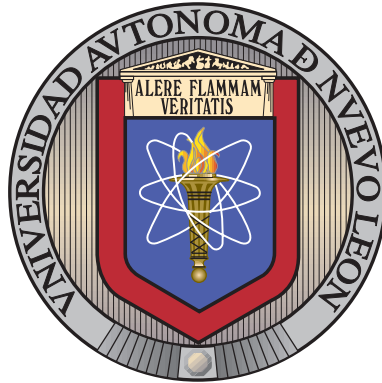


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE STACKELBERG
CON INCENTIVOS Y COSTO ALEATORIO DEL
SEGUIDOR

POR

JULIO CÉSAR GARCÍA GARCÍA

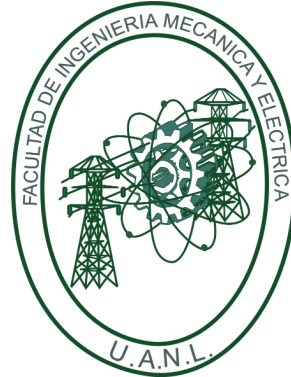
COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN
EN SISTEMAS

DICIEMBRE 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE STACKELBERG
CON INCENTIVOS Y COSTO ALEATORIO DEL
SEGUIDOR

POR

JULIO CÉSAR GARCÍA GARCÍA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA CON ORIENTACIÓN
EN SISTEMAS

DICIEMBRE 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado

Los miembros del Comité de Evaluación de Tesis recomendamos que la Tesis "Problema de Equilibrio de Stackelberg con Incentivos y Costos Aleatorio del Seguidor", realizada por el estudiante Julio César García García, con número de matrícula 1653550, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Sistemas.

El Comité de Evaluación de Tesis


Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez
Director


Dra. Sara Verónica Rodríguez Sánchez
Revisor

Dra. Iris Abril Martínez Salazar
Revisor

Dr. Jobish Vallikavungal Devassia
Revisor

Vo.Bo.


Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado



Institución 190001

Programa 502510

Acta Núm. 3974

Ciudad Universitaria, a 03 de diciembre del 2021.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	VIII
Resumen	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Significado de la investigación	2
2. Conceptos clave	4
2.1. Notación	4
2.2. Juego de Stackelberg	4
2.3. Juego de Stackelberg con Incentivos	8
2.4. Análisis convexo y Topología	10
2.5. Ejemplo 1	14
2.6. Ejemplo 2	16
2.7. Ejemplo 3	19
2.8. Ejemplo 4	21

3. Formulación	24
3.1. Ruido aditivo	25
3.2. Ruido multiplicativo	26
3.3. Ruido aditivo al seguidor	27
3.4. Ruido aditivo multiplicativo al seguidor	28
4. Experimentación y Resultados	29
4.1. Ruido aditivo	29
4.1.1. Caso 1: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.01$	30
4.1.2. Caso 2: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.1$	31
4.1.3. Caso 3: Distribución Poisson $\lambda = 3$	33
4.2. Ruido multiplicativo	34
4.2.1. Caso 1: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.01$	35
4.2.2. Caso 2: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.1$	36
4.2.3. Caso 3: Distribución Poisson $\lambda = 3$	38
4.3. Ruido aditivo al seguidor	39
4.3.1. Caso 1: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.1$	40
4.3.2. Caso 2: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.01$	41
4.3.3. Caso 3: Distribución Poisson $\lambda = 3$	42
4.4. Ruido aditivo multiplicativo al seguidor	44
4.4.1. Caso 1: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.1$	45

4.4.2. Caso 2: Distribución normal $\mu = 1, \sigma = 0.01$	46
4.4.3. Caso 3: Distribución poisson $\lambda = 3$	49
4.5. Resultados	51
4.5.1. Ruido Aditivo	51
4.5.2. Ruido Multiplicativo	51
4.5.3. Ruido Aditivo al Seguidor	51
4.5.4. Ruido Aditivo Multiplicativo al Seguidor	52
5. Conclusiones y trabajo futuro	53
5.1. Conclusiones	53
5.2. Trabajo futuro	53
Apéndice	59
.1. Citas bibliográficas	59

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Gráfica de Λ_d y hiperplano 1.	16
2.2. Gráfica de Λ_d y hiperplano 2.	18
4.1. Gráfica de Λ_d y hiperplano 3.	31
4.2. Gráfica de Λ_d y hiperplano 4.	32
4.3. Gráfica de Λ_d y hiperplano 5.	34
4.4. Gráfica de Λ_d y hiperplano 6.	36
4.5. Gráfica de Λ_d y hiperplano 7.	37
4.6. Gráfica de Λ_d y hiperplano 8.	39
4.7. Gráfica de Λ_d y hiperplano 9.	41
4.8. Gráfica de Λ_d y hiperplano 10.	43
4.9. Gráfica de Λ_d y hiperplano 11.	44
4.10. Gráfica de Λ_d y hiperplano 12.	47
4.11. Gráfica de Λ_d y hiperplano 12.	49
4.12. Gráfica de Λ_d y hiperplano 13.	50

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres, Marco Antonio García Villarreal y María Guadalupe García Martínez, ya sin su ayuda incondicional, no hubiera logrado llegar hasta donde estoy ahora.

A mi asesor de tesis Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez por ser tan estricto por mi manera de escribir mi tesis, por que comprendiera bien los conceptos y por su disposición y a la Dra. Sara Verónica Rodríguez Sánchez por aceptar ser parte de mi comité.

Le agradezco a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por haber contribuido con mi formación profesional. También al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca de manutención otorgada.

RESUMEN

Julio César García García.

Candidato para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Sistemas .

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio: PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE STACKELBERG CON INCENTIVOS Y COSTO ALEATORIO DEL SEGUIDOR.

Número de páginas: 57.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: Se encontrará una solución en un juego de Stackelberg con incentivo al agregarle una variable estocástica a la función objetivo del seguidor.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Se puede aplicar una estrategia con incentivos a la función seguidor por que sigue siendo una función convexa.

Firma del asesor:



Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El juego de Stackelberg consiste en dos jugadores: un líder y un seguidor. En este juego, el líder toma acciones primero y luego el seguidor reacciona a las decisiones del líder racionalmente. Se supone que el líder sabe de antemano que el seguidor observará sus decisiones y el líder tiene pleno conocimiento de cómo el seguidor responderá a sus decisiones. Una vez que el líder tomo sus decisiones debe comprometerse con ellas. Estas ventajas permiten al líder obtener un mayor beneficio que sus seguidores.

En esta tesis estudiará este problema de teoría de juegos. Se analizará el concepto de estructuras de control con incentivos que el líder puede desear implementar para inducir a los seguidores a elegir sus vectores de control de tal manera que la función objetivo del líder sea optimizada. Además, se observará que sucede con la solución del problema al agregarle unas variables aleatorias al costo del seguidor.

Se analizó el caso estocástico,es decir ahora se le agregaron variables aleatorias al costo del seguidor. En otros trabajos se resolvió el problema sin variables aleatorias y se pudo plantear la solución forma de función que llamaremos funciones incentivo, en dichas funciones, el líder toma una decisión del seguidor de tal manera que también lo beneficie a el.

También en esta tesis se demostró que el costo del seguidor al agregarle una

variable estocástica es una función convexa. Al ser una función convexa, podemos aplicar la estrategia de incentivos.

Además, se desarrollaron algunos ejemplos con variables estocásticas y obtuvimos sus funciones incentivo.

1.1 Antecedentes

El tema propuesto de esta tesis ha sido abordado previamente por numerosos académicos. Uno de ellos es Noortje Groot [14], su evaluación de este tema ha demostrado:

1. El desarrollo de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función óptima del líder, suponiendo un espacio de decisión sin restricciones.
2. Se ha descrito una caracterización del conjunto de funciones líderes afines óptimas para espacios de decisión sin restricciones, y se ha explicado cómo puede ser este conjunto reducido para obtener el conjunto de soluciones afines óptimas en caso de tener una restricción en el espacio de decisión.
3. Desarrollaron tres métodos numéricos para calcular el óptimo no lineal de la función líder para la formulación indirecta del juego Stackelberg con incentivos.

1.2 Significado de la investigación

Al agregar una variable estocástica nos ayudará a resolver este tipo de problemas con incertidumbres. El modelo planteado en esta tesis nos ayudará a predecir las decisiones que tomarán los seguidores, cuando el líder pueda elegir la decisión óptima en función de los seguidores.

Finalmente veremos qué cambios hay en la solución al introducir dichas variables estocásticas en el seguidor.

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS CLAVE

2.1 Notación

En esta primera parte veremos la notación que usaremos a lo largo de esta tesis.

Los conjuntos Ω_L , Ω_F son los espacios de decisión para el jugador líder y seguidor, respectivamente.

Las funciones $\mathcal{J}_L(u_L, u_F)$ y $\mathcal{J}_F(u_L, u_F)$ son las funciones de costo que son mapeadas $\Omega_L \times \Omega_F$ tal que el jugador líder desea minimizar \mathcal{J}_L y el jugador seguidor desea minimizar \mathcal{J}_F .

Al jugador que selecciona la primera estrategia es llamado líder.

Al jugador que selecciona la segunda estrategia es llamado seguidor.

2.2 Juego de Stackelberg

A continuación introduciremos algunos conceptos para conceptualizar lo que es una estrategia de Stackelberg generalizada.

Definición 2.1. Sea $\text{Argmin}_{x \in X} f(x) := \{x \in X : \forall x' \in X, f(x) \leq f(x')\}$. Al conjunto $\text{Argmin}_{x \in X} f(x)$ se le llama **conjunto de argumentos mínimos de la función f sobre el conjunto de restricciones sobre X** .

Definición 2.2. Para cada $u_L \in \Omega_L$, sea $\mathcal{O}_{u_L} := \text{Argmin}_{u'_F \in \Omega_F} J_F(u_L, u'_F)$. Diremos que la pareja ordenada $(u_L^s, u_F^s) \in \Omega_L \times \Omega_F$ es un **punto de equilibrio de Stackelberg** si $u_F^s \in \mathcal{O}_{u_L}$ y además $\mathcal{J}_L(u_L^s, u_F^s) = \inf\{\mathcal{J}_L(u_L, u_F) : u_L \in \Omega_L \text{ y } u_F \in \mathcal{O}_{u_L}\}$.

Surge el inconveniente, para el líder, de que a pesar de que exista un punto de equilibrio de Stackelberg (u_L^s, u_F^s) y de que el líder tome la decisión u_L^s , el seguidor tome una decisión $\tilde{u}_F \in \mathcal{O}_{u_L}$ de tal manera que $\mathcal{J}_L(u_L^s, \tilde{u}_F) < \mathcal{J}_L(u_L^s, u_F^s)$.

Teorema 2.3. *En un juego de Stackelberg, si las funciones \mathcal{J}_L y \mathcal{J}_F son continuas y los conjuntos Ω_L y Ω_F son compactos y metrizable, entonces existe un punto de equilibrio de Stackelberg.*

Demostración: Del hecho de que para todo $x \in \Omega_L$ la función $\mathcal{J}_F(x, \cdot)$ es continua se concluye que para cada $x \in \Omega_L$ el conjunto \mathcal{O}_x pues si \mathcal{C} es un conjunto compacto no vacío y $f \in \mathcal{C}\mathbb{R}$ es continua, entonces f toma su valor mínimo en algún $c \in \mathcal{C}$ ([28, corolario 14.4.37]). Ahora si $y \in \mathcal{O}_x$ tenemos que \mathcal{O}_x es la imagen inversa del conjunto compacto $\{y\}$ bajo la función continua $\mathcal{J}_F(x, \cdot)$, de manera que \mathcal{O}_x es compacto ([28, teoremas 14.4.31 y 14.4.34]).

Sea $\alpha = \inf\{J_L(u_L, u_F) : u_L \in \Omega_L \text{ y } u_F \in \mathcal{O}_{u_L}\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $(x_n, y_n) \in \Omega_L \times \Omega_F$ tal que $y_n \in \mathcal{O}_{x_n}$ y $0 \leq \mathcal{J}_L(x_n, y_n) - \alpha < \frac{1}{n}$.

Como el conjunto \mathcal{O}_{x_n} es compacto, existe un $z_n \in \mathcal{O}_{x_n}$ tal que $\mathcal{J}_L(x_n, z_n) \leq \mathcal{J}_L(x_n, y)$ para todo $y \in \mathcal{O}_{x_n}$, en particular $\mathcal{J}_L(x_n, z_n) \leq \mathcal{J}_L(x_n, y_n)$, teniendo así:

$$0 \leq \mathcal{J}_L(x_n, z_n) - \alpha < \frac{1}{n}.$$

Ahora, debido a que el conjunto $\Omega_L \times \Omega_F$ es compacto y metrizable, la sucesión $((x_n, z_n))_{n=1}^{\infty}$ que sea convergente, tenemos que tiene una subsucesión $((x'_n, z'_n))_{n=1}^{\infty}$

que converge a un número $((x', y')) \in \Omega_L \times \Omega_F$ ([28, teorema 14.3.22]), y usando de nuevo el hecho de que la función \mathcal{J}_L es continua tenemos que $\mathcal{J}_L(x', y') = \alpha$.

Como podemos ver, $y' \in \mathcal{O}_{x'}$. En efecto, si $y' \notin \mathcal{O}_{x'}$, al tomar un $y \in \mathcal{O}_{x'}$ tendríamos que $\mathcal{J}_F(x', y) < J_F(x', y')$, de manera que al tomar

$$\epsilon = \frac{J_F(x', y') - J_F(x', y)}{2}$$

y tomar n suficientemente grande obtendríamos que

$$J_F(x', y) + \epsilon < J_F(x'_n, y'_n),$$

contradiciendo el hecho de que $z'_n \in \mathcal{O}_{x'_n}$. Tenemos así que necesariamente $y' \in \mathcal{O}_{x'}$, siendo (x', y') un punto de equilibrio de Stackelberg. ■

Definición 2.4. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definimos el **epígrafe** de f como el conjunto $\{(r, s) \in S \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) : r \geq f(s)\}$. Al epígrafe de f lo denotaremos por $\text{epi}(f)$.

Definición 2.5. Sea V un espacio vectorial, $C \subset V$ un conjunto convexo y $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es una **función convexa**, si su epígrafe es un conjunto convexo, o equivalentemente, si para cualesquiera dos puntos $v_1, v_2 \in C$ y cualquier $\lambda \in [0; 1]$ se tiene que:

$$f(\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2) \leq \lambda f(v_1) + (1 - \lambda)f(v_2).$$

En de que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset V$ sea convexo y $f|_S$ sea una función convexa diremos que f es **convexa en S** .

Lema 2.6. Si los espacios de decisión $\Omega_L \subset \mathbb{R}^{n_L}$ y $\Omega_F \subset \mathbb{R}^{n_F}$ son convexos (y no vacíos) y el funcional \mathcal{J}_F es convexo, entonces para cada punto $x_d = (u_L^d, u_F^d) \in \Omega_L \times \Omega_F$ el conjunto $\Lambda_d := \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : \mathcal{J}_F(x) \leq \mathcal{J}_F(x_d)\}$ es convexo.

Demostración: Sea $x_1 = (u_L^1, u_F^1)$, $x_2 = (u_L^2, u_F^2) \in \Lambda_d$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Tenemos que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \lambda(u_L^1, u_F^1) + (1 - \lambda)(u_L^2, u_F^2) = (\lambda u_L^1, \lambda u_F^1) + ((1 - \lambda)u_L^2, (1 - \lambda)u_F^2) = (\lambda u_L^1 + (1 - \lambda)u_L^2, \lambda u_F^1 + (1 - \lambda)u_F^2)$, por ser Ω_L y Ω_F convexos, tenemos que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Omega_L \times \Omega_F$.

Ahora, como \mathcal{J}_F es convexo, entonces $\mathcal{J}_F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \mathcal{J}_F(x_1) + (1 - \lambda)\mathcal{J}_F(x_2) \leq \lambda \mathcal{J}_F(x_d) + (1 - \lambda)\mathcal{J}_F(x_d) = \mathcal{J}_F(x_d)$ de manera que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Lambda_d$ y así el conjunto Λ_d es convexo, con lo cual este lema queda demostrado. \square

Estrategia de Stackelberg generalizada

Sea

$$\mathcal{J}_{Lgen}^* = \inf_{u_L \in \Omega_L} \sup_{u_F \in \mathcal{O}_{u_L}} \mathcal{J}_L(u_L, u_F)$$

Una forma de establecer un criterio min-max en juegos de Stackelberg está dada mediante el concepto que estableceremos a continuación.

Definición 2.7. Decimos que $u_{Lgen}^* \in \Omega_L$ es una *estrategia de Stackelberg generalizada para el líder* si cumple con la propiedad de que

$$\sup_{u_F \in \mathcal{O}_{u_{Lgen}^*}} \mathcal{J}(u_{Lgen}^*, u_F) = \mathcal{J}_{Lgen}^*$$

En dicha estrategia, el líder, teniendo una actitud pesimista o conservadora, supondrá que el seguidor tomará la decisión más le convenga, pero sin saber con precisión posiblemente cual será su decisión, el líder garantizará que su costo sea a lo más \mathcal{J}_{Lgen}^* , es decir \mathcal{J}_{Lgen}^* es una cota superior para el costo del líder si toma la decisión u_{Lgen}^*

2.3 Juego de Stackelberg con Incentivos

En ocasiones después de que el líder anuncia su estrategia, el seguidor puede tomar decisiones que no beneficien al líder, con la estrategia de Stackelberg con incentivos, el líder hará que el seguidor tome una decisión la cual también lo beneficie a él.

A continuación definiremos un juego de Stackelberg con incentivos.

Un enfoque simplificador comúnmente adoptado para el problema Stackelberg con incentivos consiste en que el jugador líder determine primero un óptimo deseado particular (u_L^d, u_F^d) que busca alcanzar .

Dado un punto deseado (u_L^d, u_F^d) , el problema restante se puede escribir de la siguiente manera:

Juego de Stackelberg con Incentivos

Con la misma notación usada en los juegos de Stackelberg, se tiene que ahora el líder en lugar de aplicar la primera acción «le cede al seguidor» el primer lugar en tomar la acción, pero antes le informa el criterio que él tomará para tomar su decisión de acuerdo a la decisión que tome el seguidor. En este sentido el líder le da a conocer al seguidor una función $\gamma : \Omega_F \implies \Omega_L$, tomando en cuenta que cada jugador quiere minimizar su respectiva función de costo. En este caso dicha función debe pertenecer a una clase específica $\Gamma_L \subset \Omega_F \Omega_L$. Así, el seguidor γ deberá tomar una acción u_F que haga que el valor $\mathcal{J}_F(\gamma(u_F), u_F)$ sea mínimo y el líder, sabiendo esa reacción del seguidor, deberá elegir la función $\gamma \in \Gamma_L$ de tal manera que se minimice el costo $\mathcal{J}_L(\gamma(u_F), u_F)$. En concreto, el problema es hallar una pareja ordenada $(\gamma^*, u_F^*) \in \Gamma_L \times \Omega_F$ tal que:

$$\gamma^* \in \underset{\gamma \in \Gamma_L}{\text{Argmin}} \mathcal{J}_L(\gamma(u_F^*), u_F^*),$$

y

$$u_F^* \in \underset{u_F \in \Omega_F}{\text{Argmin}} \mathcal{J}_F(\gamma^*(u_F), u_F).$$

Conjunto subnivel

$$\Lambda_d = \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F : \mathcal{J}_F(u_L, u_F) \leq \mathcal{J}_F(u_L^d, u_F^d)\}. \quad (2.1)$$

Solución óptima, equilibrio. Se refiere a la tupla de variables de decisión (u_L^d, u_F^d) que desea el jugador líder; una solución óptima del juego de Stackelberg con incentivos se refiere a una función líder $\gamma_L : \Omega_F \rightarrow \Omega_L$ que, bajo el supuesto de un jugador seguidor completamente racional, conduce al punto de equilibrio deseado especificado por el jugador líder.

Funciones afines óptimas del líder

Para reducir la complejidad del juego general Stackelberg con incentivos y crear un enfoque sistemático para resolver el juego general, en este capítulo nos enfocamos en la estructura afín de la función líder, es decir, supondremos que el conjunto Γ_L incluirá sólo funciones de la forma:

$$u_L = \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d), \quad (2.2)$$

donde B denota un mapeo de operador lineal $\Omega_F \rightarrow \Omega_L$ representado por una matriz $n_F \times n_L$ en el caso de dimensión finita.

Una caracterización de una función líder afín óptima (2.2), que se reduce al cálculo de una matriz B $n_L \times n_F$, se derivó por primera vez en [40] en caso de que $J_F(\cdot)$ sea diferenciable en (u_L^d, u_F^d) .

Para asegurarse de que B existe como se define a continuación, se supone en [40] que L, F son espacios de Hilbert y que $J_F(\cdot)$ es diferenciable de Fréchet en LF .

Adicionalmente, Se supone que $J_F()$ es estrictamente convexo en $\Omega_L \times \Omega_F$. Entonces, para n_L, n_F finito - una similar El análisis es aplicable para el caso infinito - B debería satisfacer:

$$[\nabla_{u_L} J_F(u_L^d, u_F^d)]^T B = [\nabla_{u_F} J_F(u_L^d, u_F^d)]^T. \quad (2.3)$$

Bajo la condición $\nabla_{u_L} J_F(u_L^d, u_F^d) \neq 0$, la siguiente expresión se da en [40]:

$$B = \nabla_{u_L} J_F(u_L^d, u_F^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_L^d, u_F^d) / \|\nabla_{u_L}^T J_F(u_L^d, u_F^d)\|. \quad (2.4)$$

2.4 Análisis convexo y Topología

Es importante destacar, que, para la comprensión y entendimiento de esta tesis, se requirió introducir un capítulo con conceptos matemáticos necesarios como marco teórico. En especial, los conjuntos de espacios de decisión en los cuales se estará trabajando, forman parte de los ya mencionados espacios topológicos. Más aún, parte de la aportación de esta tesis es la introducción de variables aleatorias en el costo del seguidor, dichas variables están dentro del área de la probabilidad, la cual teóricamente es un espacio medible y a su vez son definidas en espacios topológicos.

Por último, en un gran porcentaje de los trabajos relacionados con la teoría de juegos de Stackelberg, los mapeos del líder y los seguidores son funciones (funcionales) convexas. Así también, la región factible e inducidas son puntos que forman conjuntos convexas. En este trabajo, se analizarán conjuntos con propiedades convexas, por ende, es vital introducir al análisis convexo.

Definición 2.8. Sea X un conjunto no vacío. Decimos que una función $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ es una *métrica* si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Cuando es una métrica en X decimos que la pareja (X, d) es un **espacio métrico**. A la propiedad (3) se le conoce como **desigualdad del triángulo** [28, teoremas 14.2.1].

Definición 2.9. Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$, definimos como:

1. Al conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ le llamamos **bola abierta** o simplemente **bola con radio r y centro en x** .
2. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es **abierto** (con respecto a la métrica) si para todo $x \in A$ existe una bola con centro en x que está incluida en A .
3. Si $x \in V$ y V es un conjunto abierto, decimos que V es una vecindad de x .
4. $E \subset X$ es un conjunto, definimos el **interior de E** como el conjunto $\overset{\circ}{E} := \{x : \text{existe un bola con centro en } x \text{ que está incluido en } E\}$ y cualquier elemento de $\overset{\circ}{E}$ se le llama punto interior.
5. Un elemento $x \in X$ es un **punto de acumulación** de conjunto $E \subset X$ cuando para todo $r > 0$ se tiene que $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$. [28, definición 14.2.7].

Definición 2.10. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X , la **cerradura de A** se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A y se denota por \bar{A} [28, teoremas 14.2.15].

Definición 2.11. Se define como la **bola unidad euclidiana cerrada B^n en R^n** como $B^n = \{x : \|x\| \leq 1\}$, donde:

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = (x_1^2, \dots, x_n^2)^{1/2}.$$

Lema 2.12. Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces $\bar{A} = \bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r)$.

Demostración: Demostración: Si $x \in \bar{A}$, entonces para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$, de manera que para todo $r > 0$ existe un $a \in A$ tal que $x \in B(a, r)$; tenemos así que para todo $r > 0$ se tiene que $x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r)$, es decir $x \in \bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. Hemos demostrado que $\bar{A} \subset \bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r)$.

Para demostrar que $\bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r) \subset \bar{A}$ veamos que siempre que $x \notin \bar{A}$, tendremos que $x \notin \bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r)$. Sea $x \notin \bar{A}$, es decir sea x un elemento del exterior de A ; tenemos que existe un $r > 0$ tal que $A \cap B(x, r) = \emptyset$, de manera que para todo $a \in A$ se tiene que $d(a, x) > r$; es decir existe un $r > 0$ tal que para todo $a \in A$ se tiene que $x \notin B(a, r)$, lo cual significa que $x \notin \bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r)$, de manera que $\bigcap_{r>0} \bigcup_{a \in A} B(a, r) \subset \bar{A}$, terminando la demostración del lema.

□

Lema 2.13. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado y $A \subset X$, entonces $A + B(0, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r)$.

Demostación: Veamos primero que $A + B(0, r) \subset \bigcup_{a \in A} B(a, r)$, Sea $x \in A + B(0, r)$. Por definición existe un $a_0 \in A$ y un $b \in B(0, r)$ tales que $x = a_0 + b$, de manera que $|x - a_0| = |b| < r$, teniendo así que $x \in B(a_0, r)$ y de este modo $x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r)$ demostrando así que $A + B(0, r) \subset \bigcup_{a \in A} B(a, r)$.

Veamos ahora que $\bigcup_{a \in A} B(a, r) \subset A + B(0, r)$. Sea $x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r)$ y demostraremos que $x \in A + B(0, r)$. Existe un $a_0 \in A$ tal que $x \in B(a_0, r)$, de manera que $|x - a_0| < r$ es decir $x - a_0 \in B(0, r)$, y así $x = a_0 + (x - a_0)$, con lo que $x \in A + B(0, r)$, terminando así la demostración del lema.

□

Lema 2.14. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\bar{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} (A + \varepsilon B(0, 1))$

Demostración: Observemos que $B(0, \varepsilon) = \varepsilon B(0, 1)$. Tenemos así que el resultado se sigue de los lemas 2.13 y 2.13.

□

Definición 2.15. Una *combinación convexa de puntos* V_1, \dots, V_K en \mathbb{R}^n es una combinación lineal de la forma:

$$C_1V_1 + \dots + C_kV_k$$

talque $C_1 + \dots + C_k = 1$ y $C_i \geq 0$ [20, página 454].

Definición 2.16. El conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en un conjunto S es la *envolvente convexa de S* , y se denota como $\text{conv}(S)$ [20, página 454].

Definición 2.17. Un conjunto S es *afín* si $p, q \in S$ implica que $(1-t)p + tq \in S$ para todo número real t .

Definición 2.18. Una *funcional lineal* en \mathbb{R}^n es una transformación lineal f de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Para todo escalar d en \mathbb{R} , el símbolo $[f : d]$ denota el conjunto de todas las x en \mathbb{R}^n para las cuales el valor de f es d . Es decir, $[f : d]$ es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = d\}$.

La *funcional cero* es la transformación tal que $f(x) = 0$ para toda x en \mathbb{R}^n . Todas las demás funcionales lineales en \mathbb{R}^n son diferentes de cero [20, página 461].

Definición 2.19. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo, se define un hiperplano de \mathbb{R}^n como el subconjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n | cx = a\}$. Cada hiperplano define dos semiespacios cerrados $H_u = \{x \in \mathbb{R}^n | cx \geq a\}$ y $H_L = \{x \in \mathbb{R}^n | cx \leq a\}$.

Definición 2.20. Un *politopo en \mathbb{R}^n* es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos [20, página 470].

Definición 2.21. Un hiperplano H se dice que soporta a un conjunto X en un punto x de la frontera de X , si $X \subset H_u$ ó $X \subset H_L$.

Definición 2.22. Un punto expuesto de un conjunto convexo X se define como un punto en su cerradura que intersecta una hiperplano de soporte de X .

Definición 2.23. Si P es un politopo de dimensión k , entonces P se llama un *k -politopo*. Una 0-cara de P se llama *vértice*, una 1-cara es una arista, y una $(k-1)$ -dimensional cara es una faceta de S . [20, página 470]

Definición 2.24. Un *punto expuesto* de un conjunto convexo X se define como un punto en su cerradura que intersecta un hiperplano de soporte de X . [20, página 470]

2.5 Ejemplo 1

Dada la función seguidor y el punto deseado por el líder, encontrar función incentivos.

Función seguidor

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2.$$

Punto deseado por el líder

$$(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = (4, 1/2, 6).$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 21/4.$$

Calculo de la matriz B

$$\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = -4$$

$$\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

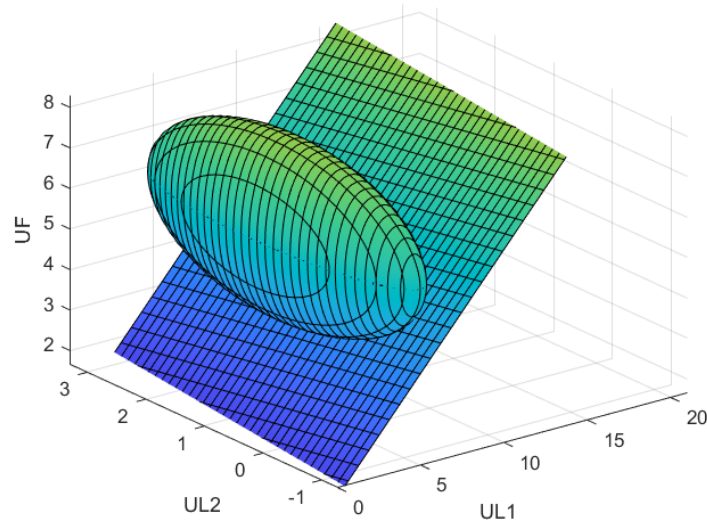
$$0 = 4u_F - 2u_{L_2} + u_{L_1} - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = (4u_F)/5 - 27/10$$

$$u_{L_2} = 62/5 - (8u_F)/5.$$

FIGURA 2.1: Gráfica de Λ_d y hiperplano 1.

2.6 Ejemplo 2

Dada la función seguidor y la función líder, encontrar función incentivos.

Función Líder

$$J_L(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = 2u_{L_1} - 2u_F u_{L_1} + 2u_{L_2} u_{L_1} + u_f^2 + u_{L_2}^2 + 4u_{L_1}^2 - 3.$$

Primero resolveremos el sistema derivadas parciales para encontrar el punto deseado por el líder.

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_F} = 0$$

$$2u_F - 2u_{L_1} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_1}} = 0$$

$$2u_{L_2} - 2u_F + 8u_{L_1} + 2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_2}} = 0$$

$$2u_{L_2} + 2u_{L_1} + 2 = 0 \quad (2.7)$$

Resolviendo sistema de ecuaciones obtenemos punto critico

$$(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = (-1/2, 1/2, -1/2)$$

y se comprobó con la matriz que Hessiana que es un punto mínimo.

Función seguidor

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = 6u_F^2 + u_{L_2}^2 + 2u_{L_1}^2$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$6u_F^2 + u_{L_2}^2 + 2u_{L_1}^2 \leq 9/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = -6$$

$$\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = 6u_F + u_{L_2} - 2u_{L_1} + 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = -(12u_F)/5 - 7/10$$

$$u_{L_2} = 1/10 + (6u_F)/5.$$

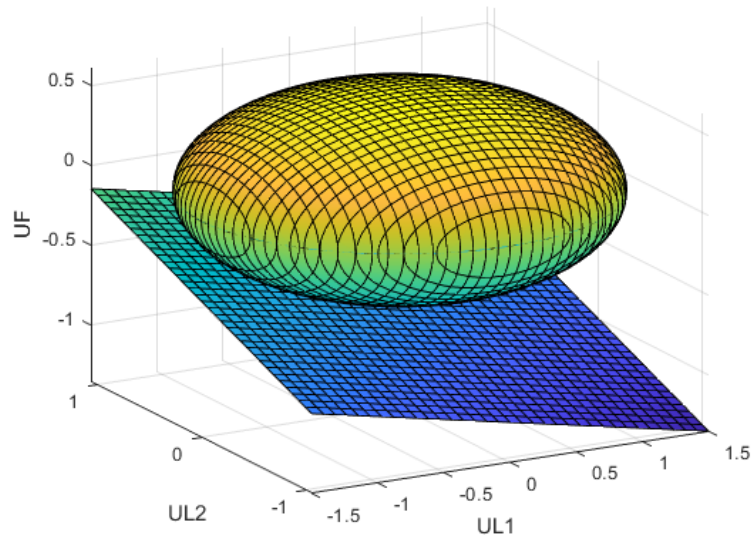


FIGURA 2.2: Gráfica de Λ_d y hiperplano 2.

2.7 Ejemplo 3

Dada la función seguidor y la función líder, encontrar función incentivos.

Función Líder

$$J_L(u_{F_1}, u_{F_2}, u_{L_1}, u_{L_2}) = 4u_{L_1} - 2u_{F_2}u_{L_1} - 2u_{F_1}u_{L_1} + 4u_{L_2}u_{L_1} + u_{F_2}^2 + u_{F_1}^2 + 2u_{L_2}^2 + 8u_{L_1}^2 - 6$$

Primero resolveremos el sistema derivadas parciales para encontrar el punto deseado por el líder.

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{F_1}} = 0$$

$$2u_{F_1} - 2u_{L_1} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{F_2}} = 0$$

$$2u_{F_2} - 2u_{L_1} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_1}} = 0$$

$$4u_{L_2} - 2u_{F_1} - 2u_{F_2} + 16u_{L_1} + 4 = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_2}} = 0$$

$$4u_{L_2} + 4u_{L_1} = 0 \quad (2.11)$$

Resolviendo sistema de ecuaciones obtenemos punto crítico

$$(u_{F_1}^d, u_{F_2}^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = (-1/2, -1/2, 1/2, -1/2)$$

y se comprobó con la matriz que Hessiana que es un punto mínimo

Función seguidor

$$J_F(u_{F_1}, u_{F_2}, u_{L_1}, u_{L_2}) = 6u_{F_2}^2 + 6u_{F_1}^2 + 2u_{L_2}^2 + 4u_{L_1}^2.$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$6u_{F_2}^2 + 6u_{F_1}^2 + 2u_{L_2}^2 + 4u_{L_1}^2 \leq 9/2.$$

Cálculo de la matriz B

$$\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d) = \nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -6/5 & -6/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = 6u_{F_2} + 6u_{F_1} + 2u_{L_2} - 4u_{L_1} + 9$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = -(6u_{F_2})/5 - (6u_{F_1})/5 - 7/10$$

$$u_{L_2} = (3u_{F_2})/5 + (3u_{F_1})/5 + 1/10$$

2.8 Ejemplo 4

Dada la función seguidor y la función líder, encontrar función incentivos.

Función Líder

$$J_L(u_{F_1}, u_{F_2}, u_{F_3}, u_{L_1}, u_{L_2}) = 6u_{L_1} - 2u_{F_2}u_{L_1} - 2u_{F_3}u_{L_1} - 2u_{F_1}u_{L_1} + 6u_{L_2}u_{L_1} + u_{F_2}^2 + u_{F_3}^2 + u_{F_1}^2$$

Primero resolveremos el sistema derivadas parciales para encontrar el punto deseado por el líder.

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{F_1}} = 0$$

$$2u_{F_1} - 2u_{L_1} = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{F_2}} = 0$$

$$2u_{F_2} - 2u_{L_1} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{F_3}} = 0$$

$$2u_{F_3} - 2u_{L_1} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_1}} = 0$$

$$6u_{L_2} - 2u_{F_1} - 2u_{F_3} - 2u_{F_2} + 24u_{L_1} + 6 = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial J_L}{\partial u_{L_2}} = 0$$

$$6u_{L_2} + 6u_{L_1} = 0 \quad (2.16)$$

Resolviendo sistema de ecuaciones obtenemos punto crítico

$$(u_{F_1}^d, u_{F_2}^d, u_{F_3}^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = (-1/2, -1/2, -1/2, 1/2, -1/2)$$

y se comprobó con la matriz que Hessiana que es un punto mínimo.

Función seguidor

$$J_F(u_{F_1}, u_{F_2}, u_{F_3}, u_{L_1}, u_{L_2}) = 6u_{F_2}^2 + 6u_{F_3}^2 + 6u_{F_1}^2 + 3u_{L_2}^2 + 6u_{L_1}^2.$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$6u_{F_2}^2 + 6u_{F_3}^2 + 6u_{F_1}^2 + 3u_{L_2}^2 + 6u_{L_1}^2 \leq 27/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$\begin{aligned} \nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) &= \nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d) &= \nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_{L_1}^d, u_{L_2}^d) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -4/5 & -4/5 & -4/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = 6u_{F_2} + 6u_{F_3} + 6u_{F_1} + 3u_{L_2} - 6u_{L_1} + 27/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = -(4u_{F_2})/5 - (4u_{F_3})/5 - (4u_{F_1})/5 - 7/10$$

$$u_{L_2} = (2u_{F_2})/5 + (2u_{F_3})/5 + (2u_{F_1})/5 + 1/10.$$

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN

En este capítulo veremos las funciones con ruidos aleatorios en la función \mathcal{J}_F . Supondremos que Ω_F y Ω_L y las funciones \mathcal{J}_F y \mathcal{J}_L son funciones continuas.

Los ruidos que se aplicarán \mathcal{J}_F serán:

1. Ruido aditivo.
2. Ruido multiplicativo.
3. Ruido aditivo al seguidor.
4. Ruido aditivo multiplicativo al seguidor.

Estos ruidos al agregárselos a una función, abra una modificación en la función original, entonces buscaremos una solución para este juego se Stackelberg.

Al aplicarle un ruido aleatorio a \mathcal{J}_F sigue siendo una función continua, por el teorema 2.3 existe un punto de equilibrio de Stackelberg.

3.1 Ruido aditivo

En esta sección se le sumará un ruido aleatorio a toda la función costo del seguidor.

Se decidió estudiar este tipo de ruido por que los costos pueden tener cierta variabilidad e incertidumbre a la función demanda teniendo un costo adicional.

Sea r un ruido aleatorio, J_F el costo del seguidor. Llamaremos a J_F^* , como el costo del seguidor con un ruido aleatorio aditivo, definido como:

$$J_F^* := E(J_F + r).$$

Lema 3.1. *El conjunto subnivel Λ_d^* para J_F^* , sería el mismo conjunto subnivel Λ_d para J_F*

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } J_F^* &= E(J_F + r) \\ &= E(J_F) + E(r) \text{ (Por propiedades del valor esperado.)} \\ &= J_F + E(r) \text{ (Por ser } J_F \text{ constante)} \end{aligned}$$

Sea $x_d = (u_L^d, u_F^d)$

$$\Lambda_d^* = \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : J_F^*(x) \leq J_F^*(x_d)\}$$

$$J_F^*(x) \leq J_F^*(x_d)$$

$$J_F(x) + E(r) \leq J_F(x_d) + E(r)$$

$$J_F(x) + E(r) - E(r) \leq J_F(x_d) + E(r) - E(r)$$

$$J_F(x) \leq J_F(x_d)$$

$$\Lambda_d^* = \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : J_F(x) \leq J_F(x_d)\}$$

$$\Lambda_d^* = \Lambda_d$$

□

Ya vimos que el conjunto solución para Λ_d es $(\gamma_L(u_f), u_f)$, por tanto para Λ_d^*

sería la misma solución.

3.2 Ruido multiplicativo

En este capítulo se le multiplicará un ruido aleatorio a toda la función costo del seguidor.

Se decidió estudiar este tipo de ruido por que los costo pueden tener cierta variabilidad e incertidumbre a la función demanda teniendo un costo adicional.

Sea r un ruido aleatorio, J_F el costo del seguidor. Llamaremos a J_F^{**} , como el costo del seguidor con un ruido aleatorio multiplicativo, definido como:

$$J_F^{**} := E(r * J_F).$$

Lema 3.2. *El conjunto subnivel Λ_d^{**} para J_F^{**} , va a ser el mismo Λ_d para J_F , si el valor esperado del ruido aleatorio es positivo.*

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } J_F^{**} &= E(J_F * r) \\ &= J_F * E(r) \text{ (Por propiedades del valor esperado.)} \end{aligned}$$

Sea $x_d = (u_L^d, u_F^d)$

$$\Lambda_d^{**} = \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : J_F^{**}(x) \leq J_F^{**}(x_d)\}$$

$$J_F^{**}(x) \leq J_F^{**}(x_d)$$

$$J_F(x)E(r) \leq J_F(x_d)E(r)$$

Caso 1: Si $E(r) = 0$

$$J_F(x) * 0 \leq J_F(x_d) * 0$$

$$0 \leq 0$$

Sin importar que decisión se tome siempre va caer en el conjunto subnivel.

Caso 2: Si $E(r) \leq 0$

$$J_F(x)E(r) \leq J_F(x_d)E(r)$$

$$J_F(x) \geq J_F(x_d) \text{ (Por ser } E(r) \geq 0 \text{ se voltea la desigualdad)}$$

$$\Lambda_d^{**} = \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : J_F(x) \geq J_F(x_d)\}$$

Esto quiere decir que la decisión que tome el líder va a ser la peor.

Caso 3: Si $E(r) \geq 0$

$$J_F(x)E(r) \leq J_F(x_d)E(r)$$

$$J_F(x) \leq J_F(x_d)$$

$$\Lambda_d^{**} = \{x \in \Omega_L \times \Omega_F : J_F(x) \leq J_F(x_d)\}$$

$$\Lambda_d^{**} = \Lambda_d$$

□

Ya vimos que el conjunto solución para Λ_d es $(\gamma_L(u_F), u_F)$, por tanto para Λ_d^{**} sería la misma solución siempre y cuando la $E(r)$ sea positivo.

3.3 Ruido aditivo al seguidor

En este capítulo se le sumará un ruido aleatorio a la componente del seguidor de la función costo del seguidor.

Sea r un ruido aleatorio, J_F el costo del seguidor, J_F^A el costo del seguidor con ruido aditivo al seguidor. Definiremos a

$$J_F^A(u_F, u_L) = E(J_F(u_F + r, u_L)).$$

Lema 3.3. *Sea J_F una función convexa, entonces J_F^A es convexa.*

$$\begin{aligned} &\text{Demostración: Sea } x_1 = (u_F^1 + r_1, u_L^1), x_2 = (u_F^2 + r_2, u_L^2) \\ J_F^A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= E(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \text{ (Por definición } J_F^A) \\ &= E(J_F(\lambda(u_F^1 + r_1, u_L^1) + (1 - \lambda)(u_F^2 + r_2, u_L^2))) \text{ (Por definición } x_1 \text{ y } x_2) \\ &\leq E(\lambda J_F(u_F^1 + r_1, u_L^1) + (1 - \lambda)J_F(u_F^2 + r_2, u_L^2)) \text{ (Por se } J_F \text{ convexo)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E(\lambda J_F(u_F^1 + r_1, u_L^1)) + E((1 - \lambda)J_F(u_F^2 + r_2, u_L^2)) \text{ (Por propiedades del valor espe-} \\
&\text{rado)} \\
&= \lambda E(J_F(u_F^1 + r_1, u_L^1)) + (1 - \lambda)E(J_F(u_F^2 + r_2, u_L^2)) \text{ (Por propiedades del valor espe-} \\
&\text{rado)} \\
&= \lambda J_F^A(x_1) + (1 - \lambda)J_F^A(x_2) \text{ (Por definición } J_F^A)
\end{aligned}$$

3.4 Ruido aditivo multiplicativo al seguidor

En este capítulo se le sumará y multiplicará un ruido aleatorio a la componente del seguidor de la función costo del seguidor.

Sea r un ruido aleatorio, J_F el costo del seguidor, J_F^M el costo del seguidor con ruido aditivo multiplicativo al seguidor. Definiremos a

$$J_F^M(u_F, u_L) = E(J_F(u_F + u_F r, u_L)).$$

Lema 3.4. *Sea J_F una función convexa, entonces J_F^M es convexa.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Demostración:} \text{ Sea } x_1 = (u_F^1 + u_F^1 r_1, u_L^1), x_2 = (u_F^2 + u_F^2 r_2, u_L^2) \\
&J_F^M(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = E(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \text{ (Por definición } J_F^A) \\
&= E(J_F(\lambda(u_F^1 + u_F^1 r_1, u_L^1) + (1 - \lambda)(u_F^2 + u_F^2 r_2, u_L^2))) \text{ (Por definición } x_1 \text{ y } x_2) \\
&\leq E(\lambda J_F(u_F^1 + u_F^1 r_1, u_L^1) + (1 - \lambda)J_F(u_F^2 + u_F^2 r_2, u_L^2)) \text{ (Por se } J_F \text{ convexo)} \\
&= E(\lambda J_F(u_F^1 + u_F^1 r_1, u_L^1)) + E((1 - \lambda)J_F(u_F^2 + u_F^2 r_2, u_L^2)) \text{ (Por propiedades del valor} \\
&\text{esperado)} \\
&= \lambda E(J_F(u_F^1 + u_F^1 r_1, u_L^1)) + (1 - \lambda)E(J_F(u_F^2 + u_F^2 r_2, u_L^2)) \text{ (Por propiedades del valor} \\
&\text{esperado)} \\
&= \lambda J_F^M(x_1) + (1 - \lambda)J_F^M(x_2) \text{ (Por definición } J_F^M)
\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo veremos los resultados obtenidos, usando como ejemplo 1 de la sección 2.5, con un ruido aditivo multiplicativo a la función líder. En los siguientes ejemplos calcularemos la función incentivos con el ejemplo 1 del capítulo 2.

4.1 Ruido aditivo

Sea

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Al aplicarle un ruido aditivo tenemos que:

$$\begin{aligned} J_F^*(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) &= E(J_F(u_F + u_F r, u_{L_1}, u_{L_2})) \\ &= (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 + E(r) \end{aligned}$$

4.1.1 CASO 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.01$

Función Seguidor

$$J_F^*(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 + 1$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 25/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

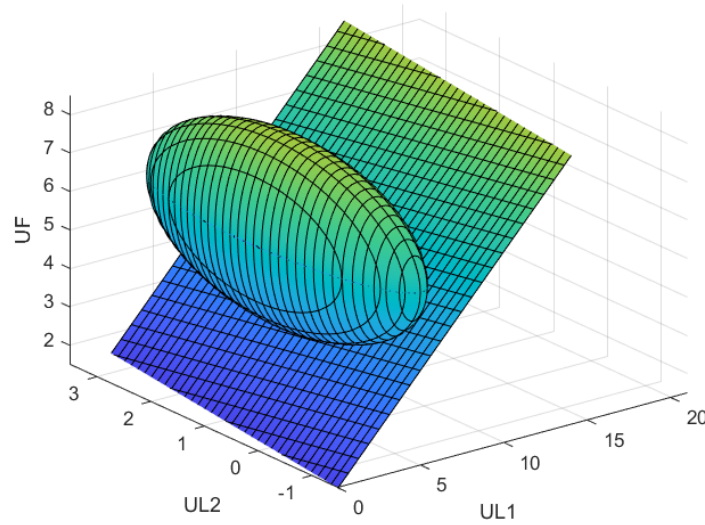
$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 4u_F/25 - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

FIGURA 4.1: Gráfica de Λ_d y hiperplano 3.

4.1.2 CASO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.1$

Función Seguidor

$$J_F^*(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 + 1$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 25/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 4u_F/25 - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

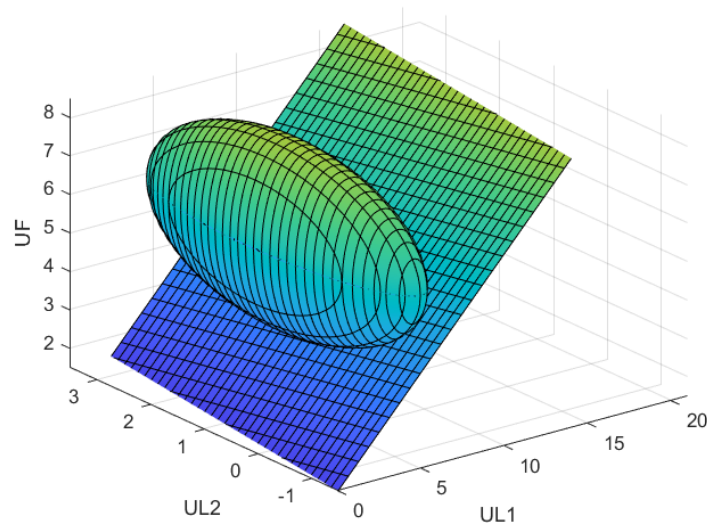


FIGURA 4.2: Gráfica de Λ_d y hiperplano 4.

4.1.3 CASO 3: DISTRIBUCIÓN POISSON $\lambda = 3$

Función Seguidor

$$J_F^*(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 + 3$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 33/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

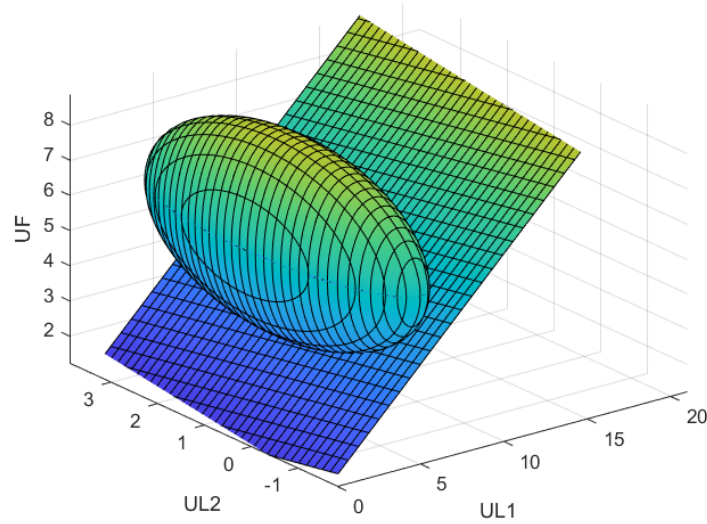
$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 4u_F/25 - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

FIGURA 4.3: Gráfica de Λ_d y hiperplano 5.

4.2 Ruido multiplicativo

Sea

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Al aplicarle un ruido aditivo tenemos que:

$$\begin{aligned} J_F^{**}(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) &= E(J_F(u_F + u_F r, u_{L_1}, u_{L_2})) \\ &= (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 * E(r) \end{aligned}$$

4.2.1 CASO 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.01$

Función Seguidor

$$J_F^{**}(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 21/4.$$

Calculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 4u_F/25 - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

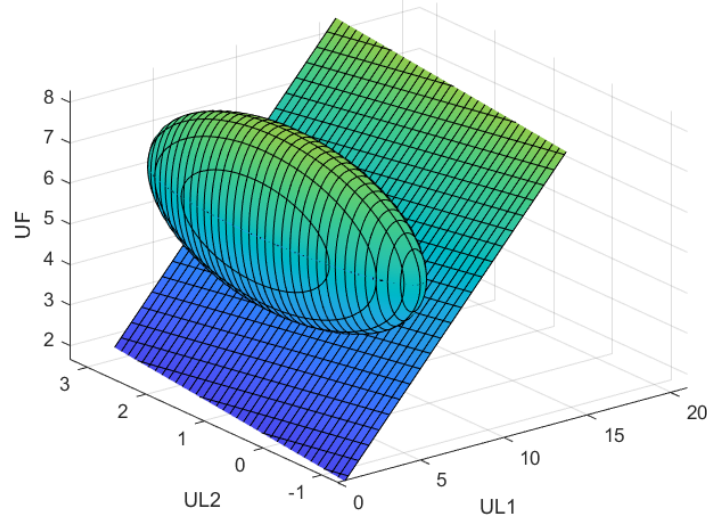


FIGURA 4.4: Gráfica de Λ_d y hiperplano 6.

4.2.2 CASO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.1$

Función Seguidor

$$J_F^{**}(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 21/4.$$

Calculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 4u_F/25 - 9/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

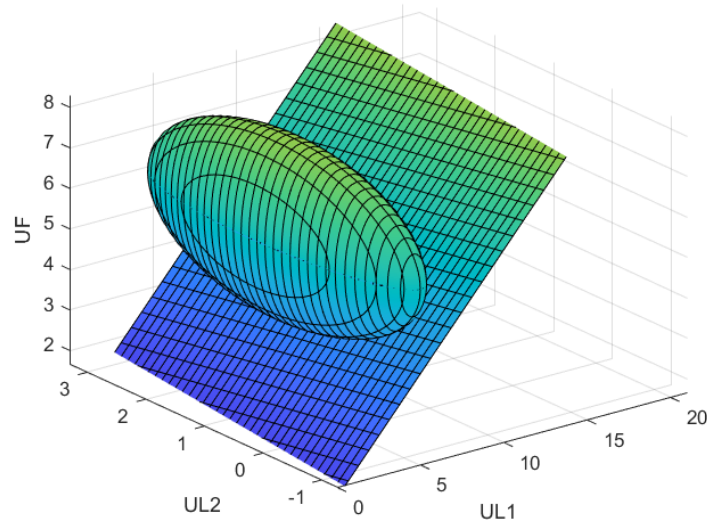


FIGURA 4.5: Gráfica de Λ_d y hiperplano 7.

4.2.3 CASO 3: DISTRIBUCIÓN POISSON $\lambda = 3$

Función Seguidor

$$J_F^{**}(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = 3 * (u_F - 6)^2 + 3 * (u_{L_2} - 5)^2 + 3 * (u_{L_1} - 1)^2$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 63/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

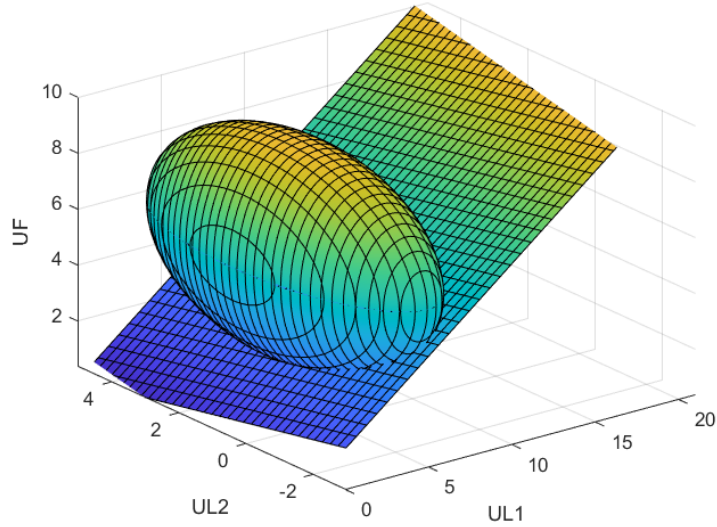
$$0 = 3u_{L_1} - 6u_{L_2} + 12u_F/25 - 27/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 62/5 - (8u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 - 27/10.$$

FIGURA 4.6: Gráfica de Λ_d y hiperplano 8.

4.3 Ruido aditivo al seguidor

Sea

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Al aplicarle un ruido aditivo al seguidor tenemos que:

$$\begin{aligned}
 J_F^A(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) &= E(J_F(u_F + r, u_{L_1}, u_{L_2})) \\
 &= E(((u_F + r) - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2) \\
 &= E((u_F + r) - 6)^2 + E((u_{L_2} - 5)^2) + E(u_{L_1} - 1)^2 \\
 &= E((u_F + r)^2 + 2(u_F + r)(-6) + 36) + E((u_{L_2} - 5)^2) + E(u_{L_1} - 1)^2 \\
 &= E(u_F^2 + 2u_F r + r^2 - 12u_F - 12r + 36) + E((u_{L_2} - 5)^2) + E(u_{L_1} - 1)^2 \\
 &= E(u_F^2 - 12u_F + 36) + E(2u_F r - 12r) + E(r^2) + E((u_{L_2} - 5)^2) + E(u_{L_1} - 1)^2 \\
 &= E((u_F - 6)^2) + E(2u_F r - 12r) + E(r^2) + E((u_{L_2} - 5)^2) + E(u_{L_1} - 1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E(2u_F r - 12r) + E(r^2) + E((u_F - 6)^2) + E((u_{L_2} - 5)^2) + E((u_{L_1} - 1)^2) \\
&= E(2u_F r - 12r) + E(r^2) + (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \\
&= E(2r(u_F - 6)) + E(r^2) + J + (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \\
&= E(2r(u_F - 6)) + E(r^2) + J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) \\
&= 2(u_F - 6)E(r) + E(r^2) + J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2})
\end{aligned}$$

Así llegamos a que :

$$J_F^A(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = 2(u_F - 6)E(r) + E(r^2) + J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2})$$

4.3.1 CASO 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.1$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 5)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 9/4.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 2u_F + 7/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = -11/10 + (2u_F)/5$$

$$u_{L_2} = -(4u_F)/5 + 46/5.$$

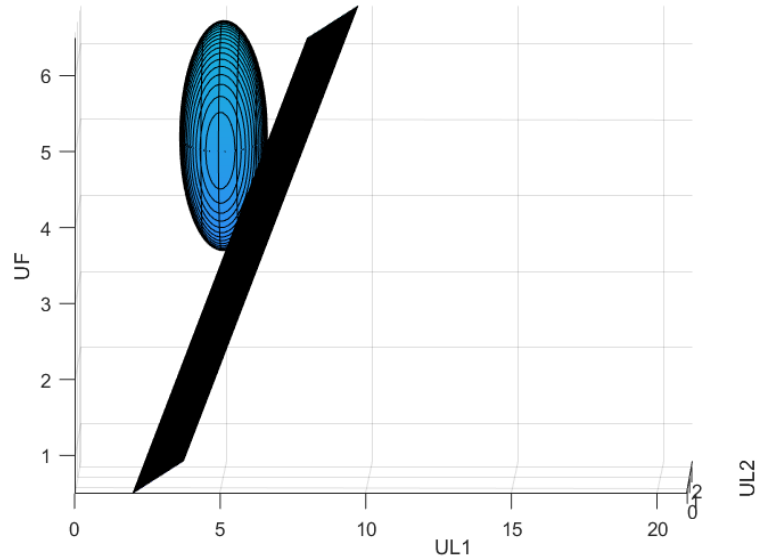


FIGURA 4.7: Gráfica de Λ_d y hiperplano 9.

4.3.2 CASO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.01$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$2u_F + (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 1325.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} + 2u_F + 7/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

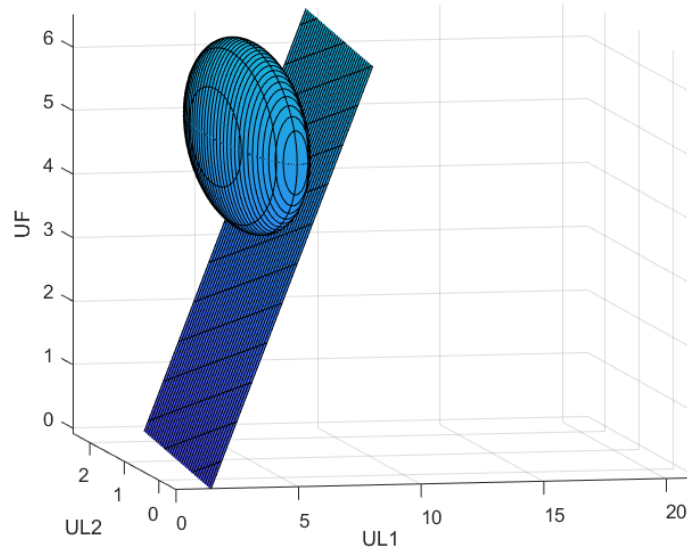
$$u_{L_1} = -11/10 + (2u_F)/5$$

$$u_{L_2} = -(4u_F)/5 + 46/5.$$

4.3.3 CASO 3: DISTRIBUCIÓN POISSON $\lambda = 3$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

FIGURA 4.8: Gráfica de Λ_d y hiperplano 10.

$$(u_F - 3)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 \leq 9/4$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} - 2u_F + 39/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 21/10 - (2u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (4u_F)/5 + 14/5.$$

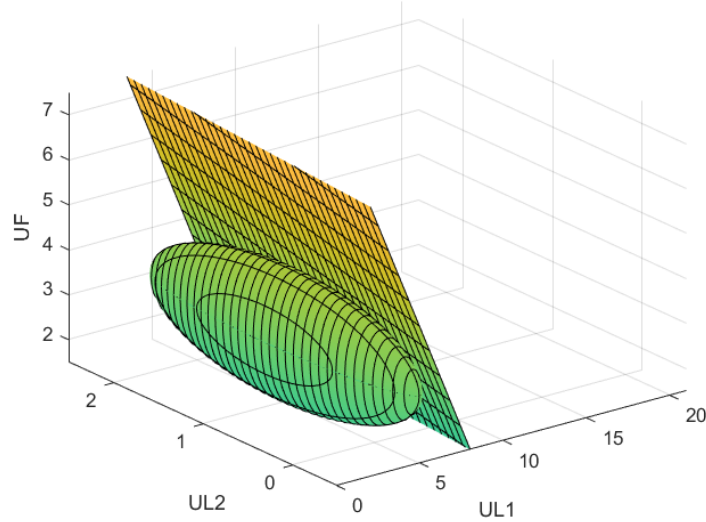


FIGURA 4.9: Gráfica de Λ_d y hiperplano 11.

4.4 Ruido aditivo multiplicativo al seguidor

Sea

$$J_F(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) = (u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2$$

Al aplicarle un ruido aditivo multiplicativo tenemos que:

$$\begin{aligned} J_F^M(u_F, u_{L_1}, u_{L_2}) &= E(J_F(u_F + u_F r, u_{L_1}, u_{L_2})) \\ &= E(((u_F + u_F r) - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2) \\ &= E((u_F + u_F r) - 6)^2 + E((u_{L_2} - 5)^2) + E((u_{L_1} - 1)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E((u_F + u_{Fr}) - 6)^2 + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 \\
&= E((u_F + u_{Fr})^2 - 12(u_F + u_{Fr}) + 36) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 \\
&= E((u_F + u_{Fr})^2) + E(-12(u_F + u_{Fr})) + E(36) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 \\
&= E((u_F + u_{Fr})^2) + E(-12(u_F + u_{Fr})) + 36 + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 \\
&= E(u_F^2 + 2u_F^2r + u_F^2r^2) + E(-12u_F - 12u_{Fr}) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + 36 \\
&= E(u_F^2) + E(2u_F^2r) + E(u_F^2r^2) + E(-12u_F) + E(-12u_{Fr}) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + 36 \\
&= u_F^2 + E(2u_F^2r) + E(u_F^2r^2) - 12u_F + E(-12u_{Fr}) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + 36 \\
&= E(2u_F^2r) + E(u_F^2r^2) + E(-12u_{Fr}) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + u_F^2 - 12u_F + 36 \\
&= E(2u_F^2r) + E(u_F^2r^2) + E(-12u_{Fr}) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + (u_F^2 - 6)^2 \\
&= 2u_F^2E(r) + u_F^2E(r^2) - 12u_F E(r) + (u_{L2} - 5)^2 + (u_{L1} - 1)^2 + (u_F^2 - 6)^2 \\
&= 2u_F^2E(r) + u_F^2E(r^2) - 12u_F E(r) + J_F(u_F, u_{L1}, u_{L2}) \\
&= 2u_F^2E(r) - 12u_F E(r) + u_F^2E(r^2) + J_F(u_F, u_{L1}, u_{L2}) \\
&= 2(u_F^2 - 6u_F)E(r) + u_F^2E(r^2) + J_F(u_F, u_{L1}, u_{L2})
\end{aligned}$$

Así llegamos a que :

$$J_F^M(u_F, u_{L1}, u_{L2}) = 2(u_F^2 - 6u_F)E(r) + u_F^2E(r^2) + J_F(u_F, u_{L1}, u_{L2}).$$

4.4.1 CASO 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.1$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$\frac{160801(u_F - \frac{1200}{401})^2}{213341} + \frac{40100(u_{L2} - 5)^2}{213341} + \frac{40100(u_{L1} - 1)^2}{213341} \leq 1.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -202/125 \\ 404/125 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} - 202u_F/25 + 2191/50.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = (1714)/250 - (202u_F)/125$$

$$u_{L_2} = (404u_F)/125 - 866/125.$$

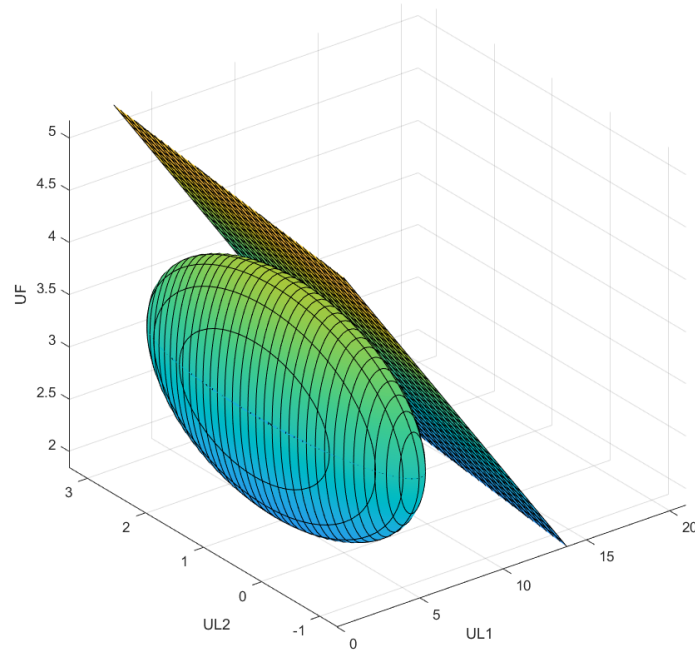
4.4.2 CASO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL $\mu = 1, \sigma = 0.01$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$\frac{16000801(u_F - \frac{120000}{40001})^2}{2100332516} + \frac{100002500(u_{L_2} - 5)^2}{525083129} + \frac{100002500(u_{L_1} - 1)^2}{525083129} \leq 1.$$

Cálculo de la matriz B

FIGURA 4.10: Gráfica de Λ_d y hiperplano 12.

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -10001/6250 \\ 10001/3125 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} - 10001u_F/1250 + 54379/1250.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = (43129)/6250 - (10001u_F)/6250$$

$$u_{L_2} = (10001u_F)/3125 - 21254/3125.$$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$(u_F - 6)^2 + (u_{L_2} - 5)^2 + (u_{L_1} - 1)^2 + 301u_F^2/100 \leq 541/100.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -202/125 \\ 404/125 \end{pmatrix}.$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

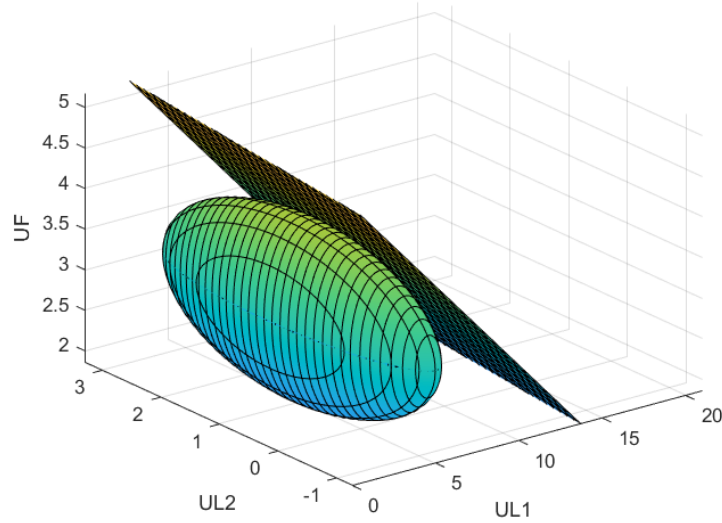
$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} - 202u_F/25 + 2191/50$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = (1714)/250 - (202u_F)/125$$

$$u_{L_2} = (404u_F)/125 - 866/125.$$

FIGURA 4.11: Gráfica de Λ_d y hiperplano 12.

4.4.3 CASO 3: DISTRIBUCIÓN POISSON $\lambda = 3$

Conjunto subnivel Λ_d

$$\Lambda_d := \{(u_L, u_F) \in \Omega_L \times \Omega_F \mid J_F(u_L, u_F) \leq J_F(u_L^d, u_F^d)\}$$

$$\frac{1444(u_F - \frac{24}{19})^2}{10911} + \frac{76(u_{L2} - 5)^2}{10911} + \frac{76(u_{L1} - 1)^2}{10911} \leq 1.$$

Cálculo de la matriz B

$$B = \frac{\nabla_{u_F} J_F(u_F^d, u_L^d) \nabla_{u_F}^T J_F(u_F^d, u_L^d)}{\left\| \nabla_{u_L}^T J_F(u_F^d, u_L^d) \right\|^2} = \begin{pmatrix} -104/5 \\ 208/5 \end{pmatrix}$$

Ecuación del hiperplano

$$0 = [\nabla_{u_L} J_F(u_F^d, u_L^d)]^T [(u_L^d - u_L) + B(u_F^d - u_F)]$$

$$0 = u_{L_1} - 2u_{L_2} - 104u_F + 855/2.$$

Funciones incentivas

$$u_L := \gamma_L(u_F) = u_L^d + B(u_F - u_F^d)$$

$$u_{L_1} = 837/10 - (104u_F)/5$$

$$u_{L_2} = (208u_F)/5 - 802/5.$$

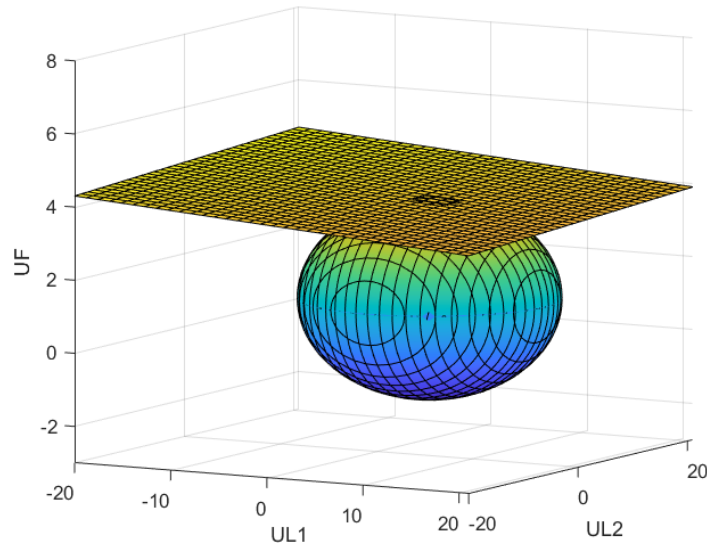


FIGURA 4.12: Gráfica de Λ_d y hiperplano 13.

4.5 Resultados

4.5.1 RUIDO ADITIVO

En la sección 4.1 aplicamos un ruido aditivo con 3 distribuciones diferentes, un ruido aleatorio con una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.01$, distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.1$ y un ruido con distribución de Poisson como era de esperarse obtuvimos las funciones incentivo, ya que al sumarle una constante a la función de costo y después derivarla y obtener B , obtendríamos la misma B y como γ_L depende de B obtendríamos para todos los casos sería la misma γ_L .

4.5.2 RUIDO MULTIPLICATIVO

En la sección 4.2 aplicamos un ruido multiplicativo con 3 distribuciones diferentes, un ruido aleatorio con una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.01$, distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.1$ y un ruido con distribución de Poisson como era de esperarse obtuvimos las funciones incentivo, ya que al multiplicar por una constante a la función de costo y después derivarla y obtener B , se eliminaría dicho valor constante, obtendríamos la misma B del ejercicio original y como γ_L depende de B obtendríamos para todos los casos sería la misma γ_L .

4.5.3 RUIDO ADITIVO AL SEGUIDOR

En la sección 4.3 aplicamos un ruido aditivo al seguidor con 3 distribuciones diferentes, un ruido aleatorio con una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.01$, distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.1$ y un ruido con distribución de Poisson con $\lambda = 3$.

Distribución normal.

Como la función costo ya con el ruido aleatorio contiene $E(r)$ y no de $E(r^2)$ y teníamos las mismas media. Entonces al aplicar el ruido aleatorio no importaría el valor de σ obtendríamos las mismas γ_L siempre y cuando tengamos las mismas μ .

Distribución Poisson.

Las funciones incentivos van depender solamente del valor de λ , conforme vaya cambiando λ irían cambiando las funciones incentivo.

4.5.4 RUIDO ADITIVO MULTIPLICATIVO AL SEGUIDOR

En la sección 4.3 aplicamos un ruido aditivo al seguidor con 3 distribuciones diferentes, un ruido aleatorio con una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.01$, distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.1$ y un ruido con distribución de Poisson con $\lambda = 3$.

Ahora el conjunto subnivel tendría forma de un esferoide.

Distribución Normal.

En esta ocasión la función costo ya con el ruido aleatorio contiene $E(r)$ y $E(r^2)$. Entonces al aplicar el ruido aleatorio iría cambiando la B conforme la media y la desviación estándar van cambiando, por tanto las funciones incentivo γ_L cambiarían.

Distribución Poisson.

En esta ocasión la función costo ya con el ruido aleatorio contiene $E(r)$ y $E(r^2)$. Entonces al aplicar el ruido aleatorio iría cambiando B conforme λ va cambiando, por tanto las funciones incentivo γ_L cambiaría.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

5.1 Conclusiones

Al aplicar con los ruidos aleatorios aditivos y multiplicativos las funciones incentivos no se verán alteradas.

En cambio al aplicar los otros tipos de ruidos van a cambiar las funciones incentivos, dependiendo el tipo de distribución y el tipo de ruido que se le aplique.

5.2 Trabajo futuro

En trabajo futuro se podría aplicar ruidos aleatorios, no solo en juegos en los que los jugadores hacen movimientos de forma simultanea (juegos estáticos), si no también cuando los jugadores tomen decisiones en distintos momentos del tiempo (juegos dinámicos).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Alfred Auslender and Marc Teboulle. *Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] Robert G Bartle and Donald R Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa Wiley, 2001.
- [3] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. *Programación lineal y flujo en redes*. Limusa, México, DF, 2 edition, 2004.
- [4] Stephen Boyd, Stephen P Boyd, and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [5] Andrew M Bruckner, Judith B Bruckner, and Brian S Thomson. *Real analysis*. ClassicalRealAnalysis. com, 1997.
- [6] Frank H Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990.
- [7] George B. Dantzig. Reminiscences about the origins of linear programming. *Operations Research Letters*, 1(2):43–48, 1982.
- [8] Richard M Dudley. *Real analysis and probability*. CRC Press, 2018.
- [9] Óscar Reinoso García, Luis Miguel Jiménez García, Luis Payá Castelló, Arturo Gil Aparicio, and Adrián Peidró Vidal. *MATLAB: conceptos básicos y descripción gráfica*. Universidad Miguel Hernández, 2018.
- [10] Walter Gellert, M Hellwich, H Kästner, and H Küstner. *The VNR concise encyclopedia of mathematics*. Springer Science & Business Media, 2012.

-
- [11] Noortje Groot, Bart De Schutter, and Hans Hellendoorn. Reverse stackelberg games, part i: Basic framework. In *2012 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 421–426. IEEE, 2012.
- [12] Noortje Groot, Bart De Schutter, and Hans Hellendoorn. Toward system-optimal routing in traffic networks: A reverse stackelberg game approach. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 16(1):29–40, 2014.
- [13] Noortje Groot, Bart De Schutter, and Hans Hellendoorn. Optimal affine leader functions in reverse stackelberg games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 168(1):348–374, 2016.
- [14] Nore Berta Groot. Reverse stackelberg games: theory and applications in traffic control. 2013.
- [15] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [16] Yu-Chi Ho, P Luh, and Ramal Muralidharan. Information structure, stackelberg games, and incentive controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):454–460, 1981.
- [17] Yu-Chi Ho, Peter B Luh, and Geert Jan Olsder. A control-theoretic view on incentives. *Automatica*, 18(2):167–179, 1982.
- [18] Sungwook Kim. Reversed stackelberg bandwidth-sharing game for cognitive multi-hop cellular networks. *IET Communications*, 6(17):2907–2913, 2012.
- [19] Steven G Krantz. *Convex analysis*. CRC Press, 2014.
- [20] David C Lay. *Álgebra lineal*. México: Prentice Hall, 2001.
- [21] Ming Li, JB Cruz, and Marwan A Simaan. An approach to discrete-time incentive feedback stackelberg games. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 32(4):472–481, 2002.

-
- [22] Roberto Lucchetti, F Mignanego, and G Pieri. Existence theorems of equilibrium points in stackelberg. *Optimization*, 18(6):857–866, 1987.
- [23] Miguel Mata. Bibliografía en : Una guía concisa de BIB. (versión 0.3), recurso libre, disponible en <http://logistica.fime.uanl.mx/miguel/docs/BibTeX.pdf>, 2011.
- [24] Holly Moore and Somitra Sanadhya. *MATLAB for Engineers*, volume 4. Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
- [25] Yifen Mu. Stackelberg–nash equilibrium, social welfare and optimal structure in hierarchical continuous public goods game. *Systems & control letters*, 112: 1–8, 2018.
- [26] M Pachter. Linear-quadratic reversed stackelberg differential games with incentives. *IEEE transactions on automatic control*, 29(7):644–647, 1984.
- [27] Ralph Tyrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton university press, 2015.
- [28] César Emilio Villarreal Rodríguez and Sara Verónica Rodríguez Sánchez. Fundamentos de matemáticas para ciencias e ingeniería. *Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana*, 20, 2018.
- [29] Halsey Lawrence Royden and Patrick Fitzpatrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.
- [30] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1976.
- [31] Fei Shen, Kenza Hamidouche, Ejder Bastug, and Mérouane Debbah. A stackelberg game for incentive proactive caching mechanisms in wireless networks. In *2016 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, pages 1–6. IEEE, 2016.

-
- [32] Kateřina Staňková and Alexander Boudewijn. Stackelberg and inverse stackelberg road pricing games: State of the art and future research. *Game Theoretic Analysis of Congestion, Safety and Security*, pages 191–209, 2015.
- [33] Mohammad Amin Tajeddini, Hamed Kebriaei, and Luigi Glielmo. Decentralized hierarchical planning of pevs based on mean-field reverse stackelberg game. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 17(4):2014–2024, 2020.
- [34] B Tolwinski. Closed-loop stackelberg solution to a multistage linear-quadratic game. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 34(4):485–501, 1981.
- [35] Hoang Tuy, Tuy Hoang, Tuy Hoang, Việt-nam Mathématicien, Tuy Hoang, and Vietnam Mathematician. *Convex analysis and global optimization*. Springer, 1998.
- [36] Heinrich Von Stackelberg. *Marktform und gleichgewicht*. J. springer, 1934.
- [37] Ni-Na Yan and Bao-Wen Sun. Optimal stackelberg strategies for closed-loop supply chain with third-party reverse logistics. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 29(05):1250026, 2012.
- [38] Mu Yifen. Equilibrium in repeated stackelberg public goods game with two-leaders-one-follower and one-step-memory. In *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*, pages 9157–9162. IEEE, 2015.
- [39] Constantin Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World scientific, 2002.
- [40] YING-PING ZHENG and Tamer Basar. Existence and derivation of optimal affine incentive schemes for stackelberg games with partial information: A geometric approach. *International Journal of Control*, 35(6):997–1011, 1982.

RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

Julio César García García

Candidato para obtener el grado de
Maestría en Ciencias de la Ingeniería con Orientación en Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE STACKELBERG CON INCENTIVOS Y
COSTO ALEATORIO DEL SEGUIDOR

Nací en Monterrey, Nuevo León, México. Estudie la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Nuevo León, en la facultad de Ciencias de Físico-Matemáticas. En el 2019 ingreso al programa de maestría de Posgrado de Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Autónoma de Nuevo León.