text{VR}}(\dot{z}_{\text{VR}}) \quad (2.42d)$$

mit den Federkonstanten  $k_i$  und Dämpferkonstanten  $\zeta_i$  und die gesamte Aufstandskraft erhält man aus einer Überlagerung der statischen Aufstandskräfte

$$F_{z,\text{stat},v} = \frac{m_A g l_h}{l_h + l_v} \quad (2.43a)$$

$$F_{z,\text{stat,h}} = \frac{m_A g l_v}{l_h + l_v} \quad (2.43b)$$

mit den dynamischen Aufstandskräften und den Gewichtskräften der Räder  $m_R$  und Radträger  $m_{RT}$  zu

$$F_{z,\text{VL}} = g m_{RT,\text{VL}} + g m_{R,\text{VL}} + \frac{F_{z,\text{stat,v}}}{2} + F_{z,\text{dyn,VL}} \quad (2.44a)$$

$$F_{z,\text{HL}} = g m_{RT,\text{HL}} + g m_{R,\text{HL}} + \frac{F_{z,\text{stat,h}}}{2} + F_{z,\text{dyn,HL}} \quad (2.44b)$$

$$F_{z,\text{HR}} = g m_{RT,\text{HR}} + g m_{R,\text{HR}} + \frac{F_{z,\text{stat,h}}}{2} + F_{z,\text{dyn,HR}} \quad (2.44c)$$

$$F_{z,\text{VR}} = g m_{RT,\text{VR}} + g m_{R,\text{VR}} + \frac{F_{z,\text{stat,v}}}{2} + F_{z,\text{dyn,VR}} . \quad (2.44d)$$

Zuletzt wird noch für alle vier Räder  $i \in \mathcal{W} = \{\text{VL}, \text{HL}, \text{HR}, \text{VR}\}$  die Differentialgleichung des Schlupfes benötigt, die sich analog zum in Abschnitt 2.2.2 betrachteten Fall eines Einzelrads zu

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\dot{v}}{v}(1 - \lambda_i) + \frac{r_i}{J_i v} (c_i^* (p_{B,i}) - r_i F_{x,i}) + \frac{d_i(1 - \lambda_i)}{J_i} \quad (2.45)$$

ergibt.

## 2.3 Sensormodelle

Zur Messung der Regelgrößen, d. h. im Rahmen dieser Arbeit des Radschlupfes  $\lambda$  für den Schlupfregler und der Radbeschleunigung für die Maximierung des Kraftschlussbeiwertes, sind verschiedene Sensoren notwendig, die im folgenden kurz vorgestellt werden.

### 2.3.1 Raddrehzahlsensor

Zur Messung der Drehzahl des Rades und damit des Radschlupfes sind bei automobilen Anwendungen vor allem aktive Drehzahlsensoren basierend auf dem HALL-Effekt im Einsatz [165, S. 62 f.]. Bei dieser Art von Sensor wird ein magnetisches Polrad an der drehenden Achse befestigt, das beim Rotieren der sich abwechselnden magnetischen Pole in einem HALL-Element ein magnetisches Wechselfeld erzeugt. Dieses Wechselfeld ruft durch Ladungsverschiebung eine elektrische Spannung hervor, die zur Ermittlung der Drehzahl verwendet wird. Im Rahmen der Arbeit wird jedoch keine solch detaillierte Modellvorstellung der magnetischen und elektrischen Vorgänge bei der Messung des Raddrehzahlsignals benötigt, sondern das Sensorelement wird als Abtast-Halteglied nullter Ordnung betrachtet, da im Sensor bzw. der angeschlossenen Signalaufbereitung der Übergang von kontinuierlichen Drehzahlsignalen auf diskrete Drehzahl-signale stattfindet, die im Steuergerät zur Verfügung stehen. Demgemäß wird als Modell für den Raddrehzahlsensor eine Einheitsverstärkung mit Halteglied nullter Ordnung verwendet, wobei die Abtastzeit  $T = 5$  ms beträgt.



### 2.3.2 Schlupfsensor

Da der Schlupf nicht direkt gemessen werden kann, wird in dieser Arbeit ein virtueller Sensor verwendet, der über die Schlupfdefinition Gl. (2.20) und die Raddrehzahl sowie Fahrzeuggeschwindigkeit eine Schlupfmessung

$$\lambda_k = \frac{v_k - r\omega_k}{v_k}$$

zur Verfügung stellt, die für die Regelalgorithmen verwendet werden kann. Die Messgröße  $\omega_k$  ergibt sich darin durch Abtastung von  $\omega$  zu den Abtastzeitpunkten  $k$ . Alternativ dazu kann der aktuelle Schlupf auch über einen beobachterbasierten Ansatz wie in [14] vorgeschlagen ermittelt werden.

### 2.3.3 Beschleunigungssensor

Um die auf die Straße absetzbare Reifenkraft zu maximieren, wird eine Messung dieser Kraft benötigt. Da eine solche in automobilen Anwendungen nur mit hohem Kostenaufwand, bspw. durch Einsatz von Messfelgen, zur Verfügung gestellt werden kann, wird dazu ein virtueller Sensor verwendet, der basierend auf gemessenen Raddrehzahlen und geschätzten Bremsmomenten sowie Aufstandskräften die Reifenkraft bzw. die Radbeschleunigung zur Verfügung stellt und Tiefpasscharakter aufweist.

## 2.4 Diskretisierung

Im Folgenden Abschnitt sollen diskrete Modelle sowohl für das nichtlineare Einradmodell Gl. (2.33) als auch für das linearisierte Einradmodell Gl. (2.36) angegeben werden, die anschließend für den Entwurf der diskreten Regelung zugrunde gelegt werden.

### 2.4.1 Diskretisierung des nichtlinearen Einradmodells

Das nichtlineare Einradmodell kann mittels der Anwendung von Integrationsverfahren diskretisiert werden. Als *Integrationsverfahren* bezeichnet man eine Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \Psi(\mathbf{x}_k, t_k, \mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}; \mathbf{f}) \quad (2.46)$$

mit der Schrittweite  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  für die iterative Näherung  $\mathbf{x}_k$  der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.47b)$$

zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  mit der Modellfunktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wird das Integrationsverfahren auf das sog. *Modellproblem*

$$\dot{\xi} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \xi$$

angewandt, lässt sich näherungsweise eine Aussage über die zu wählende Schrittweite  $\Delta t$  für verschiedene  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  ableiten, mit der eine numerisch stabile Simulation des Systems gelingt. Durch Zusammenfassen der Schrittweite und des betragsmäßig größten Eigenwertes  $\lambda_{\max}$  der Systemmatrix des Modellproblems zur effektiven Schrittweite  $q = \Delta t \lambda_{\max}$  lässt sich unabhängig von konkreten Eigenwerten für die verschiedenen Integrationsverfahren durch Einsetzen des Modellproblems in die Verfahrensvorschrift ein Bereich in der komplexen Zahlenebene finden, in dem das Verfahren konvergiert, das sog. *Stabilitätsgebiet*  $\mathcal{S}$ , das in Abbildung 2.10 für verschiedene Verfahren dargestellt ist [23, S. 171 f.]. Für das Stabilitätsgebiet  $\mathcal{S}_E$  des expliziten EULER-Verfahrens

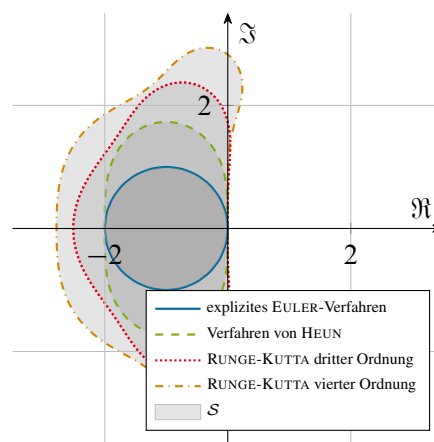


Abbildung 2.10: Stabilitätsgebiet expliziter Verfahren.

ergibt sich die Gleichung

$$R_E(q) = |1 + q| < 1 \quad (2.48)$$

mit der Inkrementfunktion  $R_E(q)$ , die einen Einheitskreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt  $(-1, 0)$  beschreibt [2, S. 51]. Daraus lässt sich für reelle Eigenwerte des Einradmodells die maximale Schrittweite zu

$$\Delta t < \frac{2}{|\lambda_{\max}|} \quad (2.49)$$

mit dem Eigenwert  $\lambda_{\max} = \frac{F_z \mu(\lambda) - m_V F_z \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \left( \frac{1-\lambda}{m_V} + \frac{r^2}{J} \right)}{m_V v} - \frac{d}{J}$  bestimmen.

Für das Verfahren von HEUN und das modifizierte EULER-Verfahren mit dem Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_H = \left\{ q : q \in \mathbb{C} \wedge \left| 1 + q + \frac{q^2}{2} \right| < 1 \right\} \quad (2.50)$$

erhält man ebenfalls Gl. (2.49) für den reellen Eigenwert  $\lambda_{\max}$  [166, S. 63].

Für Verfahren höherer Ordnung wie das RUNGE-KUTTA Verfahren dritter Ordnung mit dem Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_{\text{RK3}} = \left\{ q : q \in \mathbb{C} \wedge \left| 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6} \right| < 1 \right\} \quad (2.51)$$

oder dem klassischen RUNGE-KUTTA Verfahren vierter Ordnung mit dem Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_{\text{RK4}} = \left\{ q : q \in \mathbb{C} \wedge \left| 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6} + \frac{q^4}{24} \right| < 1 \right\} \quad (2.52)$$

ist ebenfalls nur der Schnittpunkt des Stabilitätsgebietes mit der reellen Achse relevant, sodass sich hier

$$\Delta t < \frac{1 - \sqrt[3]{\sqrt{17} - 4} + \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}}}{|\lambda_{\max}|} \quad (2.53)$$

für RK3 und

$$\Delta t < \frac{\frac{4}{3} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{464}}{3} - \frac{172}{27}} + \frac{20}{9 \sqrt[3]{\frac{\sqrt{464}}{3} - \frac{172}{27}}}}{|\lambda_{\max}|} \quad (2.54)$$

für RK4 ergibt. Die resultierenden maximalen Schrittweiten sind in Abbildung 2.11 für verschiedene Schlüpfе und Geschwindigkeiten dargestellt, wobei maximale Schrittweiten größer als  $\Delta t = 10T = 0,050\text{ s}$  ausgeblendet sind. Dabei sollte beachtet werden, dass eine genügende

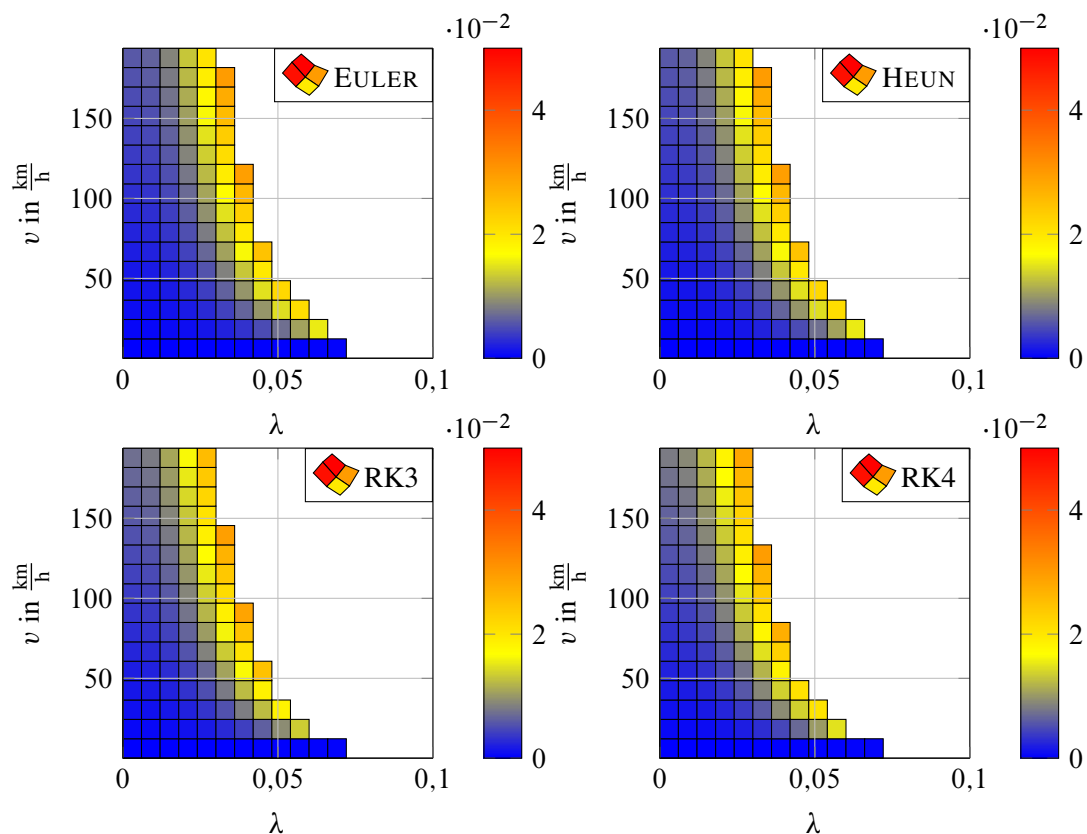


Abbildung 2.11: Berechnete maximal zulässige Schrittweite  $\Delta t_{\max}$  für stabile Integration.

Stabilitätsreserve vorhanden ist, da es sich beim Einradmodell aufgrund der reziproken Abhängigkeit von  $v$  und der nichtlinearen Reifenkennlinie nicht um ein lineares System handelt und die gefundenen oberen Schranken für  $\Delta t$  damit nur Näherungscharakter aufweisen. Wie zu sehen ist, wird die Schrittweite, mit der das System für  $\lambda = 0$  noch numerisch stabil simuliert werden

kann, für das explizite EULER-Verfahren und das Verfahren von HEUN bei Geschwindigkeiten  $v \leq 81 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , für das explizite RUNGE-KUTTA Verfahren dritter Ordnung bei Geschwindigkeiten  $v \leq 64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und für das explizite RUNGE-KUTTA Verfahren vierter Ordnung bei Geschwindigkeiten  $v \leq 57 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  kleiner als die Abtastzeit  $T$ , sodass mit diesen Verfahren und den entsprechenden Geschwindigkeiten und Schlüpfen keine numerisch stabile Simulation mehr möglich ist, da der Integrationsfehler aufklingt. Abhilfe schafft hier die Verwendung von impliziten Integrationsverfahren, wie dem impliziten EULER-Verfahren mit dem Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_I = \left\{ q : q \in \mathbb{C} \wedge \left| \frac{1}{1-q} \right| < 1 \right\} \quad (2.55)$$

oder der Trapezregel mit dem Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S}_T = \left\{ q : q \in \mathbb{C} \wedge \Re(q) < 0 \right\}, \quad (2.56)$$

da sie alle Differentialgleichung mit negativen Eigenwerten stabil integrieren können [2, S. 55].

Neben der Wahl der Schrittweite beeinflusst die begrenzte Genauigkeit der Zahlendarstellung auf Digitalrechnern das Ergebnis der Diskretisierung bzw. einer Simulation durch Rundungsfehler. Da im vorliegenden Fall mit Gleitkommazahlen doppelter Genauigkeit (`double`) gerechnet wird, beträgt die Maschinengenauigkeit  $\epsilon = 2^{-52}$  und der Anfangsrundungsfehler bei der Integration des Startwertes  $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2}$ . Der Fehler durch Rundung  $E_k$  nach  $k$  Integrationsschritten für das EULER-Verfahren lässt sich nach [16] zu

$$|E_k| = (11,01\epsilon + |R_E(q)|)^k \left( \epsilon_0 + \frac{11,01\epsilon|x_0|k}{11,01\epsilon + |R_E(q)|} \right) \quad (2.57)$$

angeben. Wenn für die effektive Schrittweite nun  $-2 + 11,01\epsilon < q < -11,01\epsilon$  gilt, so klingt der Rundungsfehler ab. Für das Verfahren von HEUN gilt entsprechend

$$|E_k| = (28,01\epsilon + |R_H(q)|)^k \left( \epsilon_0 + \frac{28,01\epsilon|x_0|k}{28,01\epsilon + |R_H(q)|} \right) \quad (2.58)$$

sowie für das RUNGE-KUTTA Verfahren vierter Ordnung

$$|E_k| = (194\epsilon + |R_{RK4}(q)|)^k \left( \epsilon_0 + \frac{194\epsilon|x_0|k}{194\epsilon + |R_{RK4}(q)|} \right), \quad (2.59)$$

die für entsprechende Wahl von  $q$  ebenfalls zu abklingenden Rundungsfehlern führen, die nur von der Größe der Anfangswerte  $x_0$  und der Anzahl der Schritte abhängen. Für implizite RUNGE-KUTTA Verfahren ohne besondere Berücksichtigung der Rundungsfehler in der Implementierung nimmt der Rundungsfehler nach [72] linear mit der Anzahl der Integrationsschritte zu, was sich durch geeignete Maßnahmen zur Behandlung der Koeffizienten der Verfahrensvorschrift und kleinere Abbruchbedingungen bei der Lösung der impliziten Gleichung zu einem Anwachsen mit der Wurzel der Anzahl der Schritte nach dem sog. Gesetz von BROUWER [24] reduzieren lässt. Diese Rundungsfehler sind bei den Simulationen in der vorliegenden Arbeit zu vernachlässigen, da die Anzahl an Integrationsschritten um viele Größenordnungen unter der inversen Maschinengenauigkeit  $\epsilon$  liegt und die Integrationszeiten im Allgemeinen nur wenige Sekunden betragen.

Um den Reglerentwurf zu vereinfachen und damit auch Reifenmodelle  $\mu(\lambda)$  verwendet werden können, die nicht invertierbar sind, werden jedoch trotzdem explizite Verfahren den impliziten Integrationsverfahren vorgezogen, da dann die Systemgleichung in diesem Fall nicht nach  $\mathbf{x}_{k+1}$  aufgelöst werden muss und das diskretisierte Modell schlussendlich „nur“ in der modellbasierten Vorsteuerung zum Einsatz kommt, wo eine Regelung zum einen die instabilen Eigenwerte des Systems stabilisiert und zum anderen die schnellen Eigenwerte dahingehend verlangsamt, dass sie ein gewünschtes dynamisches Verhalten zeigen und somit die Schrittweite bzw. Abtastzeit abgesehen vom Integrationsfehler nur noch für die geregelte Strecke eine Rolle spielt, während für die kontinuierliche Simulation des kontinuierlichen Einradmodells ohnehin entweder implizite Verfahren oder Mehrschrittverfahren mit hinreichend kleiner Schrittweite verwendet werden. Für das EULER-Verfahren ergibt sich als Diskretisierung

$$\begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ v_{k+1} \\ p_{B,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_k \\ v_k \\ p_{B,k} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \frac{rc^*(p_{B,k})}{Jv_k} - \frac{F_z \mu(\lambda_k)}{v_k} \left( \frac{1-\lambda_k}{m_v} + \frac{r^2}{J} \right) + \frac{d(1-\lambda_k)}{J} \\ - \frac{F_z}{m_v} \mu(\lambda_k) \\ h(p_{B,k}, p_{B,\text{soll},k}) \end{bmatrix} \quad (2.60a)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k \\ v_k \\ p_{B,k} \end{bmatrix}. \quad (2.60b)$$

## 2.4.2 Diskretisierung des linearen Einradmodells

Im Folgenden soll die Diskretisierung des linearen Einradmodells mittels der exakten Zeitlösung des kontinuierlichen Systems beschrieben werden. Dabei wird zuerst der Fall ohne Totzeit betrachtet und anschließend untersucht, wie sich das System bei Vorhandensein von Totzeiten, die auch Bruchteile der Abtastzeit  $T$  sein dürfen, diskretisieren lässt.

### 2.4.2.1 Keine Totzeit

Als diskretes Zustandsraummodell für das linearisierte System erhält man aus Gl. (2.35)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^d \mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (2.61a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (2.61b)$$

mit den in Abschnitt A.1 angegebenen Matrizen.

Unter Vernachlässigung der Dynamik von  $v$  ergibt sich dagegen aus Gl. (2.36) das diskrete System

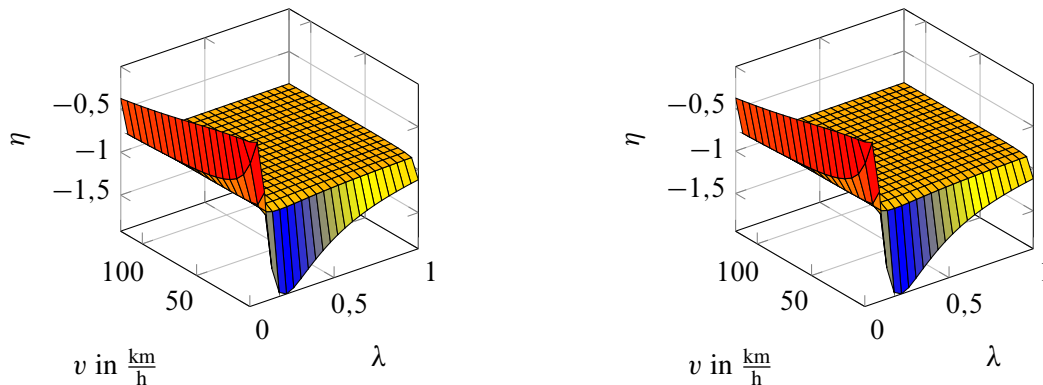
$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}T} & (e^{a_{33}T} - e^{a_{11}T}) \frac{a_{13}}{a_{33} - a_{11}} \\ 0 & e^{a_{33}T} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} \frac{b_3 a_{13}}{a_{33} - a_{11}} \left( \frac{e^{a_{33}T} - 1}{a_{33}} - \frac{e^{a_{11}T} - 1}{a_{11}} \right) \\ \frac{b_3}{a_{33}} (e^{a_{33}T} - 1) \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \quad (2.62b)$$

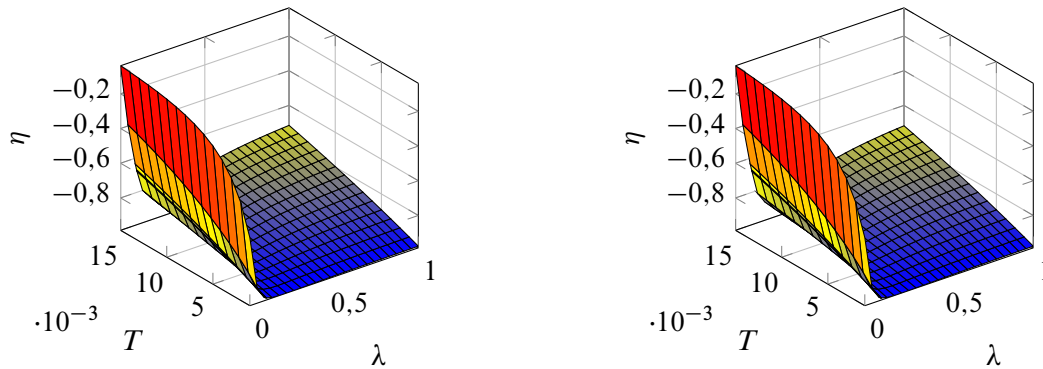
ohne Totzeit mit den Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $b_i$  der Matrizen aus Gl. (2.35).

Durch die Diskretisierung entsteht eine zusätzliche Nullstelle  $\eta$  bei beiden Modellen, deren Lage für verschiedene Schlüpfе  $\lambda$  und Geschwindigkeiten in Abbildung 2.12 dargestellt ist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die schnellstmögliche diskrete Systemantwort, die mit der kontinuierlichen Systemantwort einer streng properen Strecke zu den Abtastzeitpunkten übereinstimmt, bei Abtastung mit einem Abtast-Halteglied nullter Ordnung zu einer Übertragungsfunktion mit relativem Grad von 1 führen muss [228, S. 182]. Es fällt auf, dass die Nullstelle auf der reellen Achse in der linken  $\mathcal{Z}$ -Halbebene liegt und für kleine Geschwindigkeiten  $v \leq 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  im Bereich um  $\lambda \simeq 0,25$  nichtminimalphasig wird und für noch kleinere Geschwindigkeiten für alle instabilen Schlüpfе nichtminimalphasig wird. Für kleiner werdende Abtastzeit lässt sich die Nullstelle im Mittel insgesamt näher an  $-1$  verschieben und variiert weniger in der Entfernung zu  $-1$  als bei größeren Abtastzeiten, wie Abbildung 2.13 zu entnehmen ist. Das Auftreten nichtminimalphasiger Diskretisierungsnullstellen lässt sich meist nur vermeiden, wenn die Abtastzeit so groß gewählt wird, dass sie gegen das Abtasttheorem verstößt, was nicht in Betracht kommt, da dann die Dynamik des kontinuierlichen Systems nicht mehr ausreichend abgebildet wird und eine gute Regelung nicht mehr möglich ist [182, S. 255]. Für die möglichen Regelungsansätze bedeutet die Nichtminimalphasigkeit der diskretisierten Strecke, dass es nicht möglich ist, einen Kompensationsregler zur Vorgabe einer beliebigen Dynamik des geschlossenen Regelkreises zu verwenden, da beim Invertieren der Strecke immer instabile Pole entstehen würden [228, S. 185].



(a) Nullstellen des Modells mit drei Zuständen für  $T = 5 \text{ ms}$ . (b) Nullstellen des Modells mit zwei Zuständen für  $T = 5 \text{ ms}$ .

Abbildung 2.12: Durch Diskretisierung entstehende Nullstellen für das Einradmodell für verschiedene Geschwindigkeiten  $v$  in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Schlüpfе.



(a) Durchschnittliche Nullstellenlage des Modells mit drei Zuständen. (b) Durchschnittliche Nullstellenlage des Modells mit zwei Zuständen.

Abbildung 2.13: Durch Diskretisierung entstehende Nullstellen für das Einradmodell für verschiedene Abtastzeiten  $T$  in s und Schlüpf gemittelt über verschiedene Geschwindigkeiten.

### 2.4.2.2 Totzeit

Da insbesondere in hydraulischen Aktoren eine Totzeit  $T_{\text{ein}}$  am Systemeingang auftritt und auch der Raddrehzahlsensor am Systemausgang eine Totzeit  $T_{\text{aus}}$  aufweist, wird zur Berücksichtigung dieser Totzeiten, die auch Bruchteilen der Abtastzeit entsprechen dürfen, die in [92] und [93] angegebene Methode zur Diskretisierung von Systemen mit Totzeit verwendet. Die einzelnen Systemmatrizen werden an dieser Stelle nicht angegeben, um die Darstellung übersichtlich zu halten.

## 2.5 Identifikation

### 2.5.1 Identifikation Hydraulikmodelle

Die Parameter des linearen Hydraulikaktormodells erhält man aus der Durchführung einiger Messungen von Soll-drucksprüngen und anschließender Bestimmung der Werte  $\tilde{a}_B$  und  $s_B$  mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Die Sprungversuche wurden bei einem Hauptzylinderdruck von 100 bar, 120 bar und 150 bar durchgeführt und es wurden jeweils Sprünge von 5 bar, 10 bar und 20 bar beim Druckaufbau sowie Druckabbau betrachtet. Wie aufgrund der unterschiedlichen Drosseldurchmesser für Einlass- und Auslassventile zu erwarten, findet der Druckabbau schneller als der Druckaufbau statt. Es lässt sich ermitteln, dass die Pollage für den Aufbau im Mittel bei etwa  $s_B = -40$  liegt und etwa 20 % Abweichung über die verschiedenen Hauptzylinderdruckbereiche und Sprunghöhen aufweist, was in guter Übereinstimmung mit den in [197, S. 88] ermittelten Werten ist. Die stationäre Verstärkung des Aktors aus Gl. (2.5) liegt in guter Näherung bei 1, sodass sich für die Verstärkung  $\tilde{a}_B = -s_B$  ergibt.

Neben den im Stand durchgeführten Identifikationsversuchen für den hydraulischen Aktor wurden zur Validierung der Annahmen und zur Identifikation der nichtlinearen LoLiMoT-Modelle Mes-

sungen aus einer realen ABS-Bremung mit in Serie verwendeten Regelalgorithmen durchgeführt. Damit der LoLiMoT-Algorithmus in die Lage versetzt wird, auch mehrere Messungen, die durch einfaches Aneinanderreihen zusammengefügt werden, zu verarbeiten, ohne dass die zugrunde liegenden Regressionsmethoden die durch unterschiedliche Start- und Endwerte der zusammengefügteten Messungen entstehende, u. U. sehr hohe Dynamik an den Schnittstellen zwischen verschiedenen Messungen identifizieren, wird ein ähnliches Vorgehen wie in [69, S. 70] gewählt. Dieses besteht darin, die Verbindungszeitpunkte der unterschiedlichen Messungen an den Algorithmus zu übergeben, der dann dafür sorgt, dass die Verzögerung der Ein- und Ausgangsdaten immer nur innerhalb einer Messung geschieht und bei Überschreiten der Grenze zwischen zwei Messungen die Daten der neuen Messung verzögert werden, indem der Startwert der Messung zum Verbindungszeitpunkt anstatt der verzögerten Werte aus der vorangegangenen Messung so lange festgehalten wird, bis der Verzögerungsoperator nur noch auf Werte aus der aktuellen Messung wirkt.

Wird das Identifikationsverfahren von LoLiMoT aus der entsprechenden, am Institut für Automatisierungstechnik vorhandenen MATLAB-Routine auf einige Messungen angewandt, ergeben sich für den identifizierten nichtlinearen Zusammenhang zwischen Soll- und Istdruck die in Abbildung 2.14 gezeigten Verläufe, die, gemessen an der Einfachheit des Modells, relativ nah an den realen Daten liegen [134]. Die Verteilung der Eigenwerte der identifizierten lokalen linearen Modelle ist in Abbildung 2.15 dargestellt und es zeigt sich, dass diese in einem Bereich zwischen  $-20$  und  $-130$  liegen, was recht gut mit dem in den Sprungversuchen identifizierten Bereichen übereinstimmt, wenn man die instabilen identifizierten Modelle außer Acht lässt. Die besonders schnellen Modelle ergeben sich dabei aus dem Abbauverhalten über die Auslassventile. Da in den zur Identifikation verwendeten Messungen jedoch nur relativ wenige Messdaten im Bereich des Anbremsens, d. h. für einen Druckaufbau von  $0$  bar, vorhanden waren und dieser deutlich langsamer vonstatten geht als im identifizierten Arbeitsbereich, werden die lokal linearen Modelle für den initialen Druckaufbau nachträglich durch Erhöhung der Dynamik dahingehend geändert, dass sie diesen Bereich besser abbilden können. Aus demselben Grund wird auch für das lineare Aktormodell, das im Reglerentwurf verwendet wird, die Pollage auf den Bereich  $s_B \in [-60, -30]$  angesetzt, um zum einen das identifizierte Verhalten im Druckaufbau abbilden zu können und zum anderen auch das beobachtete Verhalten außerhalb des identifizierten Bereiches sowie eine entsprechende Reserve für die gewünschte Robustheit gegenüber anderen Hydroaggregaten abzudecken.

### 2.5.2 Identifikation Fahrzeugparameter

Im Rahmen der Arbeit wurde keine Identifikation der Fahrzeugparameter vorgenommen, sondern diese wurden freundlicherweise von der ROBERT BOSCH GmbH zur Verfügung gestellt. Dort nicht vorhandene Parameter wurden aus der Literatur, bspw. aus [127] und [181] sowie [220], übernommen. Die für das Gesamtfahrzeug sowie das Einradmodell verwendeten Parameter sind in Tabelle 2.3 angegeben. Der Parametrierung zugrunde liegt ein VW Golf VII mit dem Baujahr 2015.



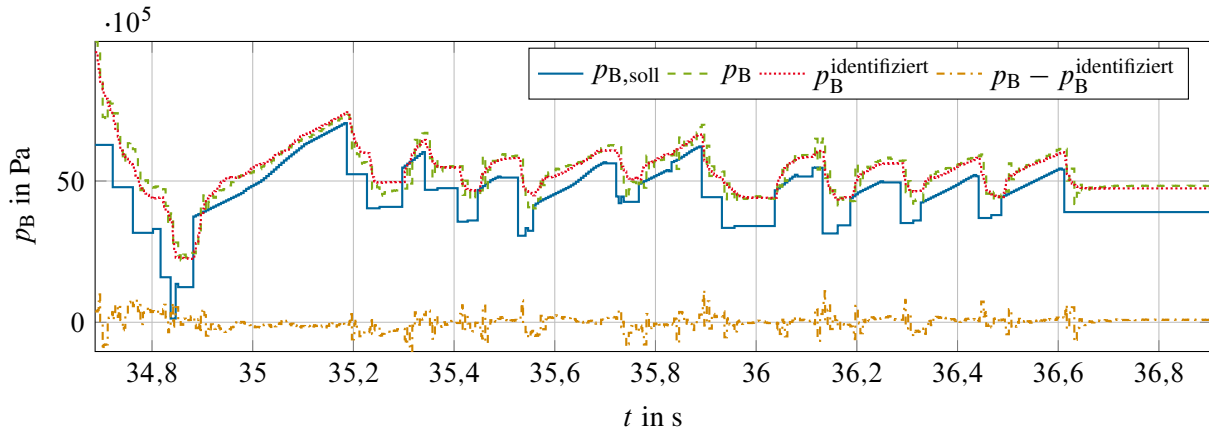


Abbildung 2.14: Simulierter Verlauf der mittels LoLiMoT identifizierten Drücke bei einer Messung einer ABS-Bremung mit Serienregler.

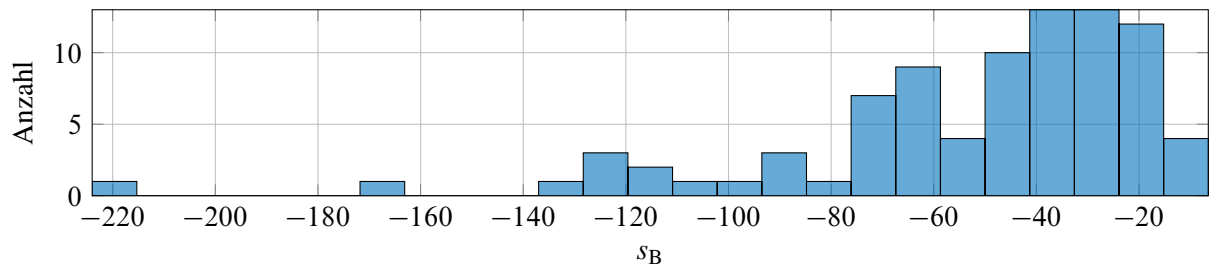


Abbildung 2.15: Verteilung der mittels LoLiMoT identifizierten Pollagen der Hydraulik.

| <b>Fahrzeugparameter</b> |       |                   |  |
|--------------------------|-------|-------------------|--|
| $A_B$                    | 2,2   | $m^2$             | Querspanfläche                                 |
| $J_y$                    | 1467  | $kgm^2$           | Trägheitsmoment des Aufbaus um die $y$ -Achse  |
| $\zeta_h$                | 15500 | $\frac{Ns}{m}$    | Dämpferkonstante der Hinterachse               |
| $\zeta_v$                | 4800  | $\frac{Ns}{m}$    | Dämpferkonstante der Vorderachse               |
| $k_h$                    | 19000 | $\frac{N}{m}$     | Federsteifigkeit der Hinterachse               |
| $k_v$                    | 45000 | $\frac{N}{m}$     | Federsteifigkeit der Vorderachse               |
| $c_w$                    | 0,316 | $\frac{N}{m^2}$   | Luftwiderstandsbeiwert                         |
| $h_{CoG}$                | 0,59  | $m$               | Schwerpunktshöhe                               |
| $l_h$                    | 1,539 | $m$               | Entfernung der Hinterachse vom Schwerpunkt     |
| $l_v$                    | 1,081 | $m$               | Entfernung der Vorderachse vom Schwerpunkt     |
| $m_A$                    | 1213  | $kg$              | Aufbaumasse                                    |
| $m_F$                    | 1470  | $kg$              | Gesamtfahrzeugmasse                            |
| $m_{RT,h}$               | 20,2  | $kg$              | Masse der Hinterradaufhängung                  |
| $m_{RT,v}$               | 27,7  | $kg$              | Masse der Vorderradaufhängung                  |
| <b>Radparameter</b>      |       |                   |  |
| $J_h$                    | 1,6   | $kgm^2$           | Trägheitsmoment des Hinterrades                |
| $J_v$                    | 2     | $kgm^2$           | Trägheitsmoment des Vorderrades                |
| $d_h$                    | 0     | $\frac{Nms}{rad}$ | viskoser Lagerreibungskoeffizient am Hinterrad |

Tabelle 2.3: Zur Simulation verwendete Parameter.

|                           |                      |                                 |  |
|---------------------------|----------------------|---------------------------------|--|
| $d_v$                     | 0                    | $\frac{\text{Nms}}{\text{rad}}$ | viskoser Lagerreibungskoeffizient am Vorderrad       |
| $m_{R,h}$                 | 15                   | kg                              | Masse des Hinterrades                                |
| $m_{R,v}$                 | 15                   | kg                              | Masse des Vorderrades                                |
| $r_h$                     | 0,307 m              |                                 | Radius des Hinterrades                               |
| $r_v$                     | 0,307 m              |                                 | Radius des Vorderrades                               |
| <b>Bremsenparameter</b>   |                      |                                 |  |
| $\mu_h$                   | 0,343                |                                 | Reibungskoeffizient des Belagreibwertes am Hinterrad |
| $\mu_v$                   | 0,347                |                                 | Reibungskoeffizient des Belagreibwertes am Vorderrad |
| $r_h$                     | 0,129 m              |                                 | Effektiver Reibradius der Bremsscheibe am Hinterrad  |
| $r_v$                     | 0,124 m              |                                 | Effektiver Reibradius der Bremsscheibe am Vorderrad  |
| <b>Hydraulikparameter</b> |                      |                                 |  |
| $A_{K,h}$                 | 0,001 m <sup>2</sup> |                                 | Kolbenfläche des Bremszylinders am Hinterrad         |
| $A_{K,v}$                 | 0,003 m <sup>2</sup> |                                 | Kolbenfläche des Bremszylinders am Vorderrad         |

Tabelle 2.3: Zur Simulation verwendete Parameter.

## 2.6 Systemanalyse

Im Folgenden soll das Einradmodell hinsichtlich verschiedener struktureller Eigenschaften, wie Steuer- und Beobachtbarkeit, anhand von Maßzahlen untersucht werden, um daraus Schlussfolgerungen für die Eignung der Modelle Gl. (2.61) und Gl. (2.62) für regelungstechnische Untersuchungen zu ziehen.

Um eine bessere Vergleichbarkeit der Werte der einzelnen Strukturmaße für unterschiedliche Eigenwerte des Systems zu erreichen, wird das System mit den Eingangs-, Zustands- und Ausgangstransformationen

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_u \tilde{\mathbf{u}} = 10 \text{ bar } \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.63a)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_x \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_u \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.63b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_y \tilde{\mathbf{y}} = 0,1 \tilde{\mathbf{y}} \quad (2.63c)$$

auf typische Werte der Eingänge, Zustände und Ausgänge normiert. Es wird dabei die Annahme zugrunde gelegt, dass die Linearisierung der Hydraulikmodelle für etwa jeweils 10 bar und die Linearisierung des Einradmodells für etwa 10% Schlupf gültig sind bzw. das lineare Modell bei der Regelung in dieser Größenordnung angeregt wird.

### 2.6.1 Strukturmaße

Zur Untersuchung der strukturellen Eigenschaften des Systems werden das Steuerbarkeitsmaß

$$\xi_{B,i} = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i} e^{-2\Re(\lambda_i)} \quad (2.64)$$

und das Beobachtbarkeitsmaß

$$\xi_{C,i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i} e^{-2\Re(\lambda_i)} \quad (2.65)$$

nach [118, S. 166] sowie das Steuer- und Entkopplungsmaß

$$m_{B,i} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{G}^{-1})_{ii}}} \quad \text{bzw.} \quad m_{B,i}^d = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{G}^{d-1})_{ii}}} \quad (2.66)$$

$$\kappa_{B,i} = \frac{m_{B,i}}{\sqrt{(\mathbf{G})_{ii}}} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_{B,i}^d = \frac{m_{B,i}^d}{\sqrt{(\mathbf{G}^d)_{ii}}} \quad (2.67)$$

nach [15, S. 475 f.] mit der sog. GRAM'schen Matrix

$$\mathbf{G} = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (2.68)$$

im kontinuierlichen Fall und

$$\mathbf{G}^d = \sum_{k=0}^{k_f} e^{\mathbf{A}k} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T k} \quad (2.69)$$

im diskreten Fall sowie das Dominanzmaß

$$S_i = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m \left| \frac{\tilde{c}_j \tilde{b}_{ik}}{\lambda_i} \right| \quad (2.70)$$

nach [111, S. 151] mit  $\tilde{c}$  und  $\tilde{b}$  als Elemente der auf Modalkoordinaten transformierten Steuer- und Ausgangsmatrizen berechnet. Hohe Werte der jeweiligen Strukturmaße bezeichnen dabei gut steuer- oder beobachtbare Systeme bzw. Eigenwerte, während der Wert 0 Unsteuer- oder Unbeobachtbarkeit charakterisiert. Für das Entkopplungsmaß  $\kappa_B$  bezeichnen Werte in der Nähe von 1 eine Entkopplung von den anderen Zuständen, während Werte von 0 eine vollständige Verkopplung mit den anderen Zuständen charakterisieren.

Die Steuerzeit  $t_f$  zur Berechnung der GRAM'schen Matrix kann nach BENNINGER ([15, S. 477]) als dominante Zeitkonstante des Systems gewählt werden oder nach [129, S. 12] aufgrund der Forderung, dass  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  einen ähnlich starken Einfluss auf das Steuerbarkeitsmaß haben sollen, zu

$$t_f = \begin{cases} -\frac{\ln(\|\mathbf{B}\|_1 + 1)}{\lambda_{\min}}, & \lambda_{\min} < 0 \\ \|\mathbf{B}\|_1 + 1, & \lambda_{\min} = 0 \\ \frac{\ln(100)}{\lambda_{\min}}, & \lambda_{\min} > 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

gewählt werden, wobei im Diskreten  $\lambda_{\min} = \frac{\ln(\lambda^d)}{T}$  gewählt wird. Bei der Berechnung von  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{G}^d$  ist zu beachten, dass das linearisierte System für Arbeitspunkte mit  $\lambda \geq \lambda_{\text{stab}}$  instabile Eigenwerte besitzt und damit das Integral in Gl. (2.68) für  $t_f \rightarrow \infty$  bzw. die Summe in Gl. (2.69) für  $k_f \rightarrow \infty$  nicht mehr existiert, und somit zur Berechnung eine Zerlegung in ein stabiles und ein instabiles Teilsystem notwendig ist, wobei die GRAM'sche Matrix  $\mathbf{G}$  für das stabile Teilsystem mit Gl. (2.68) berechnet werden kann und für das instabile Teilsystem  $\mathbf{G}$  für die Systemmatrix  $-\mathbf{A}$  im Kontinuierlichen und  $\mathbf{A}^{-1}$  im Diskreten berechnet werden muss [131, 236].

Damit das Steuer- und Beobachtbarkeitsmaß nach Gl. (2.64) und Gl. (2.65) bei diskreten Systemen mit unterschiedlichen Abtastzeiten vergleichbare Werte liefern, wird motiviert durch den in Anhang A.2 angegebenen Zusammenhang das alternative Steuerbarkeitsmaß

$$\xi_{B,i}^d = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{B}^{dT} \mathbf{w}_i}{T^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i} e^{2(1-|\lambda_i^d|)} \quad (2.72)$$

und wegen  $\mathbf{C}^d = \mathbf{C}$  das alternative Beobachtbarkeitsmaß

$$\xi_{C,i}^d = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{C}^{dT} \mathbf{C}^d \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i} e^{2(1-|\lambda_i^d|)} \quad (2.73)$$

mit dem Eigenwert  $\lambda_i^d = e^{\lambda_i T}$  eines zeitdiskreten Systems verwendet.

Für diskrete Systeme wird in Gl. (2.70) aufgrund von

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (y_j(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathcal{Z}^{-1} \left( \frac{\tilde{c}_{ji} \tilde{b}_{ik}}{z - \lambda_i^d} \frac{z}{z-1} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\tilde{c}_{ji} \tilde{b}_{ik}}{1 - \lambda_i^d} (1 - (\lambda_i^d)^n) \right) \\ &= \frac{\tilde{c}_{ji} \tilde{b}_{ik}}{1 - \lambda_i^d} \end{aligned}$$

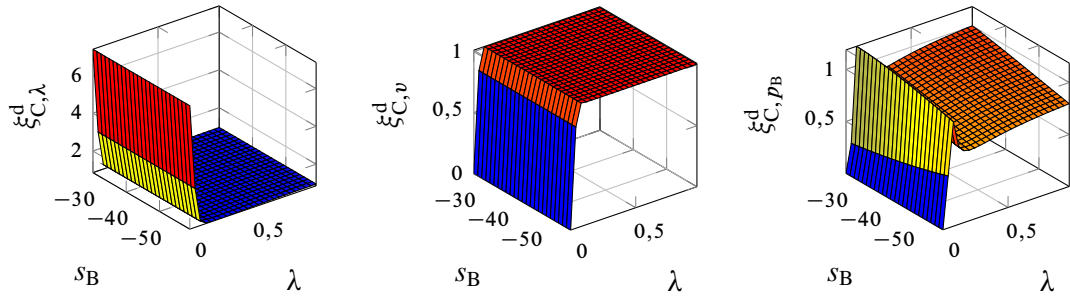
das diskrete Dominanzmaß

$$S_i^d = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m \left| \frac{\tilde{c}_{ji} \tilde{b}_{ik}}{1 - \lambda_i^d} \right| \quad (2.74)$$

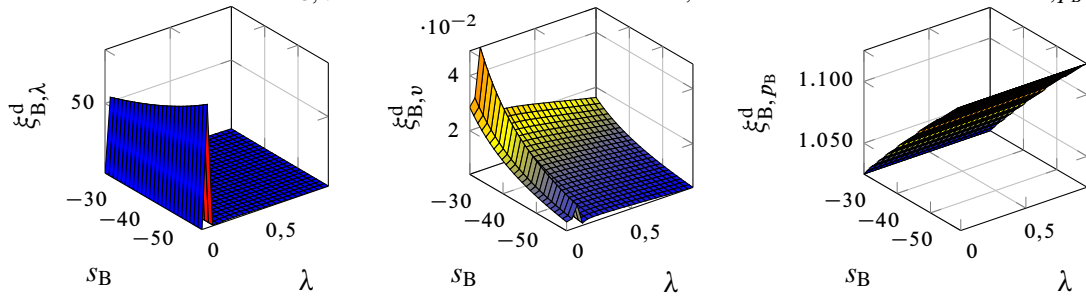
verwendet.

## 2.6.2 Strukturanalyse

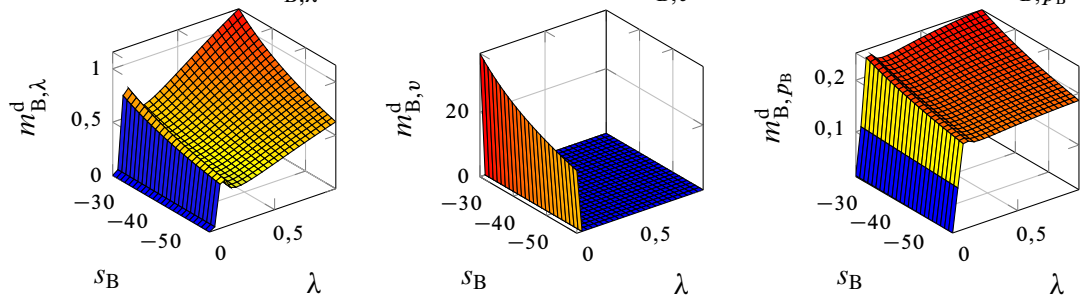
Die verschiedenen Maße sind in Abbildung 2.16 für  $\lambda \in [0, 1]$  und eine Variation der Aktorpolage  $s_B$  dargestellt. Aus Abbildung 2.16 (a) bis Abbildung 2.16 (c) lässt sich erkennen, dass  $\Delta\lambda$  verglichen mit  $\Delta p_B$  und  $\Delta v$  im Bereich von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda_{\text{krit}}$  besser beobachtbar ist und im restlichen Bereich alle drei Zustände etwa gleich gut beobachtbar sind. Aus Abbildung 2.16 (d) bis Abbildung 2.16 (f) lässt sich ablesen, dass  $\Delta p_B$  aufgrund der direkten Einwirkung der Stellgröße sehr gut steuerbar ist,  $\Delta\lambda$  vor allem im linearen Bereich der  $\mu$ - $\lambda$ -Kurve gut steuerbar ist, aber  $\Delta v$  ein um etwa drei bzw. sechs Größenordnungen niedrigeres Steuerbarkeitsmaß von etwa  $5 \cdot 10^{-3}$  besitzt und damit schlecht steuerbar ist. Zudem nimmt die Steuerbarkeit im instabilen Bereich der



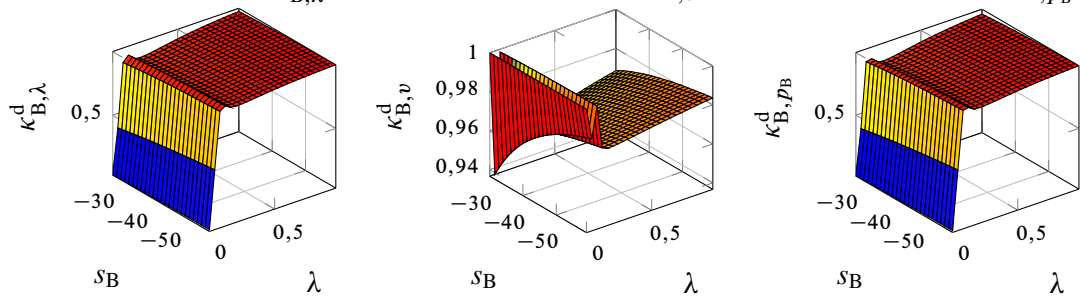
(a) Beobachtbarkeitsmaß  $\xi_{C,\lambda}^d$ . (b) Beobachtbarkeitsmaß  $\xi_{C,v}^d$ . (c) Beobachtbarkeitsmaß  $\xi_{C,p_B}^d$ .



(d) Steuerbarkeitsmaß  $\xi_{B,\lambda}^d$ . (e) Steuerbarkeitsmaß  $\xi_{B,v}^d$ . (f) Steuerbarkeitsmaß  $\xi_{B,p_B}^d$ .



(g) Steuerbarkeitsmaß  $m_{B,\lambda}^d$ . (h) Steuerbarkeitsmaß  $m_{B,v}^d$ . (i) Steuerbarkeitsmaß  $m_{B,p_B}^d$ .



(j) Steuerbarkeitsentkopplungsmaß  $\kappa_{B,\lambda}^d$ . (k) Steuerbarkeitsentkopplungsmaß  $\kappa_{B,v}^d$ . (l) Steuerbarkeitsentkopplungsmaß  $\kappa_{B,p_B}^d$ .

Abbildung 2.16: Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße für verschiedene Pollagen der normierten diskretisierten Strecke.

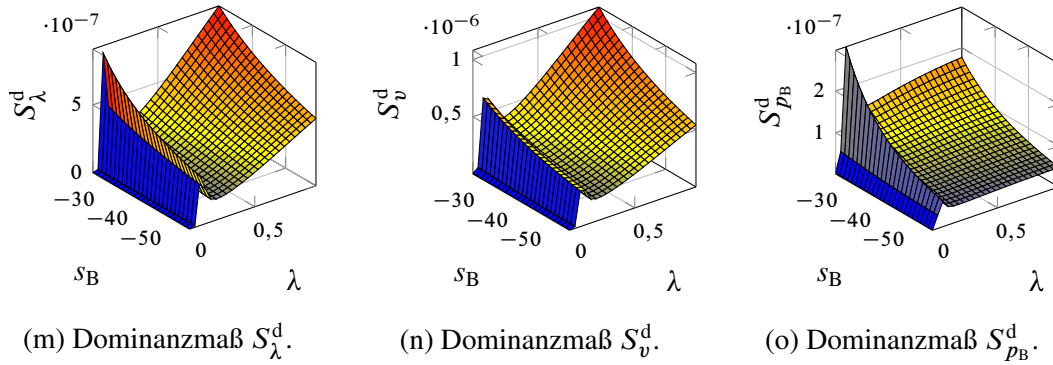


Abbildung 2.16 (Forts.): Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße für verschiedene Pollagen der normierten diskretisierten Strecke.

$\mu$ -Schlupf-Kurve stark ab, was sich insbesondere in einem Abfall von  $m_{B,v}^d$  in Abbildung 2.16 (h) um mehrere Größenordnungen äußert. Wie jedoch aus Abbildung 2.16 (k) zu ersehen ist, nimmt das Steuerbarkeitsentkopplungsmaß  $\kappa_{B,v}^d$  Werte nahe 1 an, was darauf hindeutet, dass der Zustand  $\Delta v$  von den beiden anderen Zuständen fast entkoppelt ist und somit mit der Annahme von  $v$  als Parameter anstatt als Zustand das System auf zwei Zustände gemäß Gl. (2.36) reduziert werden kann, wofür die Strukturmaße in Abbildung 2.17 dargestellt sind. Für das damit resultierende System ergibt sich eine ähnliche Situation wie bei drei Zuständen, da wieder  $\Delta\lambda$  im linearen Bereich der  $\mu$ -Schlupf-Kurve gut beobachtbar und  $\Delta p_B$  schlechter beobachtbar ist, während die Zustände im übrigen Bereich etwa gleich gut beobachtbar sind. Sowohl die Steuerbarkeitsmaße  $\xi_{B,\lambda}^d$  und  $\xi_{B,p_B}^d$  als auch die Steuerbarkeitsmaße  $m_{B,\lambda}^d$  und  $m_{B,p_B}^d$  liegen in einer ähnlichen Größenordnung und sind erheblich größer als 0, sodass das reduzierte System gut steuerbar ist. Die Dominanzmaße  $S^d$  liegen etwa in derselben Größenordnung, sodass sich aufgrund dessen kein Zustand identifizieren lässt, der formal für eine weitere Ordnungsreduktion besonders gut geeignet wäre.

Analoge Resultate ergeben sich auch für die in Abbildung 2.18 dargestellten Strukturmaße für unterschiedliche Abtastzeiten und es lässt sich im Wesentlichen kein Einfluss der Abtastzeit auf die Strukturmaße ermitteln.

Wird nun der Frequenzgang des Systems mit zwei Zuständen aus Gl. (2.36) mit dem mit drei Zuständen aus Gl. (2.35) verglichen, wie er in Abbildung 2.19 dargestellt ist, so zeigt sich, dass das Verhalten des Systems im unteren Frequenzbereich bis etwa  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  stark unterschiedlich ausfällt, während die Frequenzgänge im oberen Frequenzbereich annähernd gleich verlaufen und für Frequenzen ab  $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  nahezu identisch sind. Dies ergibt sich dadurch, dass das Modell Gl. (2.35), wie sich anhand der ROSENBRÖCK'schen Systemmatrix

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

berechnen lässt, eine invariante Nullstelle in 0 besitzt, die in der Übertragungsfunktion des SISO-Systems als einzige Nullstelle auftaucht und für einen Frequenzanstieg um 20 dB pro Dekade im unteren Frequenzbereich sorgt [119, S. 52]. Beim Modell Gl. (2.36) tritt dagegen keine Nullstelle auf, da sie beim Entfernen des Zustandes  $v$  eliminiert wird und man erhält im oberen Frequenzbereich typisches  $PT_2$ -Verhalten. Variiert man nun die Geschwindigkeit für die beiden Modelle

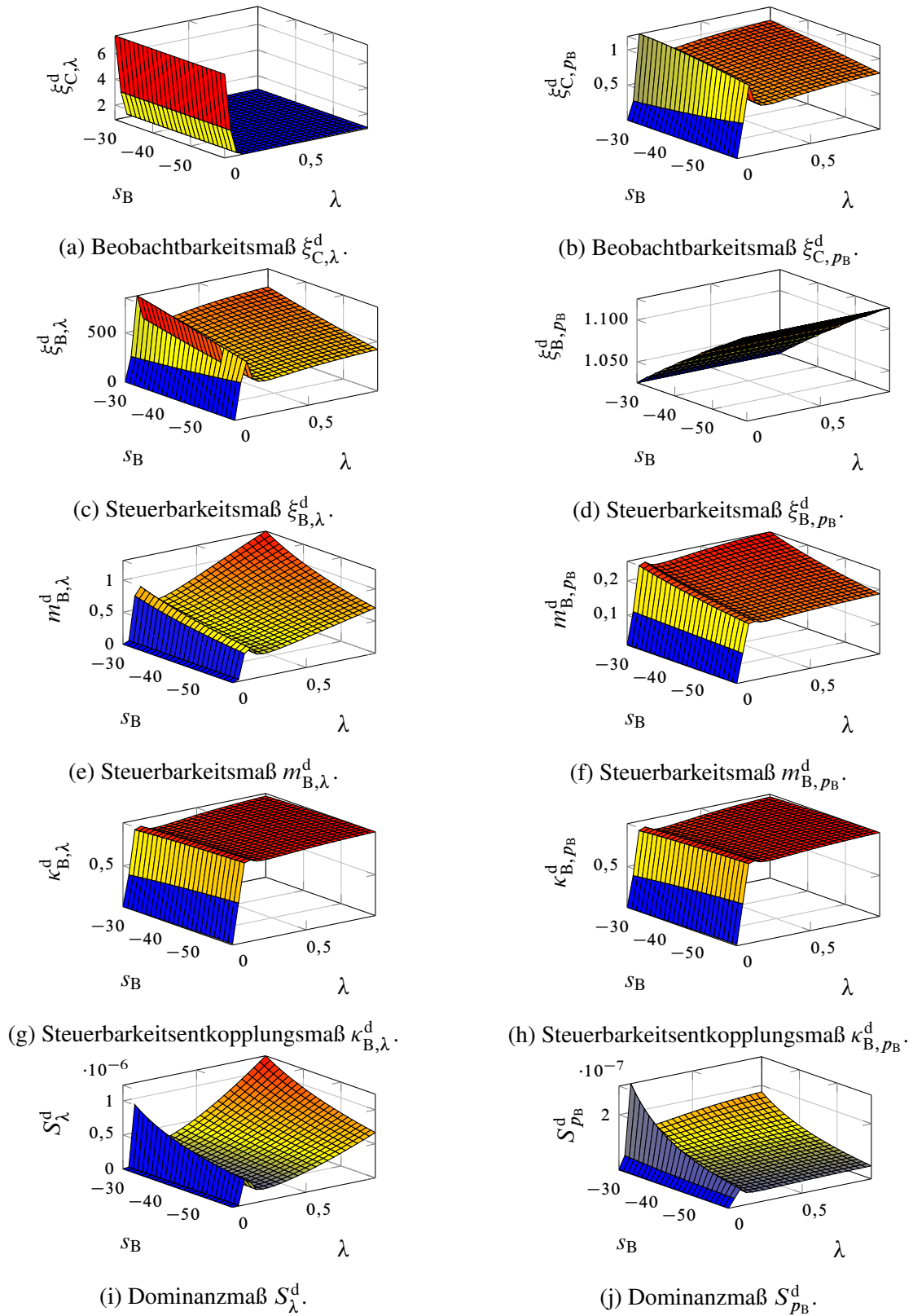


Abbildung 2.17: Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße für verschiedene Pollagen der normierten diskretisierten Strecke ohne den Zustand  $v$ .

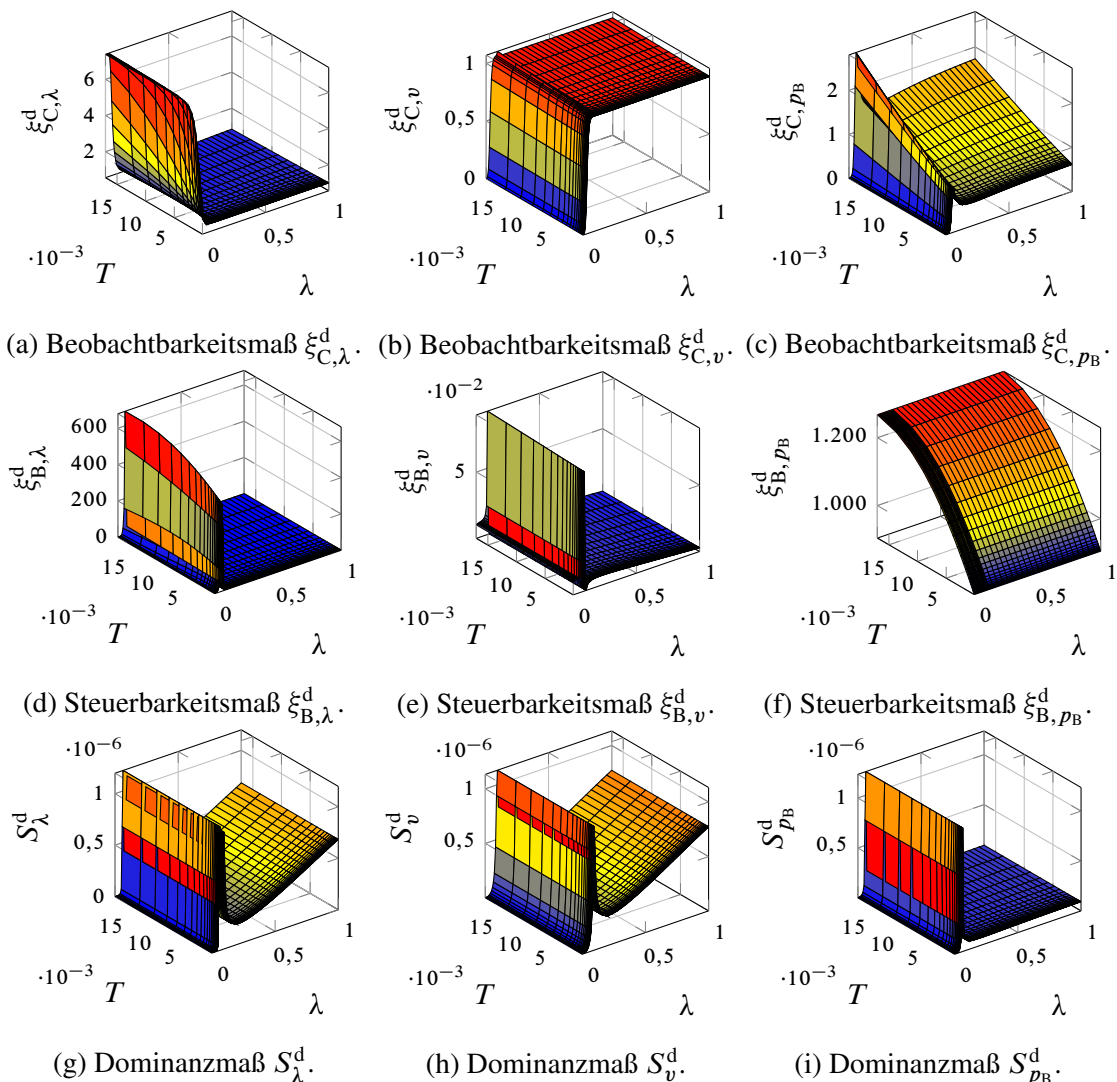


Abbildung 2.18: Steuer- und Beobachtbarkeitsmaße für verschiedene Pollagen der normierten diskretisierten Strecke mit  $T$  in s.

unterschiedlicher Dimension, erhält man die in Abbildung 2.19 dargestellten Verläufe. Bis auf eine Verschiebung der Eckkreisfrequenzen zu kleineren Frequenzen für höhere Geschwindigkeiten, ergeben sich qualitativ dieselben Frequenzgänge.

Da der untere Frequenzbereich für die Regelung nicht relevant ist und der Zustand  $v$  im Modell mit drei Zuständen nur schlecht steuerbar und von den anderen beiden Zuständen nahezu entkoppelt ist, ist die Reduktion auf ein Modell mit zwei Zuständen gemäß Gl. (2.36) gerechtfertigt und im Folgenden wird daher für den Reglerentwurf von einem Einradmodell mit den Zuständen  $\Delta\lambda$  und  $\Delta p_B$  ausgegangen.

Die Vereinfachung auf ein Einradmodell mit nur zwei Zuständen ist auch vom in [171, S. 433] vorgebrachten physikalischen Standpunkt plausibel, da sich die Fahrzeuggeschwindigkeit sehr viel langsamer ändert als die Radgeschwindigkeit bzw. der Schlupf.



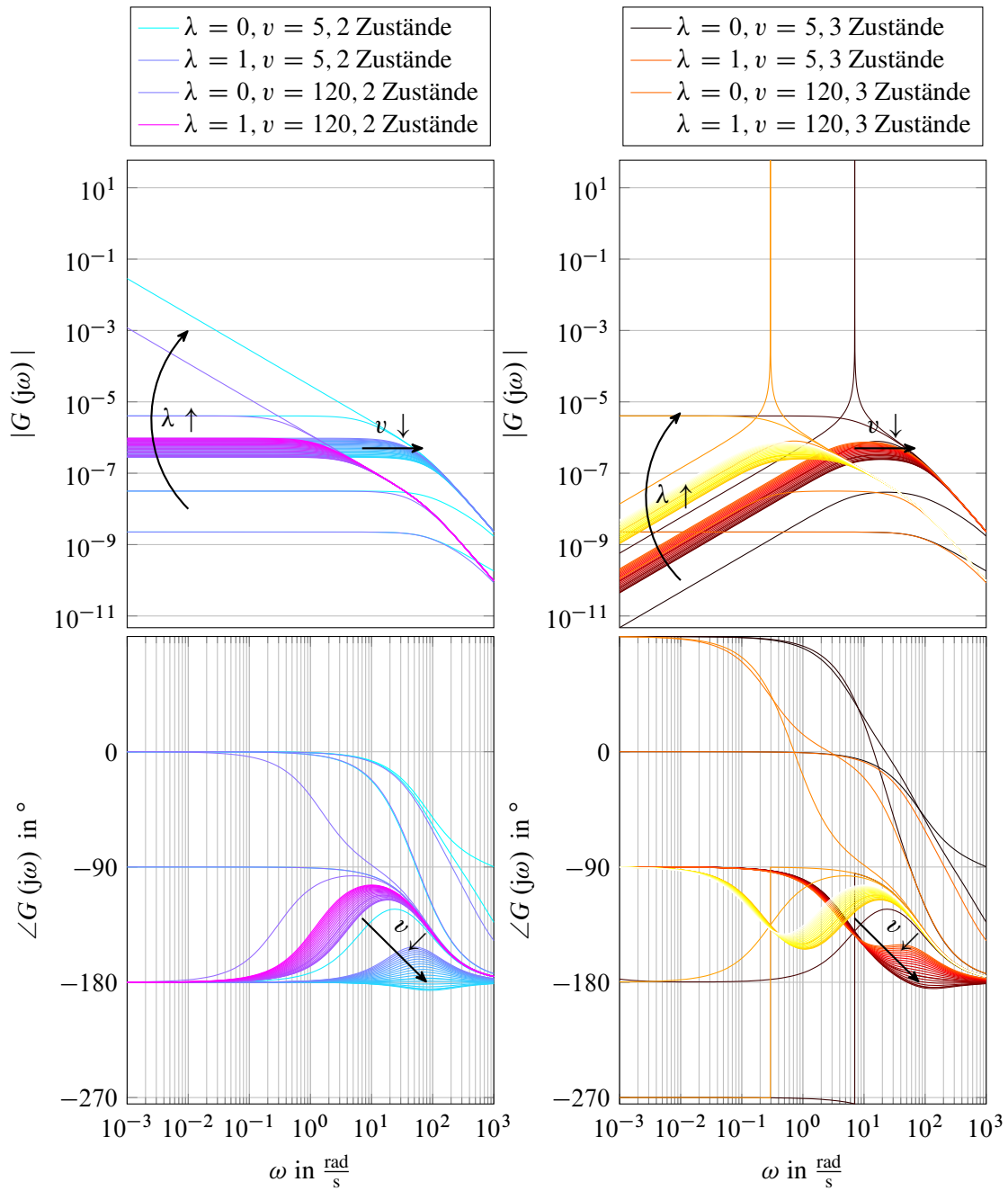


Abbildung 2.19: Frequenz- und Phasengang des Einradmodells mit zwei Zuständen für unterschiedliche Geschwindigkeiten in  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Schlüpf.

## 3 Regelungskonzept zur Regelung des Radschlupfes

---

Dieses Kapitel beschreibt das in der Arbeit vorgeschlagene Regelungskonzept zur Radschlupfregelung einschließlich Optimalwertsuche. Die vorgeschlagene Reglerstruktur ist eine Zwei-Freiheitsgrade Regelung bestehend aus einer modellbasierten Vorsteuerung und einer robust entworfenen Rückführung sowie einem überlagerten Extremum Seeking. Es werden die Anforderungen an die einzelnen Komponenten des Reglers dargelegt und verschiedene Regelungsansätze hinsichtlich ihrer Eignung diskutiert.

---

### 3.1 Anforderungen an den Reglerentwurf

Neben den bereits in Abschnitt 1.2.1 benannten grundlegenden Anforderungen an ein Antiblockiersystem sind für den vorliegenden modellbasierten Entwurf die folgenden weiteren bzw. konkreteren Anforderungen bei der Auswahl geeigneter Regelungsverfahren zu beachten: Bedingt durch die als unbekannt angenommene Reifenkennlinie entsteht eine hohe parametrische Unsicherheit in der Strecke, die vom zu wählenden Verfahren berücksichtigt werden muss. Es soll nur der Schlupf als einzige Ausgangsgröße zur Regelung verwendet werden, da der Aktorzustand nicht gemessen wird. Das Verfahren soll eine stationär genaue Ausregelung des Schlupfes mit einer Ausregelzeit von 250 ms bei akzeptablem Überschwingen ermöglichen. Es ist darüber hinaus wünschenswert, dass das gewählte Verfahren mit Totzeit am Eingang und Ausgang der Strecke weiterhin anwendbar bleibt. Da der Regler auf einem digitalen Steuergerät implementiert wird, soll das gewählte Regelungsverfahren ein zeitdiskretes Verfahren sein oder sich zumindest diskretisieren lassen.

Damit sich die Applikation des Konzeptes möglichst einfach gestaltet, sollte ein modularer Aufbau der Reglerstruktur gewählt werden. Darüber hinaus sollen unterschiedliche Aktortypen leicht in den Entwurf der Regelung zu integrieren sein.

**Anforderungen an eine Regelung mit Extremwertsuche** Das zu wählende Verfahren zur Extremwertsuche soll sich in das modulare Konzept der Regelung nahtlos einfügen lassen und bei Bedarf zu- oder abschaltbar sein. Wenn das Maximum der Reibwertkurve gefunden ist, soll dieses unabhängig von Reibwertänderungen wieder eingeregelt werden können und eine Schnittstelle für überlagerte Fahrdynamikregler definiert werden, die eine sinnvolle Arbitrierung der einzelnen Räder erlaubt. Die Suchzeit soll dabei nicht mehr als 1 s betragen.

## 3.2 Auswahl geeigneter Regelungsverfahren

### 3.2.1 Lineare Regelungsmethoden

Der einfachste mögliche Ansatz zur Stabilisierung des Einradmodells besteht in der Verwendung linearer Regelungsverfahren, die sich insbesondere aufgrund ihrer einfachen Verständlichkeit, geringen Komplexität des Regelgesetzes und der breiten Palette an vorhandenen Entwurfsverfahren anbieten.

Da einfache lineare Regelungsverfahren, wie die Wurzelortskurve oder das Frequenzkennlinienverfahren, prinzipbedingt nicht geeignet sind, ein für einen großen Parameterbereich gewünschtes Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu entwerfen, wird im Weiteren eine Methode der robusten Regelung, die robuste Polbereichsvorgabe eingeführt. Mit dieser lassen sich alle Freiheitsgrade eines Reglers systematisch berücksichtigen und verschiedene Linearisierungsaufpunkte des Einradmodells, und damit Parameteränderungen, können über sog. *Multi-Modelle* berücksichtigt werden. Als Ansätze für die Regelung des Radschlupfes bietet sich ein strukturbeschränkter Reglerentwurf an, um die Reglerordnung niedrig zu halten.

Neben der robusten Polbereichsvorgabe wurde als Alternative auch der robuste  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf betrachtet [A13]. Die Vorgabe eines geeigneten Regelkreisverhaltens geschieht beim  $\mathcal{H}_\infty$ -Entwurf über die Vorgabe passender Grenzen für verschiedene Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises im Frequenzgang [190]. Im Zeitkontinuierlichen ist dabei vorteilhaft, dass sich die hier auftretenden parametrischen Unsicherheiten exakt durch eine geeignete, einfache Modellierung berücksichtigen lassen. Es muss nicht eine Vielzahl an einzelnen Modellen gleichzeitig betrachtet werden, wie bei der robusten Polbereichsvorgabe über einen Multi-Modellansatz.

Im Zeitdiskreten geht der Vorteil der einfachen Modellierung jedoch verloren, da die unsicheren Parameter im diskreten Modell nicht mehr „aus dem System gezogen“ werden können und man so nicht zu der benötigten Darstellung der Unsicherheit kommt. D. h. diese muss für den zeitdiskreten Fall neu modelliert werden, wodurch die Betrachtung konservativer wird [A16]. Letzteres bedeutet, dass die beschriebene Unsicherheit eine größere Menge an Modellen abdeckt als es die unsicheren Parameter eigentlich erfordern. Da die Betrachtungen in dieser Arbeit jedoch zeigen, dass die Unsicherheiten aufgrund ihrer Größe schon stark einschränkend auf die Regelgüte wirken, ist dies nicht akzeptabel.

Darüber hinaus kann im Linearen ein Ansatz über lineare Matrixungleichungen (LMI) gewählt werden, bei dem basierend auf der LYAPUNOV-Gleichung und einer linearen oder polynomialen Parameterabhängigkeit der Systembeschreibung die Eigenwerte des geschlossenen Kreises in ein vorgegebenes Gebiet geschoben werden, ähnlich wie bei der robusten Polbereichsvorgabe. Das entstehende Problem ist eine lineare Matrixungleichung (LMI), die mit etablierten Optimierungsalgorithmen gelöst werden kann. Das Verfahren wird genauer in Abschnitt 5.5 beschrieben, wo es verwendet wird, um die Stabilität der mit der robusten Polbereichsvorgabe ermittelten Regler auch für die nicht in den Multi-Modellen berücksichtigten Parameterkombinationen zu untersuchen. Während der Entwurf von Zustandsreglern mittels LMIs vergleichsweise aufwandsarm

zu bewältigen ist [A23] und dafür vielfältige Toolboxen, wie die in MATLAB enthaltene ROBUST CONTROL TOOLBOX [61] oder YALMIP [116], vorhanden sind, ist der Entwurf strukturbeschränkter Regler deutlich komplizierter, da das dann entstehende Problem u. U. nichtlinear in den gesuchten Reglerkoeffizienten wird [174]. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der ähnlich einfachen Modellierung der Systemunsicherheit wie beim Multi-Modellansatz, da bspw. die Multi-Modelle als Eckpunkte der unsicheren polytopen Systembeschreibung in affinen oder baryzentrischen Koordinaten interpretiert werden können [57], und der Tatsache, dass die Stabilität des mit dem gefundenen Regler geschlossenen Regelkreises für alle Unsicherheiten innerhalb des unsicheren Polytops garantiert werden kann. Ein großer Nachteil, wie sich in Abschnitt 5.5 zeigen wird, ist, wie beim  $\mathcal{H}_\infty$ -Ansatz, die Diskretisierung von Systemen mit kontinuierlicher Unsicherheit und die dann entstehende hohe Ordnung der resultierenden LMI.

### 3.2.2 Gain-Scheduling-Regelung

Da ein robuster Ansatz notwendigerweise konservativ ist, kann darüber hinaus ein Gain-Scheduling-Ansatz verfolgt werden, bei dem der Arbeitsbereich in bestimmte Teilbereiche aufgeteilt wird, für die jeweils eigene Regler entworfen werden und diese dann über eine Gain-Scheduling-Strategie zu einem nichtlinearen Gesamtregler kombiniert werden. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass die Regler für die einzelnen Teilbereiche nach wie vor mit Methoden der linearen Regelungstheorie entworfen werden können und damit die in Abschnitt 3.2.1 genannten Vorteile erhalten bleiben. Darüber hinaus können die einzelnen Teilregler aber performanter ausgelegt werden, da sie nicht mehr im gesamten interessierenden Parameterbereich die Strecke stabilisieren müssen, sondern nur noch in einem kleineren Bereich mit weniger Unsicherheit bezüglich der Systemparameter. Nachteilig ist, dass durch das Umschalten oder Interpolieren der Regler im Rahmen der Scheduling-Strategie jedoch u. U. unerwünschte Effekte, wie Grenzyklen, auftreten können oder das System sogar instabil wird.

### 3.2.3 Inversionsbasierte Regelungsverfahren

Wenn die lineare Regelungstheorie, auch zusammen mit einem Gain-Scheduling-Ansatz, nicht ausreichend sein sollte, um die Strecke zu stabilisieren, muss zu nichtlinearen Entwurfsverfahren übergegangen werden. Eine Klasse dieser Verfahren sind die sog. *inversionsbasierten Regelungsverfahren*, zu denen bspw. die exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung (EAL) und die flachheitsbasierte Regelung gehören. Die Idee hinter der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung besteht darin, die Strecke durch eine geeignete nichtlineare Transformation bestehend aus den Zeitableitungen des Ausgangs in die BYRNES-ISIDORI-Normalform, d. h. eine Integratorkette, zu transformieren und die nichtlinearen Terme durch ein geeignetes Regelgesetz zu kompensieren. Da der resultierende geschlossene Regelkreis linear ist, können zu dessen Entwurf, bspw. um die Robustheit gegenüber Parametervariationen im Streckenmodell zu erhöhen, wieder Methoden der linearen Regelungstheorie angewandt werden. Nachteilig kann bei der exakten Eingangs-/Aus-

ganglinearisierung das Vorliegen einer internen Dynamik sein, die am Systemausgang nicht beobachtbar ist und instabil sein kann.

Beim Regelungsansatz der Flachheit wird dagegen das System über einen flachen Ausgang und dessen Zeitableitungen parametrisiert und nach der Stellgröße aufgelöst, woraus sich das Regelgesetz ergibt. Auch bei einem flachheitsbasierten Ansatz kann eine interne Dynamik entstehen. Zusätzlich besteht ein Nachteil in der Notwendigkeit des Findens einer Umkehrfunktion für den Zusammenhang zwischen Stellgröße und Ausgangsableitungen, der bei der exakten Eingangs-/Ausganglinearisierung entfällt. Der Reglerentwurf für ein Einradmodell wurde bereits in [48] und [A6] mittels eines Flachheitsansatzes durchgeführt. Der flache Ausgang des Einradmodells ist allerdings die Geschwindigkeit  $v$  und nicht der Schlupf  $\lambda$ , sodass in [A6] eine Modifikation des normalen Flachheitsansatzes durchgeführt wurde, die die Integration des vom Sollschlupf abhängigen Sollreibungswertes zur Sollgeschwindigkeit und anschließende Invertierung der Reifenkennlinie zur Berechnung des Sollschlupfes in der Vorsteuerung einspart. Das eine diskrete flachheitsbasierte Vorsteuerung möglich ist, wurde in [A5] gezeigt, jedoch gibt es dabei einige Einschränkungen an die verwendbaren Modelle für die Regelung. Es hat sich gezeigt, dass die Anwendung der flachheitsbasierten Schlupfregelung auf Aktormodelle erster Ordnung und die Verwendung des expliziten Diskretisierungsverfahrens von EULER beschränkt ist.

### 3.2.4 Gleitzustandsregelung

Ein weiteres nichtlineares Regelungsverfahren ist die sog. *Gleitzustandsregelung*, bei der anhand der Trajektorienverläufe des Systems eine geeignete Schaltfläche gewählt wird, an der zwischen verschiedenen Regelgesetzen umgeschaltet wird, sodass alle Trajektorien durch das wiederholte Umschalten der Regelgesetze gegen die Schaltfläche konvergieren und auf ihr in die Ruhelage laufen, wie in Abbildung 3.1 für einen Doppelintegrierer veranschaulicht wird. Obwohl die Gleit-

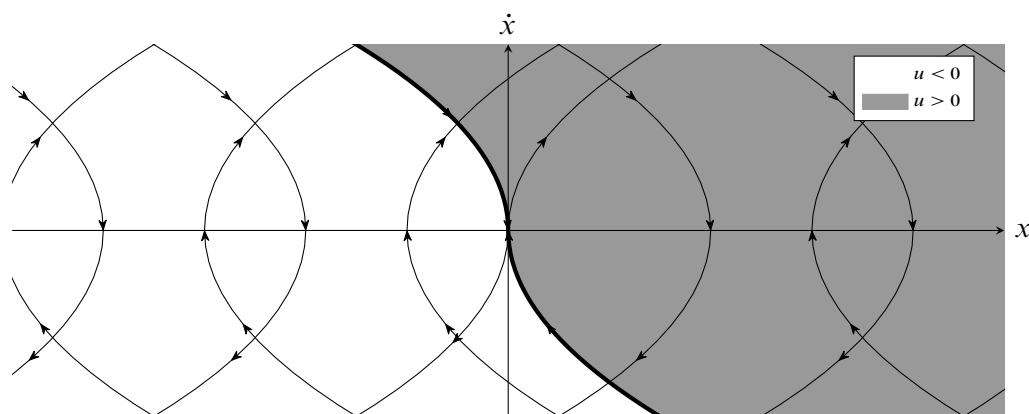


Abbildung 3.1: Trajektorien eines Doppelintegrierers im Phasenraum für einen Gleitzustandsregler.

zustandsregelung eine hohe Robustheit gegenüber Veränderungen an der Strecke aufweist, da auf der Schaltfläche die Dynamik des Systems unabhängig von der Dynamik der einzelnen geschlossenen Regelkreise für die verschiedenen Regelgesetze ist, liegt insbesondere im hochfrequenten

Umschalten und der damit einhergehenden hohen Beanspruchung des Aktors und dem schnellen Verschleiß der Stellglieder ein gravierender Nachteil dieser Methode [2, S. 462–468]. Umgehen lässt sich dies bspw., indem die in [222, S. 1736] verwendete „Glättung“ der Stellgröße verwendet wird. Bei der Diskretisierung einer Gleitzustandsregelung ohne besondere Gegenmaßnahmen ergibt sich jedoch das Problem, dass die Ruhelage nicht erreicht werden kann und ein Grenzyklus entsteht [98].

### 3.2.5 Modellprädiktive Regelung

Neben den bereits vorgestellten nichtlinearen Methoden kann auch eine *modellprädiktive Regelung* verwendet werden, bei der die Stellgröße durch Lösen eines Optimierungsproblems unter Einbeziehung der Systemdynamik ermittelt wird [162]. Dies kann entweder durch Linearisierung des Systems und Aufstellen eines beschränkten quadratischen Problems erfolgen oder ohne Linearisierung durch Lösen eines nichtlinearen Problems. Eventuell vorhandene Stellgrößen- oder Zustandsbeschränkungen können dabei auf einfache Weise bei der Problemformulierung berücksichtigt werden. Während durch das wiederholte Lösen des Optimierungsproblems erreicht wird, dass die auf die Strecke geschaltete Stellgröße im Sinne eines gewissen Gütemaßes optimal ist, ergeben sich jedoch insbesondere bei der Formulierung als nichtlineares Problem (NLP) erhebliche Anforderungen an die Rechenleistung der verbauten Steuergeräte, da das Problem in jedem Abtastschritt vollständig gelöst werden muss, wofür u. U. nicht genügend Zeit zur Verfügung steht.

Eine Bewertung der verschiedenen in diesem Abschnitt vorgestellten Regelungsmethoden zur Lösung des Schlupfregelungsproblems ist in Tabelle 3.1 zusammenfassend dargestellt.

| Verfahren                               | vorgebbare Dynamik | feste Reglerstruktur | Unsicherheit | Ausgangsregler | Totzeit | Komplexität |
|---|--------------------|----------------------|--------------|----------------|---------|-------------|
| robuste Polbereichsvorgabe              | ✓                  | ✓                    | ✓            | ✓              | ✓       | ✓           |
| $\mathcal{H}_\infty$ -Entwurf           | ✓                  | ○                    | ○            | ✓              | ✓       | ✓           |
| LMI                                     | ✓                  | ✗                    | ✓            | ✗              | ✓       | ✓           |
| Gain-Scheduling                         | ✓                  | ✓                    | ✓            | ✓              | ✓       | ✓           |
| exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung | ✓                  | ✗                    | ✗            | ✗              | ✓       | ○           |
| Flachheit                               | ○                  | ✗                    | ✗            | ✓              | ✓       | ○           |
| Gleitzustandsregelung                   | ○                  | ✗                    | ✓            | ✗              | ○       | ✗           |
| MPC                                     | ○                  | ✗                    | ○            | ✗              | ✓       | ○           |

Tabelle 3.1: Eignung der verschiedenen Regelungsverfahren zur Schlupfregelung.

### 3.3 Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden

Ausgehend von den in Abschnitt 3.1 beschriebenen Anforderungen an die Reglerstruktur wird in diesem Abschnitt basierend auf Tabelle 3.1 die Reglerstruktur gewählt und vorgestellt. Das gewählte Konzept besteht aus einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit einer dynamischen modellbasierten Vorsteuerung für den eigentlichen Schlupfregler, der ein Extremum Seeking überlagert wird, um die Reifenkraft zu maximieren, wie in Abbildung 3.2 dargestellt. Der Regelfehler er-

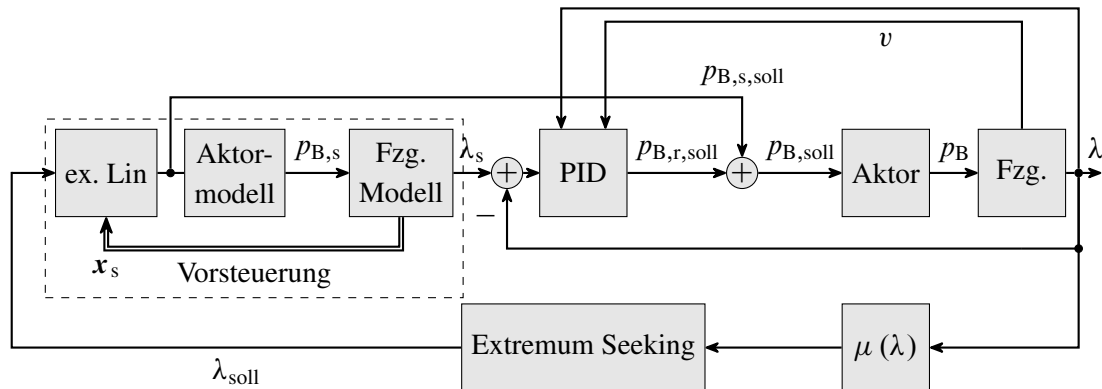


Abbildung 3.2: Reglerstruktur mit zwei Freiheitsgraden zur Schlupfregelung mit Extremwertsuche.

gibt sich dabei aus der Differenz zwischen echtem Schlupf  $\lambda$  und der von der modellbasierten Vorsteuerung gelieferten Vorsteuersollgröße  $\lambda_{soll}$ , die sich aus der vom Extremum Seeking gelieferten Sollgröße  $\lambda_{soll}$  ergibt, während die Stellgröße aus dem Vorsteueranteil  $p_{B,s,soll}$  und dem Regleranteil  $p_{B,r,soll}$  zusammengesetzt ist. Der wesentliche Vorteil einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur gegenüber einer Regelungsstruktur mit nur einem Freiheitsgrad besteht nach [80, S. 246 f.] und [102] in der Möglichkeit, das Führungs- und Störverhalten getrennt voneinander auszulegen und somit die Forderung nach Modularität des Konzeptes zu erfüllen.

Die Unabhängigkeit von der Wahl der Aktoren lässt sich durch die unterlagerte Aktorregelung erreichen und ergibt sich aus der Tatsache, dass sich die verschiedenen Aktortypen in Abschnitt 2.1 für den linearen Entwurf als  $PT_1$ -Glieder mit unterschiedlicher Parametrierung und für den nicht-linearen Entwurf durch ein eventuell noch zu identifizierendes LoLiMoT-Modell beschreiben lassen.

#### 3.3.1 Vorsteuerung

In der modellbasierten Vorsteuerung wird das Konzept der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung verwendet, da sich damit über ein einfaches Verfahren die Nichtlinearitäten des Systems kompensieren lassen und der Entwerfer für den entstehenden geschlossenen Regelkreis eine gewünschte Dynamik mittels Methoden der linearen Regelungstechnik vorgeben kann. Darüber hinaus ist es auf einfache Weise möglich, Totzeiten im offenen Kreis im Entwurf zu berücksichtigen sowie Stellgrößenbeschränkungen in den Entwurf mit einzubeziehen.

Die Idee der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung besteht darin, bei nichtlinearen und insbesondere eingangsaффinen Systemen über die Zeitableitungen der Ausgänge  $y$  eine geeignete nichtlineare Transformation zu finden, mittels derer das System als Integratorkette dargestellt werden kann. Existiert eine solche Transformation, so kann der entstehende nichtlineare Term am Anfang der Kette durch Wahl eines geeigneten Regelgesetzes kompensiert und ein lineares Verhalten vorgegeben werden. Zu beachten ist dabei jedoch, dass u. U. die Zeitableitungen der Ausgänge direkt von der Stellgröße abhängen können und damit nicht mehr für die Transformation zu Verfügung stehen, sodass die Transformation durch geeignete Abbildungsvorschriften zu erweitern ist. In diesem Fall entsteht eine sog. *interne Dynamik*, die nicht beobachtbar ist und deren Stabilität nachgewiesen werden muss, damit der mit exakter Eingangs-/Ausgangslinearisierung geregelte Regelkreis stabil sein kann.

### 3.3.2 Regelung

Im Rückführanteil der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur werden verschiedene lineare Regler verwendet, die für unterschiedliche Arbeitspunkte ausgelegt sind und über eine Gain-Scheduling Strategie überblendet werden. Auf diese Weise können zum einen verschiedene, aus der linearen Regelungstheorie bekannte Entwurfsverfahren zum Auslegen der Rückführung verwendet werden und zum anderen die Anforderungen an die Robustheit der einzelnen Regler für die Bereiche des Gain-Schedulings im Vergleich zum Entwurf eines einzigen fest eingestellten Reglers reduziert werden.

#### 3.3.2.1 Robuste Regelung

Unter den verschiedenen in Abschnitt 3.2.1 vorgeschlagenen linearen Regelungsmethoden bietet sich vor allem aufgrund der, insbesondere im Diskreten, vergleichsweise einfachen Behandlung von Unsicherheit in der Strecke der Entwurf über die Methode der robusten Polbereichsvorgabe an. Mit dieser wird ein zeitdiskreter PID-Regler ausgelegt, der an dieser Stelle vorgeschlagen wird, da die Regelung einen D-Anteil benötigt, da für den mit kleiner werdender Fahrzeuggeschwindigkeit weiter nach rechts wandernden Schlupfpol der rechte Verzweigungspunkt der Wurzelortskurve in Abbildung 3.3 außerhalb des Einheitskreises zum Liegen kommt und damit die Strecke mit einem P-Regler nicht mehr stabilisiert werden kann. Des Weiteren ist die Verwendung eines I-Anteils von Vorteil, da sich so die hohe Unsicherheit in der Verstärkung der linearisierten Strecke verringern lässt. Um die vorgeschlagene Reglerstruktur robust gegenüber Parameterunsicherheiten zu machen, werden die Freiheitsgrade des PID-Reglers über einen robusten Reglerentwurf festgelegt.

Die Unsicherheit wird als parameterische Unsicherheit modelliert, die sich im Wesentlichen aus den nichtlinearen Abhängigkeiten von  $v$  und  $\lambda$  in Gl. (2.35) ergibt, die zu den unsicheren Parametern  $\mathbf{p}$  zusammengefasst werden.



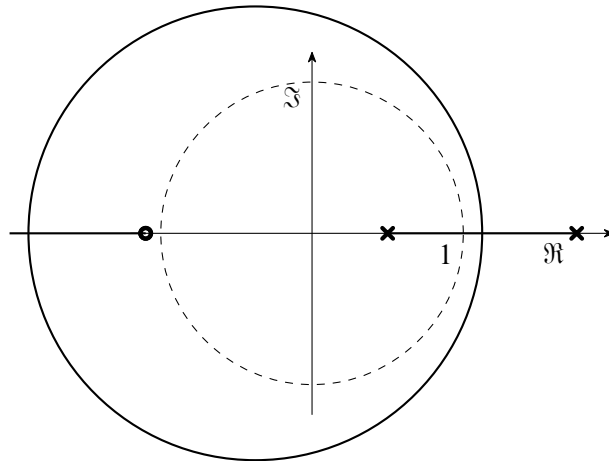


Abbildung 3.3: Schematischer Verlauf der Wurzelortskurve für kleine Geschwindigkeiten bei Verwendung eines P-Reglers.

### 3.3.2.2 Gain-Scheduling

Da ein robuster Ansatz notwendigerweise konservativ ist, wird darüber hinaus ein Gain-Scheduling-Ansatz verfolgt, bei dem der Arbeitsbereich eines linearen Reglers in bestimmte Teilbereiche aufgeteilt wird, für die jeweils eigene Regler entworfen werden, die über eine Gain-Scheduling-Strategie zu einem nichtlinearen Gesamtregler kombiniert werden. Die Idee des Gain-Scheduling besteht darin, ein nichtlineares System an  $\rho$  Arbeitspunkten  $\rho_i$  zu linearisieren und für die linearisierten Modelle Regler auszulegen, deren Ausgänge  $\Delta \mathbf{u}_{i,k}$  im Anschluss durch eine geeignete Scheduling-Strategie über einen Schedulingparameter  $\beta_k$  zu einem Reglerausgang  $\Delta \mathbf{u}_k$  kombiniert werden. Der Schedulingparameter kann dabei aus der Menge der Zustände, Ausgänge, Stellgrößen oder Führungsgrößen des Systems oder einer davon abgeleiteten Größe gewählt werden und sollte asymptotisch mit dem Arbeitspunkt  $\rho$  übereinstimmen [2, S. 298]. Die Regelungsstruktur des vorgeschlagenen Rückführanteils ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

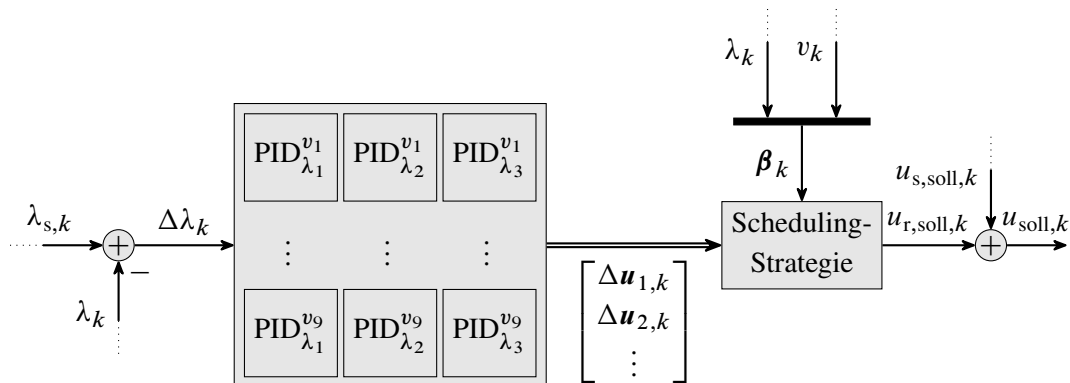


Abbildung 3.4: Blockschaltbild des Rückführanteils der Zwei-Freiheitsgrade Regelung.

Zum Umschalten der unterschiedlichen Regler im Rahmen der Scheduling-Strategie gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie die Aktivierung des nächsten Nachbarn über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} i &= \arg \min_j \left( \|\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_j\|_{\mathbf{W}}^2 \right) \\ \Delta \mathbf{u}_k &= \Delta \mathbf{u}_{i,k}, \end{aligned} \quad (3.1a)$$

die Interpolation zwischen den beiden nächsten Nachbarn

$$\begin{aligned} i &= \arg \min_j \left( \|\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_j\|_{\mathbf{W}}^2 \right) \\ j &= \arg \min_{j \neq i} \left( \|\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_j\|_{\mathbf{W}}^2 \right) \\ \Delta \mathbf{u}_k &= (\Delta \mathbf{u}_{i,k} - \Delta \mathbf{u}_{j,k}) \frac{(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j)^T (\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_j)}{(\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j)^T (\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j)} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} \end{aligned} \quad (3.1b)$$

sowie eine Interpolation aller Regelgesetze über radiale Basisfunktionen (RBF) der Form

$$\Delta \mathbf{u}_k = \frac{\sum_{i=1}^p e^{-\|\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_i\|_{\mathbf{W}}^2} \Delta \mathbf{u}_{i,k}}{\sum_{i=1}^p e^{-\|\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\rho}_i\|_{\mathbf{W}}^2}} \quad (3.1c)$$

mit den Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{W}$  [50, S. 24]. Die Gewichtungsmatrix kann bspw. dazu genutzt werden, die Arbeitspunkte der Regler zu normalisieren und so eine Vergleichbarkeit zwischen Elementen von  $\boldsymbol{\beta}_k$  unterschiedlicher physikalischer Dimensionen zu ermöglichen oder die verschiedenen Schedulingparameter gemäß ihrer Bedeutung zu gewichten.

Im vorliegenden Fall wird die erste Methode, d. h. die Aktivierung des nächsten Nachbarn, verwendet, da damit garantiert ist, dass immer nur ein Regler aktiv ist und dieser zum aktuellen Bereich passt, während in den beiden anderen Fällen bei ungünstiger Wahl der Gewichtungen mehrere Regler mit u. U. gegenläufigen Regelgrößen aktiv sein können. Dies führt jedoch dazu, dass, im Gegensatz zur dritten Methode, beim Umschalten der Regler Sprünge in der resultierenden Stellgröße entstehen können, die durch eine geeignete Maßnahme verhindert werden müssen, welche in Abschnitt 5.4.1 vorgestellt wird.

### 3.3.3 Extremwertsuche

Da sich mittels der in den vorangegangenen Abschnitten vorgeschlagenen Regelung ein gewünschter Sollsclupf stabil einregeln lässt, soll im Folgenden das Regelungskonzept um eine weitere Funktionalität des ABS erweitert werden: Der Bremsung mit maximalem Kraftschluss. Dazu ist eine geeignete Trajektoriengenerierung zu entwerfen, die anhand der vom Fahrer oder einem Assistenzsystem vorgegebenen Sollbeschleunigungen oder Sollkräfte den Sollsclupf  $\lambda_{\text{soll}}$  berechnet. Dies soll durch einen Extremum Seeking Ansatz, wie er bspw. in [9] oder [114] beschrieben ist, erreicht werden. Das Extremum Seeking wird dabei auf den Reibwert jedes Rades individuell

---

angewendet und nicht auf die Gesamtfahrzeugbeschleunigung, da so sichergestellt ist, dass eine radindividuelle Arbitrierung möglich ist und keine Kopplungseffekte zwischen den Rädern über die Fahrzeugbeschleunigung verursacht werden. Die konkrete Auslegung dieses Konzeptes erfolgt in Kapitel 6.

## 4 Generierung von Vorsteuertrajektorien für die Radschlupfregelung

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen für das Konzept der modellbasierten Vorsteuerung angegeben und auf das Einradmodell mit Totzeit sowie das Zweispurmodell angewendet werden. Dazu werden die Grundlagen der verwendeten Regelungsansätze im Zeitdiskreten angegeben und anschließend auf die Fahrzeugmodelle angewendet. Schließlich wird das Regelgesetz hergeleitet, das entstehende System mit seiner internen Dynamik untersucht und anschließend die für die Vorsteuerung erzielbaren Simulationsergebnisse vorgestellt.

### 4.1 Konzept der modellbasierten Trajektoriengenerierung

Die folgende Beschreibung des Konzeptes der kontinuierlichen exakten Eingangs-/Ausgangslinearisation ist an [2, S. 309 – 326] sowie [2, S. 347 – 355] angelehnt. Ausgehend von dem kontinuierlichen eingangsaffinen System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (4.1a)$$

mit der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (4.1b)$$

und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  lassen sich die einzelnen Ausgänge nach der Zeit ableiten, was auf

$$\dot{y}_i = \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^1 c_i + \mathcal{L}_{\mathbf{b}}^1 c_i \mathbf{u} \quad (4.2)$$

mit der sog. LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^1 c_i$  führt. Hierin bezeichnet  $\mathcal{L}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}^i \mathbf{b}(\mathbf{x})$  die LIE-Ableitung  $i$ -ter Ordnung nach  $\mathbf{x}$  mit

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}^i \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}^{i-1} \mathbf{b}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \mathcal{L}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}^0 \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

für  $i$  mal stetig differenzierbare Funktionen  $\mathbf{a}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{b}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ . Wenn davon ausgegangen wird, dass die Ausgangsableitungen nicht von einer der Stellgrößen abhängen, so lässt sich dies fortsetzen, bis schließlich

$$\dot{y}_i^{(\delta_i)} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{\delta_i} c_i + \mathcal{L}_{\mathbf{b}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{\delta_i - 1} c_i \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.4)$$

eine Funktion mindestens einer Stellgröße ist. Die Zeitableitung, bei der dies zum ersten Mal der Fall ist, wird relativer Grad genannt. Der Vektor

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_p]^T \quad (4.5)$$

wird als vektorieller relativer Grad des Systems bezeichnet [2, S. 350]. Mit dieser lassen sich die neuen Zustände

$$\tilde{x}_{ij} = {}^{(j-1)}y_i, \quad j = 1, \dots, \delta_i \quad (4.6)$$

über die Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

bestimmen, mit

$$\xi = [\tilde{x}_{11} \quad \tilde{x}_{12} \quad \dots \quad \tilde{x}_{1,\delta_1} \quad \dots \quad \tilde{x}_{p1} \quad \tilde{x}_{p2} \quad \dots \quad \tilde{x}_{p\delta_p}]^T \quad (4.8)$$

$$\eta = [t_{\delta+1}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad t_n(\mathbf{x})]^T. \quad (4.9)$$

Die Elemente  $t_{\delta+1}, \dots, t_n$  müssen so gewählt werden, dass  $\mathbf{t}$  ein Diffeomorphismus ist, was auf das transformierte System

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{11} \\ \dot{\tilde{x}}_{12} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{1,\delta_1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{p1} \\ \dot{\tilde{x}}_{p2} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{p\delta_p} \\ \dot{\tilde{x}}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{13} \\ \vdots \\ {}^{(\delta_1)}y_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p2} \\ \tilde{x}_{p3} \\ \vdots \\ {}^{(\delta_p)}y_p \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{13} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\delta_1} c_1 + \mathcal{L}_b \mathcal{L}_f^{\delta_1-1} c_1 \mathbf{u} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p2} \\ \tilde{x}_{p3} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\delta_p} c_p + \mathcal{L}_b \mathcal{L}_f^{\delta_p-1} c_p \mathbf{u} \\ \dot{t}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{t}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

in BYRNES-ISIDORI-Normalform führt, bei der die zusätzlichen Zustände  $\eta$  die sog. interne Dynamik des Systems darstellen. Der Ausgang des Systems ist

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p1} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Um dieses System bezüglich des Ein-/Ausgangsverhaltens zu linearisieren, werden über die Stellgröße  $\mathbf{u}$  die Terme am jeweiligen Ende der Integratorketten in der BYRNES-ISIDORI-Normalform kompensiert und eine neue Eingangsgröße  $\vec{v}$  eingeführt, was auf die Bestimmungsgleichung

$$\mathbf{y}^{(\delta)} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f^{\delta_1} c_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\delta_p} c_p \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{b_1} \mathcal{L}_f^{\delta_1-1} c_1 & \dots & \mathcal{L}_{b_m} \mathcal{L}_f^{\delta_1-1} c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{b_1} \mathcal{L}_f^{\delta_p-1} c_p & \dots & \mathcal{L}_{b_m} \mathcal{L}_f^{\delta_p-1} c_p \end{bmatrix}}^{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (4.12)$$

Auflösen von Gl. (4.12) nach  $\mathbf{u}$  ist für  $m = p$  mittels der sog. HIRSCHORN-Inversen [78] möglich, sofern die Entkopplungsmatrix  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  regulär ist. Dies führt auf das Stellgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \left( - \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f^{\delta_1} c_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{\delta_p} c_p \end{bmatrix} + \mathbf{v} \right) \quad (4.13)$$

und über den Zustandsregler

$$\mathbf{v} = -\mathbf{R}\mathbf{t}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}\mathbf{w} \quad (4.14)$$

wird die gewünschte lineare Dynamik aufgeprägt. Damit ergibt sich die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{s^{\delta_1} + a_{1,\delta_1-1}s^{\delta_1-1} + \dots + a_{1,1}s + a_{1,0}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{f_p}{s^{\delta_p} + a_{p,\delta_p-1}s^{\delta_p-1} + \dots + a_{p,1}s + a_{p,0}} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

des geschlossenen Regelkreises sowie die nicht beobachtbare interne Dynamik

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{\delta+1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{\delta+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{i}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f t_{\delta+1} + \mathcal{L}_b t_{\delta+1} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f t_n + \mathcal{L}_b t_n \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

deren Stabilität gesondert zu untersuchen ist, nachdem die Koeffizienten  $f_i$  und  $a_{i,j}$  für  $i = 1, \dots, p$  und  $j = 1, \dots, \delta_i - 1$  festgelegt worden sind. Für stationäre Genauigkeit der einzelnen Übertragungspfade muss hier

$$f_i = a_{i,0}$$

gewählt werden.

Da in der vorliegenden Arbeit eine diskrete Regelung entworfen werden soll, ist auch die Vorsteuerung zeitdiskret auszulegen. Dazu ist die oben angegebene Idee der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung vom Kontinuierlichen ins Zeitdiskrete zu übertragen. Dies ist nach [192] möglich, indem anstatt der Ableitungen des Systemausganges die zukünftigen Werte des Ausganges in der Zustandstransformation analog zu Gl. (4.7) verwendet werden. Dazu wird das zeitdiskrete eingangsaffine System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}^d(\mathbf{x}_k) + \mathbf{b}^d(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.17a)$$

mit der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{c}^d(\mathbf{x}_k) \quad (4.17b)$$

betrachtet. Wird das EULER-Verfahren zur Diskretisierung des nichtlinearen kontinuierlichen Systems Gl. (4.1) verwendet, so ist garantiert, dass auch das diskretisierte System exakt eingangs-/ausgangslinearisierbar ist, wenn dies für das zugrundeliegende kontinuierliche System gilt [67, S. 280]. Die zukünftigen Ausgänge des Systems ergeben sich durch Einsetzen der Systemgleichung zu

$$y_{i,k+1} = c_i^d(\mathbf{f}^d(\mathbf{x}_k) + \mathbf{b}^d(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k) = c_i^d(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)) \quad (4.18a)$$

$$y_{i,k+\delta_i} = c_i^d \left( \bigcirc_{l=0}^{\delta_i} \Phi(\cdot, \mathbf{u}_{k+l}) \Big|_{\mathbf{x}_k} \right) \quad (4.18b)$$

wobei analog zum kontinuierlichen Fall derjenige zukünftige Ausgang gesucht wird, der zum ersten mal direkt von einer der Stellgrößen abhängt, d. h., für den

$$\frac{\partial y_{i,k+j}}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{0}, \quad j = 0, \dots, \delta_i - 1 \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial y_{i,k+\delta_i}}{\partial \mathbf{u}_k} \neq \mathbf{0} \quad (4.19b)$$

gilt. Darin bezeichnet  $\bigcirc_{l=0}^i \Phi(\cdot, \mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{x}_{AP}}$  die Verkettung der Funktion  $\Phi$  mit sich selbst im ersten Argument beginnend vom Wert  $\mathbf{x}_{AP}$  im ersten Rekursionsschritt. Die sich damit ergebende Transformationsvorschrift zur Transformation in die diskrete BYRNES-ISIDORI-Normalform ist analog zum Kontinuierlichen aufgebaut und lautet

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{t}^d(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\xi}} &= [\tilde{x}_{11,k} \quad \tilde{x}_{12,k} \quad \cdots \quad \tilde{x}_{1,\delta_1,k} \quad \cdots \quad \tilde{x}_{p1,k} \quad \tilde{x}_{p2,k} \quad \cdots \quad \tilde{x}_{p\delta_p,k}]^T \\ \boldsymbol{\eta} &= [t_{\delta+1}^d(\mathbf{x}_k) \quad \cdots \quad t_n^d(\mathbf{x}_k)]^T, \end{aligned}$$

wobei ebenfalls vorausgesetzt werden muss, dass über die Elemente  $t_{\delta+1}^d, \dots, t_n^d$  ein Diffeomorphismus entsteht. Für das transformierte System

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{11,k} \\ \tilde{x}_{12,k} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1\delta_1,k} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p1,k} \\ \tilde{x}_{p2,k} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p\delta_p,k} \\ \tilde{x}_{\delta+1,k} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12,k} \\ \tilde{x}_{13,k} \\ \vdots \\ y_{1,k+\delta_1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p2,k} \\ \tilde{x}_{p3,k} \\ \vdots \\ y_{p,k+\delta_p} \\ t_{\delta+1}^d(\mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ t_n^d(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12,k} \\ \tilde{x}_{13,k} \\ \vdots \\ c_1^d \left( \bigcirc_{l=0}^{\delta_1} \Phi(\cdot, \mathbf{u}_{k+l}) \Big|_{\mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k)} \right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{p2,k} \\ \tilde{x}_{p3,k} \\ \vdots \\ c_p^d \left( \bigcirc_{l=0}^{\delta_p} \Phi(\cdot, \mathbf{u}_{k+l}) \Big|_{\mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k)} \right) \\ t_{\delta+1}^d(\mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k)) \\ \vdots \\ t_n^d(\mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k)) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

kann über den Zusammenhang

$$\mathbf{y}_{k+\delta} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^d \left( \begin{array}{c} \delta_1 \\ \bigcirc \\ \Phi(\cdot, \mathbf{u}_{k+l}) \end{array} \Big|_{\mathbf{x}_k} \right) \\ \vdots \\ c_p^d \left( \begin{array}{c} \delta_p \\ \bigcirc \\ \Phi(\cdot, \mathbf{u}_{k+l}) \end{array} \Big|_{\mathbf{x}_k} \right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} = -\mathbf{R}^d \mathbf{t}^d(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}^d \mathbf{w}_k \quad (4.22)$$

das Regelgesetz bestimmt und das System exakt eingangs-/ausgangslinearisiert werden, wobei im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall aufgrund des wiederholten Einsetzens der Systemgleichung in sich selbst im Allgemeinen keine Trennung zwischen Kompensations- und Entkopplungsanteil mehr möglich ist. Wie im kontinuierlichen Fall entsteht wieder eine nicht beobachtbare interne Dynamik

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\delta+1,k} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\delta+1}^d \left( \mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \right) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^d \left( \mathbf{t}^{d-1}(\tilde{\mathbf{x}}_k) \right) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

deren Stabilität gesondert zu untersuchen ist, nachdem die Koeffizienten  $f_i^d$  und  $a_{i,j}^d$  für  $i = 1, \dots, p$  und  $j = 1, \dots, \delta_i - 1$  der Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{f_{1,0}^d}{z^{\delta_1} + a_{1,\delta_1-1}^d z^{\delta_1-1} + \dots + a_{1,1}^d z + a_{1,0}^d} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{f_{p,0}^d}{z^{\delta_p} + a_{p,\delta_p-1}^d z^{\delta_p-1} + \dots + a_{p,1}^d z + a_{p,0}^d} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

des zeitdiskreten geschlossenen Regelkreises festgelegt worden sind. Für stationäre Genauigkeit der einzelnen Übertragungspfade muss hier

$$f_i^d = 1 + \sum_{j=0}^{\delta_i} a_{i,j}^d$$

gewählt werden.

Da in der entstehenden Übertragungsfunktion keine Nullstellen vorhanden sind und damit die Differenzordnung in jedem Pfad  $\delta_i$  beträgt, für die Abbildung des kontinuierlichen Systems bei Verwendung eines Abtast-Haltegliedes nullter Ordnung aber nach [120, S. 40] und [228, S. 182] eine Differenzordnung von 1 nötig wäre, können die bei der Diskretisierung der kontinuierlichen Wunschübertragungsfunktion entstehenden Nullstellen erzeugt werden, indem anstatt  $\tilde{x}_{i,k}$  jeweils der Ausgang

$$\tilde{y}_{i,k} = \sum_{j=0}^{\delta_i-1} f_{i,j}^d \tilde{x}_{i,k+j} \quad (4.25)$$



für das geregelte System verwendet wird, was in  $\tilde{x}_k$ -Koordinaten zur Übertragungsfunktion

$$G_i(z) = \frac{f_{i,\delta_i-1}^d z^{\delta_i-1} + \dots + f_{i,1}^d z + f_{i,0}^d}{z^{\delta_i} + \dots + a_{i,1}^d z + a_{i,0}^d}$$

führt, die durch geeignete Wahl der Koeffizienten  $f_{i,j}^d$  mit der Diskretisierung der kontinuierlichen Wunschübertragungsfunktion in Übereinstimmung gebracht werden kann. Die Auswirkung der nicht vorhandenen Diskretisierungsnullstellen besteht darin, dass das System ohne diese Nullstellen eine Totzeit von etwa  $\frac{T}{2}$  gegenüber einer kontinuierlich vorgegebenen Systemantwort besitzt, wie in Abbildung 4.1 gezeigt ist, während die Systemantwort mit Diskretisierungsnullstellen zu den Abtastzeitpunkten der kontinuierlichen Systemantwort entspricht.

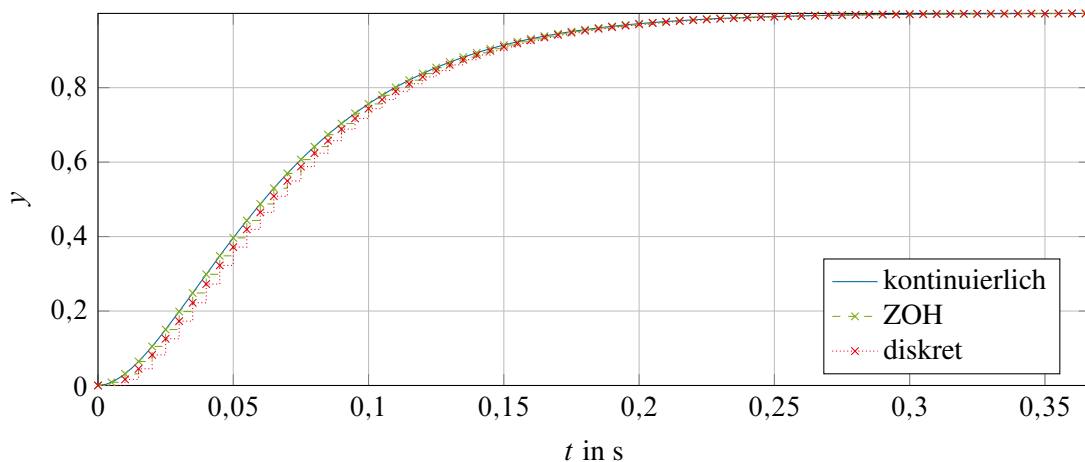


Abbildung 4.1: Auswirkung des Fehlens der Diskretisierungsnullstellen in der Wunschübertragungsfunktion.

Die entstehende Reglerstruktur für die modellbasierte Vorsteuerung ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

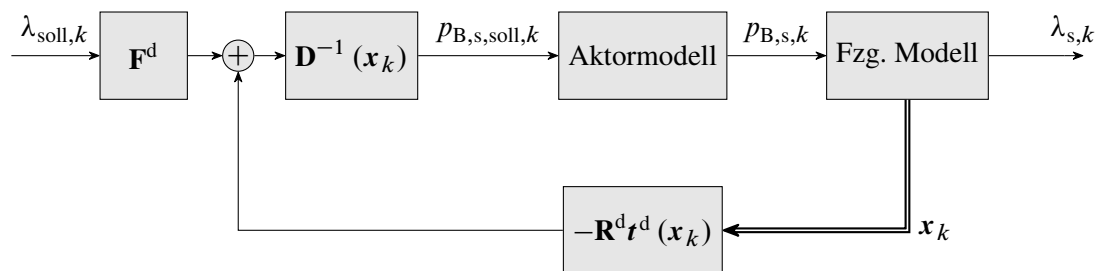


Abbildung 4.2: Blockschaltbild der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung.

Sofern Totzeiten im System vorhanden sind, lassen sich diese durch eine dynamische Erweiterung um lineare Anteile mit Eigenwerten in 0 am Eingang oder Ausgang des Systems abbilden und das oben vorgestellte Verfahren auf das erweiterte System anwenden.

## 4.2 Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für ein Einradmodell

Um die Gleichungen übersichtlich zu halten, wird zuerst das Vorgehen der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung für das Einradmodell mit Totzeiten am Systemeingang und Systemausgang dargestellt und anschließend die zur Trajektoriengenerierung verwendete Vorsteuerung für das Zweispurmodell angegeben, allerdings ohne Totzeiten. Es wird davon ausgegangen, dass am Eingang des Systems die Totzeit  $T_{\text{ein}} = T\bar{m}_{\text{ein}}$  und am Ausgang des Systems die Totzeit  $T_{\text{aus}} = T\bar{m}_{\text{aus}}$  als ganzzahlige Vielfache der Abtastzeit vorliegen. Sollte dies nicht der Fall sein, werden zur Erhöhung der Robustheit und da sich Totzeitbruchteile der Abtastzeit für nichtlineare Systeme nicht analog zur Methode in [92] beschreiben lassen, Totzeitbruchteile am Eingang und Ausgang auf ganzzahlige Vielfache der Abtastzeit aufgerundet. Zur Berücksichtigung der Totzeit wird das Einradmodell Gl. (2.60) um Verzögerungsglieder zu

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \\ v_{k+1} \\ p_{B,k+1} \\ \tilde{u}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_k \\ v_k \\ p_{B,k} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_k + \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{rc^*(p_{B,k})}{Jv_k} - \frac{F_z \mu(\lambda_k) \left( \frac{1-\lambda_k}{m_V} + \frac{r^2}{J} \right)}{-\frac{F_z}{r} \mu(\lambda_k)} + \frac{d}{J} (1 - \lambda_k) \\ h(p_{B,k}, [1 \ 0 \ \dots \ 0] \tilde{u}_k) \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_k + \\ \vdots \\ p_{B,\text{soll},k} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.26a)$$

$$y_k = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{y}_k \\ \lambda_k \\ v_k \\ p_{B,k} \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix} \quad (4.26b)$$

erweitert. Damit lassen sich dann nach Gl. (4.18) die verzögerten Ausgänge durch wiederholtes Einsetzen der Systemfunktion in die Ausgangsgleichung ermitteln und es ergibt sich schließlich für den verzögerten Ausgang, in dem die Stellgröße zuerst direkt auftritt,

$$\tilde{y}_{\bar{m}_{\text{aus}},k+1+\bar{m}_{\text{ein}}} = \lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}} + T \left( \frac{-F_z \mu(\lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}}) \left( \frac{1-\lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}}}{m_V} + \frac{r^2}{J} \right)}{v_k + T \left( -\frac{F_z}{m_V} \sum_{j=0}^{\bar{m}_{\text{ein}}} \mu(\lambda_{k+j}) \right)} + \dots \right) \quad (4.27)$$

$$\cdots + \frac{d}{J} (1 - \lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}}) + \frac{rc^* \left( h \left( \begin{array}{c} \bar{m}_{\text{ein}} \\ \bigcirc \\ j=1 \end{array} h(\cdot, \tilde{u}_{j,k}) \Big|_{p_{B,k}}, p_{B,\text{soll},k} \right) \right)}{J \left( v_k + T \left( -\frac{F_z}{m_v} \sum_{j=0}^{\bar{m}_{\text{ein}}} \mu(\lambda_{k+j}) \right) \right)}$$

und damit für Gl. (4.20)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{t}^d(\mathbf{x}_k) \\ &= [\lambda_{k-\bar{m}_{\text{aus}}} \quad \lambda_{k-\bar{m}_{\text{aus}}-1} \quad \cdots \quad \lambda_k \quad \lambda_{k+1} \quad \lambda_{k+2} \quad \cdots \quad \lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}} \quad v_k]^T. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Das System besitzt damit eine Differenzordnung von  $\delta = 2 + \bar{m}_{\text{ein}} + \bar{m}_{\text{aus}}$ . Für den Zustand  $\tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} = \lambda_{k+1+\bar{m}_{\text{ein}}}$  wird nun eine lineare Dynamik, die die Totzeiten erhält, angesetzt, sodass sich

$$\tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k+1}} = -a_0^d \tilde{x}_{1+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} - a_1^d \tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} + f^d w_k \quad (4.29)$$

mit den Reglerkoeffizienten aus Abschnitt 4.1 ergeben soll. Das Regelgesetz ergibt sich zu

$$\begin{aligned} p_{B,\text{soll},k} &= h^{-1} \left( c^{*-1} \left( \frac{J \left( \tilde{x}_{3+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} + T \left( -\frac{F_z}{m_v} \sum_{j=1}^{\bar{m}_{\text{ein}}+1} \mu(\tilde{x}_{j+\bar{m}_{\text{aus},k}}) \right) \right)}{rT} \right) \left( -T \left( \cdots \right. \right. \right. \\ &\cdots - \frac{F_z \mu(\tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}}) \left( \frac{1-\tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}}}{m_v} + \frac{r^2}{J} \right)}{\tilde{x}_{3+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} + T \left( -\frac{F_z}{m_v} \sum_{j=1}^{\bar{m}_{\text{ein}}+1} \mu(\tilde{x}_{j+\bar{m}_{\text{aus},k}}) \right)} + \cdots \\ &\cdots + \frac{d}{J} (1 - \tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}}) \left. \right) - \tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} - a_0^d \tilde{x}_{1+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} - \cdots \\ &\cdots - a_1^d \tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}} + f^d w_k \left. \right) - h \left( \begin{array}{c} \bar{m}_{\text{ein}} \\ \bigcirc \\ j=1 \end{array} h(\cdot, \mathbf{t}^{-d}(\tilde{x}_{2+j+\bar{m}_{\text{aus},k}})) \Big|_{p_{B,k}} \right), p_{B,k} \end{aligned} \quad (4.30)$$

und die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises wird zu

$$G_{\lambda \leftarrow p_{B,\text{soll}}}(z) = \frac{f^d}{(z^2 + a_1^d z + a_0^d) z^{\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus}}}}. \quad (4.31)$$

Es wäre prinzipiell auch denkbar, die Totzeit im Ein-/Ausgangsverhalten durch die Regelung zu kompensieren, wodurch das Regelgesetz geringfügig komplizierter werden würde, jedoch enthält der reale Aktor, auf den die Stellgröße angewendet wird, nach wie vor Totzeit, sodass nicht

zu erwarten ist, dass diese sich durch die Vorsteuerung kompensieren lässt. Dazu müsste lediglich der Zustandsregleranteil sämtliche Zustände zurückführen und nicht nur  $\tilde{x}_{1+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}}$  und  $\tilde{x}_{2+\bar{m}_{\text{ein}}+\bar{m}_{\text{aus},k}}$  wie in Gl. (4.30) bzw. Gl. (4.29). Es wird an dieser Stelle das EULER-Verfahren zur Diskretisierung verwendet, da dieses zum einen die exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierbarkeit bei der Diskretisierung erhält [67, S. 280] und sich gezeigt hat, dass bei Verwendung von Verfahren höherer Ordnung die Differenzordnung des Systems abnimmt bzw. eine invertierbare Reifenkennlinie verwendet werden muss, um den Reglerentwurf durchführen zu können [A4].

### 4.3 Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für ein Zweispurmodell

Da es sich beim Gesamtfahrzeug um ein MIMO-System handelt, muss im Gegensatz zum Einradmodell für jeden Ausgang

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{VL},k} \\ \lambda_{\text{HL},k} \\ \lambda_{\text{HR},k} \\ \lambda_{\text{VR},k} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

ein relativer Grad  $\delta_i$  bzw. eine Differenzordnung  $\delta$  über die Abhängigkeit der zukünftigen Ausgänge von der aktuellen Stellgröße berechnet werden. Zur Vereinfachung der Darstellung werden Totzeiten am Ein- und Ausgang des Systems nicht angegeben, sie können allerdings analog zum vorangegangenen Abschnitt behandelt werden. Dazu wird, da alle vier Räder strukturell die gleiche Dynamik besitzen, zuerst der zukünftige Ausgang für das vordere linke Rad zu

$$\begin{aligned} y_{\text{VL},k+1} &= c_{\text{VL}}^{\text{d}}(\mathbf{f}^{\text{d}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)) \\ &= \lambda_{\text{VL},k} + T \left( \frac{(1 - \lambda_{\text{VL},k})a_k}{v_k} + \frac{c_{\text{VL}}^*(p_{\text{B},\text{VL},k}) - r_{\text{VL}}F_{x,\text{VL},k}}{r_{\text{VL}}^{-1}J_{\text{VL}}v_k} + d_{\text{VL}}\frac{1 - \lambda_{\text{VL},k}}{J_{\text{VL}}} \right) \end{aligned} \quad (4.33a)$$

und damit der zukünftige Ausgang in zwei Schritten zu

$$\begin{aligned} y_{\text{VL},k+2} &= c_{\text{VL}}^{\text{d}}(\mathbf{f}^{\text{d}}(\mathbf{f}^{\text{d}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \mathbf{u}_{k+1})) \\ &= \lambda_{\text{VL},k+1} + T \left( \frac{(1 - \lambda_{\text{VL},k+1})a_{k+1}}{v_{k+1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{r_{\text{VL}}c_{\text{VL}}^*(h_{\text{VL}}(p_{\text{B},\text{VL},k}, p_{\text{B},\text{VL},\text{soLL},k})) - r_{\text{VL}}^2F_{x,\text{VL},k+1}}{J_{\text{VL}}v_{k+1}} + d_{\text{VL}}\frac{1 - \lambda_{\text{VL},k+1}}{J_{\text{VL}}} \right) \end{aligned} \quad (4.33b)$$

berechnet. Darin gilt

$$a_{k+1} = -\frac{\sum_{i \in \mathcal{W}} F_{x,i,k}}{m_{\text{F}}} - \dot{\theta}_k \dot{z}_k$$

$$F_{x,\text{VL},k+1} = \mu_{\text{VL}}(\lambda_{\text{VL},k+1}) F_{z,k+1}$$

mit

$$F_{z,k+1} = \left( m_{\text{R}} + m_{\text{RT}} + \frac{m_{\text{A}}l_{\text{h}}}{2(l_{\text{h}} + l_{\text{v}})} \right) g + \dots$$

$$\dots + k_v(-z_{k+1} + l_v \sin(\theta_{k+1})) + \zeta_v(-\dot{z}_{k+1} + l_v \cos(\theta_{k+1}) \dot{\theta}_{k+1})$$

für die zukünftige Fahrzeugbeschleunigung sowie die zukünftigen Reifenkräfte. Die benötigten zukünftigen Zustände  $z_{k+1}$ ,  $\dot{z}_{k+1}$ ,  $\theta_{k+1}$  und  $\dot{\theta}_{k+1}$  können dabei durch Vorwärtssimulation der Systemdynamik gewonnen werden. Wie zu erkennen ist, hängt der zukünftige Ausgang  $y_{VL,k+2}$  direkt von der Stellgröße  $p_{B,VL,soll,k}$  ab und es ergibt sich damit der relative Grad  $\delta_{VL} = 2$ . Für die anderen Räder gilt Gl. (4.33) entsprechend analog, sodass das System einen relativen Grad von

$$\delta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

und damit totalen relativen Grad  $\delta = 8$  besitzt. Da die Systemordnung  $n = 13 > 8 = \delta$  ist, existiert eine interne Dynamik der Ordnung 5, die gerade der Längs-, Vertikal- und Nickdynamik des Fahrzeugs entspricht, da die Wirkungskette der Stellgröße auf den Schlupf über den Pfad Stellgröße  $\rightarrow$  Aktorzustand  $\rightarrow$  Schlupf verläuft und die restlichen Zustände dort nicht auftreten, sondern ihrerseits erst von der Einwirkung des Schlupfes beeinflusst werden. Die Transformation  $\mathbf{t}^d(\mathbf{x}_k)$  nach Gl. (4.20) in linearisierende Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  ergibt sich damit zu

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_k \\ \boldsymbol{\eta}_k \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

mit

$$\boldsymbol{\xi}_k = \left[ \lambda_{VL,k} \quad \lambda_{VL,k+1} \quad \lambda_{HL,k} \quad \lambda_{HL,k+1} \quad \lambda_{HR,k} \quad \lambda_{HR,k+1} \quad \lambda_{VR,k} \quad \lambda_{VR,k+1} \right]^T$$

und

$$\boldsymbol{\eta}_k = \begin{bmatrix} v_k \\ z_k \\ \dot{z}_k \\ \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} .$$

Da aufgrund der Systemparameter die Determinante

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{t}^d(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) = \frac{T^4}{v_k^4} \prod_{i \in \mathcal{V}} \frac{r_i \frac{\partial c_i^*(p_{B,i,k})}{\partial p_{B,i,k}}}{J_i} \quad (4.36)$$

bei den gegebenen Systemparametern nur für  $v_k \rightarrow \infty$  identisch verschwindet, ist der Diffeomorphismus wohldefiniert.

### 4.3.1 Regelgesetz

Mit dieser Transformation ergibt sich das transformierte System

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} c_{\text{VL}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right) \right) \\ c_{\text{VL}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right), \mathbf{u}_{k+1} \right) \right) \\ c_{\text{HL}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right) \right) \\ c_{\text{HL}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right), \mathbf{u}_{k+1} \right) \right) \\ c_{\text{HR}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right) \right) \\ c_{\text{HR}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right), \mathbf{u}_{k+1} \right) \right) \\ c_{\text{VR}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right) \right) \\ c_{\text{VR}}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right), \mathbf{u}_k \right), \mathbf{u}_{k+1} \right) \right) \\ t_9^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right) \right) \right) \\ t_{10}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right) \right) \right) \\ t_{11}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right) \right) \right) \\ t_{12}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right) \right) \right) \\ t_{13}^{\text{d}} \left( \mathbf{f}^{\text{d}} \left( \mathbf{t}^{\text{d}^{-1}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_k \right) \right) \right) \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

dessen erste acht Zustände eine lineare Dynamik

$$\tilde{x}_{2i,k+1} = -a_{i,0}^{\text{d}} \tilde{x}_{2i-1,k} - a_{i,1}^{\text{d}} \tilde{x}_{2i,k} + f_i^{\text{d}} w_{i,k}, \quad i = 1, \dots, 4$$

erhalten sollen. Dazu wird gemäß Gl. (4.22) im zweiten, vierten, sechsten und achten Zustand die auftauchende Nichtlinearität mit dem Regelgesetz

$$p_{\text{B},i,\text{soll},k} = h_i^{-1} \left( c_i^{*-1} \left( \frac{J_i (v_k + T a_k)}{r_i T} \left( -T \left( \frac{\left( \frac{1-\lambda_{i,k+1}}{m_{\text{F}}} a_{k+1} - F_{x,i,k+1} \frac{r_i^2}{J_i} \right)}{v_k + T a_k} + \dots \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \dots + \frac{d_i}{J_i} (1 - \lambda_{i,k+1}) \right) - \lambda_{i,k+1} - a_{i,0}^{\text{d}} \tilde{x}_{2i-1,k} - a_{i,1}^{\text{d}} \tilde{x}_{2i,k} + f_i^{\text{d}} w_{i,k} \right) \right), p_{\text{B},i,k} \right) \quad (4.38)$$

kompensiert und über einen Zustandsregleranteil die Wunschpole zugewiesen. Wird das Regelgesetz auf alle vier Räder mit den jeweiligen Parametern angewandt, ergibt sich die Übertragungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\text{VL},k} \\ \lambda_{\text{HL},k} \\ \lambda_{\text{HR},k} \\ \lambda_{\text{VR},k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1^{\text{d}}}{z^2 + a_{1,1}^{\text{d}} z + a_{1,0}^{\text{d}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_2^{\text{d}}}{z^2 + a_{2,1}^{\text{d}} z + a_{2,0}^{\text{d}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_3^{\text{d}}}{z^2 + a_{3,1}^{\text{d}} z + a_{3,0}^{\text{d}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f_4^{\text{d}}}{z^2 + a_{4,1}^{\text{d}} z + a_{4,0}^{\text{d}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\text{soll},\text{VL},k} \\ \lambda_{\text{soll},\text{HL},k} \\ \lambda_{\text{soll},\text{HR},k} \\ \lambda_{\text{soll},\text{VR},k} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

die die Schlüpfte der vier Räder entkoppelt. Die Entkopplung ist immer erreichbar, da die Regelung in der Vorsteuerung auf ein simuliertes System angewandt wird, dessen Parameter exakt bekannt sind und so weder Modellungenauigkeiten noch Störungen auftreten. Es ist jedoch fraglich, ob eine solche Entkopplung auch immer sinnvoll ist, da dies insbesondere bei Modellierung von Lagerreibung und Stellgrößenbeschränkungen, bspw. auf einen Mindestdruck von 0 bar, dazu führen kann, dass die Regelung nicht mehr funktioniert, wenn die Stellgrößenbeschränkung erreicht wird, da dann die Verkopplung durch die angeforderte Stellgröße nicht mehr aufgehoben werden kann.

### 4.3.2 Interne Dynamik

Neben der in Gl. (4.39) angegebenen linearen externen Dynamik entsteht aufgrund der Differenzordnung, die kleiner als die Systemordnung ist, eine interne Dynamik, die durch die Zustände  $\tilde{x}_9$  bis  $\tilde{x}_{13}$  beschrieben wird. Um die Untersuchung der internen Dynamik möglichst einfach zu gestalten, sollten die Komponenten  $t_9^d$  bis  $t_{13}^d$  des Diffeomorphismus so gewählt werden, dass ein einfach zu untersuchendes System entsteht. Dies ist im vorliegenden Fall durch Wahl einer identischen Abbildung der Zustände  $v, z, \dot{z}, \theta$  und  $\dot{\theta}$  auf die Zustände der internen Dynamik zu erreichen und es ergibt sich

$$\eta_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{9,k+1} \\ \tilde{x}_{10,k+1} \\ \tilde{x}_{11,k+1} \\ \tilde{x}_{12,k+1} \\ \tilde{x}_{13,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ z_{k+1} \\ \dot{z}_{k+1} \\ \theta_{k+1} \\ \dot{\theta}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{x}_{9,k} + T \left( \frac{-F_{x,VL,k} - F_{x,HL,k} - F_{x,HR,k} - F_{x,VR,k}}{m_F} - \tilde{x}_{13,k} \tilde{x}_{11,k} \right) \\ \tilde{x}_{10,k} + T \tilde{x}_{11,k} \\ \tilde{x}_{11,k} + T \left( \frac{F_{z,dyn,VL,k} + F_{z,dyn,HL,k} + F_{z,dyn,HR,k} + F_{z,dyn,VR,k}}{m_A} + \tilde{x}_{13,k} \tilde{x}_{9,k} \right) \\ \tilde{x}_{12,k} + T \tilde{x}_{13,k} \\ \tilde{x}_{13,k} + T \left( \frac{(F_{z,dyn,HL,k} + F_{z,dyn,HR,k})l_h - (F_{z,dyn,VL,k} + F_{z,dyn,VR,k})l_v - m_F a_k (h + \tilde{x}_{10,k})}{J_y} \right) \end{bmatrix}$$

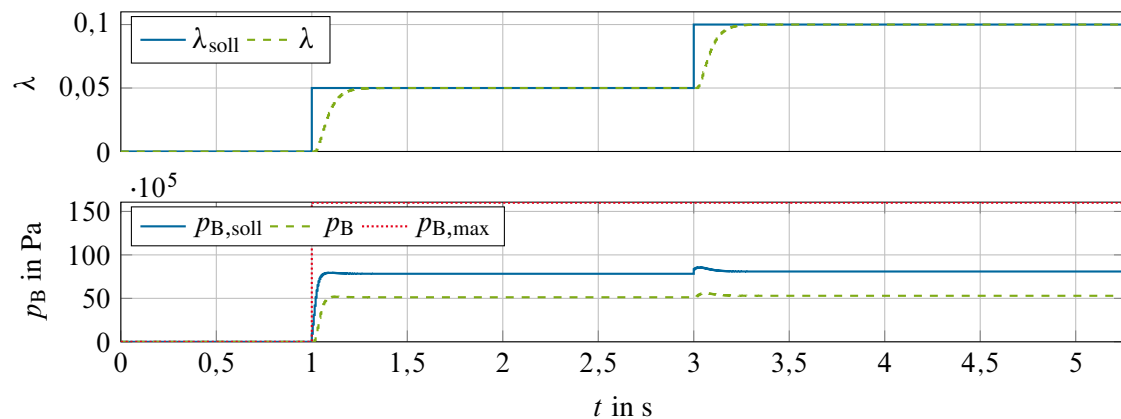
als interne Dynamik in transformierten Koordinaten, wobei die dynamischen Aufstandskräfte  $F_{z,dyn}$  von den Zuständen der internen Dynamik abhängen.

Eine Analyse der internen Dynamik zeigt, dass für einen festgehaltenen Aufbau, d. h.  $\tilde{x}_{13,k} = 0$  und  $\tilde{x}_{11,k} = 0$  die Vertikalkräfte konstant werden und damit die Dynamik des ersten Zustandes der internen Dynamik nur noch von den Schlüpfen der vier Räder als Eingang abhängt und sich ein offener Integrierer für die daraus resultierenden Reifenkräfte ergibt, sodass die interne Dynamik insgesamt instabil wird. Diese Instabilität ist jedoch nur dann von Belang, wenn das System für sich allein genommen betrieben wird. Da im realen Betrieb jedoch die Fahrzeuggeschwindigkeit vom Fahrer oder einem Fahrerassistenzsystem eingeregelt wird und daher von in dieser Arbeit nicht betrachteten Regelschleifen auf einer höheren Ebene stabilisiert wird, stellt diese Instabilität kein Problem für den praktischen Betrieb der Regelung dar.

Die Verwendung dynamischer Erweiterungen erster oder zweiter Ordnung der statischen Modelle für den Reifenkraftaufbau, wie in Abschnitt 2.2.1.2 angegeben, lässt sich auf einfache Weise in den Entwurf der Regelung integrieren, wobei die zusätzliche Reifendynamik ebenfalls Teil der internen Dynamik des Systems wird, was an dieser Stelle jedoch nicht weiter vertieft wird.

## 4.4 Simulationsergebnisse der Vorsteuerung

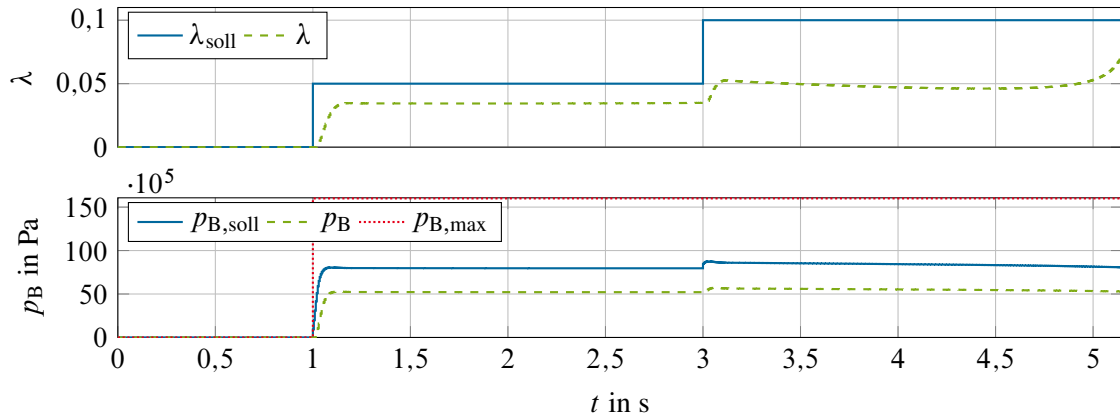
Wird die in den vorangegangenen Abschnitten entworfene Regelung für das Einradmodell mit Totzeit sowie für den Mehrgrößenfall im Zweispurmodell jeweils für identische Reibwerte und unterschiedliche Reibwerte in Regelgesetz und Strecke simuliert, so ergeben sich die in Abbildung 4.3 und Abbildung 4.4 dargestellten Ergebnisse. Es ist in beiden Fällen zu sehen, dass die Regelung nur bei Übereinstimmung der Reibwerte in Regelgesetz und Strecke zufriedenstellend funktioniert und in der Lage ist, den gewünschten Sollwert sehr gut einzuregeln. Sobald die Reibwerte abweichen, kann der Sollwert nicht mehr gehalten werden und auch keine stationäre Genauigkeit erreicht werden, da kein I-Anteil in der Regelung vorhanden ist. Dies ist ein Grund dafür, dass die exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung nicht als Regelungsansatz für die reale Strecke verwendet wird, sondern nur als modellbasierte Vorsteuerung zur Solltrajektorien-generierung, da es unvermeidbar ist, dass die in der Regelung verwendeten Parameter von den echten Streckenparametern abweichen und die Regelung aufgrund der Kompensation von Nichtlinearitäten nicht robust ist [84, S. 181].



(a) Regelung bei Übereinstimmung von  $\mu_0$  in Strecke und Regelgesetz.

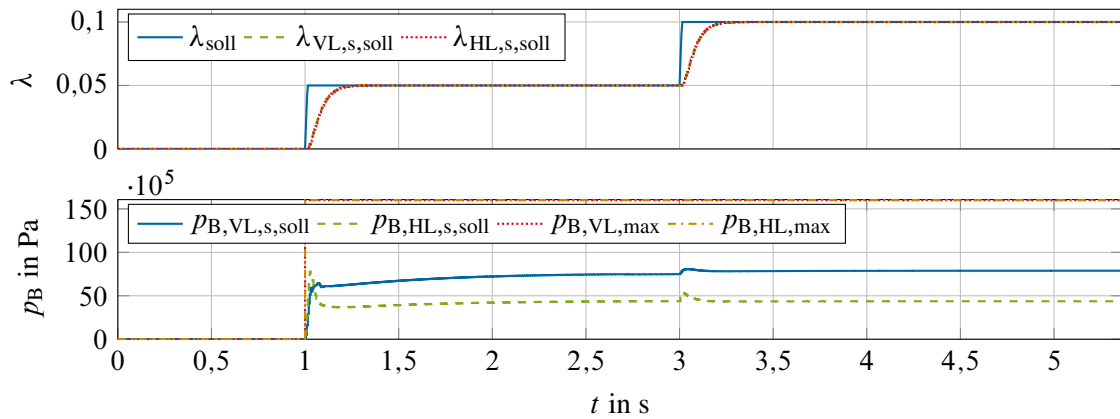
Abbildung 4.3: Simulation der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung für das Einradmodell mit Totzeit  $T_{\text{ein}} = 10$  ms und  $T_{\text{aus}} = 5$  ms.



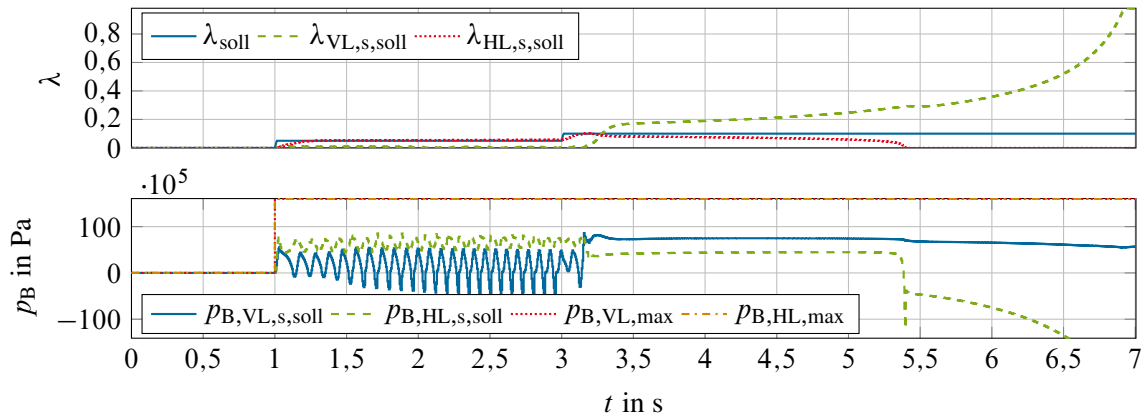


(b) Regelung bei Abweichung zwischen  $\mu_0$  in Strecke und Regelgesetz um  $1,1\mu_0$ .

Abbildung 4.3 (Forts.): Simulation der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung für das Einradmodell mit Totzeit  $T_{\text{ein}} = 10 \text{ ms}$  und  $T_{\text{aus}} = 5 \text{ ms}$ .



(a) Regelung bei Übereinstimmung von  $\mu_0$  in Strecke und Regelgesetz.



(b) Regelung bei Abweichung zwischen  $\mu_0$  in Strecke und Regelgesetz um  $1,1\mu_0$ .

Abbildung 4.4: Simulation der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung für das Gesamtfahrzeug.

---

## 5 Robuste strukturbeschränkte dynamische Ausgangsrückführung

---

In diesem Kapitel wird der Rückführanteil der in Kapitel 3 vorgestellten Zwei-Freiheitsgrade Regelungsstruktur beschrieben und die für dessen Auslegung verwendeten Verfahren vorgestellt. Dies ist zum einen ein Gain-Scheduling Ansatz über die Fahrzeuggeschwindigkeit und den Schlupf, der dazu dienen soll, die parametrische Unsicherheit in der Systembeschreibung durch Einschränkung des Parameterraumes zu verringern und zum anderen die robuste Polbereichsvorgabe, die zum robusten Entwurf der Regler in den einzelnen Gain-Scheduling Bereichen verwendet wird. Es wird darüber hinaus darauf eingegangen, wie die entworfene Regelung zu implementieren ist, um verschiedene unerwünschte Effekte, wie Windup oder sprungförmige Stellgrößenänderungen, zu verhindern und die Stabilität für die nicht im Entwurf berücksichtigten Parameterkombinationen nachgewiesen. Abgeschlossen wird das Kapitel mit den in den verschiedenen Gain-Scheduling Bereichen erzielbaren Regelergebnissen.

---

### 5.1 Gain-Scheduling Ansatz

Im Rahmen der vorgeschlagenen Reglerstruktur werden für das Gain-Scheduling die beiden Scheduling Parameter

$$\beta_k = \begin{bmatrix} \lambda_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

verwendet. Die Fahrzeuggeschwindigkeit bietet sich vor allem als während der Bremsung langsam veränderliche Größe an, da sich die Dynamik und die Phasenreserve des offenen Kreises wesentlich in Abhängigkeit der Geschwindigkeit ändert, wie in Abschnitt 2.6.2 dargelegt wurde. Dies wurde bereits in [86, S. 805] vorgeschlagen, wo eine logarithmische Einteilung der Geschwindigkeit vorgenommen wird. An dieser Stelle wird die Geschwindigkeit jedoch linear unterteilt, da sich so durch die größeren Intervalle die Wahrscheinlichkeit verringern lässt, dass durch Schätzfehler in der Fahrzeuggeschwindigkeit auf ein falsches Geschwindigkeitsintervall umgeschaltet wird.

Wie am Verlauf der Reibwerte über dem Schlupf in Abbildung 2.5 zu erkennen ist, besitzt die Strecke darüber hinaus eine starke Abhängigkeit vom Schlupf, der als zweiter Scheduling Parameter verwendet wird. Dies äußert sich darin, dass für kleine Schlüpf eine sehr hohe positive Steigung der Kurve vorliegt, für eine Umgebung um das Maximum eine betragsmäßig kleine Steigung zu beobachten ist und für den instabilen Bereich rechts des Wendepunktes der Kurve große

negative Steigungen auftreten. Aus diesem Grund wird eine Dreiteilung des Schlupfes im gesamten Arbeitsraum vorgenommen, die sich an diesen unterschiedlichen Steigungen orientiert, wie in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Auf diese Weise können für die einzelnen Bereiche Regler für Strecken mit vergleichsweise ähnlicher Charakteristik entworfen werden und die Robustheitsanforderungen werden abgesenkt. Die Unterteilung muss dabei weniger fein als bei der Geschwindigkeit sein, da der Schlupf am realen Fahrzeug nicht direkt gemessen wird und somit einer hohen Unsicherheit unterliegt, was bei kleinteiliger Diskretisierung des Parameterraumes zu häufigem, u. U. unnötigem, Umschalten zwischen den Reglern führen würde.

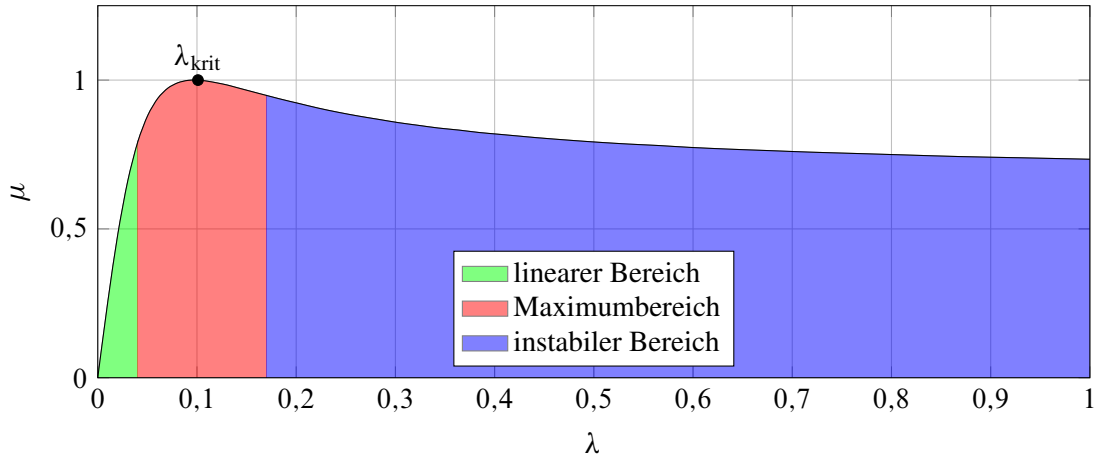


Abbildung 5.1: Bereiche des Gain-Scheduling für Umschaltung im Schlupf.

Da die Stabilität des Regelkreises maßgeblich vom Schlupfarbeitspunkt abhängt, bietet es sich an, die Gewichtung in Gl. (3.1) für  $\lambda$  gegenüber der von  $v$  zu erhöhen, um ein fälschliches Umschalten auf einen instabilen Regler zu verhindern, und es wird mit der Normierung auf den Arbeitsbereich die Gewichtung

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_{\max}-v_{\min}} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

mit den Grenzen des Arbeitsbereiches  $v_{\min}$  und  $v_{\max}$  verwendet.

## 5.2 Robuste Polbereichsvorgabe

Ziel des robusten Reglerentwurfes ist es nun, jeweils einen festen Regler für die einzelnen Gain-Scheduling Bereiche zu finden, der für alle Kombinationen  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  die Strecke stabilisieren kann und über eine in gewissen Grenzen vorgebbare Mindestdynamik und -dämpfung verfügt. Diese Vorgaben werden dadurch erreicht, dass die Eigenwerte des mit dem gesuchten Regler geschlossenen Regelkreises in ein gewünschtes Gebiet  $\Gamma$  verschoben werden, das die Erfüllung der Anforderungen verspricht. Abbildung 5.3 zeigt beispielhaft ein solches Polgebiet für einen zeitdiskreten Regelkreis. Ein fest eingestellter Regler, der für alle Parameterkombinationen die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in das Gebiet  $\Gamma$  schiebt, heißt *robust*.

### 5.2.1 Problemstellung

Da der Parameterraum im Allgemeinen aus unendlich vielen verschiedenen Kombinationen der einzelnen Parameter besteht, wird die Menge der zu betrachtenden Kombinationen eingeschränkt, um das entstehende Problem auf einem Digitalrechner lösen zu können. Dazu werden  $\varpi$  charakteristische Parameterkombinationen  $\mathbf{p}_\mu \in \mathcal{P}$ ,  $\mu = 1, \dots, \varpi$  ausgewählt, wie bspw. die Eckpunkte, falls  $\mathcal{P}$  ein Polyeder beschreibt, und anschließend in die Systemgleichung eingesetzt, was auf die  $\varpi$  kontinuierlichen Modelle

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}_\mu) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u} \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x} + \mathbf{D}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u} \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}'(\mathbf{p}_\mu) \dot{\mathbf{x}} \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{y}_{\text{ref}} = \mathbf{C}_{\text{ref}}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x} + \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u} \quad (5.3d)$$

bzw. diskreten Modelle

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u}_k \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x}_k + \mathbf{D}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u}_k \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{y}'_k = \mathbf{C}'(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x}_{k+1} \quad (5.4c)$$

$$\mathbf{y}_{k,\text{ref}} = \mathbf{C}_{\text{ref}}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_{\text{ref}}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{u}_k \quad (5.4d)$$

führt, die auch *Multi-Modelle* genannt werden. Der Regler soll durch das kontinuierliche Regel-

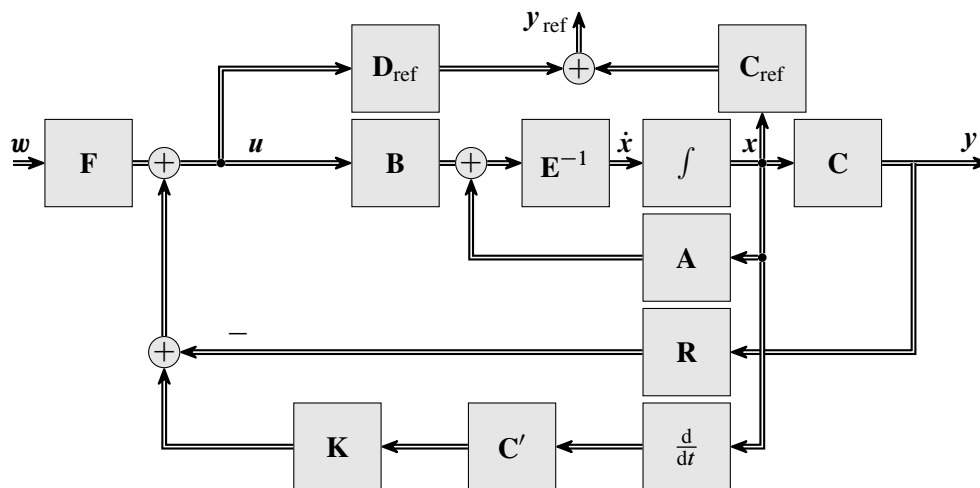


Abbildung 5.2: Strukturbild des für den  $\Gamma$ -Entwurf zugrunde gelegten kontinuierlichen geschlossenen Regelkreises.

gesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}\mathbf{y} + \mathbf{K}\mathbf{y}' + \mathbf{F}\mathbf{w} \quad (5.5a)$$

bzw. das diskrete Regelgesetz

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}\mathbf{y}_k + \mathbf{K}\mathbf{y}'_k + \mathbf{F}\mathbf{w}_k \quad (5.5b)$$

mit proportionaler Rückführverstärkung  $\mathbf{R} \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{m \times p}$ , differentieller Rückführverstärkung  $\mathbf{K} \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m \times p'}$  und Vorfilter  $\mathbf{F} \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{m \times s}$  sowie Führungsgröße  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^s$  über eine Ausgangsrückführung beschrieben werden. Der Spezialfall einer vollständigen Zustandsrückführung ist dabei durch die Wahl  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{C}' = \mathbf{0}$  in der Problemstellung enthalten ist und die nicht kausale Rückführung  $\mathbf{K}\mathbf{C}'\mathbf{x}_{k+1}$  wird nur in Analogie zum entsprechenden Term des kontinuierlichen Regelgesetzes eingeführt, im Folgenden aber nicht verwendet. Mit  $\mathbf{C}' \neq \mathbf{0}$  kann im kontinuierlichen Fall eine differentielle Ausgangsrückführung entworfen werden. Die differentielle Rückführung  $\mathbf{K}$  ermöglicht ein alternatives Vorgehen zum Entwurf idealer D-Anteile im Vergleich zur bspw. in [117] vorgeschlagenen Interpretation des abgeleiteten Regelfehlers als erweitertem Ausgang. Dies ist mit der vorliegenden Formulierung ohne zusätzlichen Aufwand zur Berücksichtigung von Durchgriffen in der differentiellen Rückführung auch möglich, wenn  $\mathbf{C}\mathbf{B}$  nicht identisch verschwindet. Es wird nur der Fall einer statischen Ausgangsrückführung betrachtet, da sich eine dynamische Ausgangsrückführung in eine solche überführen lässt [200, S. 128]. Das Vorfilter  $\mathbf{F}$  ist frei vorgebbar oder ergibt sich aus den Koeffizienten der Reglermatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$ , sofern eine bestimmte Reglerstruktur vorgegeben wird. Das Blockschaltbild des für den kontinuierlichen Fall entstehenden Regelkreises ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Wenn die Mengen  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{K}$  oder  $\mathcal{F}$  echte Untermengen ihrer Definitionsbereiche sind, handelt es sich bei dem Entwurfsproblem um eine strukturbeschränkte Ausgangsrückführung, sonst um eine Ausgangsrückführung. Eine solche Strukturbeschränkung ist bspw. zum Entwurf dezentraler Regelungen oder von PID-Reglern oder sonstigen Reglern mit fester Struktur im Zustandsraum erforderlich. Ungleichungsnebenbedingungen können bspw. verwendet werden, um die maximal zu erwartende Stellgröße bei bekannten Schranken an die Zustände über die Reglerkoeffizienten heuristisch zu beschränken. Mit nichtlinearen Nebenbedingungen an die Reglerkoeffizienten kann bspw. das HURWITZ-Kriterium als zusätzliche Stabilitätsbedingung direkt zum Entwurf hinzugefügt werden. Dies lässt sich erreichen, indem die Reglermatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$  sowie die Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}$  bestimmte lineare Nebenbedingungen der Form

$$\mathbf{Z}_= \text{vec}(\mathbf{R}) = \mathbf{z}_= \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{Z}_\leq \text{vec}(\mathbf{R}) \leq \mathbf{z}_\leq \quad (5.6b)$$

$$\mathbf{Z}'_= \text{vec}(\mathbf{K}) = \mathbf{z}'_= \quad (5.6c)$$

$$\mathbf{Z}'_\leq \text{vec}(\mathbf{K}) \leq \mathbf{z}'_\leq \quad (5.6d)$$

$$\mathbf{Z}_=^F \text{vec}(\mathbf{F}) = \mathbf{z}_=^F \quad (5.6e)$$

$$\mathbf{Z}_\leq^F \text{vec}(\mathbf{F}) \leq \mathbf{z}_\leq^F \quad (5.6f)$$

mit Matrizen  $\mathbf{Z}$ , Vektoren  $\mathbf{z}$  und dem Vektorisierungsoperator

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec}([\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]) = [\mathbf{a}_1^T \ \cdots \ \mathbf{a}_n^T]^T$$

sowie nichtlineare Nebenbedingungen der Form

$$\mathbf{z}_= (\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = \mathbf{0} \quad (5.6g)$$

$$\mathbf{z}_\leq (\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) \leq \mathbf{0} \quad (5.6h)$$

erfüllen sollen. Diese Nebenbedingungen werden entweder direkt in dem zu lösenden Optimierungsproblem angewandt oder, wie im Fall von linearen Gleichungsbedingungen, vor dem Lösen des Problems durch eine Transformation eliminiert.

Sollte der verwendete numerische Optimierungsalgorithmus nicht in der Lage sein, die Beschränkungen zu berücksichtigen, werden sie, bis auf die linearen Gleichungsbeschränkungen, beim Lösen des Problems ignoriert. Es wird angenommen, dass  $\text{rg}(\mathbf{E}) = n$  gilt und die differentielle Rückführung derart stattfindet, dass dies auch für den geschlossenen Regelkreis gilt, wodurch keine unendlichen Eigenwerte entstehen, und  $\mathbf{E}$  somit nur als „Massenmatrix“ interpretiert wird. Die Matrizen  $\mathbf{C}_{\text{ref}}$  und  $\mathbf{D}_{\text{ref}}$  dienen vor allem dazu, die Mess- und Regelgrößen unabhängig voneinander vorgeben zu können und damit die Anzahl an Führungsgrößen zu definieren. Dies ist sinnvoll, da bspw. beim Entwurf eines Zustandsreglers  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  gilt und dann auch  $n$  Führungsgrößen vorhanden sein müssten, und um weitere Anforderungen an das Vorfilter  $\mathbf{F}$ , wie stationäre Genauigkeit bzgl. der Regelgrößen  $\mathbf{y}_{\text{ref}}$ , berücksichtigen zu können.

Das Regelgesetz Gl. (5.5) soll nun die Eigenwerte aller  $\varpi$  Multi-Modelle in  $\Gamma$  verschieben, d. h. ein „simultanes Stabilisierungsproblem“ analog zu [217] lösen. Dabei ist jedoch nicht garantiert, dass dann auch alle Modelle mit beim Entwurf nicht berücksichtigten Parameterkombinationen Eigenwerte in  $\Gamma$  besitzen, sodass im Anschluss u. U. noch eine Stabilitätsanalyse nötig ist.

Die Reglermatrizen  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{F}$  sollen mittels einer beschränkten Optimierung

$$(\mathbf{R}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{F}^*) = \arg \min_{\substack{\mathbf{R}: \text{Gl. (5.6)} \\ \mathbf{K}: \text{Gl. (5.6)} \\ \mathbf{F}: \text{Gl. (5.6)} \\ \text{Gl. (5.8)}}} (J(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F})) \quad (5.7)$$

berechnet werden, für die zuerst das Gütemaß  $J$  und die Beschränkungen angegeben werden. Das Gütemaß  $J$  setzt sich dabei aus einem Anteil  $J_S$  zur Bewertung des Polgebietes und einem zweiten Anteil  $J_B$  zur Bewertung der Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zusammen. Um die Möglichkeiten der beschränkten Optimierung zu nutzen, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass ein „notwendiges“ Gebiet  $\Gamma_1$  definiert wird, in dem die Eigenwerte mindestens liegen müssen, damit ein Regler als zulässig erachtet wird. Dies kann bspw. das entsprechende Stabilitätsgebiet, also die offene linke Halbebene im zeitkontinuierlichen Fall oder der Einheitskreis bei zeitdiskreten Systemen, sein. Darüber hinaus wird ein „optionales“ Gebiet  $\Gamma_2$  vorgegeben, in dem die Eigenwerte liegen sollten, damit der Regler als gute Lösung akzeptiert wird. Abbildung 5.3 zeigt dies für die  $\mathcal{Z}$ -Transformation mit dem Einheitskreis als notwendigem Gebiet  $\Gamma_1$  und dem herzförmigen Gebiet vorgegebener Dämpfung  $\Gamma_2$ .

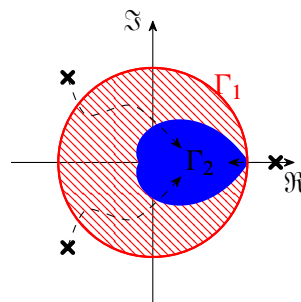


Abbildung 5.3: Notwendiges und optionales Polgebiet  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  im  $\mathcal{Z}$ -Bereich.

Als weitere Nebenbedingung der Optimierung wird demnach

$$\lambda_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + j\omega_{\mu\nu} \in \Gamma_1, \forall \mu = 1, \dots, m, \forall \nu = 1, \dots, n \quad (5.8a)$$

angesetzt, wobei  $\lambda_{\mu\nu}$  die Eigenwerte der geschlossenen Regelkreise sind, die sich über die Lösungen des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$\lambda_{\mu\nu} \left( \mathbf{E}(\mathbf{p}_\mu) - \mathbf{B}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{K} \mathbf{C}'(\mathbf{p}_\mu) \right) \mathbf{v}_{\mu\nu} = \left( \mathbf{A}(\mathbf{p}_\mu) - \mathbf{B}(\mathbf{p}_\mu) \mathbf{R} \mathbf{C}(\mathbf{p}_\mu) \right) \mathbf{v}_{\mu\nu} \quad (5.8b)$$

ergeben. An dieser Stelle wird der Vorteil der Formulierung des differentiellen Anteils über ein Deskriptorsystem deutlich, da dies hier zu einem verallgemeinerten Eigenwertproblem führt, dessen Argumente linear in den Reglerparametern sind, während üblicherweise zur Berücksichtigung einer differentiellen Rückführung im Zustandsraum eine von der Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  abhängige Transformation der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  vorgenommen wird, die das Problem nichtlinear in den Komponenten von  $\mathbf{K}$  werden lässt [[33, S. 4] und [58, S. 754]].

Um Gl. (5.7) einem Optimierungsalgorithmus zugänglich zu machen, wird der Rand  $\partial \Gamma_1$  des Polgebietes durch eine geeignete u. U. stückweise Parametrierung beschrieben und  $\rho$  Funktionen  $z_\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, für die

$$\begin{cases} z_\gamma(\sigma, \omega) < 0, & \sigma + j\omega \in \text{int}(\Gamma_1) \\ z_\gamma(\sigma, \omega) = 0, & \sigma + j\omega \in \partial \Gamma_1 \\ z_\gamma(\sigma, \omega) > 0, & \sigma + j\omega \notin \text{clos}(\Gamma_1) \end{cases} \quad (5.9)$$

gilt. Für das in Abbildung 5.3 gezeigte notwendige Polgebiet, das dem Einheitskreis entspricht, ist bspw.

$$z(\sigma, \omega) = \sigma^2 + \omega^2 - 1^2$$

und für das Polgebiet  $\Gamma_2$ , das von einer logarithmischen Spirale begrenzt wird, ist

$$z(\sigma, \omega) = \sigma^2 + \omega^2 - R^2 e^{2k_S \arctan(-\frac{\omega}{\sigma})}$$

mit dem Radius  $R$  und der Steigung  $k_S$  eine geeignete Parametrierung, die auch in Abbildung 5.4 (f) dargestellt ist. Für das einfachste denkbare Gebiet, eine in Abbildung 5.4 (a) dargestellte, durch eine Gerade begrenzte Halbebene mit der Randfunktion

$$z(\sigma, \omega) = a\sigma + b - \omega \quad (5.10)$$

mit dem Steigungsparameter  $a$  und dem Verschiebungsparameter  $b$  lässt sich bspw. ein Sektor bestimmter Dämpfung im Kontinuierlichen beschreiben. Für ein kreisförmiges Polgebiet in der in [60, S. 573] vorgeschlagenen Parametrierung mit

$$z(\sigma, \omega) = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} - r \quad (5.11)$$

mit dem Radius  $r$  existiert die Ableitung im Ursprung allerdings nicht, weshalb die numerisch besser geeignete und überall stetig differenzierbare, in Abbildung 5.4 (b) dargestellte, Parametrierung

$$z(\sigma, \omega) = \sigma^2 + \omega^2 - r^2 \quad (5.12)$$

verwendet wird. Aus einer analogen Überlegung ergibt sich für ein in Abbildung 5.4 (c) dargestelltes elliptisches Polgebiet

$$z(\sigma, \omega) = \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\omega^2}{b^2} - 1 \quad (5.13)$$

mit Hauptachse  $a$  und Nebenachse  $b$  und für ein hyperbolisches Polgebiet

$$z(\sigma, \omega) = 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\omega^2}{b^2} \quad (5.14)$$

mit dem Scheitel  $a$  und der Halbachse  $b$ , wie in Abbildung 5.4 (e) zu sehen ist. Der Nachteil der Parametrierung der Hyperbel mit einer quadratischen Form liegt jedoch darin, dass, wie in Abbildung 5.4 (e) zu sehen, zwei getrennte Gebiete entstehen und somit eine weitere Randfunktion nötig ist, um das unerwünschte Gebiet zu neutralisieren, sodass hier im Gegensatz zu Kreis und Ellipse auch die in Abbildung 5.4 (d) gezeigte Parametrierung

$$z(\sigma, \omega) = \sigma + \frac{a}{b} \sqrt{\omega^2 + b^2} \quad (5.15)$$

über die Wurzel verwendet werden kann, da diese stetig differenzierbar ist [60, S. 573]. Die verschiedenen Polgebiete sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

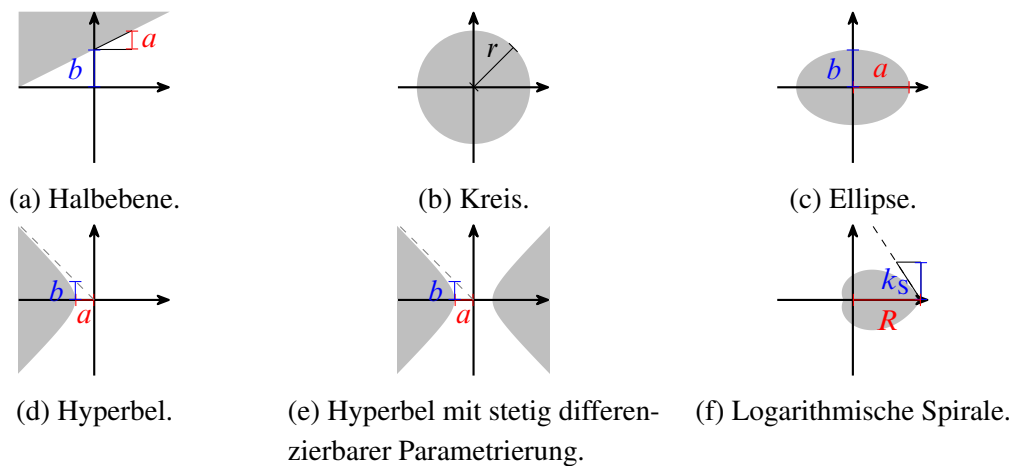


Abbildung 5.4: Polgebiete  $\Gamma$ .

Der Vorteil der Beschreibung des Polgebietes über die Forderungen Gl. (5.9) liegt darin, dass die meisten Standardalgorithmen der beschränkten Optimierung die  $\rho$  Funktionen  $z_\gamma$  zur Beschreibung der Polgebietsränder direkt als nichtlineare Nebenbedingung verwenden können und nur noch die aus Gl. (5.8) ermittelten Eigenwerte für alle Multi-Modelle eingesetzt werden müssen,



sodass insgesamt  $n\varpi\rho$  nichtlineare Beschränkungen entstehen und das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{F}^*) = \arg \min_{\substack{\mathbf{R}: \text{Gl. (5.6)} \\ \mathbf{K}: \text{Gl. (5.6)} \\ \mathbf{F}: \text{Gl. (5.6)}}} (J(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F})) \quad (5.16) \\
 \left[ \begin{array}{c}
 w_{11}z_{11}(\sigma_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 w_{11}z_{11}(\sigma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 \vdots \\
 w_{11}z_{11}(\sigma_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 w_{12}z_{12}(\sigma_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 w_{12}z_{12}(\sigma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 \vdots \\
 w_{12}z_{12}(\sigma_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\
 \vdots \\
 w_{\varpi\rho}z_{\varpi\rho}(\sigma_{\varpi n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{\varpi n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}))
 \end{array} \right] \leq 0
 \end{aligned}$$

mit den Gewichtungsfaktoren  $w_{\varpi\rho}$  als nichtlineares Problem (NLP) entsteht. Darin gilt  $\lambda_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + j\omega_{\mu\nu}$  und für jedes Multi-Modell dürfen unterschiedliche Randfunktionen verwendet werden, was durch den Index  $z_{\mu\gamma}$  angedeutet wird. Je nach verwendetem Optimierungsalgorithmus kann die sich im Laufe der Iterationen verändernde Sortierung der Eigenwerte zu numerischen Problemen führen, sodass bei der numerischen Lösung des Problems (5.16) Algorithmen von Vorteil sind, bei denen die Sortierung der Beschränkungen nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Die Gewichtungen  $w_{\mu\gamma}$  dienen dazu, die einzelnen Multi-Modelle untereinander oder die verschiedenen Polgebiete unterschiedlich zu bewerten. Dies kann insbesondere zum Erhöhen oder Verringern des Abstandes zu einem Schwellwert für ein Maß der Bewertung der Zulässigkeit einer Lösung bei der numerischen Optimierung und damit zum Akzeptieren oder Verwerfen von Lösungen, die leicht unzulässig sind bzw. auf jeden Fall noch zulässig gemacht werden müssen, benutzt werden.

Durch negative Gewichtungsfaktoren ist es prinzipiell auch möglich, das Komplement des Polgebietes zum gewünschten Polgebiet zu machen. Es ist zu beachten, dass die Randfunktionen, die das notwendige Gebiet  $\Gamma_1$  bilden, jeweils alle gleichzeitig negativ sein müssen, damit alle Eigenwerte in  $\Gamma_1$  liegen, während beim gewünschten Polgebiet  $\Gamma_2$ , bedingt durch die Verwendung im Gütemaß, eher der Verlauf der Randfunktion selbst und deren Gewichtung relativ zu den anderen gewünschten Randfunktionen bestimmt, ob eine gefundene Lösung als gut angesehen werden kann und damit auch eine Überschneidung verschiedener Teilpolgebiete sinnvoll sein kann.

Die Berücksichtigung der Lage der Eigenwerte bezüglich des gewünschten Polgebietes  $\Gamma_2$  erfolgt, indem die Funktionswerte der zu den Rändern von  $\Gamma_2$  gehörenden Funktionen  $z_\gamma$  in einem Gütemaß bewertet werden, da die Funktionen  $z_\gamma$  gewissermaßen ein nichtlineares Maß für den Abstand eines Eigenwertes zum zugehörigen Polgebietsrand darstellen. Dieses Vorgehen bietet sich auch für das Gebiet  $\Gamma_1$  an, wenn keine Verfahren für nichtlineare beschränkte Optimierungsprobleme verwendet werden sollen. Über eine Gütefunktion  $J_S: \mathbb{R}^{m \times p} \times \mathbb{R}^{m \times p'} \times \mathbb{R}^{m \times s} \rightarrow \mathbb{R}$  können nun

die einzelnen Abstände individuell gewichtet und bewertet werden. Um große Abstände der Eigenwerte zum Polgebietsrand in einer Iteration des Optimierungsalgorithmus zu bestrafen, bietet es sich an, ein sog. Straffunktionsverfahren zu verwenden, bei dem eine geeignete Straffunktion gewählt wird. An eine solche Straffunktion wird die Forderung gestellt, dass sie für  $z_\gamma(\sigma, \omega) \leq 0$  kleine Funktionswerte annimmt oder sogar identisch verschwindet und für  $z_\gamma(\sigma, \omega) > 0$  große Funktionswerte annimmt. Je nachdem, ob zu Beginn der Optimierung ein Startwert – d. h. Reglerparameter  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$  – bekannt ist, der bereits alle Eigenwerte aller Multi-Modelle in das geforderte Polgebiet schiebt, der also im Sprachgebrauch der beschränkten Optimierung als zulässige Startlösung bezeichnet werden kann, sind unterschiedliche Straffunktionen geeignet. Für eine solche zulässige Startlösung bieten sich die inneren Straffunktionen oder Barrierefunktionen an, die nur für  $z_\gamma(\sigma, \omega) < 0$  d. h. im Inneren des gewünschten Gebietes definiert sind bzw. endliche Werte annehmen und vorrangig bei so genannten Innere Punkte Verfahren (IP) angewandt werden [167]. Die bekannteste dieser inneren Straffunktionen ist die logarithmische Straffunktion

$$J_S(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = - \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} \log\left(-w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}(\sigma_{\mu v}, \omega_{\mu v})\right), \quad (5.17)$$

bei der die Gewichtung  $w_{\mu\gamma}$  der einzelnen Multi-Modelle und Randfunktionen als Barriereparameter interpretiert werden kann [167, S. 346]. Wenn das damit entstehende Problem für eine streng monoton fallende Nullfolge von Gewichtungen gelöst wird, besteht die Hoffnung, dass die Lösungen gegen die gesuchte Lösung von Gl. (5.7) konvergieren [167, S. 346].

Darüber hinaus können sog. äußere Straffunktionen verwendet werden, die im Gegensatz zu den inneren Straffunktionen überall definiert sind und daher auch unzulässige Startlösungen zulassen. Als äußere Straffunktionen können bspw. die quadratische Straffunktion

$$J_S(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} \max\left(0, w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}(\sigma_{\mu v}, \omega_{\mu v})\right)^2, \quad (5.18)$$

die exakte  $l_1$ -Straffunktion

$$J_S(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} \max\left(0, w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}(\sigma_{\mu n}, \omega_{\mu n})\right) \quad (5.19)$$

oder die exponentielle Straffunktion nach [59, S. 393]

$$J_S(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} e^{(w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}(\sigma_{\mu n}, \omega_{\mu n}))} \quad (5.20)$$

verwendet werden, bei denen im Gegensatz zu den inneren Straffunktionen die Gewichtung  $w_{\mu\gamma}$  eine streng monoton wachsende Folge sein muss, damit die Lösung des Problems gegen die Lösung von Gl. (5.7) konvergieren kann [167, S. 306 f.]. Für die exponentielle Straffunktion ist bei einem Gütefunktionswert  $J_S < 1$  in jedem Fall eine Lösung gefunden, bei der alle Eigenwerte im vorgegebenen Polgebiet liegen, während für die quadratische und die exakte  $l_1$ -Straffunktion Gütefunktionswerte  $J_S = 0$  eine im Sinne der restringierten Optimierung zulässige Lösung

kennzeichnen [59, S. 394]. Die quadratische und exponentielle Straffunktion sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig differenzierbar, während die exakte  $l_1$ -Straffunktion gerade beim Übergang von positiven zu negativen Funktionswerten von  $z_\gamma$  nicht differenzierbar ist, was für die Verwendung gradientenbasierter Optimierungsverfahren von Nachteil ist. Der Nachteil des Straffunktionsansatzes gegenüber der Lösung des Polbereichsvorgabeproblems als beschränktes Optimierungsproblem liegt auch in der Schwierigkeit der Wahl der Gewichtungparameter, da diese die Konvergenz zu einer Lösung wesentlich beeinflussen und vom Entwerfer geeignet zu wählen sind. Dazu sind u. U. mehrfache Iterationen des Problems mit unterschiedlichen Gewichtungen  $w_{\mu\gamma}$  nötig, bis die Polbereichsbedingung in hinreichendem Maße erfüllt werden kann, während bei Verwendung beschränkter Optimierungsverfahren der Optimierungsalgorithmus intern eigene Gewichtungen einführt, die diese Iterationen im Hintergrund ablaufen lassen. Dadurch müssen die Gewichte  $w_{\mu\gamma}$  in diesem Fall nicht auch als Optimierungseinstellungen verwendet werden, sondern haben eine Bedeutung, die sich nur aus dem Entwurfsziel ableitet.

Bei der beschränkten Optimierung wird der Straffunktionsansatz meist wenigstens für die Ermittlung einer neuen Suchrichtung für die nächste Iteration verwendet und der Algorithmus legt dort die nötigen Gewichte selbständig anhand bestimmter Kriterien fest, während der Anwender über  $w_{\mu\gamma}$  die einzelnen Multi-Modelle und Randfunktionen nach ihrer tatsächlichen Bedeutung gewichten kann, da ihre Bedeutung als Barriereparameter für die Optimierung entfällt. Dies kann u. U. dazu genutzt werden, auch leicht unzulässige Lösungen bei der numerischen Optimierung als gültig zu akzeptieren, wenn das exakte Einhalten der Polgebietsbedingung kein Entwurfsziel ist.

Eine weitere mögliche Wahl der Gütefunktion, mit der die Abweichung der Eigenwerte vom Polgebiet bestraft werden kann, basiert auf der sog. KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion

$$J_S(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{F}) = \log \left( \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} e^{(w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}(\sigma_{\mu v}, \omega_{\mu v}))} \right), \quad (5.21)$$

die vor allem den größten Abstand zum Polgebiet bestraft, während die kleineren Abstände nur mit geringen Werten in das Gütemaß eingehen [103, S. 78]. Die Verwendung dieses Gütemaßes lässt sich auch so interpretieren, dass die am stärksten verletzte Nebenbedingung  $z_\gamma$  minimiert werden soll, was dem Min-Max-Problem

$$(\mathbf{R}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{F}^*) = \arg \min_{\substack{\mathbf{R}: \text{Gl. (5.6) \\ \mathbf{K}: \text{Gl. (5.6) \\ \mathbf{F}: \text{Gl. (5.6)}}} \max \left( \begin{array}{c} w_{11} z_{11}(\sigma_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ w_{11} z_{11}(\sigma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ \vdots \\ w_{11} z_{11}(\sigma_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ w_{12} z_{12}(\sigma_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{11}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ w_{12} z_{12}(\sigma_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ \vdots \\ w_{12} z_{12}(\sigma_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{1n}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \\ \vdots \\ w_{\varpi\rho} z_{\varpi\rho}(\sigma_{\varpi n}(\mathbf{R}, \mathbf{K}), \omega_{\varpi n}(\mathbf{R}, \mathbf{K})) \end{array} \right) \quad (5.22)$$

entspricht, das eine weitere Möglichkeit darstellt, das Problem Gl. (5.7) ohne Nebenbedingungen zu formulieren. Ob die Zwangsbedingungen gemäß Gl. (5.6) dabei berücksichtigt werden können, hängt im Wesentlichen von dem verwendeten Optimierungsalgorithmus und dessen Fähigkeit zur Berücksichtigung von linearen und nichtlinearen Ungleichungsnebenbedingungen und nichtlinearen Gleichungsnebenbedingungen ab, da nur lineare Gleichungsnebenbedingungen bereits vor der Übergabe an den Optimierungsalgorithmus wie in Abschnitt 5.2.3 beschrieben behandelt werden. Falls das Optimierungsproblem keine Lösung besitzt, können zuerst die Gewichte angepasst werden und u. U. müssen sogar die Polgebiete anders gewählt werden, um eine Lösbarkeit des Optimierungsproblems sicherstellen zu können [100, S. 254].

Neben den Gütefunktionen  $J_S$  zur Bewertung der Lage der Eigenwerte bezogen auf das Polgebiet  $\Gamma$  können darüber hinaus weitere Gütemaße  $J_B$  zum Ausnutzen eventuell noch vorhandener Freiheitsgrade durch Bewertung bestimmter Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises verwendet werden. Dazu bieten sich vor allem Maßnahmen zum Erhöhen der Robustheit des geschlossenen Regelkreises an, wie bspw. die Minimierung der Summe der Konditionen von Eigenvektormatrizen der Multi-Modelle

$$J_B = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\varpi} \text{cond}(\mathbf{V}_\mu)^2, \quad (5.23)$$

wie in [198, S. 1252] vorgeschlagen. Alternativ kann auch, wie in [231, S. 136 ff.] vorgeschlagen, eine Minimierung der FROBENIUS-Norm der symmetrischen LYAPUNOV-Matrix  $\mathbf{P}$  durchgeführt werden, da damit die Robustheit des geschlossenen Regelkreises gegenüber zeitvarianter, unstrukturierter Unsicherheit  $\Delta \mathbf{A}(t)$  erhöht wird, für die ihr maximaler Singulärwert  $\sigma_{\max}$  die Beziehung

$$\sigma_{\max}(\Delta \mathbf{A}(t)) \leq \frac{1}{\sigma_{\max}(\mathbf{P})} \quad (5.24)$$

erfüllt. Als Güte-term wird in diesem Fall mittels einer Abschätzung des maximalen Singulärwertes über die FROBENIUS-Norm

$$J_B = - \sum_{\mu=1}^{\varpi} \frac{1}{\|\mathbf{P}_\mu\|_F^2} \quad (5.25)$$

verwendet, wobei sich die LYAPUNOV-Matrix aus der Lösung der kontinuierlichen LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{P}_\mu (\mathbf{A}_\mu - \mathbf{B}_\mu \mathbf{R} \mathbf{C}_\mu) + (\mathbf{A}_\mu - \mathbf{B}_\mu \mathbf{R} \mathbf{C}_\mu)^T \mathbf{P}_\mu + \mathbf{Q}_\mu \quad (5.26a)$$

bzw. der diskreten LYAPUNOV-Gleichung

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}_\mu - \mathbf{B}_\mu \mathbf{R} \mathbf{C}_\mu)^T \mathbf{P}_\mu (\mathbf{A}_\mu - \mathbf{B}_\mu \mathbf{R} \mathbf{C}_\mu) - \mathbf{P}_\mu + \mathbf{Q}_\mu \quad (5.26b)$$

mit einer vorgebbaren Matrix  $\mathbf{Q}_\mu$  ergibt. Da die LYAPUNOV-Matrix im Fall von instabilen Eigenwerten, wie sie vor allem zu Beginn der Optimierung bei ungünstig gewählten Startwerten auftreten können, nicht positiv definit ist, wird mittels der SCHUR-Zerlegung eine getrennte Bewertung der zugehörigen Blöcke aus  $\mathbf{P}$  vorgenommen, die nach [131] und [236] analog zu Abschnitt 2.6.1 durchgeführt werden kann. Mit der orthonormalen SCHUR-Matrix  $\mathbf{U}$ , für die

$$\mathbf{A}_\mu - \mathbf{B}_\mu \mathbf{R} \mathbf{C}_\mu = \hat{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{A}}_{is} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_s \end{bmatrix} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \tilde{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U}^T \quad (5.27)$$

gilt, erhält man aus Gl. (5.26a)

$$\mathbf{0} = \mathbf{U}^T \mathbf{P}_\mu \mathbf{U} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_\mu \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_\mu \mathbf{U} \quad (5.28a)$$

$$= \tilde{\mathbf{P}}_\mu \tilde{\mathbf{A}}_\mu + \tilde{\mathbf{A}}_\mu^T \tilde{\mathbf{P}}_\mu + \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_\mu \mathbf{U} \quad (5.28b)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu} & \tilde{\mathbf{P}}_{12,\mu} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{21,\mu} & \tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i & \tilde{\mathbf{A}}_{is} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i^T & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{is}^T & \tilde{\mathbf{A}}_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu} & \tilde{\mathbf{P}}_{12,\mu} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{21,\mu} & \tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu} \end{bmatrix} + \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_\mu \mathbf{U}, \quad (5.28c)$$

in der  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  durch  $-\tilde{\mathbf{A}}_i$  ersetzt wird, um die instabilen Eigenwerte zu stabilisieren und eine positiv definite Lösung ermitteln zu können. Wird das entstehende Gleichungssystem blockweise interpretiert, ergibt sich eine SYLVESTER-Gleichung zur Bestimmung von  $\tilde{\mathbf{P}}_{12,\mu}$  und zwei LYAPUNOV-Gleichungen zur Bestimmung von  $\tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu}$  und  $\tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu}$ . Die positiv definiten Matrizen  $\tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu}$  und  $\tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu}$  stellen die LYAPUNOV-Matrizen des instabilen sowie des stabilen Teilsystems des geschlossenen Regelkreises dar und damit kann das Gütemaß zu

$$J_B = - \sum_{\mu=1}^{\varpi} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu}\|_F^2} - \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu}\|_F^2} \quad (5.29)$$

umgeschrieben werden. Das Vorgehen für den diskreten Fall ist analog mit der Ersetzung  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  durch  $\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}$  und wird an dieser Stelle nicht angegeben.

## 5.2.2 Gradientenberechnung

Da zur Lösung der verschiedenen Formulierungen von Gl. (5.7) u. U. gradientenbasierte Verfahren verwendet werden sollen, werden im Folgenden die Gradienten der Gütefunktion  $J$  und der Bedingungen  $z_\gamma$  nach den Verstärkungsmatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$  angegeben. Die Ableitung der Randfunktionen nach der  $ij$ -ten Komponente der Reglermatrix  $\mathbf{R}$  ergibt sich über die Kettenregel zu

$$\frac{\partial z_\gamma(\mathbf{R})}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial z_\gamma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial z_\gamma}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial r_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p \quad (5.30)$$

und für die Komponenten der Reglermatrix  $\mathbf{K}$  analog durch Ersetzen von  $r_{ij}$  mit  $k_{ij}$  [59]. Für die Ableitung der Gütefunktion  $J_S$  ergibt sich

$$\frac{\partial J_S(\mathbf{R})}{\partial r_{ij}} = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} \frac{\partial J_S}{\partial z_{\mu\gamma}} \left( \frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \sigma_{\mu\nu}} \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \omega_{\mu\nu}} \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial r_{ij}} \right), \quad (5.31)$$

wobei die auftretenden Ableitungen im Folgenden angegeben werden.

Da sowohl das Gütemaß als auch die Nebenbedingungen über die Randfunktionen von den Eigenwerten abhängen und diese wiederum direkt von den gesuchten Verstärkungsmatrizen, werden zuerst die Ableitungen der Eigenwerte berechnet. Mit den in Anhang A.3 gezeigten Berechnungen ergibt sich für die Ableitungen nach den Koeffizienten der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} = \frac{\lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{v}_k}{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}') \mathbf{v}_k} \quad (5.32)$$

und der Matrix  $\mathbf{R}$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} = - \frac{\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}') \mathbf{v}_k}, \quad (5.33)$$

wobei sich die in Gl. (5.30) benötigten Ableitungen nach Real- und Imaginärteil zu

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial k_{ij}} = \Re \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega_k}{\partial k_{ij}} = \Im \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \right) \quad (5.34)$$

ergeben. Da diese Herleitung nur für einfache Eigenwerte gilt, kann mit der in [214] und [215] angegebenen rekursiven Methode auch eine Erweiterung auf halbeinfache Eigenwerte durchgeführt werden, deren algebraische Vielfachheit ihrer geometrischen entspricht, was in Rahmen des Projektseminars [A14] durchgeführt wurde, jedoch an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden soll, um Weitläufigkeiten zu vermeiden. Für nicht halbeinfache Eigenwerte existiert die Ableitung der Eigenwerte im Allgemeinen nicht oder ist zumindest nicht eindeutig, sodass dann entweder keine Gradientenverfahren mehr angewandt werden können, sofern die mehrfachen Eigenwerte nicht nur an isolierten Punkten sondern dauerhaft auftreten, weil sie bspw. nicht steuerbar sind, oder es kann dann analog zum Vorgehen in [194] ein stochastisches Gradientenverfahren verwendet werden, um der Nichtdifferenzierbarkeit zu begegnen.

Weiterhin werden die Ableitungen der Randfunktionen  $\frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \sigma_k}$  und  $\frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \omega_k}$  benötigt, die sich je nach verwendeter Randfunktion ergeben. Die Ableitungen der Randfunktionen nach den Reglerkoeffizienten  $\frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial r_{ij}}$  ergeben sich über die Kettenregel und Aufteilen des Eigenwertes  $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$  in Realteil und Imaginärteil zu Gl. (5.30), die direkt als Ableitungen des nichtlinearen Nebenbedingungssystems der Optimierungsaufgabe Gl. (5.7) verwendet werden können.

Schließlich erhält man daraus mit den Ableitungen der Güteterme der logarithmischen Straffunktion

$$\frac{\partial J_S}{\partial z_{\mu\gamma}} = \frac{1}{w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}}, \quad (5.35)$$

der quadratischen Straffunktion

$$\frac{\partial J_S}{\partial z_{\mu\gamma}} = \begin{cases} 2w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}, & z_{\mu\gamma} \geq 0 \\ 0, & z_{\mu\gamma} < 0 \end{cases}, \quad (5.36)$$

der exakten  $l_1$ -Straffunktion

$$\frac{\partial J_S}{\partial z_{\mu\gamma}} = \begin{cases} w_{\mu\gamma}, & z_{\mu\gamma} > 0 \\ 0, & z_{\mu\gamma} < 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

und der exponentiellen Straffunktion

$$\frac{\partial J_S}{\partial z_{\mu\gamma}} = w_{\mu\gamma} e^{w_{\mu\gamma} z_{\mu\gamma}} \quad (5.38)$$

und der Kettenregel die gesuchte Ableitung Gl. (5.31) für die Straffunktionen in Gl. (5.17) bis Gl. (5.20), während sich für die KREISSELMEIER-STEINHAUSER-Funktion

$$\frac{\partial J(\mathbf{R})}{\partial r_{ij}} = \frac{\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} \frac{\partial J_s}{\partial z_{\mu\gamma}} \left( \frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \sigma_{\mu\nu}} \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial z_{\mu\gamma}}{\partial \omega_{\mu\nu}} \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial r_{ij}} \right)}{\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{\varpi} \sum_{\gamma=1}^{\rho} e \left( w_{\mu\gamma z_{\mu\gamma}} (\lambda_{\mu\nu}(k_{ij})) \right)} \quad (5.39)$$

ergibt [230, S. 5]. Für die Gradienten der Randfunktionen und der Gütefunktion nach den Koeffizienten der Reglermatrix  $\mathbf{K}$  ist in Gl. (5.30), Gl. (5.31) und Gl. (5.39)  $r_{ij}$  durch  $k_{ij}$  zu ersetzen.

Die Ableitung des Gütemaßes  $J_B$  basierend auf der Eigenvektorkondition ergibt sich nach [198, S. 1252] zu

$$\frac{\partial J_B(\mathbf{R})}{\partial r_{ij}} = \sum_{\mu=1}^{\varpi} \text{spur} \left( \mathbf{V}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{V}_\mu}{\partial r_{ij}} \right) \text{spur} \left( \mathbf{W}_\mu^H \mathbf{W}_\mu \right) \text{spur} \left( \mathbf{V}_\mu^T \mathbf{V}_\mu \right) \text{spur} \left( \mathbf{W}_\mu^H \frac{\partial \mathbf{W}_\mu}{\partial r_{ij}} \right), \quad (5.40)$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{W}_\mu}{\partial r_{ij}} = -\mathbf{W}_\mu \frac{\partial \mathbf{V}_\mu}{\partial r_{ij}} \mathbf{W}_\mu \quad (5.41)$$

gilt und die Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{V}_\mu}{\partial r_{ij}}$  der Eigenvektoren mittels der Methode von VAN DER AA [214] berechnet wird.

Für das auf der LYAPUNOV-Matrix basierende Gütemaß erhält man die gesuchte Ableitung zu

$$\frac{\partial J_B(\mathbf{R})}{\partial r_{ij}} = 2 \sum_{\mu=1}^{\varpi} \frac{\text{spur} \left( \tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu}}{\partial r_{ij}} \right)}{\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{11,\mu} \right\|_F^4} - \frac{\text{spur} \left( \tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu}}{\partial r_{ij}} \right)}{\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{22,\mu} \right\|_F^4}. \quad (5.42)$$

Die darin benötigten Ableitungen der Partitionierungen der LYAPUNOV-Matrix erhält man durch Ableiten der LYAPUNOV-Gleichung Gl. (5.26) in Originalkoordinaten zu

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial r_{ij}} \bar{\mathbf{A}}_\mu + \mathbf{P}_\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu^T}{\partial r_{ij}} \mathbf{P}_\mu + \bar{\mathbf{A}}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial r_{ij}} \quad (5.43a)$$

im Kontinuierlichen und

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu^T}{\partial r_{ij}} \mathbf{P}_\mu \bar{\mathbf{A}}_\mu + \bar{\mathbf{A}}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial r_{ij}} \bar{\mathbf{A}}_\mu + \bar{\mathbf{A}}_\mu^T \mathbf{P}_\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} - \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial r_{ij}} \quad (5.43b)$$

im Diskreten, wobei  $\bar{\mathbf{A}}_\mu$  die Matrix  $\hat{\mathbf{A}}_\mu$  mit Ersetzung der instabilen Eigenwerte bezeichnet, und den Zusammenhang

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}_\mu}{\partial r_{ij}} = \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial r_{ij}} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \tilde{\mathbf{P}}_\mu - \tilde{\mathbf{P}}_\mu \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} \mathbf{U} \quad (5.44)$$

zwischen der LYAPUNOV-Matrix in Originalkoordinaten und in SCHUR-Koordinaten nach Gl. (5.27).

Die Ableitung der SCHUR-Matrix ergibt sich nach [7, S. 474] zu

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{\Pi}^T \\ \mathbf{\Pi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.45a)$$

mit

$$\text{vec}(\mathbf{\Pi}) = \left( \tilde{\mathbf{A}}_i^T \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_s \right)^{-1} \text{vec} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U} \right). \quad (5.45b)$$

Schließlich wird noch die Ableitung der Matrix  $\bar{\mathbf{A}}_\mu$  benötigt, die im Kontinuierlichen zu

$$\bar{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{U} \left( \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left( -2 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{U}^T \quad (5.46a)$$

und im Diskreten zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_\mu &= \mathbf{U} \left( \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \right) \mathbf{U}^T + \dots \\ &\dots + \mathbf{U} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left( \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (5.46b)$$

definiert ist. Als Ableitung erhält man dafür mit den zuvor definierten Ableitungen und Größen im Kontinuierlichen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} - 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - 2 \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \dots \\ &\dots - 2 \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - 2 \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \dots \\ &\dots - 2 \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} \end{aligned} \quad (5.47a)$$

sowie im Diskreten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \dots \\ &\dots - \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T - \dots \\ &\dots - \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} \mathbf{E}_{11} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T + \dots \\ &\dots + \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} + \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left( -\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (5.47b)$$

mit

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial r_{ij}} \hat{\mathbf{A}}_\mu \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}_\mu}{\partial r_{ij}} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{A}}_\mu \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ij}} \quad (5.47c)$$

und der Blockmatrix

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

### 5.2.3 Beschränkungen der Reglerkoeffizienten

Lineare Gleichungsnebenbedingungen der Form Gl. (5.6a) können bereits vor der Optimierung eingesetzt werden, um die Anzahl an Optimierungsvariablen und damit die Problemordnung zu reduzieren. Dazu wird vorausgesetzt, dass für die Gleichungsnebenbedingung Gl. (5.6a)  $\text{rg}(\mathbf{Z}_-) =$



$l < mr$  und  $\mathbf{Z}_= \in \mathbb{R}^{l \times mr}$  gilt, damit keine der Beschränkungen redundant ist oder mehr Zwangsbedingungen als Reglerkoeffizienten vorhanden sind. Die Lösung des Gleichungssystems Gl. (5.6a) kann durch

$$\text{vec}(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}_=^T (\mathbf{Z}_= \mathbf{Z}_=^T)^{-1} \mathbf{z}_= + \ker(\mathbf{Z}_=) \tilde{\mathbf{r}} \quad (5.49)$$

mit  $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{mr-l}$  parametrisiert werden [17, S. 126]. Um die Gleichungsbeschränkungen bereits vor der eigentlichen Optimierung zu berücksichtigen und damit zu garantieren, dass diese immer erfüllt sind, wird nun die Transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_= \\ \ker(\mathbf{Z}_=)^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_=} \text{vec}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_= \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

eingeführt, die die Koeffizienten der Reglermatrix  $\mathbf{R}$  mit den für die Optimierung verwendeten Optimierungsvariablen  $\mathbf{r}$ , die die Freiheitsgrade der Reglermatrix darstellen, in Beziehung setzt. Ein analoges Vorgehen für die Koeffizienten der differentiellen Rückführmatrix  $\mathbf{K}$  und der Vorfiltermatrix  $\mathbf{F}$  liefert die Freiheitsgrade in  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{f}$ . Mit den Transformationen Gl. (5.50) lassen sich die jeweiligen linearen Ungleichungsnebenbedingungen in die Form

$$\mathbf{Z}_\leq \mathbf{T}_=^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{r} \leq \mathbf{z}_\leq - \mathbf{Z}_\leq \mathbf{T}_=^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_= \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

überführen.

Für die Ableitungen der von den Reglerkoeffizienten  $\mathbf{R}$  abhängigen Funktionen nach den Optimierungsvariablen  $\mathbf{r}$  ergibt sich mit der Kettenregel

$$\frac{\partial \mathbf{f}_o}{\partial \mathbf{r}_k} = \text{vec} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_o}{\partial r_{11}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_o}{\partial r_{1r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_o}{\partial r_{m1}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_o}{\partial r_{mr}} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{T}_=^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{e}_k \quad (5.52)$$

und für die Koeffizienten  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{F}$  analog, wobei  $\mathbf{f}_o$  entweder die Gütefunktion  $J$ , die Eigenwertbeschränkungen  $z_\gamma$  oder die nichtlinearen Nebenbedingungen  $\mathbf{z}_=$  bzw.  $\mathbf{z}_\leq$  bezeichnet.

Werden nun die drei Optimierungsvariablen  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{f}$  zum Optimierungsvektor

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T \quad \mathbf{k}^T \quad \mathbf{f}^T]^T \quad (5.53)$$

zusammengefasst, kann das nichtlineare Problem in der für viele Standardalgorithmen der nichtlinearen Optimierung geeigneten Form

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\substack{\mathbf{x}: \text{Gl. (5.51)} \\ \mathbf{z}_=(\mathbf{x})=\mathbf{0} \\ \mathbf{z}_\leq(\mathbf{x})\leq\mathbf{0}}} (J(\mathbf{x})) \quad (5.54)$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} z_{11}(\lambda_{11}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ w_{\varpi\rho} z_{\varpi\rho}(\lambda_{\varpi n}(\mathbf{x})) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

geschrieben werden. Während die Sortierung der Eigenwerte bei Verwendung im Gütemaß prinzipiell beliebig ist, kann es gerade zu Beginn der Optimierung bei einer unzulässigen Startlösung oder großen Schrittweiten dazu kommen, dass in den Beschränkungen bedingt durch das Vertauschen zweier Eigenwerte im Vergleich zur letzten Iteration große Gradienten entstehen können. Wenn der aktuelle Lösungskandidat sich dagegen in der Nähe der optimalen Lösung befindet, werden die Änderungen in den Positionen der Eigenwerte im Allgemeinen nur noch klein sein, sodass dann eine wie auch immer geartete Sortierung der Eigenwerte die Position der einzelnen Komponenten der nichtlinearen Nebenbedingung nicht mehr beeinflusst. Für den gegenteiligen Fall sind weitere Untersuchungen nötig, bspw. um die Konvergenz zu Beginn der numerischen Optimierung zu verbessern.

Das so formulierte Optimierungsproblem kann mit der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programmbibliothek mit den in Tabelle 5.1 angegebenen Optimierungsverfahren gelöst werden, wobei für unbeschränkte Optimierungsalgorithmen die Nebenbedingung Gl. (5.9) nur mittels einer Straffunktion in das Problem eingeht und die Einhaltung weiterer u. U. nichtlinearer Zwangsbedingungen vom verwendeten Optimierungsalgorithmus und dessen Fähigkeiten zu deren Berücksichtigung abhängt.

|        | beschränkt   | unbeschränkt  | Mehrzieloptimierung                           |
|--------|--|---|---|
| lokal  | fmincon [155]<br>IPOPT [221]<br>SNOPT [66]<br>NLOPT [90]<br>SLQP-GS [42]<br>SolvOpt [104]<br>KSOPT [230] | fminunc [25]<br>fminsearch [106]<br>minFunc [180]<br>NLOPT<br>minimize [161]<br>SolvOpt<br>KSOPT  | fminimax<br><br><br><br><br><br>KSOPT         |
| global | NLOPT<br>GlobalSearch [211]<br>genetischer Algorithmus<br><br>Patternsearch                              | NLOPT<br>MultiStart<br>genetischer Algorithmus<br>Particleswarm<br>Simulated Annealing<br>Patternsearch<br>PPPBox [195]<br>SC-BFGS [41] | genetischer Algorithmus<br><br><br><br>PPPBox |

Tabelle 5.1: Zur Lösung von Gl. (5.54) verwendbare Algorithmen.

#### 5.2.4 Ausgangsreglerformulierungen

Damit ein Regler in der für den robusten Polbereichsvorgabeentwurf geeigneten Form vorliegt, muss er als statisches Ausgangsreglerproblem formuliert werden [121]. Dies ist nach [200] immer möglich. Dazu wird die Systembeschreibung um die Dynamik des Reglers erweitert und die

Eingangs- und Ausgangsmatrix entsprechend der Struktur des gewünschten Reglers gewählt. Im Folgenden ist diese erweiterte Struktur für den diskreten PID-Regler, der im Rahmen dieser Arbeit entworfen werden soll, angegeben.

Für den diskreten PID-Regler erhält man mit der zusätzlichen Verzögerung

$$\mathbf{x}_{D,k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \quad (5.55)$$

zur Bildung des D-Anteils und dem Regelgesetz

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_I \mathbf{x}_{I,k} + \mathbf{K}_P (\mathbf{w}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k) + \mathbf{K}_D (\mathbf{w}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k - \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{x}_{D,k}) \quad (5.56)$$

die erweiterte Strecke

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{I,k+1} \\ \mathbf{x}_{D,k+1} \end{bmatrix} &= \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_g} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_g} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & -\mathbf{K}_I & -\mathbf{K}_D \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_g} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_g} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{I,k} \\ \mathbf{x}_{D,k} \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_g} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_P \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_D \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_g} \mathbf{w}_k . \end{aligned} \quad (5.57)$$

## 5.3 Robuste Polbereichsvorgabe für ein Einradmodell

Im Folgenden wird das Einradmodell als parametervariantes System betrachtet, wobei die Parameter des Einradmodells aus den Schedulingparametern Schlupf und Geschwindigkeit sowie aus den Lagen des Aktorpoles und der stationären Verstärkung des Aktorteilsystems bestehen. Dafür wird mittels der in Abschnitt 5.2 vorgestellten Methode der robusten Polbereichsvorgabe der gesuchte PID-Regler entworfen.

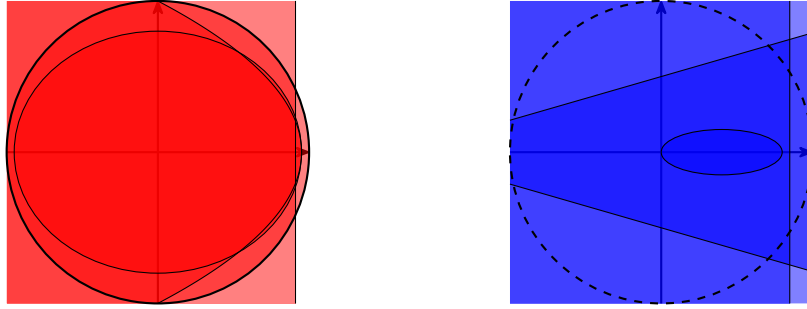
Wird das in Abschnitt 3.3.2.1 beschriebene Verfahren mit der dafür in dieser Arbeit entwickelten Toolbox [E5] mit dem Modell Gl. (2.36) für den diskreten PID-Regler Gl. (5.56), d. h. auf die erweiterte Stecke Gl. (5.57), angewandt, so lassen sich die im Folgenden beschriebenen Ergebnisse erzielen. Dazu werden als Randfunktionen zur Beschreibung des notwendigen Polgebietes  $\Gamma_1$

$$\mathbf{z}_1(\sigma, \omega) = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \omega^2 - 0,999999^2 \\ \frac{(\sigma-1)^2}{0,05^2} - \frac{\omega^2}{0,14^2} + 1 \\ \sigma - 0,91 \\ \frac{\sigma^2}{0,95^2} + \frac{\omega^2}{0,8^2} + 1 \\ -\frac{(\sigma-1)^2}{0,065^2} - \frac{\omega^2}{0,05^2} - 1 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

und

$$z_2(\sigma, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{(\sigma-0,4)^2}{0,4^2} + \frac{\omega^2}{0,15^2} + 1 \\ 5(\sigma - 0,85) \\ -0,2888\sigma - 0,5 \\ 0,2888\sigma + 0,5 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

zur Beschreibung des erwünschten Polgebietes  $\Gamma_2$ , das Lösungen mit besser gedämpften und schnelleren Eigenwerten belohnt, verwendet, die in Abbildung 5.5 dargestellt sind. Das nicht ein-



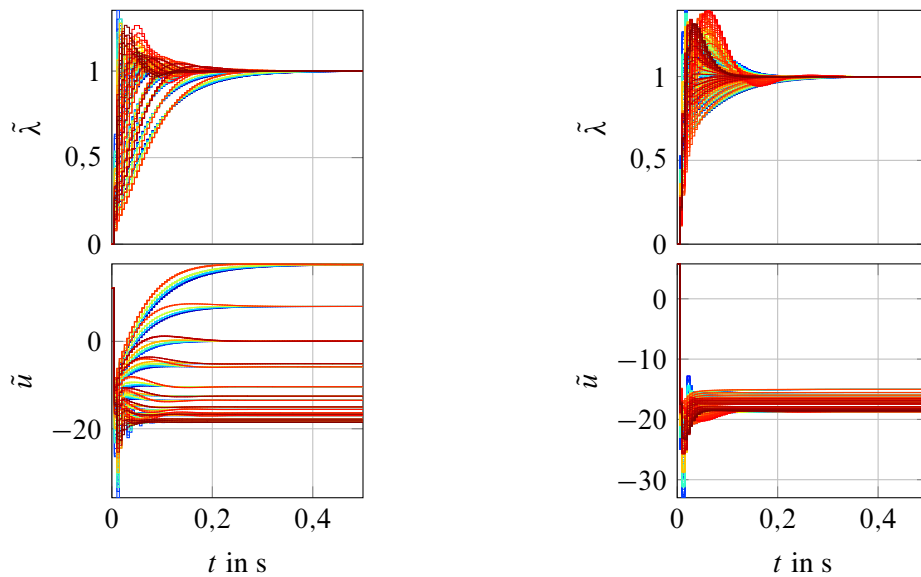
(a) Notwendiges Polgebiet  $\Gamma_1$  bei neun Geschwindigkeitsintervallen. (b) Optionales Polgebiet  $\Gamma_2$  bei neun Geschwindigkeitsintervallen.

Abbildung 5.5: Polgebiet für den Entwurf der Schlupfregler bei neun Geschwindigkeitsintervallen.

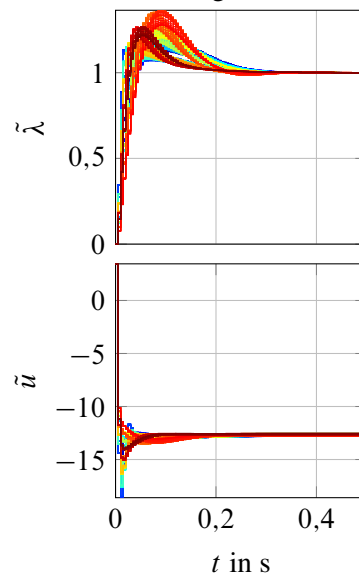
gezeichnete Komplement der Ellipse um 1 wird verwendet, um die langsamen Eigenwerte auf der reellen Achse weiter nach links zu verschieben und damit schneller zu machen und die Ellipse um den Ursprung sowie die Halbebenen, die teilweise auch als harte Nebenbedingung anstatt im Gütemaß verwendet wurden, dienen zur Verringerung des Imaginärteils bzw. zur Erhöhung der Dämpfung in den Bereichen, die von der Hyperbel zur Vorgabe der Minstdynamik und Minstdämpfung nicht sinnvoll bewertet werden. Als Multi-Modelle werden Modelle gewählt, die nach äquidistanter Abtastung des Parameterraumes bestehend aus den Aktorverstärkungen  $a_B$  und Aktorpollagen  $s_B$  sowie dem Schlupf  $\lambda$  und der Geschwindigkeit  $v$  entstehen. Das System wird analog zu Abschnitt 2.6 mit Gl. (2.63) normiert.

Die sich in den verschiedenen Arbeitsbereichen ergebenden Eigenwerte der geschlossenen Regelkreise sind in Tabelle 5.2 dargestellt und es ist zu erkennen, dass es für den linken Schlupfbereich sowie den rechten Schlupfbereich für entsprechend große Geschwindigkeiten immer möglich ist, die Eigenwerte aller Multi-Modelle in das gewünschte Gebiet  $\Gamma_2$  zu legen, während dies für den mittleren Schlupfbereich nur bei höheren Geschwindigkeiten erreichbar ist. Dies ist vor allem der Verwendung der Methode aus [214], die in [A14] implementiert wurde, anstatt der Berechnung der Eigenwertableitung über den RAYLEIGH-Koeffizienten zu verdanken und da anstatt der Normierung der Eigenvektoren auf Länge 1 die ebenfalls in [214] vorgeschlagene Normierung auf das betragsmäßig größte Produkt aus den Einträgen der Links- und Rechtseigenvektoren durchgeführt wird, wodurch sich das numerische Lösungsverhalten des Polbereichsvorgabeproblems verbessert. In Abbildung 5.6 sind beispielhaft die Sprungantworten der drei Schlupfbereiche für das Geschwindigkeitsintervall  $v \in [50 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 62,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}]$  dargestellt und es lässt sich beobachten, dass die

Anforderung nach stationärer Genauigkeit sowie der geforderten Ausregelzeit und Überschwingen eingehalten werden können. Für die nicht gezeigten Regler im Geschwindigkeitsbereich zwischen



(a) Sprungantworten für den stabilen Bereich (b) Sprungantworten für einen Bereich um das Maximum der  $\mu$ -Schlupf-Kurve im Geschwindigkeitsbereich  $[50 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 62,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}]$ .



(c) Sprungantworten für den instabilen Bereich der  $\mu$ -Schlupf-Kurve im Geschwindigkeitsbereich  $[50 \frac{\text{km}}{\text{h}}, 62,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}]$ .

Abbildung 5.6: Simulation der Sprungantworten der geregelten Strecken für den Entwurf der Schlupfregler.

$10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und  $125 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sehen die Sprungantworten ähnlich aus wie für den gezeigten Bereich, jedoch ist die Regelgüte für höhere Geschwindigkeiten höher und die stabilisierenden Regler einfacher zu finden.

Es hat sich gezeigt, dass sich das Problem besonders effizient mit IPOPT lösen lässt, aber auch bei der Formulierung als sequentielles quadratisches Problem (SQP) mit dafür geeigneten Verfahren, wie sie bspw. in `fmincon` [122] und SNOPT implementiert sind [65], sehr gute Ergebnisse zu erzielen sind. Darüber hinaus kann eine recht gute Lösung gewonnen werden, wenn dem gradientenfreien Algorithmus COBYLA aus der NLOPT Bibliothek ein beliebiger Startwert für die Optimierung vorgegeben wird und das Resultat des Optimierungslaufes als Startwert für eine weitere Optimierung mit einem der genannten Optimierer gelöst wird [[154] und [156]]. Die Lösungen, die sich aus der Lösung des beschränkten Problems ergeben, sind fast immer geeigneter als diejenigen, die aus der Lösung des unbeschränkten Problems entstehen, da sich bei diesen der Optimierungsalgorithmus selbst um eine sinnvolle Gewichtung der Beschränkungen mittels Straffunktionen kümmert.

Da, wie Abbildung 2.12 zu entnehmen ist, für Schlüpfen im instabilen Bereich und kleine Geschwindigkeiten sowohl die Diskretisierungsnullstelle nichtminimalphasig wird, als auch durch die reziproke Abhängigkeit der Einradmodellpollage von der Geschwindigkeit der instabile Eigenwert sehr weit nach rechts wandert, lässt sich das System für diese Fälle mit einem PID-Regler strukturell nicht stabilisieren. Dies lässt sich der schematischen Wurzelortskurve in Abbildung 5.7 entnehmen, da die Verzweigungspunkte der zum instabilen Eigenwert gehörenden Äste stets außerhalb des Einheitskreises liegen und die Wurzelorte näherungsweise auf einer Kreisbahn um den Einheitskreis laufen und diesen im Gegensatz zu hohen Geschwindigkeiten nicht mehr schneiden. Unabhängig von der Wahl der u. U. komplex konjugierten Reglernullstellen, lässt sich bei Geschwindigkeiten von  $v \leq 1,25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  der Ast des instabilen Eigenwertes auf der rechten Seite nicht so verbiegen, dass er wenigstens für einzelne Verstärkungen durch den Einheitskreis laufen würde.

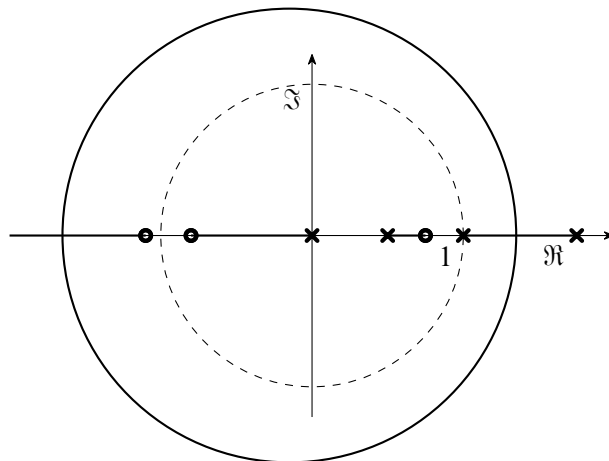


Abbildung 5.7: Schematische Wurzelortskurve für die instabilen Multi-Modelle mit PID-Regler für kleine Geschwindigkeiten.

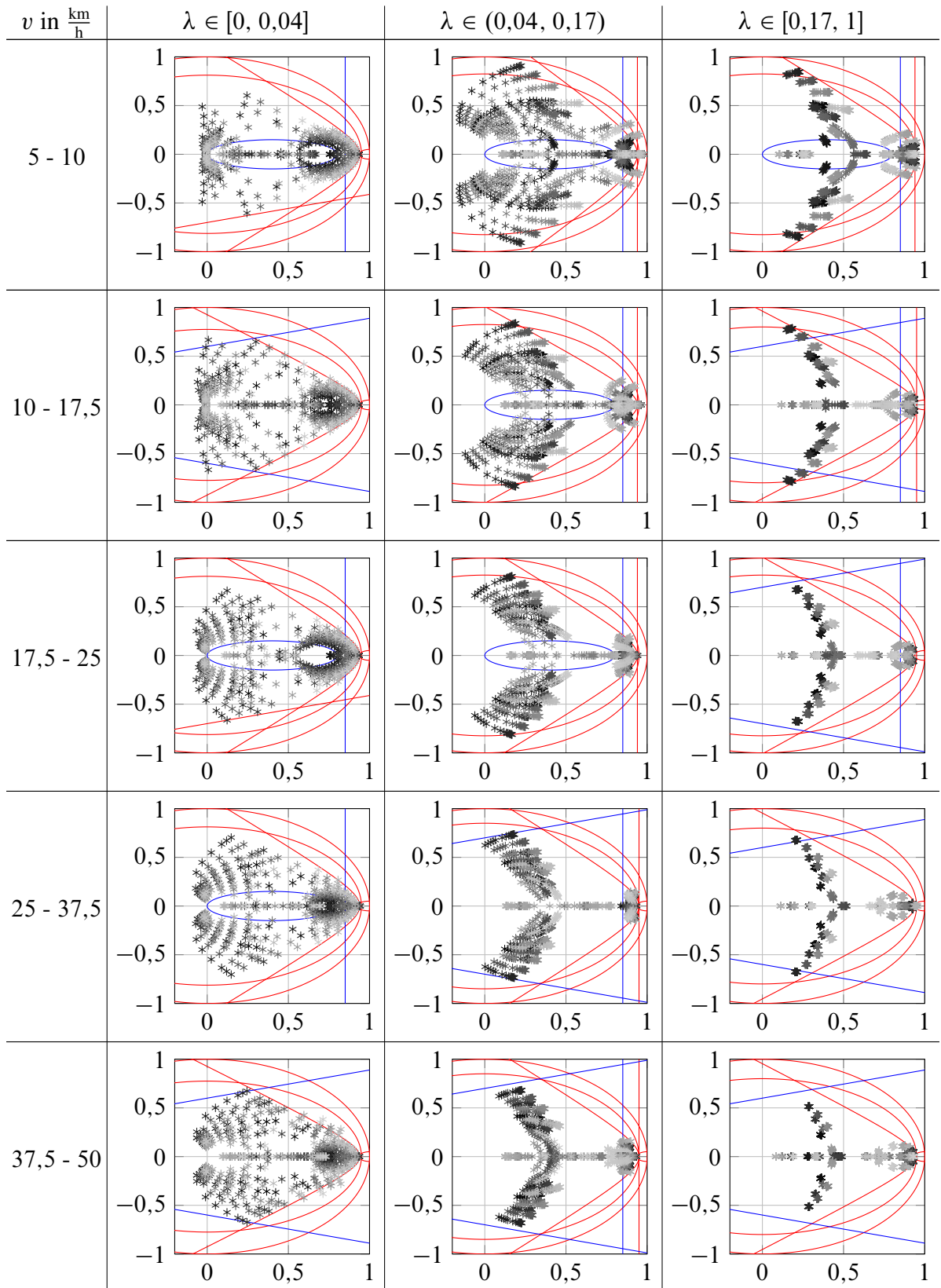


Tabelle 5.2: Eigenwerte für neun Geschwindigkeitsbereiche.

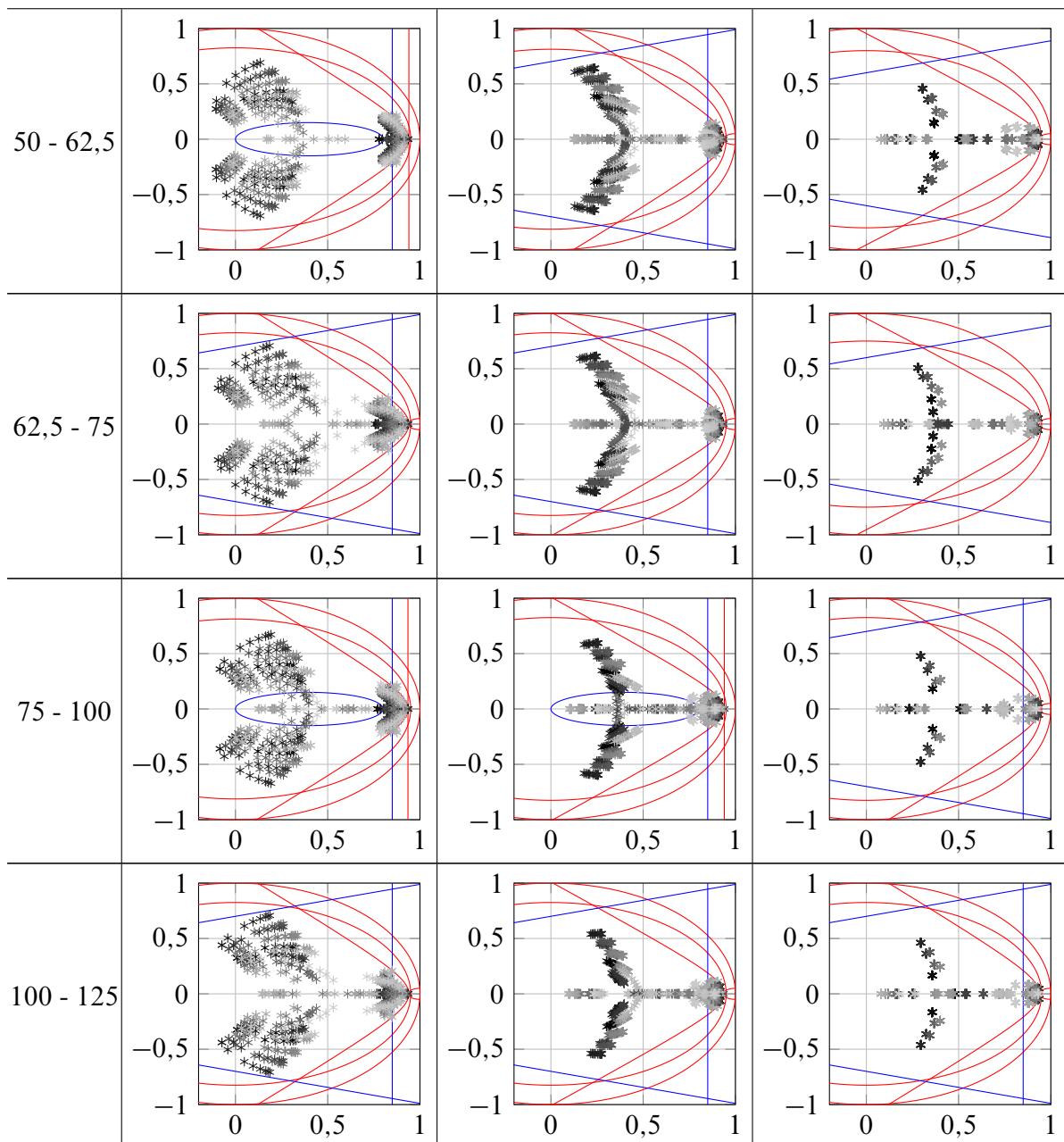


Tabelle 5.2: Eigenwerte für neun Geschwindigkeitsbereiche.

Für Totzeiten von bis zu vier Schritten, deren Eigenwerte hier der Übersichtlichkeit halber nicht angegeben werden, lassen sich in den meisten Bereichen mit ausreichend hoher Fahrzeuggeschwindigkeit stabilisierende Regler finden, jedoch lässt sich beobachten, dass mit steigender Totzeit die Einhaltung des geforderten Polgebietes schwieriger bis unmöglich wird und auch selbst die Stabilisierung teilweise nicht mehr möglich ist, da die Robustheitsanforderungen zusammen mit den dynamischen Anforderungen zu einschränkend sind [218].



## 5.4 Praktische Aspekte der Reglerimplementierung

Damit der vorgeschlagene Regler auch in der Praxis angewendet werden kann, sind bei dessen Implementierung verschiedene Punkte zu berücksichtigen, die im Folgenden angesprochen werden sollen.

### 5.4.1 Stoßfreies Umschalten

Bedingt durch das Umschalten zwischen verschiedenen Reglern im Rahmen der Gain-Scheduling-Strategie werden bei Außerachtlassung geeigneter Gegenmaßnahmen im Allgemeinen Sprünge in der Stellgröße entstehen, wenn zwischen zwei Reglern umgeschaltet wird. Um dies zu verhindern und eine stetige Stellgröße zu erhalten, wird die folgende Modifikation an den Anfangswerten der Reglerzustände vorgenommen: Der I-Anteil kann unter der Voraussetzung, dass er über

$$\mathbf{u}_I(t) = \int_0^t \mathbf{K}_I \mathbf{e}(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}_{1,k+1} = \mathbf{u}_{1,k} + \mathbf{K}_I \mathbf{e}_k \quad (5.60)$$

mit der Regelabweichung  $\mathbf{e}_k = \mathbf{w}_k - \mathbf{y}_k$  implementiert wird, über die Formel

$$\mathbf{u}_{1,i}^+ = \mathbf{u}_{1,i-1}^- + \mathbf{u}_{1,i-1}^- - \mathbf{u}_i^- \quad (5.61)$$

für den zu aktivierenden Regler  $i$  und den zuletzt aktiven Regler  $i-1$  festgesetzt werden, wodurch die resultierende Stellgröße stetig bleibt [12, S. 106 f.]. Dabei bestimmt sich der neue Wert des I-Anteils  $\mathbf{u}_{1,i}^+$  des zu aktivierenden Reglers  $i$  aus den Stellgrößen und dem I-Anteil des zuletzt aktiven Reglers  $i-1$  und der Stellgröße des zu aktivierenden Reglers derart, dass die Summe aus Stellgröße und I-Anteil vor und nach der Umschaltung konstant bleibt.

### 5.4.2 Anti-Windup-Maßnahmen

Da es beim Vorhandensein von Stellgrößenbeschränkungen dazu kommen kann, dass die vom Regler geforderte Stellgröße diese verletzt und damit nicht in voller Höhe auf die Strecke wirken kann, ist bei der praktischen Implementierung des Reglers eine geeignete Methode anzuwenden, die die dadurch entstehende Abweichung von Modell und Strecke berücksichtigen kann. Diese Abweichung äußert sich bei Reglern mit I-Anteil vor allem darin, dass die Regelabweichung, die bei Verletzung der Stellgrößenbeschränkung nicht weiter abgebaut werden kann, immer weiter aufintegriert wird. Um dieses Aufintegrieren der Regelabweichung und den damit einhergehenden Windup-Effekt zu verhindern, wenn der Aktor in seine Begrenzung gelaufen ist, werden die Regler mit der in Abbildung 5.8 dargestellten Anti-Windup-Maßnahme ausgestattet. Diese besteht darin, ein Modell des Aktors mit Stellgrößenbeschränkung zum Regler hinzuzufügen und die Differenz zwischen dessen Ein- und Ausgang über eine geeignete Verstärkung  $K_T$  zum I-Anteil zurückzuführen. Der Verstärkungsfaktor  $K_T$  kann dabei über die Faustformel

$$K_T = \sqrt{\frac{K_I}{K_D}} \quad (5.62)$$

ausgelegt werden [12, S. 84]. Problematisch daran ist allerdings die Bestimmung des Verstärkungsfaktors  $K_T$ , die heuristisch erfolgen muss und an den jeweiligen Regler angepasst werden muss, während bspw. das Anwenden der sog. Beobachertechnik, bei der der Regler in einen (reduzierten) Beobachter mit Zustandsrückführung umgeformt wird, systematisch einen Windup-Effekt im Regler verhindern könnte [77, S. 24–41]. Basierend auf der Beobachertechnik kann mit der in [144] und [145] vorgestellten Methode über die Minimierung einer  $L_2$ -Norm der Abweichung des Systems mit Windup zum ohne Anti-Windup ausgelegten linearen System die Verstärkung so ausgelegt werden, dass sich das System mit Anti-Windup Maßnahmen möglichst so wie das lineare System verhält. Alternativ kann auch das sog. *bedingte Integrieren* verwendet werden, bei

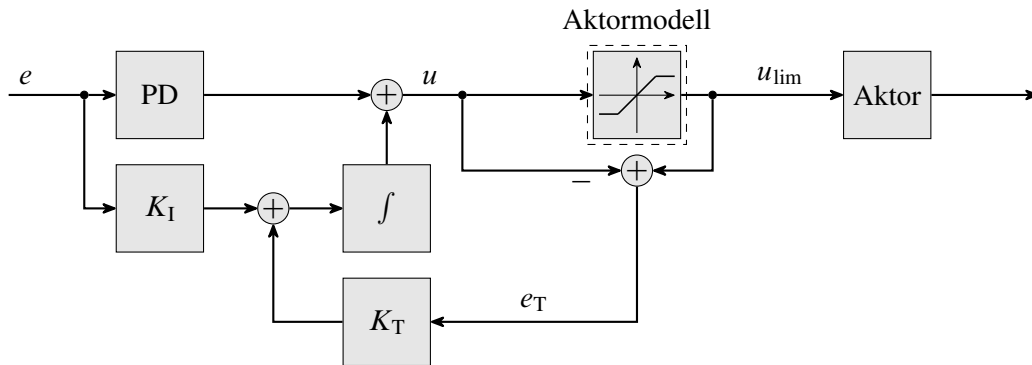


Abbildung 5.8: Anti-Windup Maßnahme bei Reglern mit I-Anteil.

dem der I-Anteil angehalten wird, wenn die Stellgrößenbeschränkung erreicht ist und ein weiteres Integrieren zu einer größeren Verletzung der Stellgrößenbeschränkung führen würde [12, S. 89].

## 5.5 Stabilitätsanalyse des geschlossenen Regelkreises

Im folgenden Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Stabilität der gefundenen Regler auch für diejenigen Parameterkombinationen, die beim Entwurf über Multi-Modelle nicht berücksichtigt wurden, zeigen lässt und welche Schritte und Werkzeuge hierfür geeignet sind. Zuerst wird dazu die Strecke als ein parametervariantes System modelliert und anschließend geeignete Stabilitätsbedingungen angegeben, mit denen sich eine Aussage über die Stabilität der nicht berücksichtigten Kombinationen treffen lässt. Eine solche Aussage lässt sich aus der LYAPUNOV-Stabilitätstheorie ableiten.

Zur Beschreibung der Unsicherheit wird Gl. (2.36) in

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \dot{\lambda} \\ \Delta \dot{p}_B \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_V} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q_2 q_3 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{r \frac{\partial c^*}{\partial p_B}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q_3 \right) \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta p_B \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q_4 \Delta p_{B, \text{soll}} \end{aligned} \quad (5.63a)$$

mit

$$q_1 = \frac{\partial h}{\partial p_B} \in [q_1, \bar{q}_1] \quad (5.63b)$$

$$q_2 = \mu(\lambda) - m_v \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \left( \frac{1 - \lambda}{m_v} + \frac{r^2}{J} \right) \in [\underline{q}_2, \bar{q}_2] \quad (5.63c)$$

$$q_3 = \frac{1}{v} \in [\underline{q}_3, \bar{q}_3] \quad (5.63d)$$

$$q_4 = \frac{\partial h}{\partial p_{B,\text{soll}}} \in [\underline{q}_4, \bar{q}_4] \quad (5.63e)$$

zerlegt. Da das hergeleitete Modell Gl. (5.63) affin in den unsicheren Parametern  $q_1, q_2, q_3$  und  $q_4$  ist, kann dies zur polytopen Unsicherheitsbeschreibung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \underline{q}_2 \underline{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \underline{q}_3 \\ 0 & \underline{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \underline{q}_2 \underline{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \underline{q}_3 \\ 0 & \bar{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_2 + \dots \quad (5.64a)$$

$$\dots + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \bar{q}_2 \underline{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \underline{q}_3 \\ 0 & \underline{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_3 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \bar{q}_2 \underline{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \underline{q}_3 \\ 0 & \bar{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_4 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \underline{q}_2 \bar{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \bar{q}_3 \\ 0 & \underline{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_5 + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \underline{q}_2 \bar{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \bar{q}_3 \\ 0 & \bar{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_6 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \bar{q}_2 \bar{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \bar{q}_3 \\ 0 & \underline{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_7 + \begin{bmatrix} \frac{F_z}{m_v} \bar{q}_2 \bar{q}_3 & r \frac{\partial c^*}{\partial p_B} \bar{q}_3 \\ 0 & \bar{q}_1 \end{bmatrix} \alpha_8$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{q}_4 \end{bmatrix} \alpha_9 + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} \alpha_{10} \quad (5.64b)$$

mit

$$\sum_{i=1}^{10} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (5.64c)$$

umgeschrieben werden, bei der die Unsicherheit durch Verwendung der Intervallgrenzen als Eckmodelle in polytoper Form beschrieben wird.

Um aus der polytopen Unsicherheitsbeschreibung Gl. (5.63) eine unsichere diskrete Systembeschreibung zu gewinnen, die keine unendliche Reihe enthält, existieren verschiedene Diskretisierungsverfahren, die überblicksartig in [213] angegeben sind. Das Verfahren mit dem kleinsten Diskretisierungsfehler, besteht darin, das linear parametervariante System mit einem Halteglied 0-ter Ordnung zu diskretisieren und dabei die varianten Parameter als für einen Abtastschritt konstante Parameter zu betrachten, wodurch das bereits in Gl. (2.62) angegebene Systemmodell entsteht, das jedoch nicht mehr affin in den unsicheren Parametern ist, sondern nichtlinear.

Alternativ kann auch die Reihenentwicklung von Gl. (2.62) nach  $N$  Gliedern abgebrochen werden, um das System näherungsweise zu diskretisieren. Für  $N = 1$  entspricht dies einer Diskretisierung mit dem expliziten EULER-Verfahren und das entstehende System ist nach wie vor affin in den unsicheren Parametern, während für  $N > 1$  eine polynomiale Abhängigkeit von den unsicheren Parametern entsteht. Da die polynomiale Abhängigkeit von den unsicheren Parametern eine Hürde für die Stabilitätsuntersuchung darstellt, wird das parametervariante System in der Darstellung Gl. (5.64) zugrunde gelegt, da so der gesamte Parameterraum durch eine Konvexkombination der Eckpunkte dargestellt werden kann und die bei der Diskretisierung entstehende polynomiale Parameterabhängigkeit homogen in den unsicheren Parametern ist.

Allgemein lässt sich das zu diskretisierende polytope bzw. polynomial parametervariante System als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u} \quad (5.65a)$$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{B}_i \mathbf{u} \quad (5.65b)$$

mit  $\boldsymbol{\alpha}$  aus dem Einheitssimplex

$$\Lambda_N = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (5.65c)$$

darstellen, wobei polynomial parametervariante Systeme, deren unsichere Parameter  $\mathbf{p}$  nicht in einem Einheitssimplex liegen, durch Einführen einer geeigneten Parametrierung bzw. geeigneter Wahl der Eckpunkte analog zur Umformung von Gl. (5.63) in Gl. (5.64) in Systeme mit unsicheren Parametern  $\boldsymbol{\alpha}$  im Einheitssimplex überführt werden können. Wird die Darstellung aus Gl. (5.65) nun in die TAYLOR-Reihe eingesetzt, so erhält man nach [19, S. 6398]

$$\mathbf{A}^d(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + T\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{T^2}{2}\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^2 + \dots + \frac{T^l}{l!}\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^l \quad (5.66a)$$

$$= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(l)} \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \quad (5.66b)$$

wobei für die Menge  $\mathcal{K}(l)$  mit  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(l)$

$$\mathcal{K}(l) = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^N : \sum_{j=1}^N k_j = l, k_j \geq 0 \right\} \quad (5.67)$$

und  $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N}$  gilt. Für die Matrix  $\mathbf{B}^d$  erhält man analog

$$\mathbf{B}^d(\boldsymbol{\alpha}) = T\mathbf{B} + \frac{T^2}{2}\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{T^3}{6}\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^2\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) + \dots + \frac{T^l}{l!}\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^{l-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5.68a)$$

$$= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(l)} \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}. \quad (5.68b)$$

Mit den Matrizen  $\mathbf{A}^d$  aus Gl. (5.66) und  $\mathbf{B}^d$  aus Gl. (5.68) lässt sich das diskretisierte System als

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}^d(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^d(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{A}^d(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{B}^d(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}_k \quad (5.69)$$

mit dem Diskretisierungsfehler  $\Delta\mathbf{A}^d(\boldsymbol{\alpha})$  und  $\Delta\mathbf{B}^d(\boldsymbol{\alpha})$  beschreiben, der für alle  $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_N$  beschränkt ist. Eine einfach anzuwendende MATLAB-Implementierung von Gl. (5.66) und Gl. (5.68) ist mit der Toolbox ROLMIP vorhanden [3].

Mit der in [19] und [20] vorgestellten Methode kann für das resultierende System über einen LMI-Ansatz ein Regler ausgelegt werden, der garantiert, dass der diskrete Regler die kontinuierliche Strecke stabilisieren kann, wenn die Fehlerschranke der Diskretisierung klein genug ist.

Um zu ermitteln, was im vorliegenden Fall „klein genug“ bedeutet, wird der Diskretisierungsfehler genauer untersucht. Für das vorliegende System ist in Abbildung 5.9 das Konvergenzverhalten der Exponentialfunktion für das 11-Element der polynomialen Unsicherheitsbeschreibung im Vergleich mit der analytischen Diskretisierung dargestellt und es lässt sich erkennen, dass für einen relativen Diskretisierungsfehler von 1% bei Reihenabbruch für  $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bereits mindestens 16 Reihenglieder und mit weiter sinkender Geschwindigkeit erheblich mehr benötigt werden, was bei  $N = 8$  Eckmodellen zu  $\frac{(N+16-1)!}{16!(N-1)!} = 245.157$  Monomen, d. h. neuen Eckmodellen, in der diskretisierten polynomialen Systemdarstellung führt [3, S. 3]. Damit das diskretisierte Modell mit Unsicherheit jedoch möglichst nahe an der analytisch berechneten diskreten Strecke liegt, muss der Fehler klein sein, da bspw. bei  $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und  $i = 2$  oder  $i = 4$  ein 11-Element entstehen würde, das 300 mal größer ist als die analytische Lösung und somit ein völlig anderes System beschreibt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Berechnung der polynomialen Systemmatrix mittels ROLMIP bereits für den Koeffizienten  $\mathbf{A}^9$  mehr als einen Tag dauert, obwohl die internen Routinen von ROLMIP umgeschrieben wurden, um eine kürzere Laufzeit und weniger Speicherverbrauch zu erreichen, und das Verfahren zur Diskretisierung über die Reihenentwicklung daher nicht anwendbar ist. Zur Überprüfung der Stabilität des Reglers für die entstehende Systembeschreibung müssten darüber hinaus zahlreiche LMIs aufgestellt und gelöst werden, was für die dann zu erwartende Problemdimension nicht in sinnvoller Rechenzeit erreicht werden kann, sodass eine andere Methode zur Diskretisierung der Unsicherheit verwendet werden muss.

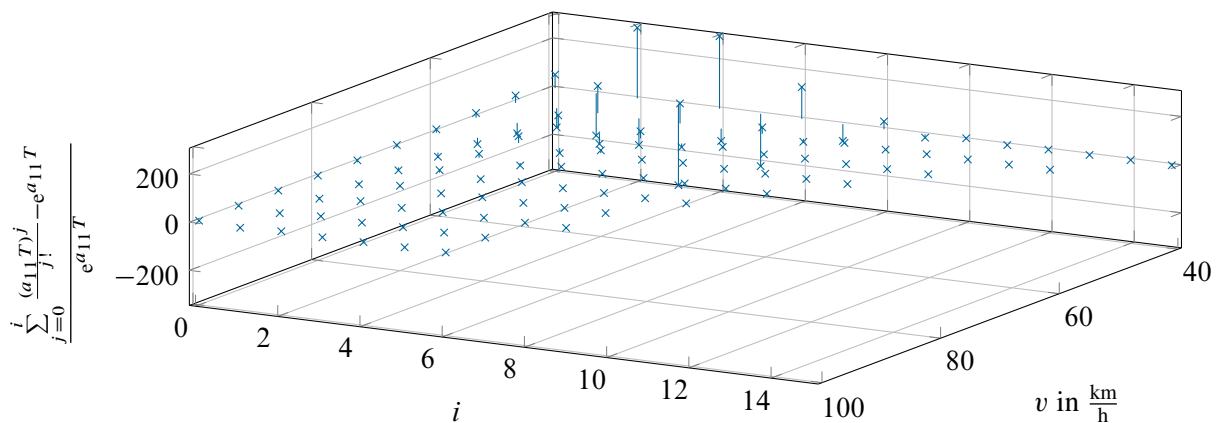


Abbildung 5.9: relativer Diskretisierungsfehler für unterschiedliche Geschwindigkeiten bei verschiedenen Reihenlängen.

Dazu wird analog zur in [6, S. 46–59] beschriebenen Methode des „polytopic covering“ bzw. Rasterns eine sehr feine Abtastung der Parameter, die in die Nichtlinearität eingehen, verwendet und das resultierende System diskretisiert, um die diskretisierte Unsicherheit möglichst genau vorliegen zu haben und anschließend eine Reduktion der Anzahl der Eckpunkte des entstehenden Gebietes durchzuführen. Da die wesentliche Nichtlinearität der diskreten parametervarianten Systemdarstellung in  $a_{11}$  und  $a_{12}$  von  $q_2$  und  $q_3$  abhängt, während die Nichtlinearität in  $a_{22}$  und  $b_2$  in Abhängigkeit von  $q_1$  bzw.  $q_4$  eine konvexe Funktion darstellt und es damit ausreichend ist, die Intervallgrenzen  $\underline{q}_1$  und  $\bar{q}_1$  bzw.  $\underline{q}_4$  und  $\bar{q}_4$  mit der Nichtlinearität zu transformieren, wird die Abtastung in  $q_2$  und  $q_3$  durchgeführt, wobei als Ersatzgröße für  $q_2$   $\lambda$  verwendet wird, da dadurch nur

physikalisch sinnvolle Werte für  $q_2$  in die Systembeschreibung eingesetzt werden. Für die verwendeten Rasterpunkte wird eine konvexe Hülle mittels der Toolbox MPT3 [76] ermittelt und deren Rand durch Anwendung des DOUGLAS-PEUKER-Algorithmus nach [51] um im Sinne einer gewissen Toleranz überflüssige Punkte reduziert. Anschließend wird das reduzierte Polytop um die Toleranz aufgebläht, sodass sich für die Unsicherheit und deren Näherung die in Abbildung 5.10 gezeigte Darstellung ergibt, bei der die Näherung fast identisch zur abzudeckenden Unsicherheit ist, da die dargestellten Flächen nahezu identisch sind. Aus den so ermittelten Rasterpunkten

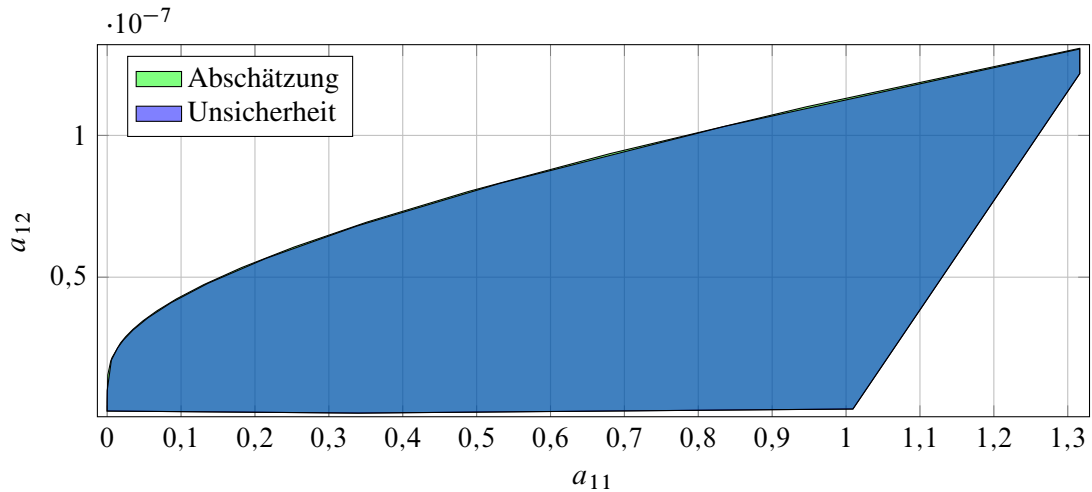


Abbildung 5.10: Polytope Unsicherheit und Abschätzung der Unsicherheit für den gesamten Arbeitsraum  $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ .

können nun die Eckpunkte des Einheitssimplexes der diskretisierten Systemdarstellung ermittelt werden, deren Anzahl je nach betrachtetem Schlupf- und Geschwindigkeitsintervall zwischen 16 und 344 liegt. Für diese kann nun mit der Stabilitätstheorie nach LJAPUNOV überprüft werden, ob der gefundene Regler zum einen die unsichere Strecke stabilisiert und zum anderen, ob das gewünschte Polgebiet für alle möglichen Parameterkombinationen und der daraus resultierenden Unsicherheit erreicht wird.

Dazu wird das Polgebiet als LMI-Region

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12}z + \mathbf{M}_{12}^T z^H \preceq \mathbf{0}\} \quad (5.70)$$

mit symmetrischem  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$  beschrieben. In dieser Darstellung lassen sich bspw. die zur reellen Achse symmetrischen Polgebiete aus Abschnitt 5.2 als

$$0 + z + z^H \preceq 0 \quad (5.71)$$

für die linke  $s$ -Halbebene,

$$\begin{bmatrix} -r & -m \\ -m & -r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z^H \preceq \mathbf{0} \quad (5.72)$$

für einen Kreis um  $m$  mit Radius  $r$  und eine Polyellipse, wie in [138] angegeben, angeben [34, S. 2258]. Die Ellipse Gl. (5.13), die zur näherungsweisen Vorgabe der gewünschten Dämpfung

verwendet wird, besitzt nach [172, S. 166] die LMI-Darstellung

$$\begin{bmatrix} -2a & -2x_0 \\ -2x_0 & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{a}{b} \\ 1 - \frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 1 - \frac{a}{b} \\ 1 + \frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} z^H \preceq \mathbf{0} \quad (5.73)$$

mit der Verschiebung  $x_0$  entlang der reellen Achse und der linke Ast der zur Näherung des herzförmigen Gebietes verwendeten Hyperbel besitzt die LMI-Darstellung

$$\begin{bmatrix} x_0 + a & 0 \\ 0 & x_0 - a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{a}{2b} \\ \frac{a}{2b} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{2b} \\ -\frac{a}{2b} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} z^H \preceq \mathbf{0}. \quad (5.74)$$

In [172] sind darüber hinaus weitere Möglichkeiten zur Approximation des herzförmigen Gebietes gewünschter Dämpfung mittels linearer Matrixungleichungen angegeben, die an dieser Stelle jedoch nicht verwendet werden.

Die Eigenwerte der parametervarianten Matrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})$  liegen für alle  $\boldsymbol{\alpha}$  aus dem Einheitsimplex  $\Lambda_N$  in der LMI-Region  $\mathcal{D}$ , wenn

$$\mathbf{M}_{11} \otimes \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{M}_{12} \otimes (\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})) + \mathbf{M}_{12}^T \otimes (\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})) \preceq \mathbf{0} \quad (5.75)$$

mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$  gilt [150, S. 23]. Durch Verwendung des Einheitsimplexes kann diese Bedingung äquivalent als Menge von linearen Matrixungleichungen formuliert werden, wie bspw. in [141], [142] und [143] nachgelesen werden kann, und es ergeben sich die Stabilitätsaussagen aus Tabelle 5.3 für die verschiedenen Bereiche des Gain-Scheduling. Für eine tiefer gehende Beschäftigung mit linearen Matrixungleichungen und deren Lösungsmethoden sei bspw. auf [53] und [179] verwiesen. Das Aufstellen der zugehörigen linearen Matrixungleichungen wird dabei von ROLMIP übernommen und das entstehende Problem anschließend mittels YALMIP [116] und den LMI-Lösungsalgorithmen MOSEK [130] und SDPT3 [207] gelöst. Wie zu erkennen ist, werden für hohe Geschwindigkeiten sowohl stabile Regelungen erreicht als auch die gewünschte Dämpfung erzielt, während im mittleren Schlupfintervall bei niedrigen Geschwindigkeiten ab etwa  $37,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  die gewünschte Dämpfung nicht mehr erreicht werden kann und unterhalb  $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  bzw. ab  $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  im gesamten instabilen Schlupfbereich auch keine Stabilität mehr gewährleistet werden kann. Dies deckt sich mit der Beobachtung, die bereits für die Multi-Modelle gemacht werden konnte, da es unmöglich ist, dass sich über den LMI-Ansatz Stabilität zeigen lässt, wenn einzelne Multi-Modelle Eigenwerte außerhalb des Stabilitätsgebietes besitzen.

|        |            | $\lambda$ |             |          |
|--------|------------|-----------|-------------|----------|
|        |            | 0 - 0,04  | 0,04 - 0,17 | 0,17 - 1 |
| 5 - 10 | Eckmodelle | 104       | 80          | 24       |
|        | Stabilität | ✓         | ✗           | ✗        |
|        | Toleranz   | 0,000996  | 0,0         | 0        |
|        | Polgebiet  | ✗         | ✗           | ✗        |
|        | Toleranz   | 0,0       | 0,0         | 0        |

Tabelle 5.3: Nachweis der Stabilität und Polgebietsbedingung für die verwendeten Gain-Scheduling Bereiche.

|           |            |          |          |          |
|-----------|------------|----------|----------|----------|
| 10 - 17,5 | Eckmodelle | 224      | 40       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✗        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,001174 | 0        | 0,000535 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✗        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0        | 0,000035 |
| 17,5 - 25 | Eckmodelle | 344      | 32       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✗        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,001913 | 0        | 0,000639 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✗        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0        | 0,000051 |
| 25 - 37,5 | Eckmodelle | 240      | 24       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,001337 | 0,001403 | 0,000685 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✗        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,0      | 0,000059 |
| 37,5 - 50 | Eckmodelle | 176      | 16       | 16       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,000961 | 0,001102 | 0,000656 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,000037 | 0,000052 |
| 50 - 62,5 | Eckmodelle | 120      | 24       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,000622 | 0,000782 | 0,00058  |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,000041 | 0,000058 |
| 62,5 - 75 | Eckmodelle | 88       | 16       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,000437 | 0,000612 | 0,000522 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,000044 | 0,00006  |
| 75 - 100  | Eckmodelle | 72       | 16       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0003   | 0,000425 | 0,000424 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,000038 | 0,000069 |
| 100 - 125 | Eckmodelle | 48       | 16       | 24       |
|           | Stabilität | ✓        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,00019  | 0,000307 | 0,000304 |
|           | Polgebiet  | ✗        | ✓        | ✓        |
|           | Toleranz   | 0,0      | 0,000021 | 0,000067 |

Tabelle 5.3: Nachweis der Stabilität und Polgebietsbedingung für die verwendeten Gain-Scheduling Bereiche.



Es ist darüber hinaus zu beobachten, dass insbesondere die Verwendung eines hyperbelförmigen Polgebietes bei Eckmodellen, die Eigenwerte auf dem Rand oder sehr nahe daran, aber noch innerhalb des gewünschten Gebietes, besitzen, häufig keine Lösung gefunden werden kann, da es zu numerischen Problemen bei der Lösung der LMI kommt. Dies betrifft insbesondere den unteren Schlupfbereich, da dort zum einen die Eigenwerte auf dem Rand des Polgebietes liegen und zum anderen bedingt durch die in Abbildung 5.10 zu erkennende Krümmung des unsicheren Bereiches für kleine Schlüpfen bzw. kleines  $a_{11}$  sowie die bereits in Abbildung 5.9 zu beobachtende hohe Zahl an Reihengliedern deutlich mehr Eckmodelle als in den beiden anderen Bereichen benötigt werden, um die Unsicherheit adäquat abzubilden, was zu sehr großen LMI-Problemen führt, die auch numerisch nur schwer zu lösen sind und eine gefundene Lösung nur mit gewissen Toleranzen als gültig akzeptiert werden kann. Hinzu kommt, dass durch das Aufblähen des unsicheren Bereiches um die Toleranz der Eckpunktreduktion die entstehenden Multi-Modelle Eigenwerte erhalten können, die tatsächlich leicht außerhalb des betrachteten Gebietes liegen und damit die LMI-Bedingung verletzen. Umgehen lässt sich dies teilweise, indem anstatt der Hyperbel nur deren Asymptoten über Geraden beschrieben werden, wodurch jedoch das Gebiet im Bereich der reellen Achse deutlich größer als das eigentlich vorgegebene Gebiet wird.

## 5.6 Simulationsergebnisse der Zwei-Freiheitsgrade Regelung

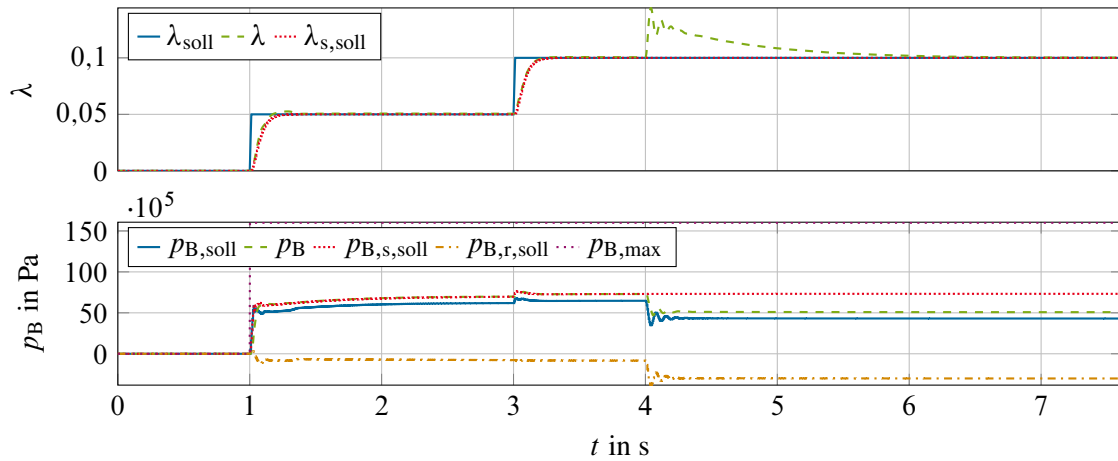
Um die vorgeschlagene Reglerstruktur auf ihre Eignung zur Schlupfregelung zu testen, werden die folgenden Testszenarien festgelegt:

**TS1** Anfangsschlupf von 0 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Sollwertsprung auf  $\lambda_{\text{soll}} = 0,05$  nach  $t = 1$  s, anschließend Sollwertsprung auf  $\lambda_{\text{soll}} = 0,1$  bei  $t = 3$  s. Bei  $t = 4$  s soll der Reibwert auf 75% des Anfangsreibwertes  $\mu_0$  abgesenkt werden.

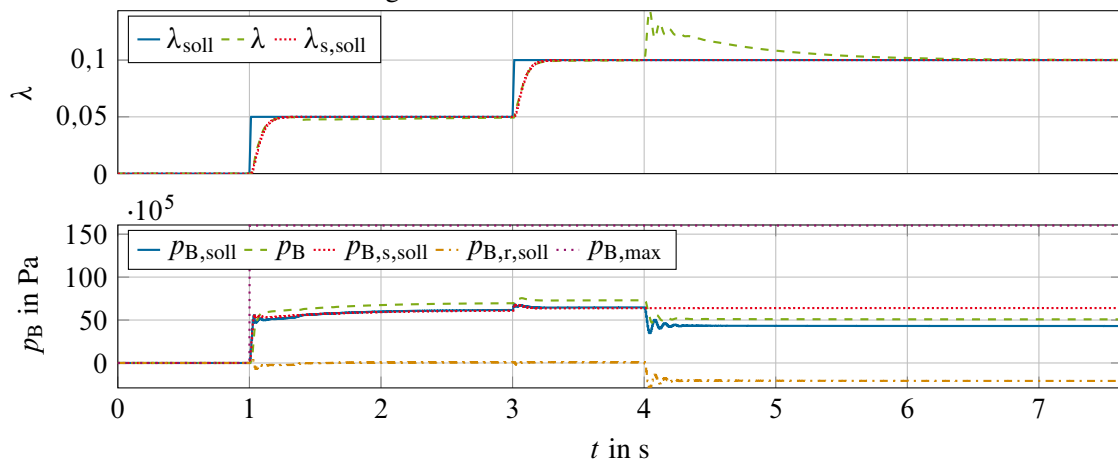
**TS2** Anfangsschlupf von 0 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Sollwertsprung auf  $\lambda_{\text{soll}} = 0,25$  nach  $t = 1$  s, anschließend Sollwertsprung auf  $\lambda_{\text{soll}} = 0,025$  bei  $t = 3$  s. Bei  $t = 4$  s soll der Reibwert auf 75% des Anfangsreibwertes  $\mu_0$  abgesenkt werden.

Der Testfall TS1 entspricht dabei einer Vorgabe des kritischen Schlupfes und der Testfall TS2 beinhaltet einen Schlupf im instabilen Bereich, wie er bspw. bei einer Bremsung auf Eis recht häufig zu beobachten ist [64, S. 91]. Die Simulationsergebnisse, die für die vorgeschlagene Reglerstruktur zu erzielen sind, sind in Abbildung 5.11 und Abbildung 5.12 dargestellt. Dabei werden jeweils die Strecke und die Vorsteuerung mit übereinstimmenden Reibwerten sowie die Strecke mit dem 1,1-fachen und 0,9-fachen des Reibwertes der Vorsteuerung für die unterschiedlichen Testfälle und Aktormodelle simuliert.

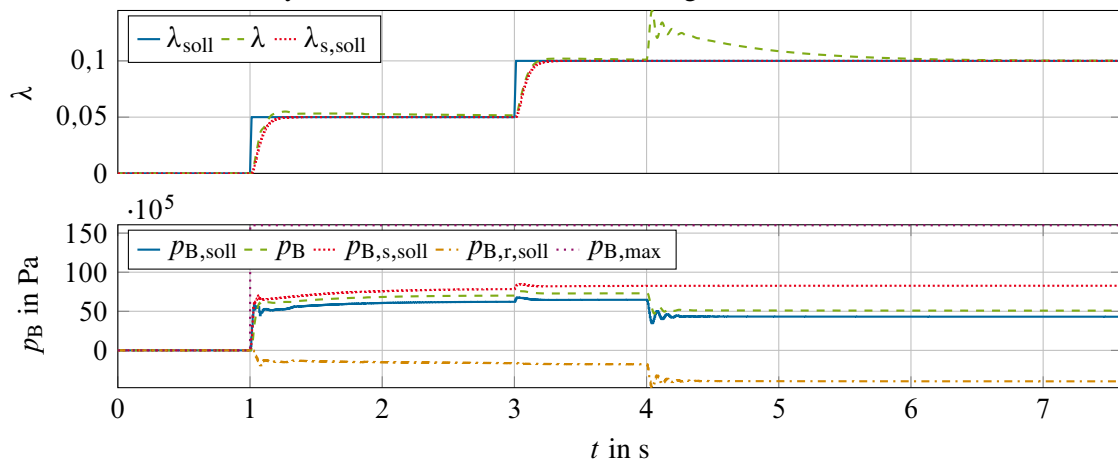
Es zeigt sich, dass die Regelung in der Lage ist, mit falschen Reibwerten in Vorsteuerung und Strecke umzugehen, wie sie zu Beginn der Bremsung vorliegen und vom I-Anteil in der Rückführung ausgeregelt werden können. Zudem ist die Regelung auch nach Reibwertsprüngen auf Reibwerte, für die die Regler im Gain-Scheduling nicht entworfen wurden, noch geeignet, um den gewünschten Sollwert einzuregeln. Dies geschieht allerdings nur langsam, da zum einen die Fahrzeuggeschwindigkeit nach dem Reibwertsprung bei 4 s bereits so gering ist, dass das Einhalten der Polgebietsanforderungen herausfordernd wird und zum anderen die Verwendung eines PID-Reglers anstatt eines Reglers höherer Ordnung insoweit ihren Tribut fordert, dass es nicht möglich ist, den Regelkreis mit größerer Dämpfung und höherer Dynamik auszulegen ohne die Robustheitsanforderungen zu verletzen. Es lässt sich ebenfalls beobachten, dass die Abweichung in den Aktormodellen nahezu in dem durch die Abweichung der Reibwerte hervorgerufenen Regelfehler untergeht und daher die Reibwertabweichung eine hohe Anforderung an den Betrieb der Regelung an der realen Strecke darstellt. Dies ändert sich allerdings, wenn, wie in Abbildung 5.13 dargestellt, eines der in Abschnitt 2.1.3.3 beschriebenen „unstetigen“ Hydraulikmodelle verwendet wird, da sich dann bedingt durch Schaltschwellen für das Öffnen und Schließen der Ventile Grenzyklen einstellen und sich der gewünschte Sollwert von  $\lambda = 0,25$  aufgrund der großen Abweichung zwischen Entwurfsmodell und Simulationsmodell nur sehr langsam einregeln lässt bzw. nicht erreicht wird, bevor der Sollwert verändert wird.



(a) Systemantwort bei Übereinstimmung von Modell und realer Strecke und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

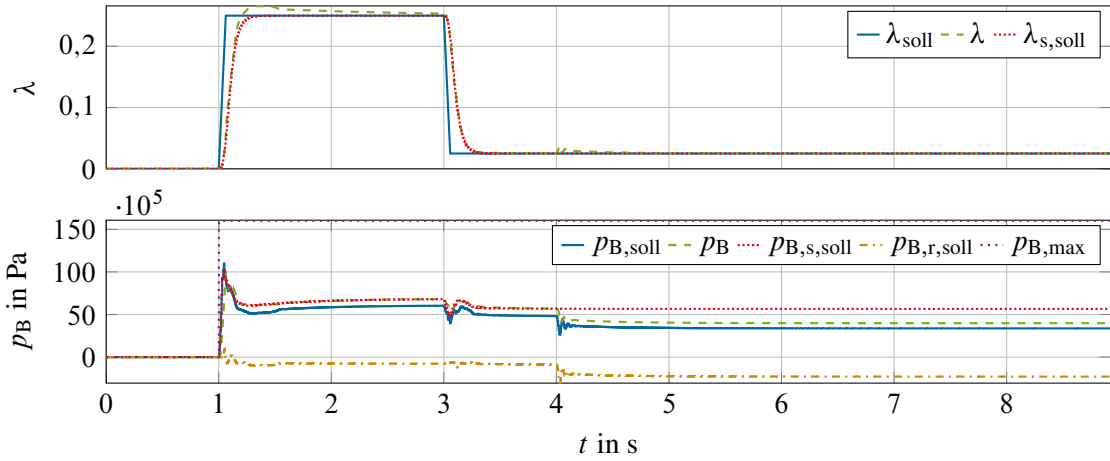


(b) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 0,9 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

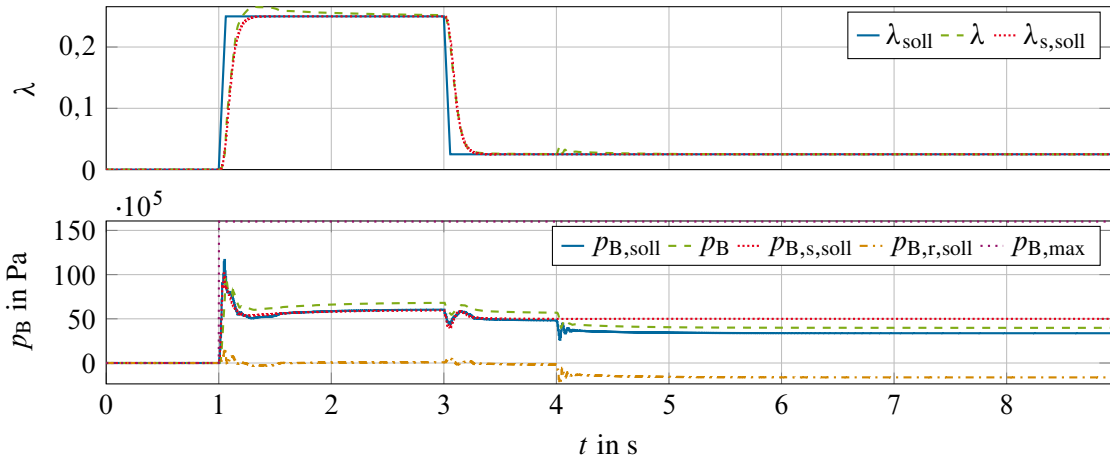


(c) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 1,1 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

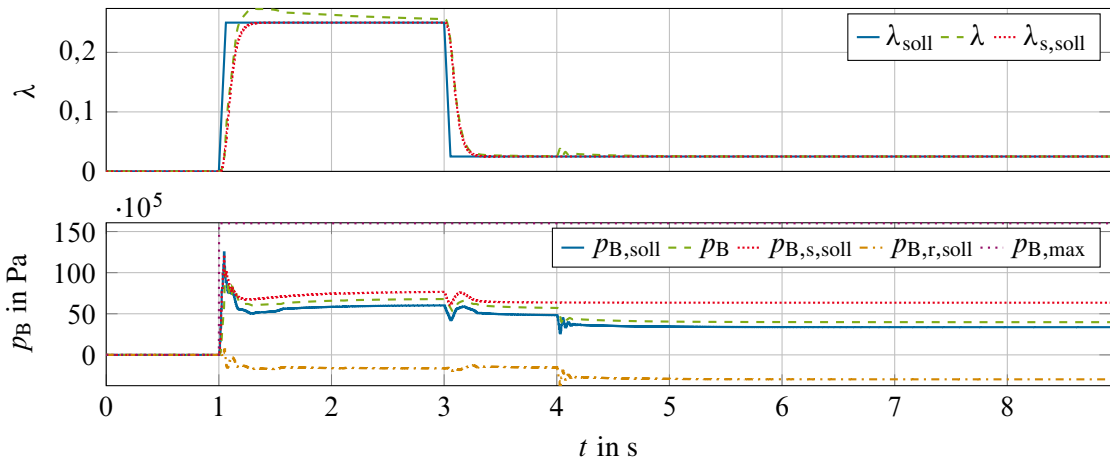
Abbildung 5.11: Simulation der Systemantworten des vorgesteuerten und geregelten Gesamtfahrzeugs mit Trajektorienfolgeregelung für ein LoLiMoT-Hydraulikmodell für Testfall TS1.



(a) Systemantwort bei Übereinstimmung von Modell und realer Strecke und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

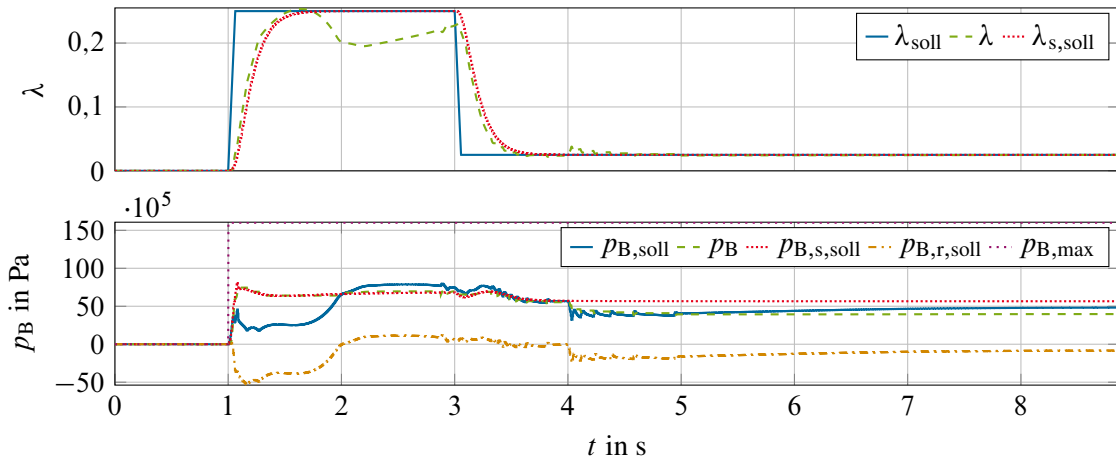


(b) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 0,9 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

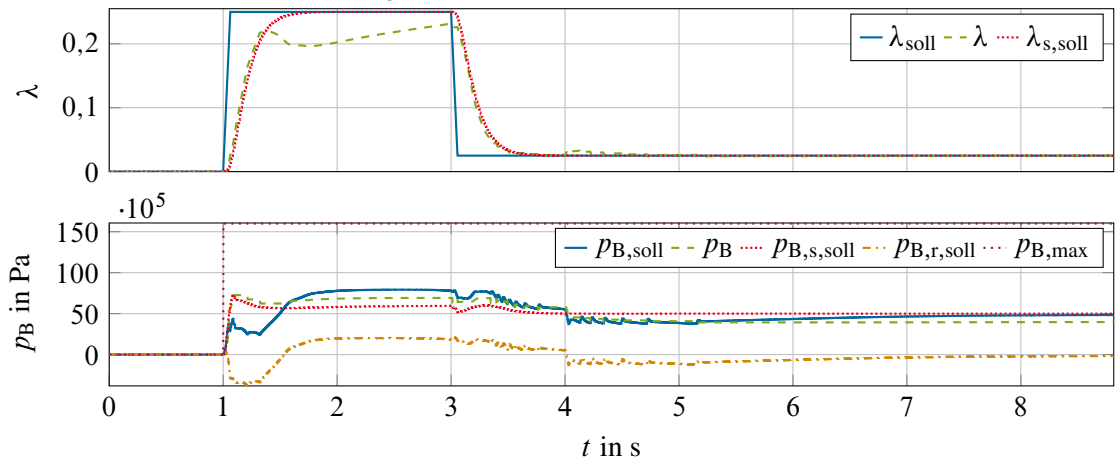


(c) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 1,1 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

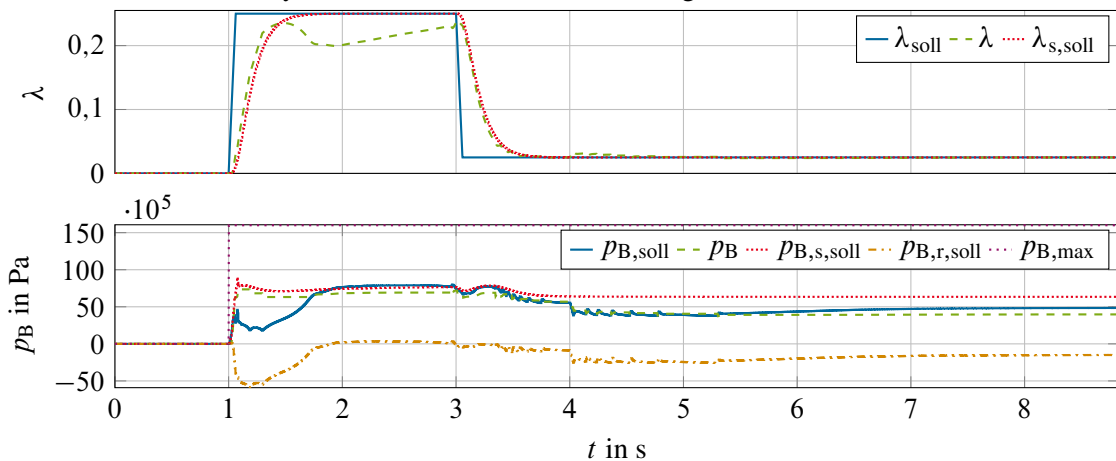
Abbildung 5.12: Simulation der Systemantworten des vorgesteuerten und geregelten Gesamtfahrzeugs mit Trajektorienfolge- und Rückführung für ein LoLiMoT-Hydraulikmodell für Testfall TS2.



(a) Systemantwort bei Übereinstimmung von Modell und realer Strecke und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.



(b) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 0,9 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.



(c) Systemantwort bei Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 1,1 und nichtlinearem Hydraulikmodell in der Vorsteuerung.

Abbildung 5.13: Simulation der Systemantworten des vorgesteuerten und geregelten Gesamtfahrzeugs mit Trajektorienfolgeregelung für ein „unstetiges“ Hydraulikmodell für Testfall TS2.

## 6 Ansatz zur Optimierung der Kraftschlussausnutzung

---

In diesem Kapitel wird der verwendete Ansatz zur Optimierung der Kraftschlussausnutzung bei einer Bremsung vorgestellt. Dazu wird zuerst das Prinzip des Extremum Seekings im Kontinuierlichen vorgestellt und anschließend die Grundlagen für das zeitdiskrete Extremum Seeking dargelegt. Basierend auf diesen wird eine Erweiterung zur Vorgabe der Suchdynamik vorgenommen und die Parametrierung des Algorithmus hergeleitet. Abgeschlossen wird das Kapitel mit den erzielbaren Simulationsergebnissen bei Veränderung der Lage des kritischen Schlupfes während der Bremsung bei unterschiedlichen Reibwerten in der Vorsteuerung und der Strecke.

---

### 6.1 Regelungsverfahren zur Extremwertsuche

In der vorliegenden Arbeit wird zum Einregeln des Maximums der Reibwertkurve das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Verfahren des NEWTON-basierten Extremum Seekings verwendet, da sich dieses unter den in Abschnitt 1.2.2 vorgestellten Verfahren am besten in die vorgeschlagene hierarchische Regelungsstruktur einfügen lässt und auch im Hinblick auf eine Ansteuerung bzw. Arbitrierung durch überlagerte Fahrerassistenzsysteme den Vorteil bietet, dass es je nach Bedarf aktiviert werden kann. Zur Umsetzung der Reibwertmaximierung wird ein radindividueller Ansatz verwendet, da sich gezeigt hat, dass ein integrierter Gesamtfahrzeugansatz mit mehrdimensionalem Extremum Seeking zu hohe Ausregelzeiten für das Finden des Maximums hat und auch die Parametrierung dieses Ansatzes viele Kompromisse erfordert [218]. Im Gegensatz dazu kann bei einem radindividuellen Ansatz das Verfahren an jedem Rad individuell aktiviert werden und die Parametrierung gestaltet sich einfacher, was jedoch mit dem Nachteil erkauft werden muss, dass der virtuelle Sensor für die Reifenkraft, wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben, anstatt des realen Fahrzeugbeschleunigungssensors verwendet werden muss.

#### 6.1.1 Extremwertsuche

Die folgenden Abschnitte basieren im Wesentlichen auf [9] und [114].

### 6.1.1.1 Gradientenbasiertes Extremum Seeking

Das Ziel des linearen kontinuierlichen Extremum Seekings besteht darin, zur Minimierung einer Zielfunktion

$$J(\theta) = J^*(t) + \frac{J''}{2}(\theta - \theta^*(t))^2 \quad (6.1)$$

mit unbekanntem Minimalwert  $J^*$  und unbekannter Minimalstelle  $\theta^*$  das in Abbildung 6.1 gezeigte Schema anzuwenden, um die Minimalstelle zu finden. Der Ansatz der quadratischen Ziel-

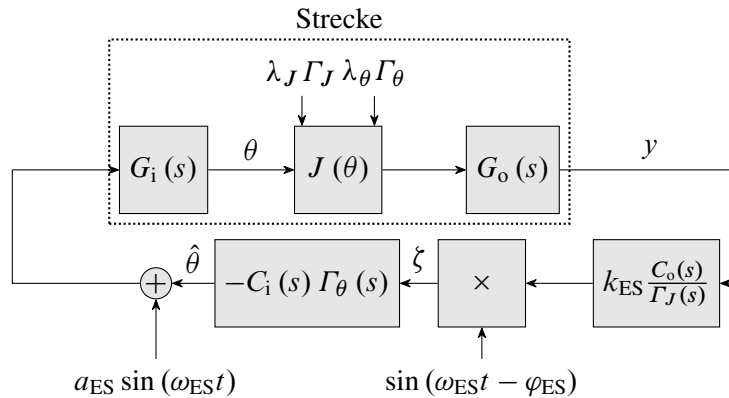


Abbildung 6.1: Extremum Seeking Blockschaltbild.

funktion Gl. (6.1) stellt keine Einschränkung dar, da ein Funktionswert mit verschwindendem Gradienten gesucht wird und andere Zielfunktionen durch Entwicklung in eine TAYLOR-Reihe und Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in diese Form gebracht werden können. Das System bzw. die Strecke in Abbildung 6.1 besteht aus der zu minimierenden Nichtlinearität, die in eine stabile lineare Dynamik  $G_i(s)$  am Eingang und eine stabile lineare Dynamik  $G_o(s)$  am Ausgang eingebettet ist. Die Grundidee des Extremum Seekings ist es, dieses System mit einem periodischen Signal anzuregen, bspw. einer Sinusschwingung, und durch geeignete Filterung, Demodulation mit der Anregungsfrequenz und erneute Filterung einen Schätzwert für die Suchrichtung  $\hat{\theta}$  zu erzeugen. Es ist erlaubt, dass sowohl der unbekannte Parameter  $\theta^*$  eine Dynamik  $\mathcal{L}(\theta^*) = \gamma_\theta \Gamma_\theta(s)$  als auch das unbekannte Optimum  $J^*$  eine Dynamik  $\mathcal{L}(J^*) = \gamma_J \Gamma_J(s)$  besitzen dürfen. Im vorliegenden Fall entspricht die zu minimierende Funktion der negativen Reifenkennlinie

$$J(\theta) = -\mu(\theta) \quad (6.2)$$

und die optimalen Parameter dürfen sich sprunghaft ändern, sodass  $\mathcal{L}(\theta^*) = \frac{\lambda_{\text{krit}}}{s}$  und  $\mathcal{L}(J^*) = \frac{\mu_{\text{max}}}{s}$  gilt. Nach dem Internen-Modell-Prinzip tauchen die LAPLACE-Transformierten des optimalen Parameters und der optimalen Güte als „Signalmodelle“ im Regler auf und es ergibt sich das Blockschaltbild in Abbildung 6.2, wobei die Übertragungsfunktion  $G_i(s)$  dem geschlossenen Regelkreis mit der vorgeschlagenen Schlupfreglerstruktur entspricht und die Sensorübertragungsfunktion als Einheitsverstärkung angenommen wird. Das ES funktioniert nun so, dass die sinusförmige Anregung durch die zu minimierende Nichtlinearität verzerrt wird und durch den Hochpass  $C_o(s) = \frac{s}{s+h_{\text{ES}}}$  der Gleichanteil dieses Signals entfernt wird. Die verbleibenden Oberwellen werden mittels des Demodulators in einen Schätzwert für den Gradienten der Nichtlinearität, der

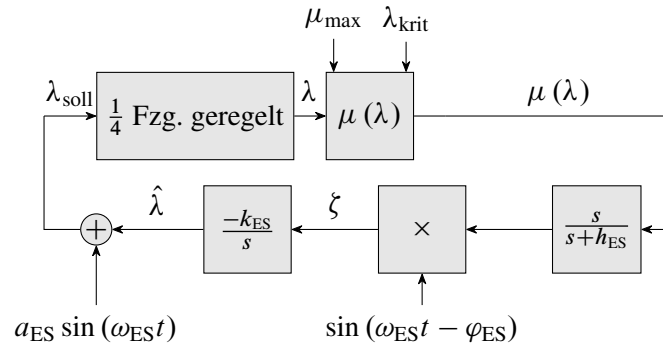


Abbildung 6.2: Extremum Seeking Blockschaltbild für das schlupfgeregelte Einradmodell.

im Gleichanteil des Signals  $\zeta$  hinter dem Demodulator enthalten ist, umgewandelt. Anschließend werden die Oberwellen durch die Integration gedämpft, sodass der Schätzwert  $\hat{\lambda}$  in Richtung des steilsten Abstieges der Nichtlinearität verschoben wird. Dies führt nach einiger Zeit zum Erreichen des Minimums der zu optimierenden Gütefunktion, wobei zu beachten ist, dass die Anregungsfrequenz größer ist als die Parameter  $a_{ES}$ ,  $h_{ES}$ ,  $k_{ES}$  und  $J''$ , damit das Verfahren konvergiert.

Da der Stabilitätsbeweis des gradientenbasierten Extremum Seekings auf der Betrachtung von zeitlich gemittelten Systembeschreibungen basiert und diese nicht auf einfache Weise in die zeitdiskrete Formulierung überführt werden können, muss für die zeitdiskrete Implementierung des Extremum Seekings eine Vereinfachung des betrachteten Regelkreises durchgeführt werden. Diese besteht darin, dass die unbekannt Parameter  $J^*$  und  $\theta^*$  über keine Dynamik mehr verfügen dürfen und die Reglerübertragungsfunktionen  $C_i(s)$  und  $C_o(s)$  durch einen Integrierer und einen Hochpass ersetzt werden müssen, sodass sich das in Abbildung 6.3 gezeigte Blockschaltbild ergibt [9, S. 61] und [37]. Der diskrete Extremum Seeking Regelkreis ist stabil, wenn mit einem

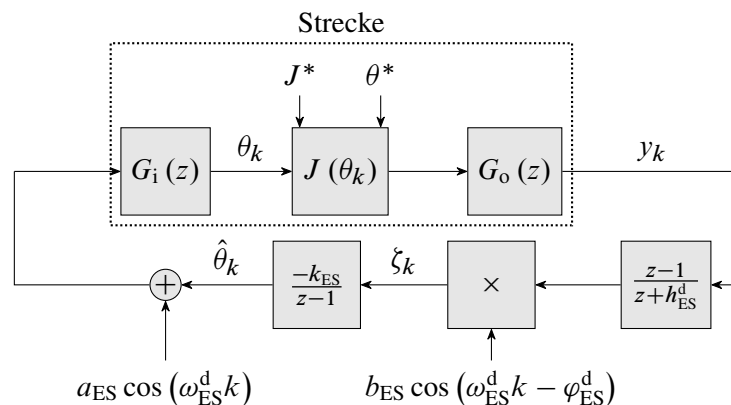


Abbildung 6.3: Blockschaltbild für diskretes Extremum Seeking.

$0 < h_{ES}^d < 1$  und  $\omega_{ES}^d = c\pi$  mit  $c \in \{0 < |c| < 1\}$

$$\kappa = G_i(1) \Re \left( e^{j\varphi_{ES}^d} G_i(e^{j\omega_{ES}^d}) \frac{e^{j\omega_{ES}^d} - 1}{e^{j\omega_{ES}^d} + h_{ES}^d} G_o(e^{j\omega_{ES}^d}) \right) > 0 \quad (6.3)$$

erfüllt ist [37, S. 320].



Dieser Ansatz wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter verfolgt, da das gradientenbasierte Extremum Seeking zum einen zu langsam konvergiert und zum anderen ein zu kleines Einzugsgebiet besitzt [218] und daher eine Erweiterung des Blockschaltbildes in Abbildung 6.3 vorgenommen werden muss, mittels derer sich die Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen lässt.

### 6.1.1.2 NEWTON-basiertes Extremum Seeking

Wie aus der Theorie der Optimierung quadratischer Gütefunktionen bekannt ist, konvergiert das Verfahren des steilsten Abstieges, dem im Wesentlichen das gradientenbasierte Extremum Seeking entspricht, langsamer als bei sog. NEWTON-Verfahren, bei denen der Gradient mit der Inversen der HESSE-Matrix skaliert wird, was sich auch auf das Extremum Seeking übertragen lässt und zum sog. NEWTON-basierten Extremum Seeking führt. Dazu wird eine Schätzung  $\Theta$  für die Inverse der HESSE-Matrix  $J''$  benötigt, die sich durch Lösen der RICCATI-Differentialgleichung

$$\dot{\Theta} = \omega_r \Theta - \omega_r \Theta \hat{\zeta} \Theta \tag{6.4}$$

ergibt [113, S. 953]. Das Blockschaltbild des gradientenbasierten Extremum Seekings wird entsprechend um diese Differentialgleichung erweitert und der Gradient mit der Inversen der HESSE-Matrix multipliziert, sodass sich das in Abbildung 6.4 gezeigte Blockschaltbild ergibt [63]. Der Vorteil des NEWTON-basierten Extremum Seekings liegt darin, dass über die Schätzung der unbekanntes HESSE-Matrix und die Einstellparameter  $k_{ES}$  und  $\omega_r$  die Dynamik der Suche nach dem Extremwert vom Entwerfer vorgegeben werden kann, während sie beim gradientenbasierten Extremum Seeking von der unbekanntes HESSE-Matrix bestimmt wird und nicht beeinflusst werden kann [63, S. 1761].

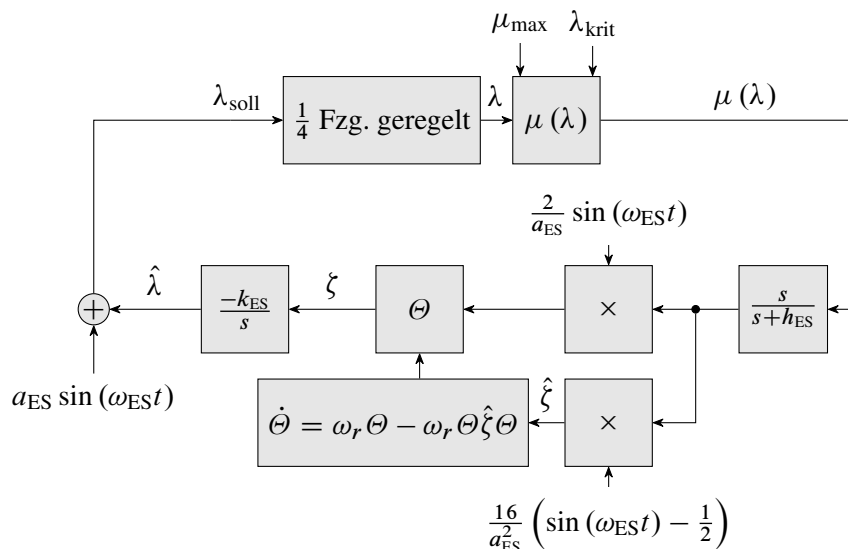


Abbildung 6.4: Blockschaltbild für NEWTON-basiertes Extremum Seeking.

Da das Extremum Seeking allerdings diskret implementiert werden soll, ist eine Diskretisierung der RICCATI-Differentialgleichung notwendig. Diese lässt sich nach [95, S. 34] erreichen, indem

die HESSE-Matrix mittels eines Tiefpassfilters

$$J''_{k+1} = \alpha J''_k + (1 - \alpha) \hat{\zeta}_k^+ \quad (6.5)$$

gefiltert wird, für den mittels der WOODBURY Identität die diskrete RICCATI-Gleichung für die Inverse  $\Theta_k = J''_k^{-1}$  zu

$$\Theta_{k+1} = \begin{cases} \left(\hat{\zeta}_k^+\right)^{-1}, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \Theta_k - \frac{1}{\alpha} \Theta_k \hat{\alpha} \left(1 + \hat{\alpha} \frac{1}{\alpha} \Theta_k \hat{\alpha}\right)^{-1} \hat{\alpha} \frac{1}{\alpha} \Theta_k, & \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

mit

$$\hat{\alpha} = \sqrt{(1 - \alpha) \hat{\zeta}_k^+}$$

angegeben werden kann. Darin ist  $\hat{\zeta}_k^+$  ein Schätzwert für die HESSE-Matrix, der bei Bedarf durch Regularisierung, wie in [68, S. 3282] beschrieben, über eine Eigenwertzerlegung und Ersetzung der negativen Eigenwerte durch ihren Betrag oder Addition einer skalierten Einheitsmatrix positiv definit gemacht werden kann. Durch die Wahl von  $\alpha$  kann festgelegt werden, wie stark die Informationen der zweiten Ableitungen verwendet werden sollen, sodass sich für  $\alpha = 0$  das gradientenbasierte Extremum Seeking ergibt.

### 6.1.1.3 Anregungssignale

Beide Arten von Extremum Seeking können nicht nur mit sinusförmigen Anregungssignalen durchgeführt werden, sondern auch mit anderen Arten von Anregungen. So ist für die grundsätzliche Funktionsweise des Extremum Seekings nur notwendig, dass das Anregungssignal mit der Frequenz  $\omega_{ES}$  periodisch ist und eine positive Signalenergie besitzt [201, S. 1447]. Es ist z. B. auch möglich, Dreieckssignale oder Rechtecksignale anstatt der Sinusanregung zur Anregung zu verwenden und es ist dabei lediglich darauf zu achten, dass sich die Signalenergie bei einer anderen Anregungsform verändert, was u. U. bei der Wahl der Rückführverstärkung  $k_{ES}$  zu berücksichtigen ist.

Neben deterministischen Anregungssignalen ist es darüber hinaus auch möglich, stochastische Anregungssignale zu verwenden. Dies wird motiviert durch die Tatsache, dass Sinussignale mittelwertfrei sind und eine positive Signalenergie besitzen. Diese Eigenschaften treten ebenfalls bei GAUSS'schem Rauschen auf, das erwartungswertfrei ist und eine positive Varianz besitzt, die der Signalenergie entspricht [114, S. 16]. Aus diesem Grund kann das Anregungssignal auch als GAUSS'scher Rauschprozess gewählt werden und die oben dargelegten Extremum Seeking Algorithmen auch dafür verwendet werden, wie in [112], [113], [159] und [175] gezeigt. Der Vorteil der stochastischen Anregung liegt darin, dass das Anregungssignal nicht beschränkt ist und so eine schnellere Konvergenz erreicht werden kann und u. U. verhindert werden kann, dass der Algorithmus in einem lokalen Minimum der Gütefunktion hängen bleibt. Allerdings ist das Systemverhalten dem Zufall unterworfen, was einen Nachteil dieser Art der Anregung darstellt [114, S. 16]. Da auf dem Steuergerät allerdings keine echten Zufallszahlen erzeugt werden können, wird die stochastische Anregung des Extremum Seekings an dieser Stelle nicht weiter betrachtet.

## 6.2 Extremum-Seeking für ein Einradmodell

Wird im ersten Schritt die HESSE-Matrix beim NEWTON-basierten Extremum Seeking als Einheitsmatrix gewählt und damit das Verfahren auf die gradientenbasierte Variante reduziert, lässt sich die Stabilitätsbedingung Gl. (6.3) untersuchen, um eine geeignete Anregungsfrequenz und Hochpasspollage  $h_{ES}^d$  zu bestimmen. Wird die Stabilitätsbedingung für das Wunschverhalten der unterlagerten Schlupfregelung für verschiedene Anregungsfrequenzen und Hochpasspole  $h_{ES}^d$  ausgewertet, ergibt sich der in Abbildung 6.5 dargestellte Verlauf für die Stabilitätsreserve  $\kappa$  und es kann  $h_{ES}^d = 0,9$  gewählt werden bei einer Anregungsfrequenz von  $\omega_{ES}^d = 0,04$ , was einer Anregungsfrequenz von etwa  $25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  entspricht. Hierdurch kann  $\kappa$  maximiert werden, ohne dass die Anregungsfrequenz so groß wird, dass der unterlagerte Regler der Anregung nicht mehr folgen kann oder Rauschen zu stark verstärkt wird.

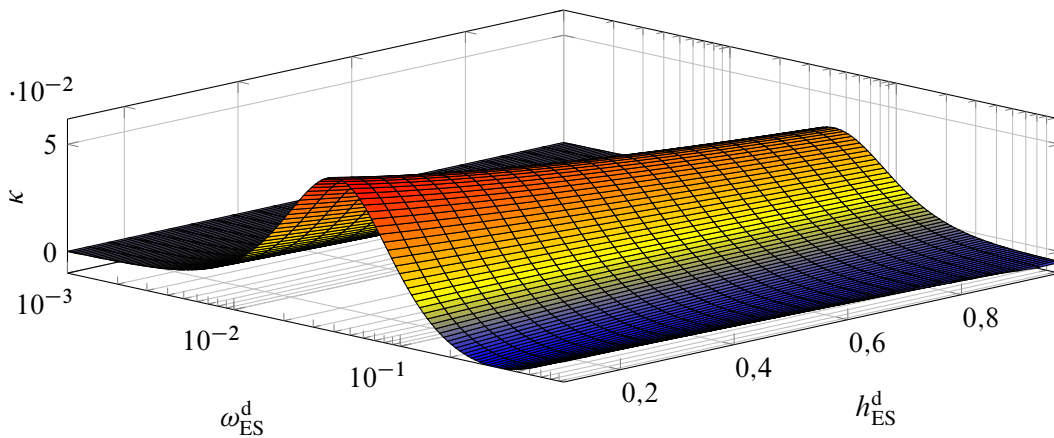


Abbildung 6.5: Berechnete Stabilitätsreserve für unterschiedliche Anregungsfrequenzen und Hochpasspollagen.

Nachdem die Einstellparameter  $\omega_{ES}^d$  und  $h_{ES}^d$  für den ES-Regelkreis festgelegt sind, kann wieder das NEWTON-basierte Extremum Seeking betrachtet werden und durch eine Simulation mit unterschiedlichen Verstärkungen für unterschiedliche Untergründe ermittelt werden, welche Verstärkung für den Extremum Seeking Regelkreis verwendet werden sollte, was in Abbildung 6.6 dargestellt ist. Darüber hinaus wird auch untersucht, welche Art von Anregungssignal sich am besten für den Einsatz zur Maximierung des Reibwertes eignet. Zur Beschreibung der Reibwertausnutzung wird zum einen der momentane Wirkungsgrad

$$\eta_{\mu} = \frac{\mu(\lambda)}{\mu(\lambda_{\text{krit}})} \quad (6.7)$$

mit dem kritischen Schlupf definiert und zum anderen der mittlere Wirkungsgrad

$$\bar{\eta}_{\mu} = \frac{1}{t_B} \int_0^{t_B} \eta_{\mu} dt \quad (6.8)$$

mit der Bremsdauer

$$t_B = \text{sol}_t(v(t) = 0) \quad (6.9)$$

in Anlehnung an [13, S. 114 f.]. Die mittlere Abweichung zum kritischen Schlupf wird mit

$$\text{RMSE} = \frac{\int_0^{t_B} \sqrt{(\lambda - \lambda_{\text{krit}})^2} dt}{t_B} \quad (6.10)$$

bezeichnet. In Abbildung 6.6 sind die Auswirkungen der Verstärkung bei unterschiedlichen deterministischen Anregungssignalen auf die Regelgüte des Extremum Seekings dargestellt und es zeigt sich, dass eine zu starke Erhöhung der Verstärkung einer guten Regelgüte entgegensteht. Die besten Regelergebnisse stellen sich bei etwa  $k_{\text{ES}} = 0,1$  ein, wobei die Optima für die unterschiedlichen Anregungssignale aufgrund der unterschiedlichen Signalenergie verschieden sind.

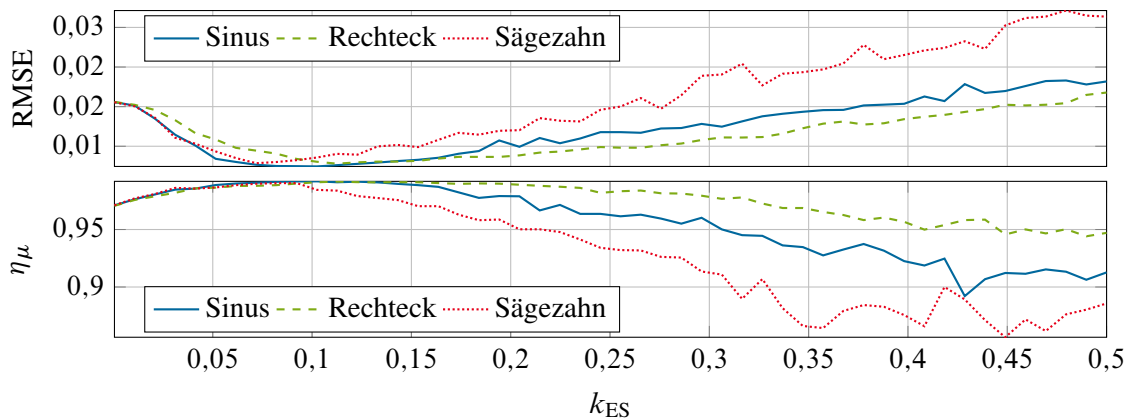


Abbildung 6.6: Simulation der Auswirkung der Verstärkung beim diskreten NEWTON-basierten Extremum Seeking.

### 6.3 Simulationsergebnisse der reibwertoptimalen Regelung

Im niedrigen Verzögerungsbereich kann aus einer von einem überlagerten Regelungssystem vorgegebenen Sollbeschleunigung oder Sollkraft die inverse Reifenkennlinie verwendet werden, um den gewünschten Sollschlupf  $\lambda_{\text{soll}}$  zu ermitteln, was möglich ist, da die Reifenkennlinie bis zum Maximum injektiv ist. Für Beschleunigungsanforderungen in der Nähe des Maximums der Reibwertkurve wird dagegen das Extremum Seeking verwendet. Zum Finden des Maximums wird die Strategie verfolgt, dass zu Beginn der Bremsung ein fester Schlupf vorgegeben wird, der auf vielen Untergründen in der Nähe oder oberhalb des Maximums der Reibwertkurve liegt, und bei Erreichen dieses Wertes mit der Maximumsuche begonnen wird. Dies ist dadurch motiviert, dass sich gezeigt hat, dass sowohl die Auslegung des Extremum Seekings für den gesamten Schlupfbereich schwierig ist als auch die Suchzeiten nicht akzeptabel sind, wenn die Suche bei  $\lambda = 0$  begonnen wird, da dann Bereiche mit stark unterschiedlichen Steigungen durchlaufen werden. Außerdem kann aufgrund der im Bereich des Maximums relativ flach verlaufenden Kurve damit gerechnet werden, dass der Effizienzverlust durch einen Sollwert, der bereits in der Nähe des Maximums liegt, vernachlässigbar ist im Vergleich zu einer unnötig langen Suchzeit.

Als Testfall für das Extremum Seeking wird festgelegt:

**TS3** Anfangsschlupf 0 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und Sollwertsprung auf  $\lambda_{\text{soll}} = 0,15$  nach  $t = 1$  s, anschließend Änderung der Reifenkennlinie bei  $t = 3$  s nach Abbildung 6.7.

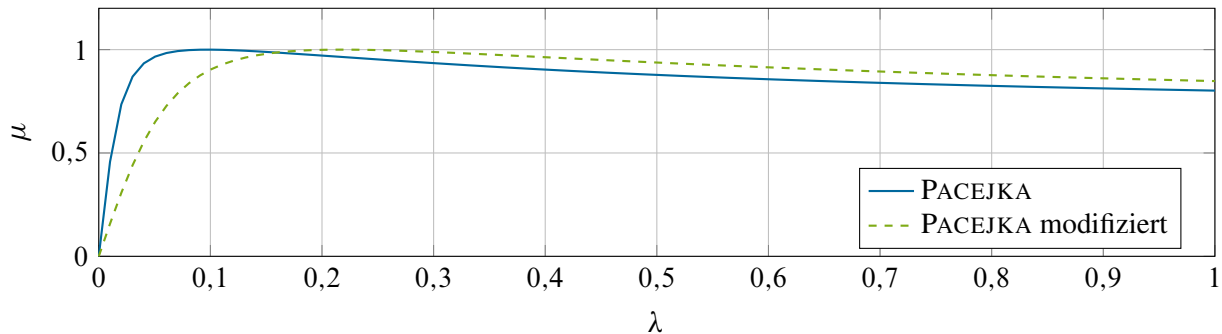
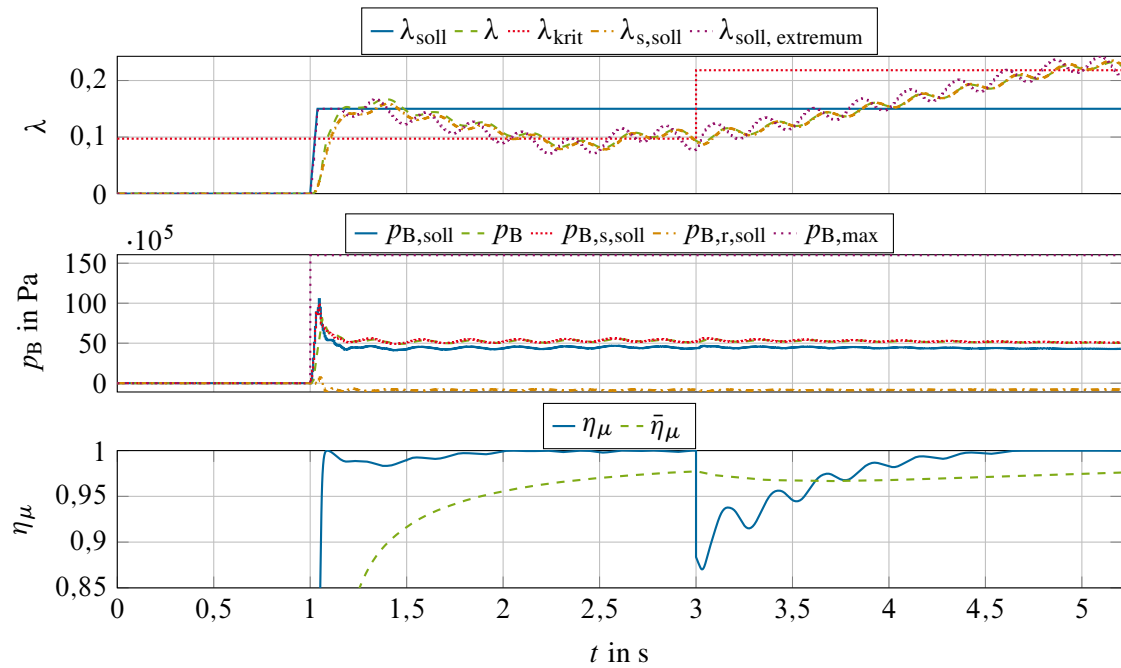


Abbildung 6.7: Testfall für die Simulation des Extremum Seekings.

Die mit dem vorgeschlagenen Ansatz erzielten Ergebnisse sind in Abbildung 6.8 dargestellt und es zeigt sich, dass der Algorithmus in der Lage ist, das Maximum der Reibwertkurve zu finden, selbst wenn sich, wie es bei  $t = 3$  s der Fall ist, der zum Maximalwert gehörige Schlupf mehr als verdoppelt. Dabei wurde, analog zum Abschnitt 5.6, in Abbildung 6.8 (c) und Abbildung 6.8 (b) der Fall untersucht, in dem die Reibwerte in Vorsteuerung und realer Strecke nicht übereinstimmen sowie das nichtlineare LoLiMoT-Hydraulikmodell verwendet wird. Die Verwendung eines (virtuellen) Reifenkraftsensors mit Tiefpasscharakter ist an dieser Stelle wesentlich, da es sonst, bedingt durch den im Extremum Seeking Regelkreis enthaltenen Hochpassfilter, aufgrund hoher entstehender geschätzter Gradienten zu einer sprungförmigen Änderung des Schlupfsollwertes kommen würde, die je nach Phasenlage des Anregungssignals dazu führen könnte, dass das Rad entbremst wird und ein langwieriger Suchvorgang von Schlupf  $\lambda = 0$  begonnen wird. Es lässt sich beobachten, dass der Extremum Seeking Algorithmus in der Lage ist, den optimalen Reibwert innerhalb von etwa einer Sekunde zu finden und dass die Effektivität  $\eta_\mu$  die meiste Zeit mehr als 98 % beträgt. Der Bremsweg bei optimaler Reibwertausnutzung beträgt  $x_B = 88,5$  m und der erreichte Bremsweg liegt für die drei betrachteten Fälle bei  $x_B = 91,27$  m,  $x_B = 91,03$  m und  $x_B = 91,75$  m, was etwa 3 % Verlängerung im Vergleich zum idealen Fall, in dem der neue Maximalwert sofort gefunden wird, darstellt. Es ist daher möglich, die gesetzliche Anforderung an Antiblockiersysteme nach UN-ECE Regelung 13 [55] von mindestens 75 % Kraftschlussausnutzung mit dem vorgeschlagenen Regelungskonzept zu erfüllen.



(a) Übereinstimmung der Reibwerte in Modell und realer Strecke.

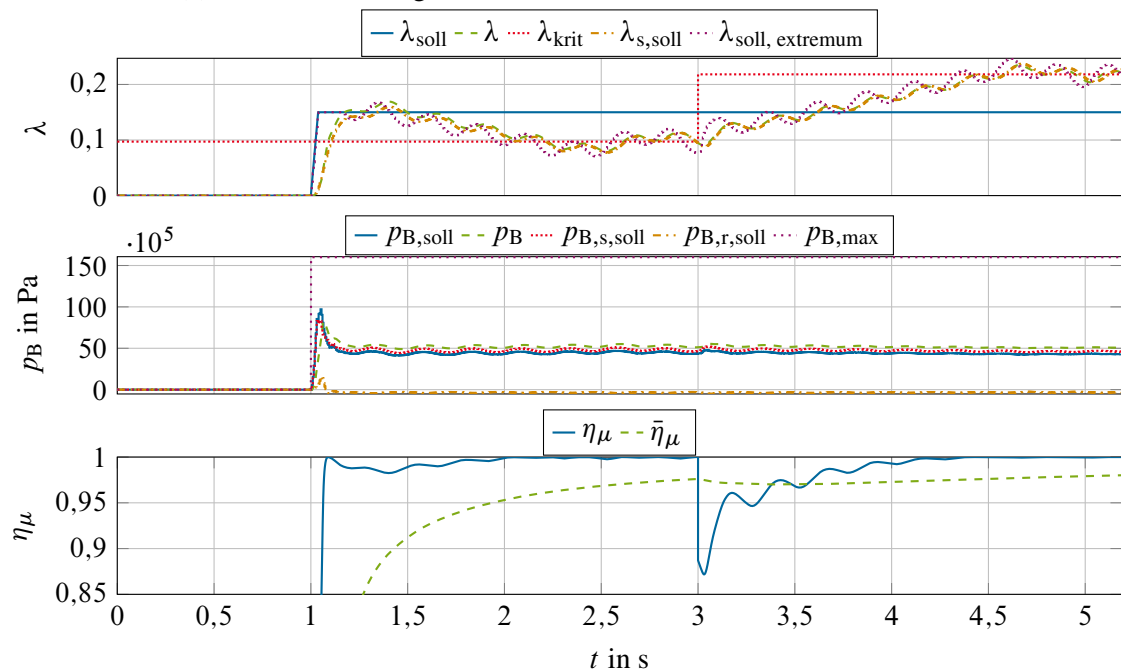
(b) Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 0,9.

Abbildung 6.8: Simulation des diskreten NEWTON-basierten Extremum Seeking mit LoLiMoT Aktormodell mit sinusförmiger Anregung.

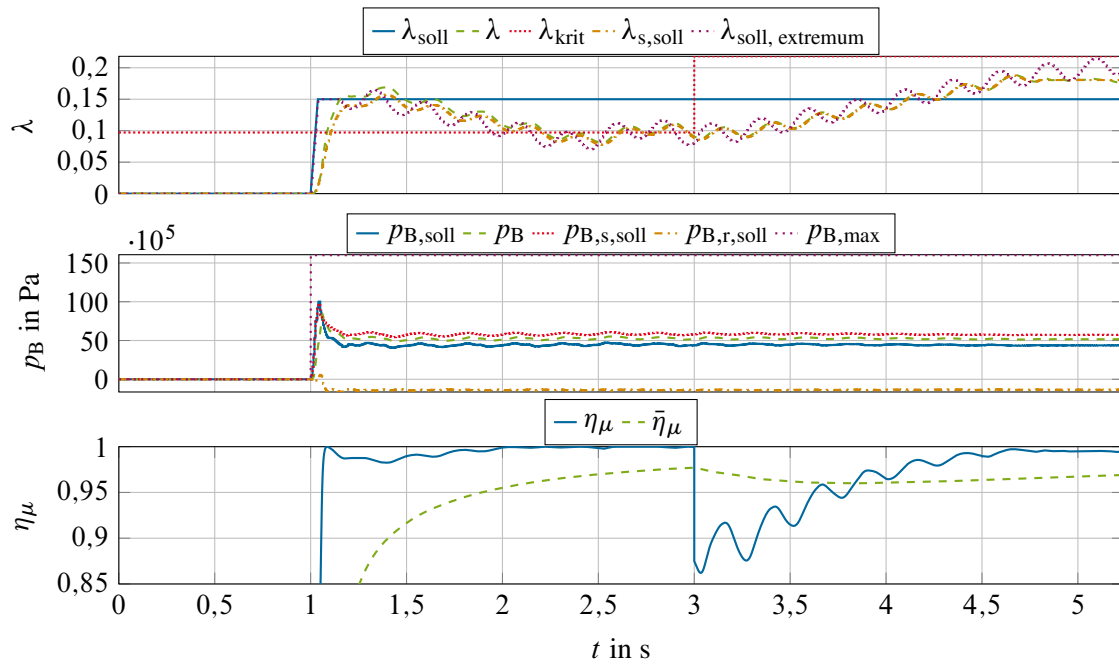
(c) Abweichung zwischen Modell und realer Strecke in  $\mu_0$  um den Faktor 1,1.

Abbildung 6.8 (Forts.): Simulation des diskreten NEWTON-basierten Extremum Seekings mit Lo-LiMoT Aktormodell mit sinusförmiger Anregung.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein modellbasiertes Regelkonzept für das ABS vorgeschlagen, mit dem sich der Radschlupf  $\lambda$  auf einen vorgebbaren Wert, insbesondere auch in der Nähe des Maximums der Reibwertkurve, einregeln lässt. Der Sollschlupf wird dabei entweder von einer übergeordneten Fahrdynamikregelung vorgegeben oder ergibt sich aus einer Sollkraft oder Sollbeschleunigung. Sollte letztere die aktuellen Möglichkeiten bedingt durch einen zu niedrigen Reibwert überschreiten, so soll ein Schlupf in der Nähe des Reibwertmaximums gefunden und eingeregelt werden, d. h. ein sog. Extremum Seeking durchgeführt werden.

Die in der Arbeit vorgeschlagene Reglerstruktur besteht aus einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit nichtlinearer modellbasierter Vorsteuerung und einem robust entworfenen Rückführanteil, in dem eine Gain-Scheduling Strategie verfolgt wird. Der Reglerentwurf wird für eine Abtastzeit von 5 ms durchgeführt, die eine wesentliche Herausforderung für die Stabilisierung des Systems darstellt. Zum Entwurf der Vorsteuerung wird ein modellbasierter Ansatz gewählt, bei dem ein Regler für ein Streckenmodell mittels der exakten Eingangs-/Ausgangslinearisierung entworfen wird und die Stellgröße sowie der von dem Modell gelieferte Itschlupf direkt auf die reale Strecke gegeben werden bzw. die Sollgröße für den linearen Regler liefern. Das Modell, das in der Vorsteuerung geregelt wird, ist ein Nickmodell, das verwendet wird, damit insbesondere die Lastwechselreaktionen beim Anbremsen und damit die Änderung der Aufstandskräfte der Räder abgebildet werden können, wodurch sich das Verhalten eines realen Fahrzeugs deutlich besser beschreiben lässt.

Als Ansatz für die Regelung des Radschlupfes im Rückführanteil bietet sich aufgrund der Einfachheit ein linearer Regleransatz an, bspw. ein PID-Regler, der mit Methoden der robusten Regelung entworfen wird.

Als Entwurfsmodell wird dabei ein in Abschnitt 2.2.2 vorgestelltes Einradmodell verwendet, das über eine lineare sowie eine nichtlineare Hydraulik aktuiert wird, da der hydraulische Aktor die größten Anforderungen an den Reglerentwurf unter den zur Verfügung stehenden Bremsenaktoren stellt und am weitesten verbreitet ist. Wie sich in Abschnitt 2.6 zeigt, sollte ein zu entwerfender linearer Regler über einen I-Anteil verfügen, da sich die hohe Schwankungsbreite in der stationären Verstärkung der Strecke so am besten ausgleichen lässt und dann der geschlossene Regelkreis nur eine geringe Schwankung in der Verstärkung aufweist, was für eine überlagerte Regelung bspw. der Beschleunigung von Vorteil ist. Da der zu entwerfende Regler auf einem Digitalrechner laufen soll und daher die Stellgrößenanforderung nur ein mal pro Abtastschritt verändert werden kann, muss der Entwurf zeitdiskret durchgeführt werden, da sich nur so von Anfang an die spezifischen Probleme, die mit der Abtastung kontinuierlicher Systeme entstehen, behandeln lassen, wie bspw., dass sich durch die Diskretisierung eine obere Schranke für die Reglerverstärkung



ergibt, die für kontinuierliche Systeme nicht existiert. Es zeigt sich weiterhin, dass kein fest eingestellter linearer Regler zu finden ist, der die Strecke über alle Geschwindigkeiten und Schlüpf stabilisieren kann, da die Eigenwerte der Strecke bedingt durch die reziproke Abhängigkeit von der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  in einem großen Bereich schwanken und darüber hinaus für sehr kleine Geschwindigkeiten nichtminimalphasige Nullstellen in der Übertragungsfunktion des offenen Kreises entstehen. Aus diesem Grund wird in Kapitel 5 ein Verfahren zur robusten Vorgabe von Eigenwerten für strukturbeschränkte lineare Regler vorgestellt, mit dem die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in ein Polgebiet verschoben werden können, das die Einhaltung gewisser Anforderungen an die Mindestdynamik und Mindestdämpfung des Systems verspricht. Mit diesem Verfahren werden dann verschiedene Regler für unterschiedliche Geschwindigkeitsbereiche entworfen und damit ein Gain-Scheduling durchgeführt. Es hat sich gezeigt, dass nicht nur ein Umschalten der Regler bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten sinnvoll ist, sondern auch bei unterschiedlichen Schlüpfen, da sich dadurch die Variation in Verstärkung und Pollage des offenen Kreises reduzieren lässt und somit die einzelnen Regler performanter ausgelegt werden können. Als sinnvolle Wahl für diese Schaltpunkte ergeben sich ein Punkt zwischen  $\lambda = 0$  und dem zum Maximum der Reibwertkurve gehörenden Schlupf bei etwa  $\lambda = 0,04$  sowie ein weiterer Schaltpunkt bei etwa  $\lambda = 0,2$  in der Nähe des Wendepunktes der  $\mu$ -Schlupf Kurve.

In Kapitel 6 wird schließlich auf den Fall eingegangen, dass eine angeforderte Bremskraft die gewünschte Bremskraft übersteigt und nur noch versucht werden kann, die auf dem aktuellen Untergrund maximal mögliche Bremskraft zu erzielen. Dazu wird ein sog. Extremum Seeking verwendet, bei dem die entworfene Regelung als unterlagerter Regelkreis betrachtet und mit einem periodischen Anregungssignal angeregt wird. Dieses wird am Systemausgang durch geeignete Filterung in einen Schätzwert für die Steigung der Reibwertkurve umgewandelt und verschiebt den Sollwert der Regelung in Richtung höherer Reifenkräfte. Es zeigt sich, dass das Maximum der Reibwertkurve gefunden werden kann, die Konvergenzgeschwindigkeit jedoch nur in der Nähe des Maximums zufriedenstellend ist, während sie insbesondere für kleine Schlüpf inakzeptabel hoch ist und im Bereich mehrerer Sekunden liegt, sodass es sich als sinnvoll erwiesen hat, vor Aktivierung des Extremum Seekings bereits einen festen Sollwert vorzugeben, der vermutlich auf vielen in Frage kommenden Untergründen zumindest in der Nähe des Maximums liegt.

## 7.2 Ausblick

Um die Funktionsfähigkeit der Reglerstruktur nicht nur in Simulationen zu zeigen, sondern auch am realen Fahrzeug, sind Fahrzeugtests mit dem Regler auf dem Steuergerät durchzuführen. Im Rahmen der Arbeit wurde zwar bereits der Steuergerätecode für die Fahrzeugtests geschrieben und auch erste, einfache Funktionstests im Fahrzeug durchgeführt, jedoch sind die Messungen im Fahrzeug noch durchzuführen [218]. Für eine Analyse der bereits durchgeführten Tests und die bei der weiteren Untersuchung der Reglerstruktur zu beachtenden Schwierigkeiten sei auf [218] verwiesen.

Darüber hinaus kann das in der Vorsteuerung verwendete Modell des Fahrzeugs erweitert werden, indem bspw. noch die Quer- und Wankdynamik sowie ein dynamischer Reifenkraftaufbau analog zum in [209] vorgeschlagenen Modell hinzugefügt werden, um die vorgeschlagene Regelung auch bei Kurvenbremsungen und nicht nur bei Geradeausfahrt verwenden zu können. Neben der Erweiterung des Modells kann auch das in der Vorsteuerung verwendete Regelungsverfahren ausgetauscht werden, bspw. gegen eines der in Abschnitt 3.2 aufgeführten, wenn sich dies für ein detaillierteres Aktormodell als zweckmäßiger erweisen sollte. Im Zuge dessen können bspw. auch Aktorzustands- oder Stellgrößenbeschränkungen mit der in [74] vorgeschlagenen Methode in den Vorsteuerungsentwurf integriert werden.

In weiterführenden Arbeiten ist zu untersuchen, ob sich die vorgeschlagene Reglerstruktur auch in Kombination mit einem Beobachteransatz für den Radschlupf, wie bspw. in [14] und [97, S. 382 ff.] vorgeschlagen, anwenden lässt und welche Anpassungen eventuell zur Gewährleistung der Stabilität des Gesamtsystems vorgenommen werden müssen. In einem weiteren Schritt ist eine geeignete Trajektoriengenerierung zu entwerfen, die anhand der vom Fahrer oder einem Assistenzsystem vorgegebenen Sollbeschleunigungen oder Sollkräfte den Sollschlupf  $\lambda_{\text{soll}}$  berechnet. Dies kann im einfachsten Fall eine inverse Reifenkennlinie für kleine Schlüpfе zum Einstellen der Reifenkräfte oder, bspw. zum Abdecken der Funktion „Giermomentaufbauverzögerung (GMA)“, der Entwurf eines Verkopplungsreglers nach [99] für die Reifenkräfte an den Rädern einer Achse, wie in [A17] gezeigt, sein.

# Anhang

## A.1 Diskretisierung Einradmodell

Als diskretes Zustandsraummodell erhält man aus Gl. (2.35) die Matrizen

$$\mathbf{A}^d = \begin{bmatrix} a_{11} \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{2\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}} + \frac{e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}{2} & a_{12} \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}} & a_{13}^d \\ a_{21} \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}} & \frac{e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}}{2} + a_{11} \frac{e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}}{2\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}} & a_{23}^d \\ 0 & 0 & e^{a_{33}T} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1a})$$

$$a_{13}^d = a_{13} \frac{2a_{12}a_{21} (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) + 2a_{33} (\lambda_1 e^{\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{\lambda_2 T} - e^{a_{33}T} \sqrt{a_{11} + 4a_{12}a_{21}})}{2\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}} (-a_{33}^2 + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21})}$$

$$a_{23}^d = a_{13} \frac{2a_{21}a_{33} (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}) + 2a_{21} (\lambda_1 e^{\lambda_2 T} - \lambda_2 e^{\lambda_1 T} - e^{a_{33}T} \sqrt{a_{11} + 4a_{12}a_{21}})}{2\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}} (-a_{33}^2 + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21})}$$

$$\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} b_3 a_{13} \frac{(e^{\lambda_2 T} - 2 + e^{\lambda_1 T}) + \frac{a_{11}(e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}) + 2a_{33}(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\sqrt{a_{11} + 4a_{12}a_{21}}} + 2(1 - e^{a_{33}T})}{2(-a_{33}^2 + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21})} \\ \frac{(2a_{33} - a_{11})((e^{\lambda_2 T} - 1)\lambda_1 - \lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1))}{2a_{12}\sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}} - \frac{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) + (e^{\lambda_2 T} - 1)\lambda_1}{2a_{12}} - \frac{a_{21}(e^{a_{33}T} - 1)}{a_{33}} \\ b_3 a_{13} \frac{-a_{33}^2 + a_{11}a_{33} + a_{12}a_{21}}{b_3 \frac{e^{a_{33}T} - 1}{a_{33}}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1b})$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = \frac{a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$  und  $\lambda_2 = \frac{a_{11} - \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}$  in Abhängigkeit der Einträge  $a_{ij}$  der kontinuierlichen Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und  $b_i$  der kontinuierlichen Steuermatrix  $\mathbf{B}$  zu der in Gl. (2.61) angegebenen Systemdarstellung.

## A.2 Diskrete Strukturmaße

Für das Produkt  $\mathbf{B}^d \mathbf{B}^{dT}$  erhält man mit der Rechtseigenvektormatrix  $\mathbf{V}$  und der Linkseigenvektormatrix  $\mathbf{W}$  den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^d \mathbf{B}^{dT} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} d\tau \right)^T \\ &= \int_0^T \mathbf{V} e^{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} d\tau \left( \int_0^T \mathbf{V} e^{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} d\tau \right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} d\tau \left( \int_0^T \mathbf{V} e^{\Lambda \tau} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} d\tau \right)^T \\
&= \mathbf{V} \int_0^T e^{\Lambda \tau} d\tau \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{V}^{-T} \int_0^T e^{\Lambda^T \tau} d\tau \mathbf{V}^T \\
&= \mathbf{V} \int_0^T e^{\Lambda \tau} d\tau \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \int_0^T e^{\Lambda^T \tau} d\tau \mathbf{V}^T
\end{aligned}$$

und damit für den in Gl. (2.72) benötigten Ausdruck

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_i^T \mathbf{B}^d \mathbf{B}^{dT} \mathbf{w}_i &= [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0] \int_0^T e^{\lambda_i \tau} d\tau \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \int_0^T e^{\lambda_i \tau} d\tau \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
&= \left( \int_0^T e^{\lambda_i \tau} d\tau \right)^2 e_i^T \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W}^T e_i \\
&= \left( \int_0^T e^{\lambda_i \tau} d\tau \right)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i \\
&= \begin{cases} T^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i, & \lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\lambda_i^2} (e^{\lambda_i T} - 1)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i, & \lambda_i \neq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} T^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i, & \lambda_i = 0 \\ \left( T + \frac{\lambda_i T^2}{2} + \frac{\lambda_i^2 T^3}{6} + \dots \right)^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i, & \lambda_i \neq 0 \end{cases} \\
&\simeq T^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{w}_i, \quad \lambda_i T \ll 1,
\end{aligned}$$

damit das kontinuierliche und das diskrete Steuerbarkeitsmaß für unterschiedliche Abtastzeiten vergleichbare Werte liefern.

Damit der Einfluss des Stabilität des Eigenwertes auf das Strukturmaß im Diskreten in der gleichen Weise wie im Kontinuierlichen erfolgt, wird der Term

$$e^{2(1-|\lambda_i^d|)} \tag{A.2}$$

verwendet.

## A.3 Eigenwertgradienten

In diesem Abschnitt sollen die Ableitungen der Eigenwerte nach den Koeffizienten der Verstärkungsmatrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{R}$  aus Abschnitt 3.3.2.1 hergeleitet werden.

Ausgehend von der Rechtseigenvektorgleichung

$$\lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \mathbf{v}_k \quad (\text{A.3a})$$

und der Linkseigenvektorgleichung

$$\mathbf{w}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') = \mathbf{w}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \quad (\text{A.3b})$$

des  $k$ -ten Eigenwertes  $\lambda_k$  des mit den Reglermatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{K}$  geschlossenen Regelkreises kann Gl. (A.3a) elementweise nach den Komponenten  $k_{ij}$  von  $\mathbf{K}$  zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}} &= \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{BKC}'}{\partial k_{ij}} \mathbf{v}_k + \dots \\ &\dots + \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

abgeleitet werden und von links mit den zu  $\lambda_k$  gehörigen Linkseigenvektoren multipliziert werden, sodass sich mit  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_{ij}} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}} &= \mathbf{w}_k^T \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k - \lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{v}_k + \dots \\ &\dots + \mathbf{w}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.4b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k &= \lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{v}_k + \dots \\ &\dots + \underbrace{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}} - \mathbf{w}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial k_{ij}}}_{=0^T} \end{aligned} \quad (\text{A.4c})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{v}_k \quad (\text{A.4d})$$

ergibt [60, S. 571]. Mit  $\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k \neq 0$  erhält man daraus

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} = \frac{\lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{v}_k}{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k} \quad (\text{A.4e})$$

als gesuchte Ableitung der Eigenwerte nach der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{11}} & \dots & \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{1r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{m1}} & \dots & \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{mr}} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Das selbe Ergebnis lässt sich auch unter Ableitung des RAYLEIGHquotienten, also beginnend mit Gl. (A.4b), für normierte Eigenvektoren erzielen [170, S. 943 f.]. Ein analoges Vorgehen für die Ableitung der Eigenwerte nach der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{R}$  liefert

$$-\frac{\partial \mathbf{BRC}}{\partial r_{ij}} \mathbf{v}_k + (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k + \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial r_{ij}} \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{w}_k^T \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k = -\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k + \dots \quad (\text{A.6b})$$

$$\dots + \underbrace{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial r_{ij}} - \mathbf{w}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial r_{ij}}}_{=0^T}$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} \mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k = -\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k \quad (\text{A.6c})$$

und mit  $\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k \neq 0$  folgt daraus

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} = -\frac{\mathbf{w}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k}{\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k}. \quad (\text{A.6d})$$

Die berechneten Ableitungen existieren für einfache Eigenwerte  $\lambda_k$  immer, da sowohl der Eigenwert als auch die zugehörigen Rechts- und Linkseigenvektoren analytische Funktionen in  $k_{ij}$  bzw.  $r_{ij}$  sind und  $\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k \neq 0$  ist [8, S. 906 f.]. Für *halbeinfache* Eigenwerte, bei denen die algebraische Vielfachheit der geometrischen Vielfachheit entspricht, kann entweder anstatt der Eigenvektoren  $\mathbf{v}_k$  und  $\mathbf{w}_k^T$  ein entsprechender Hauptvektor eingesetzt werden, da auch dann  $\mathbf{w}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{v}_k \neq 0$  ist, oder ein anderes Verfahren verwendet werden [8, S. 907]. Bei halbeinfachen Eigenwerten ist jede Linearkombination von Eigenvektoren

$$\tilde{\mathbf{v}}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{c}_k$$

zu einem mehrfachen Eigenwert  $\lambda_k$  wieder ein Eigenvektor [140, S. 362]. Ausgehend von Gl. (A.3a) für die zu den Eigenwerten  $\lambda_k$  gehörende Eigenvektormatrix  $\mathbf{V}_k$  kann wieder nach den Komponenten  $k_{ij}$  zu

$$\mathbf{0} = (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \lambda_k \tilde{\mathbf{v}}_k - (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \tilde{\mathbf{v}}_k \quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}} &= \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \tilde{\mathbf{v}}_k - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{BKC}'}{\partial k_{ij}} \tilde{\mathbf{v}}_k + \dots \\ &\dots + \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.7b})$$

abgeleitet werden und von links mit der Linkseigenvektormatrix multipliziert werden, sodass

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}} &= \mathbf{W}_k^T \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \tilde{\mathbf{v}}_k - \lambda_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_k + \dots \\ &\dots + \mathbf{W}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.7c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \mathbf{W}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \tilde{\mathbf{v}}_k &= \lambda_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \tilde{\mathbf{v}}_k + \dots \\ &\dots + \underbrace{\mathbf{W}_k^T (\mathbf{A} - \mathbf{BRC}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}} - \mathbf{W}_k^T \lambda_k (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_k}{\partial k_{ij}}}_{= \mathbf{0}^T} \end{aligned} \quad (\text{A.7d})$$

entsteht. Daraus ergibt sich das Eigenwertproblem

$$\mathbf{0} = \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}} \mathbf{W}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{V}_k - \lambda_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{V}_k \right) \mathbf{c}_k$$

mit dem Eigenwert  $\frac{\partial \lambda_k}{\partial k_{ij}}$  und dem Eigenvektor  $\mathbf{c}_k$  [140, S. 363]. Für die Ableitung nach den Komponenten von  $\mathbf{R}$  erhält man analog

$$\mathbf{0} = \left( \mathbf{W}_k^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{C}' \mathbf{V}_k + \mathbf{W}_k^T (\mathbf{E} - \mathbf{BKC}') \mathbf{V}_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}} \right) \mathbf{c}_k. \quad (\text{A.8})$$

Wenn dies für das gewöhnliche Eigenwertproblem weiter auf den Fall mehrfacher Eigenwerte in dem entstehenden Eigenwertproblem für  $\frac{\partial \lambda_k}{\partial r_{ij}}$  erweitert wird, so ergibt sich die Methode von VAN DER AA, mit der eine stetig differenzierbare Ableitung der Eigenvektoren ermittelt werden kann [214].

# Literaturverzeichnis

- [1] ABDALLAH, M. B., M. AYADI, F. ROTELLA und M. BENREJEB: *Time-varying controller based on flatness for nonlinear anti-lock brake system*. In: *Systems Science & Control Engineering*, 1(1):S. 91–104, 2013. DOI: 10.1080/21642583.2013.857619 (Referenziert auf Seite 9).
- [2] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Aufl. Springer Vieweg, Berlin, 2018. ISBN: 978-3-662-55684-9 (Referenziert auf den Seiten 34, 36, 54, 57, 60, 61).
- [3] AGULHARI, C. M., R. C. L. F. OLIVEIRA und P. L. D. PERES: *Algorithm 998: Robust LMI Parser. A Toolbox to Construct LMI Conditions for Uncertain Systems*. In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45(3):S. 1–25, 2019. DOI: 10.1145/3323925 (Referenziert auf den Seiten 100, 101).
- [4] ALI, H. und A. SAEED: *Robust Tuning of PI-PD Controller for Antilock Braking System*. In: *Al-Nahrain Journal for Engineering Sciences*, 20(4):S. 983–995, 2017 (Referenziert auf Seite 9).
- [5] ALY, A. A., E.-S. ZEIDAN, A. HAMED und F. SALEM: *An Antilock-Braking Systems (ABS) Control. A Technical Review*. In: *Intelligent Control and Automation*, 02(03):S. 186–195, 2011. DOI: 10.4236/ica.2011.23023 (Referenziert auf Seite 9).
- [6] AMATO, F.: *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Bd. 325. Springer, Berlin und Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-23950-5. (Referenziert auf Seite 101).
- [7] ANDERSON, G.: *A procedure for differentiating perfect-foresight-model reduced-from coefficients*. In: *Journal of Economic Dynamics and Control*, 11(4):S. 465–481, 1987. DOI: 10.1016/S0165-1889(87)80001-5 (Referenziert auf Seite 87).
- [8] ANDREW, A. L., K.-W. E. CHU und P. LANCASTER: *Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of Matrix Functions*. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14(4):S. 903–926, 1993. DOI: 10.1137/0614061 (Referenziert auf Seite 126).
- [9] ARIYUR, K. B. und M. KRSTIĆ: *Real-time optimization by extremum-seeking control*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2004. ISBN: 978-0-471-46859-2. (Referenziert auf den Seiten 11, 58, 110, 112).
- [10] ARNOLD, A. und T. BRANDMEIER: *Wheel Slip Control by Means of Sluggish Actuators*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 34(1):S. 331–337, 2001. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)34419-1 (Referenziert auf Seite 9).



- [11] ARNOLD, A.: *Analyse und Regelung eines nichtlinearen Bremssystems mit elektromechanischen Stellgliedern*. Naturwissenschaftliche Fakultät II - Physik. Dissertation. Universität Regensburg, Regensburg, 2001 (Referenziert auf den Seiten 9, 16, 17).
- [12] ÅSTRÖM, K. J. und T. HÄGGLUND: *PID Controllers - Theory, Design, and Tuning*. 2. Aufl. ISA, 1995. ISBN: 978-1-556-17516-9 (Referenziert auf den Seiten 97, 98).
- [13] BAUER, M.: *Methoden zur modellbasierten Fahrdynamikanalyse und Bewertung von Fahrdynamikregelsystemen*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2015. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2015. ISBN: 978-3-18-379212-2 (Referenziert auf Seite 116).
- [14] BECHTLOFF, J.: *Schätzung des Schwimmwinkels und fahrdynamischer Parameter zur Verbesserung modellbasierter Fahrdynamikregelungen*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2018. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2018. ISBN: 978-3-18-380912-7 (Referenziert auf den Seiten 5, 30, 33, 122).
- [15] BENNINGER, N. F. und J. RIVOIR: *Ein neues konsistentes Maß zur Beurteilung der Steuerbarkeit in linearen, zeitinvarianten Systemen*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 34(1-12):S. 473–479, 1986. DOI: 10.1524/auto.1986.34.112.473 (Referenziert auf Seite 43).
- [16] BOLDO, S., F. FAISOLE und A. CHAPOUTOT: *Round-off Error Analysis of Explicit One-Step Numerical Integration Methods*. In: *24th IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (London, UK, 24.–26. Juli 2017). IEEE, Piscataway, NJ, S. 82–89, 2017. ISBN: 978-1-5386-1965-0. DOI: 10.1109/ARITH.2017.22 (Referenziert auf Seite 36).
- [17] BOSCH, S.: *Lineare Algebra*. 4. Aufl. Springer, Berlin und Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-76437-3. (Referenziert auf Seite 89).
- [18] BRAESS, H.-H.: *Vieweg-Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*. 7. Aufl. ATZ. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013. ISBN: 978-3-658-01690-6. (Referenziert auf den Seiten 14, 16, 28).
- [19] BRAGA, M. F., C. F. MORAIS, E. S. TOGNETTI, R. C. L. F. OLIVEIRA und P. L. D. PERES: *A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems*. In: *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Florenz, Italien, 10.–13. Dez. 2013). IEEE, Piscataway, NJ, S. 6397–6402, 2013. ISBN: 978-1-4673-5717-3. DOI: 10.1109/CDC.2013.6760901 (Referenziert auf Seite 100).
- [20] BRAGA, M. F., C. F. MORAIS, E. S. TOGNETTI, R. C. L. F. OLIVEIRA und P. L. D. PERES: *Discretisation and control of polytopic systems with uncertain sampling rates and network-induced delays*. In: *International Journal of Control*, 87(11):S. 2398–2411, 2014. DOI: 10.1080/00207179.2014.923585 (Referenziert auf Seite 100).
- [21] BRAUN, T., J. REUTER und J. RUDOLPH: *Sensorlose Positionsregelung eines hydraulischen Proportional-Wegeventils mittels Signalinjektion*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 65(4):S. 260–269, 2017. DOI: 10.1515/auto-2017-0003 (Referenziert auf Seite 15).

- [22] BREUER, B. und K. BILL, Hrsg.: *Bremsenhandbuch. Grundlagen, Komponenten, Systeme, Fahrdynamik*. 4. Aufl. ATZ. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013. ISBN: 978-3-8348-1796-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-2225-3 (Referenziert auf den Seiten 1, 2, 4, 6, 7, 11, 14–16).
- [23] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAEV: *Springer-Handbuch der Mathematik III. Begründet von I. N. Bronstein und K. A. Semendjaew. Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler. Herausgegeben von E. Zeidler*. Hrsg. von ZEIDLER, E. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013. ISBN: 978-3-658-00274-9. (Referenziert auf Seite 34).
- [24] BROUWER, D.: *On the accumulation of errors in numerical integration*. In: *The Astronomical Journal*, 46(1072):S. 149–153, 1937. DOI: 10.1086/105423 (Referenziert auf Seite 36).
- [25] BROYDEN, C. G.: *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms I. General Considerations*. In: *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1):S. 76–90, 1970. DOI: 10.1093/imamat/6.1.76 (Referenziert auf Seite 90).
- [26] BRYSON, A. E. und Y.-C. HO: *Applied optimal control. Optimization, estimation, and control*. Taylor & Francis, Bristol, 1975. ISBN: 978-0-891-16228-5 (Referenziert auf Seite 6).
- [27] BURCKHARDT, M. und J. REIMPELL, Hrsg.: *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme*. 1. Aufl. Vogel-Fachbuch Kraftfahrzeugtechnik. Vogel, Würzburg, 1993. ISBN: 978-3-802-30477-2 (Referenziert auf den Seiten 1, 22, 23, 25).
- [28] BUSCHER, M.: *Radschlupfregelung zur maximalen Kraftschlussausnutzung bei elektrischen Traktionsantrieben*. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1995 (Referenziert auf Seite 11).
- [29] CANUDAS DE WIT, C., H. OLSSON, K. J. ÅSTRÖM und P. LISCHINSKY: *A new model for control of systems with friction*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):S. 419–425, 1995. DOI: 10.1109/9.376053 (Referenziert auf Seite 24).
- [30] CANUDAS DE WIT, C., M. L. PETERSEN und A. SHIRIAEV: *A new nonlinear observer for tire/road distributed contact friction*. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Maui, Hawaii, USA, 9.–12. Dez. 2003). IEEE, Piscataway, NJ, S. 2246–2251, 2003. ISBN: 0-7803-7924-1. DOI: 10.1109/CDC.2003.1272952 (Referenziert auf Seite 10).
- [31] CANUDAS DE WIT, C. und P. TSIOTRAS: *Dynamic tire friction models for vehicle traction control*. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Phoenix, AZ, USA, 7.–10. Dez. 1999). IEEE, Piscataway, NJ, S. 3746–3751, 1999. ISBN: 0-7803-5250-5. DOI: 10.1109/CDC.1999.827937 (Referenziert auf Seite 24).
- [32] CANUDAS DE WIT, C., P. TSIOTRAS, E. VELENIS, M. BASSET und G. L. GISSINGER: *Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction*. In: *Vehicle System Dynamics*, 39(3):S. 189–226, 2003. DOI: 10.1076/vesd.39.3.189.14152 (Referenziert auf Seite 24).

- [33] CARDIM, R., M. C. M. TEIXEIRA, E. ASSUNCAO und A. FLAVIO: *Control Designs for Linear Systems Using State-Derivative Feedback*. In: *Integral Sliding Modes with Block Control of Multimachine Electric Power Systems*. Hrsg. von HUERTA, H., A. LOUKIANOV und J. M. CANEDO. INTECH Open Access Publisher, Rijeka, 2008. ISBN: 978-953-7619-05-3. DOI: 10.5772/6033 (Referenziert auf Seite 79).
- [34] CHILALI, M., P. GAHINET und P. APKARIAN: *Robust pole placement in LMI regions*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12):S. 2257–2270, 1999. DOI: 10.1109/9.811208 (Referenziert auf Seite 102).
- [35] CHO, D.-W. und S. CHOI: *Control of Wheel Slip Ratio Using Sliding Mode Controller with Pulse Width Modulation*. In: *Vehicle System Dynamics*, 32(4-5):S. 267–284, 1999. DOI: 10.1076/vesd.32.4.267.2080 (Referenziert auf Seite 7).
- [36] CHOI, J.-H., J.-K. LEE, S.-Y. YANG und S.-T. PARK: *A robust controller for maximizing braking force despite of the parameter variation*. In: *Proceedings of the 4th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology (KORUS 2000)* (Ulsan, Südkorea, 27. Juni–1. Juli 2000). IEEE, Piscataway, NJ, S. 61–65, 2000. ISBN: 0-7803-6486-4. DOI: 10.1109/KORUS.2000.866060 (Referenziert auf Seite 9).
- [37] CHOI, J.-Y., M. KRSTIĆ, K. B. ARIYUR und J. S. LEE: *Extremum seeking control for discrete-time systems*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):S. 318–323, 2002. DOI: 10.1109/9.983370 (Referenziert auf Seite 112).
- [38] CHOI, S. B.: *Antilock Brake System With a Continuous Wheel Slip Control to Maximize the Braking Performance and the Ride Quality*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(5):S. 996–1003, 2008. DOI: 10.1109/TCST.2007.916308 (Referenziert auf den Seiten 9, 11).
- [39] ČIROVIĆ, V. und D. ALEKSENDRIĆ: *Adaptive neuro-fuzzy wheel slip control*. In: *Expert Systems with Applications*, 40(13):S. 5197–5209, 2013. DOI: 10.1016/j.eswa.2013.03.012 (Referenziert auf Seite 8).
- [40] CORNO, M., M. GERARD, M. VERHAEGEN und E. HOLWEG: *Hybrid ABS Control Using Force Measurement*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(5):S. 1223–1235, 2012. DOI: 10.1109/TCST.2011.2163717 (Referenziert auf Seite 7).
- [41] CURTIS, F. E.: *A Self-Correcting Variable-Metric Algorithm for Stochastic Optimization*. In: *Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning* (New York, NY, USA, 20.–22. Juni 2016). Hrsg. von BALCAN, M. F. und K. Q. WEINBERGER. Bd. 48. Proceedings of Machine Learning Research. PMLR, New York, NY, USA, S. 632–641, 2016 (Referenziert auf Seite 90).
- [42] CURTIS, F. E. und M. L. OVERTON: *A Sequential Quadratic Programming Algorithm for Nonconvex, Nonsmooth Constrained Optimization*. In: *SIAM Journal on Optimization*, 22(2):S. 474–500, 2012 (Referenziert auf Seite 90).

- [43] DEGENSTEIN, T.: *Kraftmessung in Scheibenbremsen*. Institut für Fahrzeugtechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2007 (Referenziert auf Seite 14).
- [44] DEGENSTEIN, T.: *The “ $\mu$  – value”. Friction Level Determination in Brake Systems*. In: *8th Colloquium Internacional SAE Brasil de Freios*. Gramado, Brasilien, 2007 (Referenziert auf Seite 14).
- [45] DELGADO, E., A. BARREIRO, M. DIAZ-CACHO und P. FALCON: *Wheel slip reset controller in automotive brake systems*. In: *IEEE International Electric Vehicle Conference (IEVC)* (Florenz, Italien, 17.–19. Dez. 2014). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1–6, 2014. ISBN: 978-1-4799-6075-0. DOI: 10.1109/IEVC.2014.7056103 (Referenziert auf Seite 9).
- [46] DEL ROCIO AGUADO ROJAS, M. M.: *On Control and Estimation Problems in Antilock Braking Systems*. Laboratoire des Signaux et Systèmes. Dissertation. Université Paris Sud, Paris, 2019 (Referenziert auf Seite 10).
- [47] DEL ROCIO AGUADO ROJAS, M. M., W. PASILLAS-LÉPINE und A. LORÍA: *A hybrid controller for ABS based on extended-braking-stiffness estimation*. In: *IFAC-PapersOnLine*, 52(5):S. 452–457, 2019. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.09.072 (Referenziert auf Seite 10).
- [48] DE VRIES, E. J. H.: *Model-Based Brake Control including Tyre Behaviour*. Dissertation. TU Delft, 2012 (Referenziert auf den Seiten 9, 53).
- [49] DINCMEN, E., B. A. GUVENC und T. ACARMAN: *Extremum-Seeking Control of ABS Braking in Road Vehicles With Lateral Force Improvement*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(1):S. 230–237, 2014. DOI: 10.1109/TCST.2012.2229465 (Referenziert auf Seite 11).
- [50] DÖRING, D.: *Ein Beitrag zur Synthese von Gain-Schedulingreglern unter Nutzung normierter Gaußscher Radial-Basisfunktionen*. Zugl.: Magdeburg, Univ., Fak. für Elektrotechnik und Informationstechnik, Diss. Logos Verlag, Berlin, 2003. ISBN: 987-3-832-50465-6 (Referenziert auf Seite 58).
- [51] DOUGLAS, D. H. und T. K. PEUCKER: *Algorithms for the Reduction of the Number of Points Required to Represent a Digitized Line or its Caricature*. In: *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 10(2):S. 112–122, 1973. DOI: 10.3138/FM57-6770-U75U-7727 (Referenziert auf Seite 102).
- [52] DRAKUNOV, S., U. ÖZGÜNER, P. DIX und B. ASHRAFI: *ABS control using optimum search via sliding modes*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):S. 79–85, 1995. DOI: 10.1109/87.370698 (Referenziert auf den Seiten 7, 11).
- [53] EL GHAOU, L. und S.-I. NICULESCU: *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. ISBN: 978-0-89871-438-8. (Referenziert auf Seite 103).

- [54] EULER-ROLLE, N., I. ŠKRJANC, C. HAMETNER und S. JAKUBEK: *Automated generation of feedforward control using feedback linearization of local model networks*. In: *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50:S. 320–330, 2016. DOI: 10.1016/j.engappai.2016.01.039 (Referenziert auf Seite 20).
- [55] EUROPÄISCHE UNION: *Regelung Nr. 13 der Wirtschaftskommission für Europa der Vereinten Nationen (UNECE) - Einheitliche Vorschriften für die Typgenehmigung von Fahrzeugen der Klassen M, N, und O hinsichtlich der Bremsen*. 2016/194. 18. Feb. 2016 (Referenziert auf Seite 117).
- [56] EUROPÄISCHE UNION: *Verordnung (EG) Nr. 715/2007 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 20. Juni 2007 über die Typgenehmigung von Kraftfahrzeugen hinsichtlich der Emissionen von leichten Personenkraftwagen und Nutzfahrzeugen (Euro 5 und Euro 6) und über den Zugang zu Reparatur- und Wartungsinformationen für Fahrzeuge*. 715/2007. 31. Dez. 2012 (Referenziert auf Seite 1).
- [57] FLOATER, M. S., K. HORMANN und G. KÓS: *A general construction of barycentric coordinates over convex polygons*. In: *Advances in Computational Mathematics*, 24(1-4):S. 311–331, 2006. DOI: 10.1007/s10444-004-7611-6 (Referenziert auf Seite 52).
- [58] FLORESCU, J.: *State-Space PD Feedback Control*. In: *International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering*, 2(5):S. 753–757, 2008 (Referenziert auf Seite 79).
- [59] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Unter Mitarb. von KONIGORSKI, U., B. LOHMANN, G. ROPPENECKER und A. TRÄCHTLER. 12. Aufl. VDE Verlag, Berlin und Offenbach, 2016. ISBN: 978-3-8007-4201-1 (Referenziert auf den Seiten 82, 83, 85).
- [60] FÖLLINGER, O. und F. DÖRRSCHEIDT: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Aufl. Hüthig, Heidelberg, 1994. ISBN: 3-7785-2915-3 (Referenziert auf den Seiten 79, 80, 125).
- [61] GAHINET, P., A. NEMIROVSKI, A. J. LAUB und M. CHILALI: *LMI control toolbox user's guide*. 1995 (Referenziert auf Seite 52).
- [62] GERMANN, S.: *Modellbildung und modellgestützte Regelung der Fahrzeuglängsdynamik*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1997 (Referenziert auf Seite 17).
- [63] GHAFARI, A., M. KRSTIĆ und D. NEŠIĆ: *Multivariable Newton-based extremum seeking*. In: *Automatica*, 48(8):S. 1759–1767, 2012. DOI: 10.1016/j.automatica.2012.05.059 (Referenziert auf Seite 113).
- [64] GIESSLER, M.: *Mechanismen der Kraftübertragung des Reifens auf Schnee und Eis*. Zugl.: Karlsruhe, KIT, Diss., 2011. Bd. 11. Karlsruher Schriftenreihe Fahrzeugsystemtechnik. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe, 2012. ISBN: 978-3-866-44806-3 (Referenziert auf Seite 105).

- [65] GILL, P. E., W. MURRAY und M. A. SAUNDERS: *SNOPT. An SQP algorithm for large-scale constrained optimization*. In: *SIAM Rev*, 47:S. 99–131, 2005 (Referenziert auf Seite 94).
- [66] GILL, P. E., W. MURRAY, M. A. SAUNDERS und E. WONG: *User's Guide for SNOPT 7.7. Software for Large-Scale Nonlinear Programming*. Center for Computational Mathematics Report. Department of Mathematics, University of California, San Diego, La Jolla, CA, 2018 (Referenziert auf Seite 90).
- [67] GRIZZLE, J. W.: *Feedback Linearization of Discrete-Time Systems*. In: *Analysis and Optimization of Systems. Proceedings of the Seventh International Conference on Analysis and Optimization of Systems (Antibes, Frankreich, 25.-27. Juni 1986)*. Hrsg. von BENSOUSSAN, A. und J. L. LIONS. Bd. 83. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, Berlin und Heidelberg, 1986, S. 273–281. ISBN: 978-3-540-16729-7. DOI: 10.1007/BFb0007564 (Referenziert auf den Seiten 62, 68).
- [68] GROSSBICHLER, M., R. SCHMIED, P. POLTERAUER, H. WASCHL und L. DEL RE: *A robustified Newton based extremum seeking for engine optimization*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC) (Boston, MA, USA, 6.–8. Juli 2016)*. IEEE, Piscataway, NJ, S. 3280–3285, 2016. ISBN: 978-1-4673-8682-1. DOI: 10.1109/ACC.2016.7525423 (Referenziert auf Seite 114).
- [69] GRÜN, M.: *Regelungstechnische Aspekte bei aktiven Knieorthesen zur Mobilitätsunterstützung älterer Menschen*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss. 2014. Dissertation. epubli, Darmstadt. ISBN: 978-3-7375-3928-9 (Referenziert auf Seite 40).
- [70] GUAN, H., B. WANG, P. LU und L. XU: *Identification of maximum road friction coefficient and optimal slip ratio based on road type recognition*. In: *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 27(5):S. 1018–1026, 2014. DOI: 10.3901/CJME.2014.0725.128 (Referenziert auf Seite 10).
- [71] GUNDLACH, I.: *Zeitoptimale Trajektorienplanung für automatisiertes Fahren bis in den fahrdynamischen Grenzbereich*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2020 (Referenziert auf Seite 2).
- [72] HAIRER, E., R. I. MCLACHLAN und A. RAZAKARIVONY: *Achieving Brouwer's law with implicit Runge-Kutta methods*. In: *BIT Numerical Mathematics*, 48(2):S. 231–243, 2008. DOI: 10.1007/s10543-008-0170-3 (Referenziert auf Seite 36).
- [73] HANSEN, T.: *Kombinierte Längs- und Quertrajektorienplanung für automatisierte Fahrstreifenwechsel*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2018 (Referenziert auf Seite 2).
- [74] HAUS, S.: *An extension to dynamic inversion for systems with state and actuator constraints*. 1. Aufl. Verlag Dr. Hut, München, 2014. ISBN: 978-3-8439-1490-1 (Referenziert auf Seite 122).

- [75] HEISSING, B., Hrsg.: *Fahrwerkhandbuch. Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven*. 4. Aufl. ATZ. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2013. ISBN: 978-3-658-01991-4. DOI: 10.1007/978-3-658-01992-1 (Referenziert auf Seite 23).
- [76] HERCEG, M., M. KVASNICA, C. N. JONES und M. MORARI: *Multi-Parametric Toolbox 3.0*. In: *European Control Conference (ECC)* (Zürich, Schweiz, 17.–19. Juli 2013). <http://control.ee.ethz.ch/~mpt>. IEEE, Piscataway, NJ, S. 502–510, 2013. ISBN: 978-3-033-03962-9. DOI: 10.23919/ECC.2013.6669862 (Referenziert auf Seite 102).
- [77] HIPPE, P.: *Windup in Control*. Springer, London, 2006. ISBN: 1-84628-322-1. (Referenziert auf Seite 98).
- [78] HIRSCHORN, R.: *Invertibility of multivariable nonlinear control systems*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6):S. 855–865, 1979. DOI: 10.1109/TAC.1979.1102181 (Referenziert auf Seite 62).
- [79] HOEDT, J.: *Fahrdynamikregelung für fehlertolerante X-By-Wire-Antriebstopologien*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2013 (Referenziert auf den Seiten 2, 30).
- [80] HOROWITZ, I. M.: *Synthesis of Feedback Systems*. Elsevier Science, Burlington, 1963. ISBN: 978-1-483-23282-9. (Referenziert auf Seite 55).
- [81] HSU, C.-F., T.-T. LEE, C.-Y. HSU und C.-M. LIN: *Neurocontroller design and stability analysis for antilock braking systems*. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)* (Singapur, Singapur, 12.–15. Okt. 2008). IEEE, Piscataway, NJ, S. 3388–3393, 2008. ISBN: 978-1-4244-2383-5. DOI: 10.1109/ICSMC.2008.4811821 (Referenziert auf Seite 8).
- [82] ISERMANN, R.: *Automotive Control. Modeling and Control of Vehicles*. 1. Aufl. ATZ/MTZ-Fachbuch. Springer, Berlin und Heidelberg, 2021. ISBN: 978-3-642-39439-3. (Referenziert auf Seite 17).
- [83] ISERMANN, R.: *Fahrdynamik-Regelung. Modellbildung, Fahrerassistenzsysteme, Mechatronik*. Hrsg. von ISERMANN, R. 1. Aufl. ATZ/MTZ-Fachbuch. Vieweg, Wiesbaden, 2006. ISBN: 978-3-8348-0109-8. (Referenziert auf den Seiten 2–4, 17, 22).
- [84] ISIDORI, A.: *Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems*. Advanced textbooks in control and signal processing. Springer International Publishing, Cham, 2017. ISBN: 978-3-319-42030-1. (Referenziert auf Seite 72).
- [85] JIANG, F. und Z. GAO: *An application of nonlinear PID control to a class of truck ABS problems*. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Orlando, FL, USA, 4.–7. Dez. 2001). IEEE, Piscataway, NJ, S. 516–521, 2001. ISBN: 0-7803-7061-9. DOI: 10.1109/CDC.2001.980154 (Referenziert auf Seite 9).
- [86] JOHANSEN, T. A., I. PETERSEN, J. KALKKUHL und J. LÜDEMANN: *Gain-scheduled wheel slip control in automotive brake systems*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(6):S. 799–811, 2003. DOI: 10.1109/TCST.2003.815607 (Referenziert auf Seite 74).

- [87] JOHN, S.: *Artificial intelligent-based feedforward optimized PID wheel slip controller*. In: *AFRICON 2013* (Pointe-Aux-Piments, Mauritius, 9.–12. Sep. 2013). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1–6, 2013. ISBN: 978-1-4673-5943-6. DOI: 10.1109/AFRCON.2013.6757683 (Referenziert auf Seite 8).
- [88] JOHN, S. und J. O. PEDRO: *A comparative study of two control schemes for anti-lock braking systems*. In: *9th Asian Control Conference (ASCC)* (Istanbul, Türkei, 23.–26. Juni 2013). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1–6, 2013. ISBN: 978-1-4673-5769-2. DOI: 10.1109/ASCC.2013.6606061 (Referenziert auf Seite 8).
- [89] JOHNSON, A.: *The Culture of ABS*. In: *Mechanical Engineering*, 132(09):S. 26–31, 2010. DOI: 10.1115/1.2010-Sep-1 (Referenziert auf Seite 1).
- [90] JOHNSON, S. G.: *The NLopt nonlinear-optimization package*. 2018. URL: <http://ab-initio.mit.edu/nlopt> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 90).
- [91] KAHANE, C. J. und J. N. DANG: *The Long-Term Effect of ABS in Passenger Cars and LTVs*. National Highway Traffic Safety Administration, 2009 (Referenziert auf Seite 1).
- [92] KASSAS, Z. M.: *Discretisation of continuous-time dynamic multi-input multi-output systems with non-uniform delays*. In: *IET Control Theory & Applications*, 5(14):S. 1637–1647, 2011. DOI: 10.1049/iet-cta.2010.0467 (Referenziert auf den Seiten 39, 66).
- [93] KASSAS, Z. M. und R. DUNIA: *Discretization of MIMO Systems with Nonuniform Input and Output Fractional Time Delays*. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (San Diego, CA, USA, 13.–15. Dez. 2006). IEEE, Piscataway, NJ, S. 2541–2546, 2006. ISBN: 1-4244-0171-2. DOI: 10.1109/CDC.2006.376965 (Referenziert auf Seite 39).
- [94] KAYACAN, E., Y. ONIZ, O. KAYNAK und A. V. TOPALOV: *Adaptive Control of Antilock Braking System Using Grey Multilayer Feedforward Neural Networks*. In: *Seventh International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)* (San Diego, CA, USA, 11.–13. Dez. 2008). IEEE, Piscataway, NJ, S. 356–361, 2008. ISBN: 978-0-7695-3495-4. DOI: 10.1109/ICMLA.2008.15 (Referenziert auf Seite 8).
- [95] KEATING, B. und A. ALLEYNE: *Time-varying Newton based extremum seeking for optimization of vapor compression systems*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)* (Seattle, WA, USA, 24.–26. Mai 2017). IEEE, Piscataway, NJ, S. 31–36, 2017. ISBN: 978-1-5090-5992-8. DOI: 10.23919/ACC.2017.7962926 (Referenziert auf Seite 113).
- [96] KIENCKE, U.: *Realtime Estimation of Adhesion Characteristic between Tyres and Road*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 26(2):S. 15–18, 1993. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)48673-3 (Referenziert auf den Seiten 10, 25).
- [97] KIENCKE, U. und L. NIELSEN: *Automotive Control Systems*. Springer, Berlin und Heidelberg, 2005. ISBN: 978-3-540-23139-4. (Referenziert auf Seite 122).



- [98] KOCH, S. und M. REICHHARTINGER: *Discrete-time equivalents of the super-twisting algorithm*. In: *Automatica*, 107:S. 190–199, 2019. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.05.040 (Referenziert auf den Seiten 8, 54).
- [99] KONIGORSKI, U.: *Ausgangsgrößenverkopplung bei linearen Mehrgrößensystemen*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 47(4):S. 165–170, 1999. DOI: 10.1524/auto.1999.47.4.165 (Referenziert auf Seite 122).
- [100] KONIGORSKI, U.: *Entwurf robuster strukturbeschränkter Zustandsregelungen durch Polgebietsvorgabe mittels Straffunktionen*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 35(1-12):S. 250–254, 1987. DOI: 10.1524/auto.1987.35.112.254 (Referenziert auf Seite 84).
- [101] KRAFTFAHRTBUNDESAMT: *Bestand an Pkw in den Jahren 2011 bis 2020 nach ausgewählten Kraftstoffarten*. Kraftfahrtbundesamt. 2020. URL: [https://www.kba.de/DE/Statistik/Fahrzeuge/Bestand/Umwelt/fz\\_b\\_umwelt\\_archiv/2020/2020\\_b\\_umwelt\\_z.html?nn=2601598](https://www.kba.de/DE/Statistik/Fahrzeuge/Bestand/Umwelt/fz_b_umwelt_archiv/2020/2020_b_umwelt_z.html?nn=2601598) (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 16).
- [102] KREISSELMEIER, G.: *Struktur mit zwei Freiheitsgraden*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 47(6):S. 266–269, 1999. DOI: 10.1524/auto.1999.47.6.266 (Referenziert auf Seite 55).
- [103] KREISSELMEIER, G. und R. STEINHAUSER: *Systematische Auslegung von Reglern durch Optimierung eines vektoriiellen Gütekriteriums*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 27(1-12):S. 76–79, 1979. DOI: 10.1524/auto.1979.27.112.76 (Referenziert auf Seite 83).
- [104] KUNTSEVICH, A. und F. KAPPEL: *SolvOpt*. 2020. URL: <https://imsc.uni-graz.at/kuntsevich/solvopt/index.html> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 90).
- [105] KUO, C.-Y. und E. C. YEH: *A Four-Phase Control Scheme of an Anti-Skid Brake System for all Road Conditions*. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 206(4):S. 275–283, 1992. DOI: 10.1243/PIME\_PROC\_1992\_206\_188\_02 (Referenziert auf Seite 7).
- [106] LAGARIAS, J. C., J. A. REEDS, M. H. WRIGHT und P. E. WRIGHT: *Convergence Properties of the Nelder–Mead Simplex Method in Low Dimensions*. In: *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):S. 112–147, 1998. DOI: 10.1137/S1052623496303470 (Referenziert auf Seite 90).
- [107] LAYNE, J. R., K. M. PASSINO und S. YURKOVICH: *Fuzzy learning control for antiskid braking systems*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2):S. 122–129, 1993. DOI: 10.1109/87.238405 (Referenziert auf Seite 8).
- [108] LEE, Y. und S. H. ZAK: *Designing a genetic neural fuzzy antilock-brake-system controller*. In: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):S. 198–211, 2002. DOI: 10.1109/4235.996019 (Referenziert auf Seite 11).

- [109] LEISTER, G.: *Fahrzeugräder - Fahrzeugreifen. Entwicklung - Herstellung - Anwendung*. 2. Aufl. ATZ/MTZ-Fachbuch. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015. ISBN: 978-3-658-07463-0. (Referenziert auf Seite 24).
- [110] LIN, C.-M. und C.-F. HSU: *Self-learning fuzzy sliding-mode control for antilock braking systems*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(2):S. 273–278, 2003. DOI: 10.1109/TCST.2003.809246 (Referenziert auf Seite 8).
- [111] LITZ, L.: *Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz - Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 31(1-12):S. 148–168, 1983. DOI: 10.1524/auto.1983.31.112.148 (Referenziert auf Seite 43).
- [112] LIU, S.-J. und M. KRSTIĆ: *Discrete-time Stochastic Extremum Seeking*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):S. 3274–3279, 2014. DOI: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.00934 (Referenziert auf Seite 114).
- [113] LIU, S.-J. und M. KRSTIĆ: *Newton-based stochastic extremum seeking*. In: *Automatica*, 50(3):S. 952–961, 2014. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.12.023 (Referenziert auf den Seiten 113, 114).
- [114] LIU, S.-J. und M. KRSTIĆ: *Stochastic averaging and stochastic extremum seeking*. Springer, London, 2012. ISBN: 978-1-4471-4087-0 (Referenziert auf den Seiten 58, 110, 114).
- [115] LIU, Y. und J. SUN: *Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)* (Seattle, WA, USA, 21.–23. Juni 1995). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1178–1182, 1995. ISBN: 0-7803-2445-5. DOI: 10.1109/ACC.1995.520935 (Referenziert auf Seite 9).
- [116] LÖFBERG, J.: *YALMIP. A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*. In: *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design (CACSD)*, S. 284–289, 2004. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890 (Referenziert auf den Seiten 52, 103).
- [117] LOHMANN, B.: *Ein Ansatz zum Entwurf von Mehrgrößen-PID-Regelungen durch Zustandsraummethoden*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 38(1-12):S. 278–280, 1990. DOI: 10.1524/auto.1990.38.112.278 (Referenziert auf Seite 77).
- [118] LÜCKEL, J. und P. C. MÜLLER: *Analyse von Steuerbarkeits-, Beobachtbarkeits- und Störbarkeitsstrukturen linearer zeitinvarianter Systeme*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 23(1-12):S. 163–170, 1975. DOI: 10.1524/auto.1975.23.112.163 (Referenziert auf Seite 43).
- [119] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2. Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. Aufl. Springer Vieweg, Berlin und Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52675-0. (Referenziert auf Seite 46).
- [120] MARRO, G.: *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory. Volume 2: New Applications and Improved Software*. 2007 (Referenziert auf Seite 64).

- [121] MÅRTENSSON, B.: *The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization*. In: *Systems & Control Letters*, 6(2):S. 87–91, 1985. DOI: 10.1016/0167-6911(85)90002-7 (Referenziert auf Seite 90).
- [122] MATHWORKS: *Find minimum of constrained nonlinear multivariable function - fmincon*. 2020. URL: <https://de.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 94).
- [123] MAUER, G. F.: *A fuzzy logic controller for an ABS braking system*. In: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3(4):S. 381–388, 1995. DOI: 10.1109/91.481947 (Referenziert auf Seite 8).
- [124] MELJNIKOV, D. und D. AMMON: *Nichtlineare, modellgestützte ABS-Regelkonzepte*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 44(5):S. 208–212, 1996. DOI: 10.1524/auto.1996.44.5.208 (Referenziert auf Seite 9).
- [125] MERCORELLI, P. und M. NENTWIG: *Model Inversion Using Fuzzy Neural Network with Boosting of the Solution*. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 80(2):S. 261–270, 2012 (Referenziert auf Seite 19).
- [126] MIRZAEI, M. und H. MIRZAEINEJAD: *Optimal design of a non-linear controller for anti-lock braking system*. In: *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 24:S. 19–35, 2012. DOI: 10.1016/j.trc.2012.01.008 (Referenziert auf Seite 10).
- [127] MITSCHKE, M. und H. WALLENTOWITZ: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. 5. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014. ISBN: 978-3-658-05067-2. (Referenziert auf den Seiten 6, 16, 23, 40).
- [128] MÖHL, W.: *Sicherheitsvorrichtung zur Verhütung des Festbremsens der Laufräder von Kraftfahrzeugen mit Öldruckbremsen*. B60T 8/74. DE000000562255A (Deutsches Reich). MÖHL, W. 24. Okt. 1932 (Referenziert auf Seite 1).
- [129] MOSCHIK, S.: *Steuerbarkeitsmaße für lineare zeitinvariante Systeme*. Dissertation. Technische Universität Graz, Graz (Referenziert auf Seite 43).
- [130] MOSEK APS: *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 9.0*. 2019 (Referenziert auf Seite 103).
- [131] NAGAR, S. K. und S. K. SINGH: *An algorithmic approach for system decomposition and balanced realized model reduction*. In: *Journal of the Franklin Institute*, 341(7):S. 615–630, 2004. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2004.07.005 (Referenziert auf den Seiten 44, 84).
- [132] NELLES, O.: *LOLIMOT - Lokale, lineare Modelle zur Identifikation nichtlinearer, dynamischer Systeme*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 45(4):S. 163–174, 1997. DOI: 10.1524/auto.1997.45.4.163 (Referenziert auf Seite 17).
- [133] NELLES, O.: *Nonlinear System Identification*. Springer, Berlin und Heidelberg, 2001. ISBN: 978-3-642-08674-8. (Referenziert auf den Seiten 8, 18, 21).

- [134] NELLES, O., A. FINK und R. ISERMANN: *Local Linear Model Trees (LOLIMOT) Toolbox for Nonlinear System Identification*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 33(15):S. 845–850, 2000. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)39858-0 (Referenziert auf den Seiten 18, 40).
- [135] NENTWIG, M. und P. MERCORELLI: *A Matlab/Simulink Toolbox for Inversion of Local Linear Model Trees*. In: *IAENG International Journal of Computer Science*, 37: 2010 (Referenziert auf Seite 20).
- [136] NENTWIG, M. und P. MERCORELLI: *Inversion of Fuzzy Neural Networks for the Reduction of Noise in the Control Loop*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 41(3):S. 157–162, 2008. DOI: 10.3182/20081205-2-CL-4009.00029 (Referenziert auf Seite 20).
- [137] NENTWIG, M. und P. MERCORELLI: *Throttle valve control using an inverse local linear model tree based on a fuzzy neural network*. In: *7th IEEE International Conference on Cybernetic Intelligent Systems (CIS)* (London, UK, 9.–10. Sep. 2008). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1–6, 2008. ISBN: 978-1-4244-2914-1. DOI: 10.1109/UKRICIS.2008.4798943 (Referenziert auf Seite 19).
- [138] NIE, J., P. A. PARRILO und B. STURMFELS: *Semidefinite Representation of the  $k$ -Ellipse*. In: *Algorithms in Algebraic Geometry*. Hrsg. von DICKENSTEIN, A., F.-O. SCHREYER und A. J. SOMMESE. Springer, New York, NY, USA, 2008, S. 117–132. ISBN: 978-0-387-75155-9. DOI: 10.1007/978-0-387-75155-9\_7 (Referenziert auf Seite 102).
- [139] NYANDORO, O. T., J. O. PEDRO, O. A. DAHUNSI und B. DWOLATZKY: *Linear Slip Control Formulation for Vehicular Anti-Lock Braking System with Suspension Effects*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):S. 4779–4784, 2011. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.02971 (Referenziert auf Seite 9).
- [140] OJALVO, I. U.: *Efficient computation of modal sensitivities for systems with repeated frequencies*. In: *AIAA Journal*, 26(3):S. 361–366, 1988. DOI: 10.2514/3.9897 (Referenziert auf den Seiten 126, 127).
- [141] OLIVEIRA, R. C. L. F., P.-A. BLIMAN und P. L. D. PERES: *Robust LMIs with parameters in multi-simplex. Existence of solutions and applications*. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (Cancun, Mexiko, 9.–11. Dez. 2008). IEEE, Piscataway, NJ, S. 2226–2231, 2008. ISBN: 978-1-4244-3123-6. DOI: 10.1109/CDC.2008.4739192 (Referenziert auf Seite 103).
- [142] OLIVEIRA, R. C. L. F. und P. L. D. PERES: *Parameter-Dependent LMIs in Robust Analysis. Characterization of Homogeneous Polynomially Parameter-Dependent Solutions Via LMI Relaxations*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):S. 1334–1340, 2007. DOI: 10.1109/TAC.2007.900848 (Referenziert auf Seite 103).

- [143] OLIVEIRA, R. C. L. F. und P. L. D. PERES: *Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions. Asymptotically exact LMI conditions*. In: *Linear Algebra and its Applications*, 405:S. 209–228, 2005. DOI: 10.1016/j.laa.2005.03.019 (Referenziert auf Seite 103).
- [144] ORTSEIFEN, A.: *Entwurf von modellbasierten Anti-Windup-Methoden für Systeme mit Stellbegrenzungen*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2013 Darmstadt, Techn. Univ., 2013. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2013. ISBN: 978-3-18-522508-6 (Referenziert auf Seite 98).
- [145] ORTSEIFEN, A. und J. ADAMY: *Eine L2-optimale Beobachertechnik zur Vermeidung von Regler-Windup*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 59(2):S. 114–123, 2011. DOI: 10.1524/auto.2011.0901 (Referenziert auf Seite 98).
- [146] PACEJKA, H. B.: *Tire and vehicle dynamics*. 3. Aufl. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2012. ISBN: 978-0-08-097016-5 (Referenziert auf Seite 26).
- [147] PASILLAS-LÉPINE, W.: *Hybrid modeling and limit cycle analysis for a class of five-phase anti-lock brake algorithms*. In: *Vehicle System Dynamics*, 44(2):S. 173–188, 2006. DOI: 10.1080/00423110500385873 (Referenziert auf Seite 7).
- [148] PASILLAS-LÉPINE, W. und A. LORÍA: *A new mixed wheel slip and acceleration control based on a cascaded design*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 43(14):S. 879–884, 2010. DOI: 10.3182/20100901-3-IT-2016.00231 (Referenziert auf Seite 9).
- [149] PASILLAS-LÉPINE, W., A. LORÍA und M. GERARD: *Design and experimental validation of a nonlinear wheel slip control algorithm*. In: *Automatica*, 48(8):S. 1852–1859, 2012. DOI: 10.1016/j.automatica.2012.05.073 (Referenziert auf Seite 9).
- [150] PEAUCELLE, D., D. ARZELIER, O. BACHELIER und J. BERNUSSOU: *A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty*. In: *Systems & Control Letters*, 40(1):S. 21–30, 2000. DOI: 10.1016/S0167-6911(99)00119-X (Referenziert auf Seite 103).
- [151] PETERSEN, I.: *Wheel Slip Control in ABS Brakes using Gain Scheduled Optimal Control with Constraints*. Institutt for teknisk kybernetikk. Dissertation. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, Trondheim, 2003 (Referenziert auf den Seiten 16, 17).
- [152] PETERSEN, I., T. A. JOHANSEN, J. KALKKUHL und J. LÜDEMANN: *Wheel Slip Control in ABS Brakes Using Gain Scheduled Constrained LQR*. In: *European Control Conference (ECC)* (Porto, Portugal, 4.–7. Sep. 2001). IEEE, Piscataway, NJ, S. 606–611, 2001. ISBN: 978-3-9524173-6-2. DOI: 10.23919/ECC.2001.7075975 (Referenziert auf Seite 9).
- [153] PETERSEN, I., T. A. JOHANSEN, J. KALKKUHL und J. LÜDEMANN: *Wheel slip control using gain-scheduled LQ — LPV/LMI analysis and experimental results*. In: *European Control Conference (ECC)* (Cambridge, UK, 1.–4. Sep. 2003). IEEE, Piscataway, NJ, S. 880–885, 2003. ISBN: 978-3-9524173-7-9. DOI: 10.23919/ECC.2003.7085069 (Referenziert auf Seite 9).

- [154] POWELL, M. J. D.: *A Direct Search Optimization Method That Models the Objective and Constraint Functions by Linear Interpolation*. In: *Advances in Optimization and Numerical Analysis*. Hrsg. von GOMEZ, S. und J.-P. HENNART. Springer Netherlands, Dordrecht, 1994, S. 51–67. ISBN: 978-90-481-4358-0. DOI: 10.1007/978-94-015-8330-5\_4 (Referenziert auf Seite 94).
- [155] POWELL, M. J. D.: *A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations*. In: *Numerical Analysis*. Hrsg. von WATSON, G. Bd. 630. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin und Heidelberg, 1978, S. 144–157. ISBN: 978-3-540-08538-6. DOI: 10.1007/BFb0067703 (Referenziert auf Seite 90).
- [156] POWELL, M. J. D.: *Direct search algorithms for optimization calculations*. In: *Acta Numerica*, 7:S. 287, 1998. DOI: 10.1017/S0962492900002841 (Referenziert auf Seite 94).
- [157] PRETAGOSTINI, F., L. FERRANTI, G. BERARDO, V. IVANOV und B. SHYROKAU: *Survey on Wheel Slip Control Design Strategies, Evaluation and Application to Antilock Braking Systems*. In: *IEEE Access*, 8:S. 10951–10970, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2965644 (Referenziert auf Seite 9).
- [158] RADAC, M.-B., R.-E. PRECUP und R.-C. ROMAN: *Anti-lock braking systems data-driven control using Q-learning*. In: *Proceedings of the IEEE 26th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)* (Edinburgh, UK, 18.–21. Juni 2017). IEEE, Piscataway, NJ, S. 418–423, 2017. ISBN: 978-1-5090-1412-5. DOI: 10.1109/ISIE.2017.8001283 (Referenziert auf Seite 8).
- [159] RADENKOVIC, M. S. und J.-D. PARK: *Almost sure convergence of extremum seeking algorithm using stochastic perturbation*. In: *Systems & Control Letters*, 94:S. 133–141, 2016. DOI: 10.1016/j.sysconle.2016.06.005 (Referenziert auf Seite 114).
- [160] RANCHOD, N. und J. O. PEDRO: *Dynamic Neural Network-Based Feedback Linearization Control of Antilock Braking Systems Incorporated with Active Suspensions*. In: *12th Asian Control Conference (ASCC)* (Kitakyushu-shi, Japan, 9.–12. Juni 2019), S. 331–336, 2019 (Referenziert auf Seite 8).
- [161] RASMUSSEN, C. E.: *Minimize*. 2006. URL: <http://learning.eng.cam.ac.uk/car1/code/minimize/> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 90).
- [162] RAWLINGS, J. B. und D. Q. MAYNE: *Model predictive control. Theory and design*. Nob Hill Publishing, Madison, Wisconsin, 2009. ISBN: 978-0-9759377-0-9 (Referenziert auf Seite 54).
- [163] REIF, K.: *Bremsen und Bremsregelsysteme*. 1. Aufl. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. ISBN: 978-3-8348-1311-4. (Referenziert auf Seite 15).
- [164] REIF, K., Hrsg.: *Fahrstabilisierungssysteme und Fahrerassistenzsysteme*. 1. Aufl. Bosch-Fachinformation Automobil. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. ISBN: 978-3-8348-1314-5. DOI: 10.1007/978-3-8348-9717-6 (Referenziert auf Seite 11).

- [165] REIF, K.: *Sensoren im Kraftfahrzeug*. 3. Aufl. Bosch Fachinformation Automobil. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2016. ISBN: 978-3-658-11211-0. (Referenziert auf Seite 32).
- [166] REINHARDT, H.-J.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Anfangs- und Randwertprobleme*. 2. Aufl. De Gruyter, Berlin, 2012. ISBN: 978-3-11-028045-6 (Referenziert auf Seite 34).
- [167] REINHARDT, R., A. HOFFMANN und T. GERLACH: *Nichtlineare Optimierung. Theorie, Numerik und Experimente*. Springer, Berlin und Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-8274-2949-0 (Referenziert auf Seite 82).
- [168] RINGDORFER, M. und M. HORN: *Development of a wheel slip actuator controller for electric vehicles using energy recuperation and hydraulic brake control*. In: *IEEE International Conference on Control Applications (CCA)* (Denver, CO, USA, 28.–30. Sep. 2011). IEEE, Piscataway, NJ, S. 313–318, 2011. ISBN: 978-1-4577-1062-9. DOI: 10.1109/CCA.2011.6044472 (Referenziert auf den Seiten 16, 17).
- [169] ROBERT BOSCH GMBH: *Neue Bosch-Dieseltechnik kann Stickoxid-Problem lösen*. 2018. URL: <https://www.bosch-presse.de/pressportal/de/de/durchbruch-neue-bosch-dieseltechnik-kann-stickoxid-problem-loesen-155524.html> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 1).
- [170] ROGERS, L. C.: *Derivatives of eigenvalues and eigenvectors*. In: *AIAA Journal*, 8(5):S. 943–944, 1970. DOI: 10.2514/3.5795 (Referenziert auf Seite 126).
- [171] ROPPENECKER, G.: *Fahrzeugdynamik. Grundlagen der Modellierung und Regelung*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 42(1-12):S. 429–441, 1994. DOI: 10.1524/auto.1994.42.112.429 (Referenziert auf Seite 48).
- [172] ROSINOVÁ, D. und M. HYPÍUSOVÁ: *LMI Pole Regions for a Robust Discrete-Time Pole Placement Controller Design*. In: *Algorithms*, 12(8):S. 167, 2019. DOI: 10.3390/a12080167 (Referenziert auf Seite 103).
- [173] ROTH, J.: *Untersuchungen zur Kraftübertragung zwischen Pkw-Reifen und Fahrbahn unter besonderer Berücksichtigung der Kraftschlusserkennung im rotierenden Rad*. Institut für Fahrzeugtechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, 1993 (Referenziert auf Seite 23).
- [174] RUBIÓ-MASSEGÚ, J., J. M. ROSSELL, H. R. KARIMI und F. PALACIOS-QUIÑONERO: *Static output-feedback control under information structure constraints*. In: *Automatica*, 49(1):S. 313–316, 2013. DOI: 10.1016/j.automatica.2012.10.012 (Referenziert auf Seite 52).
- [175] RUŠITI, D., T. R. OLIVEIRA, G. MILLS und M. KRSTIĆ: *Deterministic and Stochastic Newton-based extremum seeking for higher derivatives of unknown maps with delays*. In: *European Journal of Control*, 41:S. 72–83, 2018. DOI: 10.1016/j.ejcon.2018.02.002 (Referenziert auf Seite 114).

- [176] SATZGER, C. W.: *Predictive braking control with hybrid actuators*. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen-Nürnberg, 2017 (Referenziert auf den Seiten 16, 17).
- [177] SAVARESI, S. M. und M. TANELLI: *Active braking control systems design for vehicles*. Springer, London, 2010. ISBN: 978-1-8499-6349-7. (Referenziert auf den Seiten 28, 29).
- [178] SAVARESI, S. M., M. TANELLI und C. CANTONI: *Mixed Slip-Deceleration Control in Automotive Braking Systems*. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 129(1):S. 20, 2007. DOI: 10.1115/1.2397149 (Referenziert auf Seite 9).
- [179] SCHERER, C. W.: *Lineare Matrixungleichungen in der Theorie der robusten Regelung*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 45(7):S. 306–318, 1997. DOI: 10.1524/auto.1997.45.7.306 (Referenziert auf Seite 103).
- [180] SCHMIDT, M.: *minFunc: unconstrained differentiable multivariate optimization in Matlab*. 2005. URL: <http://www.cs.ubc.ca/~schmidtm/Software/minFunc.html> (abgerufen am 16. 12. 2020) (Referenziert auf Seite 90).
- [181] SCHRAMM, D., M. HILLER und R. BARDINI: *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. 2. Aufl. Springer, Berlin, 2013. ISBN: 3-642-33887-9. (Referenziert auf den Seiten 23–26, 30, 40).
- [182] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. 4. Aufl. Springer, Berlin und Heidelberg, 2015. ISBN: 978-3-642-30095-0. (Referenziert auf Seite 38).
- [183] SCHUCKER, J.: *Trajektorienplanung und Fahrzeugführung für hochautomatisiertes Fahren auf der Autobahn*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2020 (Referenziert auf Seite 2).
- [184] SCHÜNEMANN, M.: *Fahrdynamik. Regelung für Elektrofahrzeuge mit Einzelradantrieben*. De Gruyter Oldenbourg, München und Wien, 2018. ISBN: 978-3-11-056115-9. (Referenziert auf Seite 3).
- [185] SCHÜNEMANN, M.: *Konzeption, Entwicklung und Umsetzung einer Fahrdynamikregelung für Kraftfahrzeuge mit elektrischen Einzelradantrieben*. Fakultät für Maschinenbau. Dissertation. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, 2017 (Referenziert auf Seite 11).
- [186] SCHWARTZ, J.: *Regelung der Radsatzdrehzahl zur maximalen Kraftschlussausnutzung bei elektrischen Triebfahrzeugen*. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1992 (Referenziert auf Seite 11).
- [187] SCHWARZ, R.: *Bremskraft-Rekonstruktion für elektromechanische Fahrzeugbremsen*. In: *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift*, 101(6):S. 402–412, 1999. DOI: 10.1007/BF03224264 (Referenziert auf Seite 14).
- [188] SCHWARZ, R.: *Rekonstruktion der Bremskraft bei Fahrzeugen mit elektromechanisch betätigten Radbremmen*. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1999 (Referenziert auf Seite 16).



- [189] SEMMLER, S.: *Regelung der Fahrzeugbremsdynamik mit kontinuierlich einstellbaren Radbremsen*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2005. Bd. 632. Berichte aus dem Institut für Automatisierungstechnik der TU Darmstadt. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2006. ISBN: 978-3-18-363212-1 (Referenziert auf den Seiten 6, 9, 10, 15–17, 22).
- [190] SKOGESTAD, S. und I. POSTLETHWAITE: *Multivariable feedback control. Analysis and design*. 2. Aufl. Wiley, Chichester, 2010. ISBN: 978-0-470-01168-3 (Referenziert auf Seite 51).
- [191] SOLYOM, S., A. RANTZER und J. LÜDEMANN: *Synthesis of a Model-Based Tire Slip Controller*. In: *Vehicle System Dynamics*, 41(6):S. 475–499, 2004. DOI: 10.1080/004231105123313868 (Referenziert auf Seite 9).
- [192] SOROUSH, M. und C. KRAVARIS: *Discrete-time nonlinear feedback control of multivariable processes*. In: *AIChE Journal*, 42(1):S. 187–203, 1996. DOI: 10.1002/aic.690420116 (Referenziert auf Seite 62).
- [193] STATISTISCHES BUNDESAMT: *Verkehrsunfälle - Fachserie 8 Reihe 7 - 2018. Tabelle 1.1 Straßenverkehrsunfälle, Verunglückte, Bestand an motorisierten Fahrzeugen und Bevölkerung 1906 - 2018*. Hrsg. von STATISTISCHES BUNDESAMT. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, 2019 (Referenziert auf Seite 2).
- [194] STEIN, L. G.: *Methoden und Anwendungen zur Polvorgabe mittels strukturbeschränkter Rückführungen*. Institut für Automatisierungstechnik. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2020 (Referenziert auf Seite 86).
- [195] STEIN, L. G. und U. KONIGORSKI: *Min-max optimization of eigenvalue damping ratios for vibration damping*. In: *IEEE Conference on Control Applications (CCA)* (Juan Les Antibes, Frankreich, 8.–10. Okt. 2014). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1656–1661, 2014. ISBN: 978-1-4799-7409-2. DOI: 10.1109/CCA.2014.6981550 (Referenziert auf Seite 90).
- [196] STELLET, J. E., M. GIESSLER, F. GAUTERIN und F. P. LEÓN: *Modellbasierte Antriebsschlupfregelung für Elektrofahrzeuge*. In: *ATZelektronik*, 9(2):S. 78–84, 2014. DOI: 10.1365/s35658-014-0413-9 (Referenziert auf Seite 11).
- [197] STRAKY, H.: *Modellgestützter Funktionsentwurf für Kfz-Stellglieder. Regelung der elektromechanischen Ventiltriebaktorik und Fehlerdiagnose der Bremssystemhydraulik*. Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2003. Als Ms. gedr. Bd. 546. Berichte aus dem Institut für Automatisierungstechnik der TU Darmstadt. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003. ISBN: 3-183-54612-4 (Referenziert auf Seite 39).
- [198] STRUBEL, J. und U. KONIGORSKI: *Robust eigenstructure assignment using parametric output feedback*. In: *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)* (Palermo, Italien, 16.–19. Juni 2014). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1249–1254, 2014. ISBN: 978-1-4799-5901-3. DOI: 10.1109/MED.2014.6961547 (Referenziert auf den Seiten 84, 87).

- [199] SUGAI, M., H. YAMAGUCHI, M. MIYASHITA, T. UMENO und K. ASANO: *New Control Technique for Maximizing Braking Force on Antilock Braking System*. In: *Vehicle System Dynamics*, 32(4-5):S. 299–312, 1999. DOI: 10.1076/vesd.32.4.299.2078 (Referenziert auf Seite 10).
- [200] SYRMOS, V. L., C. T. ABDALLAH, P. DORATO und K. GRIGORIADIS: *Static Output Feedback: A Survey*. In: *Automatica*, 33(2):S. 125–137, 1997. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00141-0 (Referenziert auf den Seiten 77, 90).
- [201] TAN, Y., D. NEŠIĆ und I. M. Y. MAREELS: *On the choice of dither in extremum seeking systems. A case study*. In: *Automatica*, 44(5):S. 1446–1450, 2008. DOI: 10.1016/j.automatica.2007.10.016 (Referenziert auf Seite 114).
- [202] TANELLI, M., A. ASTOLFI und S. M. SAVARESI: *Robust nonlinear output feedback control for brake by wire control systems*. In: *Automatica*, 44(4):S. 1078–1087, 2008. DOI: 10.1016/j.automatica.2007.08.020 (Referenziert auf Seite 9).
- [203] TANELLI, M., A. ASTOLFI und S. M. SAVARESI: *Robust Nonlinear Proportional-Integral Control for Active Braking Control Systems*. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (San Diego, CA, USA, 13.–15. Dez. 2006). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1745–1750, 2006. ISBN: 1-4244-0171-2. DOI: 10.1109/CDC.2006.377194 (Referenziert auf Seite 9).
- [204] TANELLI, M., L. PIRODDI und S. M. SAVARESI: *Real-time identification of tire–road friction conditions*. In: *IET Control Theory & Applications*, 3(7):S. 891–906, 2009. DOI: 10.1049/iet-cta.2008.0287 (Referenziert auf Seite 10).
- [205] TEIXEIRA, M. C. M. und S. H. ZAK: *Analog neural nonderivative optimizers*. In: *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(4):S. 629–638, 1998. DOI: 10.1109/72.701176 (Referenziert auf Seite 11).
- [206] TING, W.-E. und J.-S. LIN: *Nonlinear control design of anti-lock braking systems with assistance of active suspension*. In: *IET Control Theory & Applications*, 1(1):S. 343–348, 2007. DOI: 10.1049/iet-cta:20050218 (Referenziert auf Seite 9).
- [207] TOH, K. C., M. J. TODD und R. H. TÜTÜNCÜ: *SDPT3 - A Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3*. In: *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):S. 545–581, 1999. DOI: 10.1080/10556789908805762 (Referenziert auf Seite 103).
- [208] TSIOTRAS, P. und C. CANUDAS DE WIT: *On the optimal braking of wheeled vehicles*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)* (Chicago, IL, USA, 28.–30. Juni 2000). IEEE, Evanston, IL, USA, S. 569–573, 2000. ISBN: 0-7803-5519-9. DOI: 10.1109/ACC.2000.878964 (Referenziert auf Seite 11).
- [209] TUONONEN, A. J., L. HARTIKAINEN, F. PETRY und S. WESTERMANN: *Parameterization of in-plane rigid ring tire model from instrumented vehicle measurements*. In: *Proceedings of the 11th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC)* (Seoul, Südkorea, 9.–12. Sep. 2012), S. 9–12, 2012 (Referenziert auf den Seiten 26, 122).

- [210] TYUKIN, I., D. PROKHOROV und C. VAN LEEUWEN: *A new method for adaptive brake control*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC)* (Portland, OR, USA, 8.–10. Juni 2005). IEEE, Piscataway, NJ, S. 2194–2199, 2005. ISBN: 0-7803-9098-9. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470294 (Referenziert auf Seite 9).
- [211] UGRAY, Z., L. LASDON, J. PLUMMER, F. GLOVER, J. KELLY und R. MARTÍ: *Scatter Search and Local NLP Solvers. A Multistart Framework for Global Optimization*. In: *INFORMS Journal on Computing*, 19(3):S. 328–340, 2007. DOI: 10.1287/ijoc.1060.0175 (Referenziert auf Seite 90).
- [212] UNSAL, C. und P. KACHROO: *Sliding mode measurement feedback control for antilock braking systems*. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(2):S. 271–281, 1999. DOI: 10.1109/87.748153 (Referenziert auf Seite 7).
- [213] VAN DEN HOF, P., P. HEUBERGER und R. TÓTH: *Discretisation of linear parameter-varying state-space representations*. In: *IET Control Theory & Applications*, 4(10):S. 2082–2096, 2010. DOI: 10.1049/iet-cta.2009.0572 (Referenziert auf Seite 99).
- [214] VAN DER AA, N. P.: *Sensitivity analysis for grating reconstruction*. Dissertation. Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2007 (Referenziert auf den Seiten 86, 87, 92, 127).
- [215] VAN DER AA, N. P., H. G. TER MORSCHE und R. R. M. MATTHEIJ: *Computation of eigenvalue and eigenvector derivatives for a general complex-valued eigensystem*. In: *Electronic Journal of Linear Algebra*, 16(1):S. 300–314, 2007. DOI: 10.13001/1081-3810.1203 (Referenziert auf Seite 86).
- [216] VAN ZANTEN, A. T.: *Evolution of electronic control systems for improving the vehicle dynamic behavior*. In: *Proceedings of the 6th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC)* (Hiroshima, Japan, 9.–13. Sep. 2002), S. 1–9, 2002 (Referenziert auf Seite 11).
- [217] VIDYASAGAR, M.: *Some Results on Simultaneous Stabilization with Multiple Domains of Stability*. In: *IFAC Proceedings Volumes*, 20(5):S. 43–48, 1987. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)55007-7 (Referenziert auf Seite 78).
- [218] VOGT, P.: *Zwei-Freiheitsgrade-Struktur zur robusten Radschlupfregelung für Antilockiersysteme*. Technischer Bericht. Institut für Automatisierungstechnik, Darmstadt, 2020 (Referenziert auf den Seiten 96, 110, 113, 121).
- [219] VOIT, M., Y. CHAMAILLARD und G. L. GISSINGER: *Modellbasierter Entwurf einer neuen ABS-Regelung mit Bremsmomentensensor*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 44(5):S. 201–207, 1996. DOI: 10.1524/auto.1996.44.5.201 (Referenziert auf Seite 9).
- [220] VOLKSWAGEN AG: *Preisliste Golf VII*. 2016 (Referenziert auf den Seiten 30, 40).

- [221] WÄCHTER, A. und L. T. BIEGLER: *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*. In: *Mathematical Programming*, 106(1):S. 25–57, 2006. DOI: 10.1007/s10107-004-0559-y (Referenziert auf Seite 90).
- [222] WANG, J. und R. G. LONGORIA: *Combined Tire Slip and Slip Angle Tracking Control for Advanced Vehicle Dynamics Control Systems*. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (San Diego, CA, USA, 13.–15. Dez. 2006). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1733–1738, 2006. ISBN: 1-4244-0171-2. DOI: 10.1109/CDC.2006.377610 (Referenziert auf den Seiten 8, 54).
- [223] WANG, R.-G., Z.-D. LIU, Z.-Q. QI, Y.-F. MA und H.-F. CUI: *Multiple Model Adaptive Control of Antilock Brake System via Backstepping Approach*. In: *Proceedings of International Conference on Machine Learning and Cybernetics* (Guangzhou, China, 18.–21. Aug. 2005). IEEE, Piscataway, NJ, S. 591–595, 2005. ISBN: 0-7803-9091-1. DOI: 10.1109/ICMLC.2005.1527013 (Referenziert auf Seite 9).
- [224] WANG, Y., T. SCHMITT-HARTMANN, M. SCHINKEL und K. J. HUNT: *A new approach to simultaneous stabilisation with D stability and its application to control of antilock braking systems*. In: *European Control Conference (ECC)* (Porto, Portugal, 4.–7. Sep. 2001). IEEE, Piscataway, NJ, S. 612–617, 2001. ISBN: 978-3-9524173-6-2. DOI: 10.23919/ECC.2001.7075976 (Referenziert auf Seite 9).
- [225] WEBER, I.: *Verbesserungspotenzial von Stabilisierungssystemen im Pkw durch eine Reibwertsensorik*. Als Ms. gedr. Bd. 592. Berichte aus dem Fachgebiet Fahrzeugtechnik der TU Darmstadt. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2005. ISBN: 978-3-183-59212-8 (Referenziert auf Seite 17).
- [226] WELLSTEAD, P. E. und N. PETTIT: *Analysis and redesign of an antilock brake system controller*. In: *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 144(5):S. 413–426, 1997. DOI: 10.1049/ip-cta:19971441 (Referenziert auf Seite 7).
- [227] WESSEL, K.: *Bremskraftregler, insbesondere für Kraftfahrzeuge*. B60T 8/54; B64C 25/46; G01P 15/02 F. DE000000492199A (Deutsches Reich). WESSEL, K. 20. Feb. 1930 (Referenziert auf Seite 1).
- [228] WESTERMAIER, C.: *Zeitdiskrete adaptive Regelung mit allgemeinem Referenzmodell bei instabilen Diskretisierungsnullstellen*. Dissertation. Technische Universität München, München, 2014 (Referenziert auf den Seiten 38, 64).
- [229] WINNER, H.: *Handbuch Fahrerassistenzsysteme. Grundlagen, Komponenten und Systeme für aktive Sicherheit und Komfort*. 3. Aufl. ATZ. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015. ISBN: 3-658-05733-5. (Referenziert auf den Seiten 2, 3, 16).
- [230] WRENN, G. A.: *An indirect method for numerical optimization using the Kreisselmeier-Steinhauser function*. National Aeronautics and Space Administration, 1989 (Referenziert auf den Seiten 87, 90).
- [231] YEDAVALLI, R. K.: *Robust control of uncertain dynamic systems*. 1. Aufl. Springer, New York, 2016. ISBN: 978-1-4939-4089-9. (Referenziert auf Seite 84).

- [232] YU, J. S.: *A robust adaptive wheel-slip controller for antilock brake system*. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (San Diego, CA, USA, 10.–12. Dez. 1997). IEEE, Piscataway, NJ, S. 2545–2546, 1998. ISBN: 0-7803-4187-2. DOI: 10.1109/CDC.1997.657714 (Referenziert auf Seite 9).
- [233] YUAN, F., G. V. PUSKORIUS, L. A. FELDKAMP und L. I. DAVIS: *Neural network control of a four-wheel ABS model*. In: *Proceedings of the 37th Midwest Symposium on Circuits and Systems* (Lafayette, LA, USA, 3.–5. Aug. 1994). IEEE, Piscataway, NJ, S. 1503–1506, 1994. ISBN: 0-7803-2428-5. DOI: 10.1109/MWSCAS.1994.519091 (Referenziert auf Seite 8).
- [234] ZHANG, C. und R. ORDÓÑEZ: *Numerical Optimization-Based Extremum Seeking Control With Application to ABS Design*. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(3):S. 454–467, 2007. DOI: 10.1109/TAC.2007.892389 (Referenziert auf Seite 11).
- [235] ZHAO, X., L. LI, J. SONG, C. LI und X. GAO: *Linear Control of Switching Valve in Vehicle Hydraulic Control Unit Based on Sensorless Solenoid Position Estimation*. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(7):S. 4073–4085, 2016. DOI: 10.1109/TIE.2016.2541080 (Referenziert auf Seite 15).
- [236] ZHOU, K., G. SALOMON und E. WU: *Balanced realization and model reduction for unstable systems*. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(3):S. 183–198, 1999. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(199903)9:3<183::AID-RNC399>3.0.CO;2-E (Referenziert auf den Seiten 44, 84).

## Eigene Veröffentlichungen

- [E1] SCHAUB, P., P. VOGT und U. KONIGORSKI: *Robust Coupling Control Using Pole Region Assignment*. In: *Systems & Control Letters*, 158:S. 105067, 2021. DOI: 10.1016/j.sysconle.2021.105067.
- [E2] STELLET, J. E., P. VOGT, J. SCHUMACHER, W. BRANZ und J. M. ZÖLLNER: *Analytical derivation of performance bounds of autonomous emergency brake systems*. In: *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)* (Gothenburg, Schweden, 19.–22. Juni 2016), S. 220–226, 2016. DOI: 10.1109/IVS.2016.7535389.
- [E3] VOGT, P.: *gammasyn – Matlab toolbox for robust pole region assignment*. 2020. URL: <https://github.com/pvogt09/gammasyn> (abgerufen am 16. 12. 2020).
- [E4] VOGT, P., E. LENZ, A. KLUG, H. WESTERFELD und U. KONIGORSKI: *Robust Two-Degree-of-Freedom Wheel Slip Controller Structure for Anti-lock Braking*. In: *9th IFAC International Symposium on Advances in Automotive Control (AAC)* (Orléans, Frankreich, 23.–27. Juni 2019), S. 431–437, 2019. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.09.069.

- [E5] VOGT, P., E. LENZ und U. KONIGORSKI: *gammasyn – eine Toolbox zur robusten Polbereichsvorgabe mittels beschränkter Optimierung und Straffunktionen*. In: *at - Automatisierungstechnik*, 68(10):S. 893–904, 2020. DOI: 10.1515/auto-2020-0078 (Referenziert auf Seite 91).
- [E6] VOGT, P., S. SCHULZE, E. LENZ, A. KLUG, H. WESTERFELD und U. KONIGORSKI: *Vorsteuerungsentwurf für einen robusten Zwei-Freiheitsgrade Schlupfregler für Antiblockiersysteme*. In: *VDI/VDE-Fachtagung AUTOREG 2019* (Mannheim, 2.–3. Juli 2019). VDI-Berichte Nr. 2349 Bde., S. 209–220, 2019.

## Betreute studentische Arbeiten

- [A1] CELIK, Y.: *Gleitzustandsregelung*. Proseminar. Technische Universität Darmstadt, Juni 2018.
- [A2] CELIK, Y.: *Gleitzustandsregelung eines Viertelfahrzeugs*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2018.
- [A3] FRIESEN, P., J. HE, C. RAYMUNDO und D. WANG: *Implementierung einer graphischen Benutzeroberfläche für gammasyn*. Projektseminar. Technische Universität Darmstadt, Sep. 2019.
- [A4] HEID, K.: *Vergleich unterschiedlicher Integrationsverfahren für eine diskrete exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung*. Studienarbeit. Technische Universität Darmstadt, Jan. 2020 (Referenziert auf Seite 68).
- [A5] HERGET, A.: *Diskretisierung einer flachheitsbasierten Schlupfregelung für ein Viertelfahrzeug*. Studienarbeit. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2019 (Referenziert auf Seite 53).
- [A6] HU, B.: *Flatness-based Slip Control of a Quarter-vehicle*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Sep. 2018 (Referenziert auf Seite 53).
- [A7] KERN, K.: *Modellbildung und Reglerentwurf für den hydraulischen Bremskreis eines Viertelfahrzeugs*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2017.
- [A8] KERN, K.: *Modellbildung und Simulation in der Hydraulik am Beispiel einer Bremsanlage*. Proseminar. Technische Universität Darmstadt, Juli 2017.
- [A9] LI, N.: *Modellbildung eines hydraulischen Bremskreises*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Juli 2018.
- [A10] LIU, Y.: *Entwurf einer robusten Drehzahlregelung im niedrigen Geschwindigkeitsbereich*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Nov. 2019.
- [A11] LOIBNEGGER, J., J. STILLER, S. WANG und Y. ZHANG: *Konzeption und Aufbau eines Drehzahlsensorprüfstandes*. Projektseminar. Technische Universität Darmstadt, Feb. 2020.

- [A12] LÓPEZ, N.:  *$\mathcal{H}_2$ - und  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf*. Proseminar. Technische Universität Darmstadt, Juli 2018.
- [A13] LÓPEZ, N.: *Entwurf einer robusten Regelung für ein Viertelfahrzeug mittels  $\mathcal{H}_\infty$ -Synthese*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Mai 2019 (Referenziert auf Seite 51).
- [A14] MEINERS, F. und R. SCHURIG: *Berechnung der Hessematrix für  $\gamma$ syn*. Projektseminar. Technische Universität Darmstadt, Aug. 2019 (Referenziert auf den Seiten 86, 92).
- [A15] MIQUELEZ MADARIAGA, I.: *Optimisation Based Robust Pole Assignment for a Quartercar Model*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Sep. 2018.
- [A16] PEJIC, A.: *Robuster Reglerentwurf für ein Viertelfahrzeug mit varianten Aktorkonfigurationen*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Okt. 2019 (Referenziert auf Seite 51).
- [A17] SCHAUB, P.: *Robuster Verkopplungsreglerentwurf mittels Polbereichsvorgabe*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, März 2020 (Referenziert auf Seite 122).
- [A18] SCHILLING, M., O. TSAAVA, R. PAN und B. QIU: *Inbetriebnahme eines Hydraulikprüfstandes*. Projektseminar. Technische Universität Darmstadt, Sep. 2019.
- [A19] SCHNEIDER, F.: *Untersuchung von Robustheitsmaßnahmen für Polbereichsvorgabe*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, März 2020.
- [A20] SCHULZE, S.: *Exakte Linearisierung für ein Zweispurmodell mit Nickdynamik*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Apr. 2019.
- [A21] SILBERBAUER, J.: *Discrete-Time Extremum Seeking Control for Anti-lock Braking*. Forschungsseminar. Technische Universität Darmstadt, Aug. 2019.
- [A22] STOLLSTEIMER, J.: *Anwendungsgebiete linearer Matrixungleichungen in der robusten Regelungstechnik*. Proseminar. Technische Universität Darmstadt, Nov. 2018.
- [A23] STOLLSTEIMER, J.: *Linear-parametervariante Regelung für ein Viertelfahrzeug mit linearen Matrixungleichungen*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Mai 2019 (Referenziert auf Seite 52).
- [A24] UHLIG, J.: *Entwurf robuster Regelungen mittels Polbereichsvorgabe*. Proseminar. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2018.
- [A25] UHLIG, J.: *Untersuchung der optimalen Entwurfseinstellungen für robuste Polbereichsvorgabe*. Bachelorarbeit. Technische Universität Darmstadt, Juni 2019.
- [A26] WANG, S.: *Signalaufbereitung für einen Drehzahlsensor*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2019.
- [A27] XIONG, D.: *Beobachterbasierte sensorlose Positionsregelung eines hydraulischen Ventils*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Apr. 2018.
- [A28] ZHAO, J.: *Sensorlose Positionsregelung eines hydraulischen Ventils mittels Signalinjektion*. Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, Dez. 2018.

