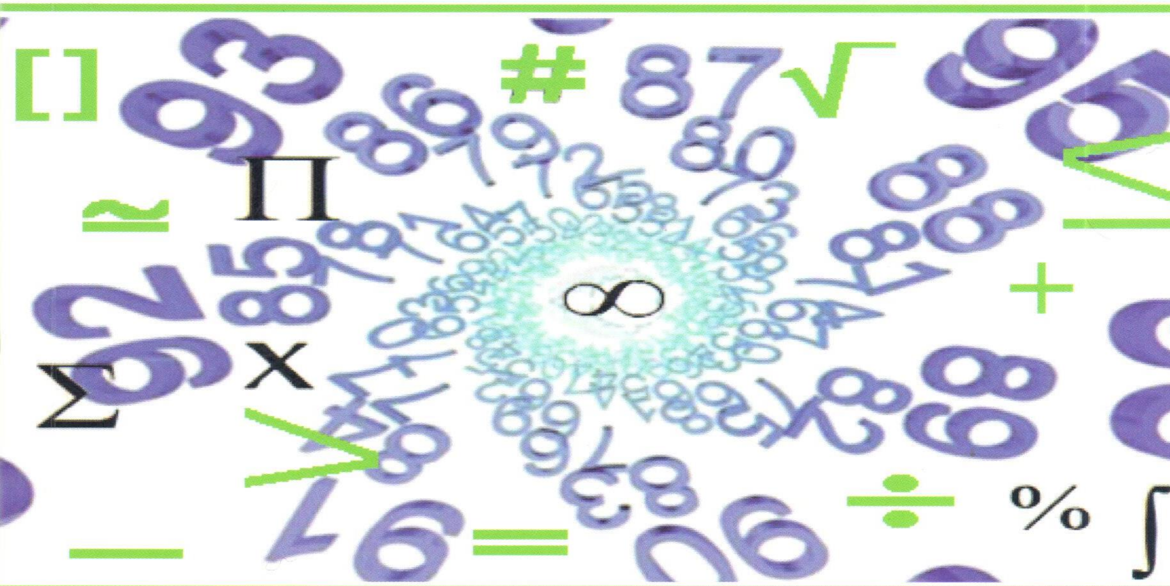
Matematik



Editörler

Prof.Dr. Hasan Altan ÇABUK& Prof.Dr. Cengiz YILMAZ

Yazarlar

Prof.Dr. Cengiz YILMAZ
Prof.Dr. Hasan Altan ÇABUK
Doç. Dr. Ahmet ERGÜLEN
Yrd.Doç.Dr.Adil KORKMAZ
Yrd.Doç.Dr.Atalay ÇAĞLAR
Yrd.Doç.Dr.Ebru Özgür GÜLER
Yrd.Doç.Dr.Erhan ÇANKAL
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL
Yrd.Doç.Dr.Gülsen KIRAL
Yrd.Doç.Dr.Kâmil ARI
Hüseyin GÜLER
Rıdvan KESKİN

lisans

Bölüm 13

[*] Yrd. Doç. Dr. Kâmil ARI

Doğrusal Cebir (Matris ve Determinant)

[*] Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Doğrusal Cebir (Matris ve Determinant)

13.1. Bazı Temel Cebirsel Kavramlar

Bu bölümde $\mathbb{Z}$ tam sayıları, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları, $\mathbb{R}$ gerçel sayıları ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayıları gösterecektir.

Tanım: m bir pozitif tam sayı ve *a* ve *b* iki tam sayı olsun. $a-b$ yi *m* bölerse $[m \mid (a-b)]$ *a* ile *b*, *m* ye göre ***kongrüent*** denir ve $a \equiv b \ (mod\ m)$ biçiminde gösterilir.

$$a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow m \mid (a-b)$$

Örnek: Londra'da saat Chicago'dan daha sonradır; yani Chicago'da saat 22.00 iken, Londra' da saatin kaç olduğu: 10 + 6 = 16 ≡ 4 mod 12 ve böylece Londra'da saat 04.00 olduğu görülür. Burada, saat 12'de devrettiği için *mod* 12 ye göre hesaplama yapılmıştır.

Teorem: m bir pozitif tam sayı ve $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $a \equiv a$ mod m; (yansıma)
ii) $a \equiv b$ mod m ise $b \equiv a$ mod m (simetri)
iii) $a \equiv b$ mod m ve $b \equiv c$ mod m ise $a \equiv c$ mod m. (geçişme)

Bu üç özelliği sağlayan ≡*mod m* ye denklik bağıntısı denir.

$\mathbb{Z}$ üzerinde *m* nin denklik sınıfları $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}$ ile temsil edilir; yani m ye göre $\mathbb{Z}$ nin denklik sınıflarının kümesi

$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$.

Tanım: Bir *G* kümesi üzerinde $* : G \times G \to G$, $* : (x,y) \mapsto x * y$ biçiminde tanımlı fonksiyona ikili işlem, yani G'deki elemanların her bir sıralı (*x*,*y*) çifti, G'deki $*(x,y)$ biçiminde bir eleman ise "*" işlemine ***ikili işlem*** denir. Ayrıca, $*(x,y) = x * y$ biçiminde gösterilir. Böylece, fonksiyonların bileşkesi de $(f, g) \mapsto f \circ g$ biçiminde ikili işlemdir. Çarpma, toplama ve çıkarma sırasıyla

$(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto (x \,.\, y)$ ve $(x,y) \mapsto x - y$ en çok kullanılan işlemlerdir.

$x = x'$ ve $y = y'$ ise $x * y = x' * y'$

ifadesine "***yerine koyma***" veya "***ornatma***" ***ilkesi*** denir.

Tanım: $*$, boş olmayan bir *G* kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem ve $e \in G$, ***birim eleman*** olsun. Eğer *G* aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (G, $*$) yapısına ***grup*** denir.

i) $\forall\, a, b, c \in G$ için, $(a * b) * c = a * (b * c)$ birleşme özelik,

ii) $\forall a \in G$ için, $a * e = e * a = a$, e birim eleman özelik,

iii) $\forall a \in G$ İçin, $a * a' = a' * a = e$ olacak biçimde bir $a' \in G$ vardır, ters eleman özelik.

Ayrıca, bu özelliklere ilaveten

iv) $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ **değişme özeliği** sağlanıyorsa, (G,*) cebirsel yapısına ***abeliyan (değişmeli) grup*** denir.

G kümesi üzerinde tanımlı işlem sıradan toplama "+" işlemi ise, G ye ***toplamsal grup*** denir.

Örnekler: $\forall$ $a,b \in \mathbb{Z}$ için $a * b = a + b$, birimi e=0 ve her $n \in \mathbb{Z}$ için tersi $-n$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ toplamsal abel bir gruptur. Benzer biçimde $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de toplamsal abel grupturlar. Ayrıca $\mathbb{Q}^x = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^x = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\mathbb{C}^x = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümeleri de çarpımsal abel gruptur.

Tanım: R boş olmayan bir küme ve iki tanımlı ikili işlem "+" ve "-" olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan R ye ***halka*** denir.

i) (R, +) abel grup

ii) $\forall a, b, c \in$R için, (ab)c= a(bc) çarpma işlemine göre birleşme,

iii) $a(b + c)= ab +ac$ ve $(a +b)c =ac + bc$ sol ve sağ dağılma özeliği

Ayrıca ilave olarak eğer,

iv) $\forall a, b \in$R için, $ab=ba$ ise R ye ***değişmeli halka***, eğer

v) $\forall a \in$R için, $1_R\, a = a 1_R$ olacak biçimde bir $1_R \in$R varsa R ye ***birimli halka*** denir.

<u>*Haşiye*</u>: 1_R sembolü, aynı zamanda R $\rightarrow$ R birim dönüşümünü de tanımlar. Bir halkanın toplamsal birim elemanı, halkanın sıfır (0) elemanıdır

<u>*Örnekler*</u>: Çift tamsayılar kümesi birimli olmayan değişmeli halkadır. Toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Z}$ tam sayılar ,$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümeleri birimli ve değişmeli birer halkadırlar. n>0, $n \in \mathbb{Z}$ için *mod n* ye göre $\mathbb{Z}_n$ kümesi bir halkadır. $\mathbb{Q}$, ($\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$) üzerindeki n x n biçimindeki matrisler, birimli fakat değişmeli halkadırlar.

Tanım: Bir R halkasında $a \neq 0$ için, $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak biçimde bir $0 \neq b \in$R varsa, a ya ***sol(sağ) sıfır bölen*** denir. $1_R \neq 0$ birimli ve değişmeli ve sıfır bölensiz R halkasına ***tamlık bölgesi***(integral bölgesi), D, $1_D \neq 0$ biçiminde birimli bir halka olmak üzere sıfır olmayan her elemanı terslenirse D ye ***bölüm halkası*** denir. Değişmeli bölüm halkasına cisim denir.

Örnekler: $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bir tamlık bölgesidir; $\mathbb{Q}$ rasyonel sayı, $\mathbb{R}$ gerçel sayı ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayı kümelerinin her biri bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında cisimdir.

Tanım: R değişmeli bir halka olsun. R deki "**diziler**" (biçimsel kuvvet seriler) $f : \mathbb{N} \to R$ tanımlı bir fonksiyondur; yani $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ "ifadesi" $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ ifadenin katsayılarına karşılık gelir.Eğer f dizisi tek değerli olarak tanımlı ise $\forall\ i \in \mathbb{N}$ için $f(i)= a_i \in$ R yazabiliriz ve $f=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. $a_i \in$ R dizinin ***katsayıları*** denir.

Tanım: R değişmeli bir halka ve x bir bilinmeyeni göstersin. R deki katsayılardan müteşekkil tüm polinomların kümesi (R üzerinde polinom halkası) R[X] ile gösterilecektir.

$$R[X] = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R \right\}$$

$f(x), g(x) \in R[X]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ için

Polinom eşitliği: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_i = b_i$ (i= 0,1,2, …)

Polinom toplamı: $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{t} (a_i + b_i) x^i$

Polinom çarpımı : $f(x) g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{t} c_i x^i$,

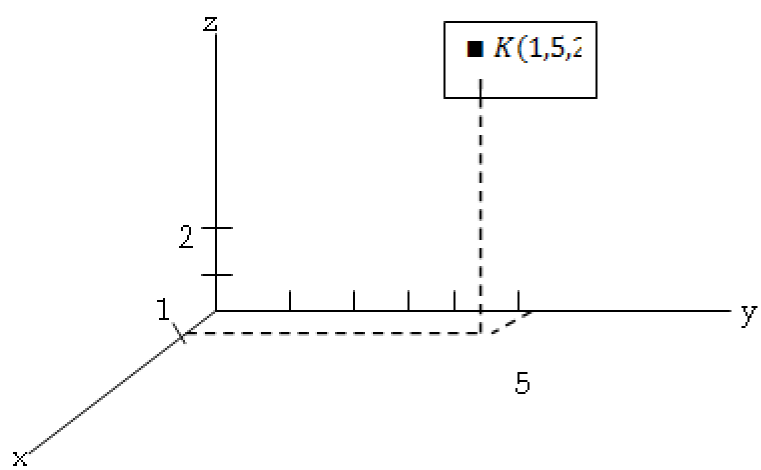
burada, $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{j-i}$, (c_i=0,1,2,3,…) ile tanımlanır.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in R[X]$, $a_n \neq 0$ olmak üzere a_0 $f(x)$ in ***sabit terimi***, a_n $f(x)$ in ***baş katsayısı***, a_n=1 ise $f(x)$ e monik polinom. Tüm katsayıları sıfır olan polinoma ***sıfır polinom***, sabit polinom ya sıfır polinom ya da sıfır dereceli bir polinomdur. 1. dereceden polinomlar $b \neq 0$ iken $a + bx$ biçimindedir ve ***doğrusal*** (***lineer***) polinom denir, 2. derceden polinomlara ***kuadratic*** (dörtgensel/ kareli), 3.dereceden polinomlara da ***kübik polinom*** denir.

13.2. Vektörler

Bir vektörün gösterimine ait tanımı belirlemek için, bazı kavramlardan ve diğer disiplinler arası uygulamalarına yönelik bilgilerden bahsedilebilir. Her şeyden önce bir vektör kavramının iki yönü vardır; özel bir sırada tertip edilmiş sayıların (gerçel sayılar) veya bir değer olarak atanmış "indisli harflerin" "listesi" (sonlu dizi) olarak tanımlanır. Örneğin bir marketteki bir ürünün beş farklı markaya ait satış fiyatları (1, 5, 7, 11, 9) olsun. Bu değerleri temsil eden "indisli harfler" (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) olmak üzere, bunları tek bir değer olarak $v=(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ biçiminde ifade edebiliriz. Buna ***doğrusal sıra*** veya ***vektör*** denilir. Vektörün ikinci yönü bazı fiziksel nesnelerdir. Sıcaklık ve sürat gibi fiziksel nicelikler sadece "büyüklük" olarak tanımlanır ve bunlar gerçel sayılarla temsil edilmiş ***skaler*** değerdir. Ayrıca hız ve kuvvet gibi nicelikler hem büyüklük ve hem de doğrultu olarak ifade edilir. Aynı zamanda bu nicelikler uygun uzunluk ve yönü gösteren oklarla temsil edilir ve bir O noktasına işaret eden ***vektörler*** adını alır.

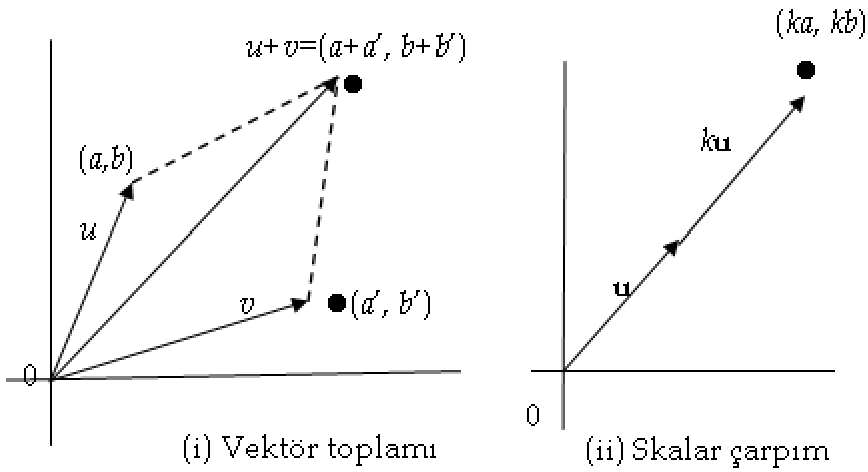
Örnek: Aşağıdaki Şekil 13.1'de bilinen "3-noktalı" kartezyen koordinat sisteminde bir K (1,5,2) noktasının koordinatlarının "listesi" verilmiştir. Buna ***3-boyutlu*** bir vektör denir. Ayrıca bu vektörü $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ veya $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ biçiminde bir ***satır matris*** ya da ***sütun matris*** olarak da ifade edilebilir.



Şekil 13.1.

Örnek: Alfabetik sıraya göre Türkiye Süper Ligde mücadele edecek 18 takımın katılım listesi, 18-boyutlu bir vektördür. Yine, alfabetik sıraya göre İMKB'da günü karla kapatan 25 şirketin oluşturduğu liste, 25-boyutlu bir vektördür. Bu bileşenler satır ya da sütun matrisi olarak da düzenlenebilir.

Vektör Toplamı: Aşağıdaki Şekil 13.2(a)'de görüldüğü üzere, $u+v$ bileşke vektörü, u ile v vektörlerinden ***paralel kenar*** kuralıyla elde edilmiştir. Eğer (a,b) ve (a', b'), u ve v vektörlerinin uç noktaları ise $(a+a', b+b')$ $u+v$ nin uç noktalarıdır.



Şekil 13.2

<u>*Skalerle Çarpma*</u>: *k***u** çarpımı, bir **u** vektörünün büyüklüğünün *k* reel sayısının çarpımı ile elde edilmiştir. Eğer k>0 ise vektör yönünü korur; k<0 ise vektör yön tersine döner. Aynı zamanda (a, b), **u** nun uç vektörleri ise (k*a*, k*b*), de *k***u** nun uç vektörleridir Şekil 13.2(b).

13.2.1 $\mathbb{R}^n$ Uzayında Vektörler

$\mathbb{R}^n$ ile gösterilen n-adet gerçel sayı cümlesi gerçel ***n-uzay*** adını alır. $\mathbb{R}^n$ içinde özel bir n-adet sayı

$$u = (a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$$

bir ***nokta*** ya da ***vektör*** adını alır. a_i gerçel sayıları **u** vektörünün ***koordinatları***, ***bileşenleri***, ***girişleri*** veya ***eleman***larıdır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ uzayında $\mathbb{R}$ nin elemanları için ***skaler*** terimini kullanacağız.

Aynı boyuttan iki *u* ve *v* vektörlerinden birinin her bir bileşeni ötekinin aynı bileşenine karşılık geliyorsa bu iki vektöre ***eşit*** denir ve *u*=*v* biçiminde gösterilir. (1, 5, 7) ve (5, 7, 1) vektörlerinin ikisi de aynı 3 sayıyı kapsamasına rağmen bileşenleri aynı olmadığından eşit vektör değillerdir. (0, 0, …, 0) biçiminde bileşenlerinin hepsi sıfır olan vektöre ***sıfır vektör*** denir ve 0 ile gösterilir.

<u>*Örnek*</u>:

(i)

(1,5,7,8) ve (1,4,5,3)$\in\mathbb{R}^4$ ve(6, 2, 2) , (-7, $\frac{1}{2}$, π) ve (0, 0, 0)$\mathbb{R}^3$

(ii)

$(x + y,\ x - y, z - 9) = (7, 1, 0)$ ise vektörlerin eşitliği tanımından

$x + y$=7

$x - y$=1

$z - 9$=0

elde edilir ve denklem sistemi çözümünden *x*=4, *y*=3 ve *z*=9 olarak bulunur.

Sütun Vektörler: $\mathbb{R}^n$ uzayında bir vektör, bazen yatay olarak değil düşey olarak yazılabilir. Düşey olarak yazılan böyle vektörlere ***sütun vektör*** ve kavramsal olarak yatay olarak yazılan vektörlere de ***satır vektör*** denir. Örneğin, $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$ iki bileşenli sütun vektör ve $\begin{bmatrix}\frac{11}{9}\\0\\13\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}17{,}5\\6\\-2\end{bmatrix}$ üç bileşenli sütun vektörlerdir. Sütun vektörü için yapılan herhangi bir işlem satır vektörü için de aynısı yapılır.

13.2.2. Vektör Toplamı ve Skalerle Çarpım

u ve *v*, $\mathbb{R}^n$ de iki vektör olsun, yani $u = (a_1, \ a_2, \cdots \ a_n)$ ve $v = (b_1, \ b_2, \cdots \ b_n)$ ise *u* ile *v* nin ***toplamı*** olan *u*+*v* , *u* ile *v* den aynı bileşenlere karşılık gelen elemanlar toplanarak elde edilir, yani

u+*v*=$(a_1 + b_1\ ,\ a_2 + \ b_2\ , \dots , a_n + \ b_n\ )$.

u vektörü ve bir *k* gerçel sayısının çarpımı olan *ku* ***skaler çarpım*** veya kısaca ***çarpım***, u vektörünün her bir elemanının k gerçel sayısı ile çarpılması ile elde edilmiş vektör, yani

ku=k($a_1, \ a_2, \cdots \ a_n$)=($ka_1, \ ka_2, \cdots \ ka_n$).

$\mathbb{R}^n$ de –*u* ya *u* vektörünün ***eksilisi*** ve *u*–*v* ye de *u* ile *v* vektörlerinin ***farkı*** denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

–*u*=(–1)*u* ve *u-v* =*u*+(–*v*)

$u_1, \ u_2, \cdots, \ u_m \ \in \mathbb{R}^n$ vektörleri ve $k_1, \ k_2, \cdots, \ k_m \ \in \mathbb{R}$ skalerleri verilmiş olsun. Bu vektörlerle skalerleri aynı bileşenlere karşılık gelenleri çarpılabilir ve daha sonra ortaya çıkan skaler çarpımları aşağıdaki biçimde toplanır.

$v = k_1 u_1 + \ k_2 u_2 + \ \cdots + k_m u_m$

Bu biçimdeki v vektörüne, $u_1, \ u_2, \cdots, \ u_m$ vektörlerinin ***doğrusal bileşimi*** denir.

Örnek:

i)

u=(1, -7, 5, 8) ve *v*=(-1, 4, -5, 3) olsun.

u+v=(1+(-1), -7+4, 5+(-5), 8+3)=(0, -3, 0, 11)
-13u=(-13.1, -13.(-7), -13.5, -13.8)=(-13, -91, -65, -104)
ii)
$\mathbb{R}^n$ de 0=(0, 0, …, 0) vektörü, sıfır vektörü adını alır ve 0 ile gösterilir. $u = (a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$ için,
u +0=(a_1 +0, a_2+0, …, a_n+0)= $(a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$=$u$
iii) u=$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve v=$\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise, 3u-v=$\begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}$

13.2.3. İç Çarpım:

u ve v, $\mathbb{R}^n$ de keyfi iki vektör olsun, yani $u = (a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$ ve $v = (b_1, \quad b_2, \cdots \quad b_n)$.

Buna göre, u ile v nin ***nokta çarpımı***, ***iç-çarpım*** veya ***skaler çarpımı***, birbirine karşılık gelen elemanların çarpımı ve bu çarpımların toplamı ile elde edilir ve $u.v$ ile gösterilir.

$u.v$= $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

Eğer u ile v vektörünün skaler çarpımı sıfır, yani $u.v$=0 ise, bu iki vektörün iç çarpımına göre ***dik*** (***ortogonal***) olduğu söylenir.

Örnek:
i)
u=(6, 2, 2), v=(1,-5, 4) ve w=(-3, 4, 7) olsun.
$u.v$=6.1+2.(-5)+2.4=4, $u.w$=6.(-3)+2.4+2.7=4, $v.w$= 1.(-3)+(-5).4+4.7= - 5
ii)
u=(1, -5, 7, 8) ve v=(-3, k, 5, 1) olsun. u ile v dik vektörler olması için k ne olmalıdır?
$u.v$=1.(-3)+(-5).k+7.5+8.1=40-5k, $u.v$=0 olması için, 40-5k=0 ve k=8

Bir Vektörün Normu:

$u = (a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$ ve $v = (b_1, \quad b_2, \cdots \quad b_n)$ $\mathbb{R}^n$ de iki vektör olsun. u ile v vektörleri arasındaki uzaklık, $d(u,v)$,

$d(u,v)$=$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$

biçiminde tanımlanır.

$\|u\|$ biçiminde gösterilen $\mathbb{R}^n$ deki bir u vektörünün ***normu*** (***uzunluğu***) $u.u$ skaler çarpımının negatif olmayan bir karekökü olarak tanımlanır. Eğer $u = (a_1, \quad a_2, \cdots \quad a_n)$ ise

$\|u\|$=$\sqrt{u.u}$ =$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$.

$\|u\|$, *u* vektörünün bileşenlerinin karelerinin toplamının kareköküdür. Böylece $\|u\| \geq 0$ dır ve $\|u\|$=0 $\Leftrightarrow$ *u*=0 dır.

Eğer bir *u* vektörünün normu $\|u\|$=1 veya *u.u=1* ise u vektörüne ***unit*** (***birim***) vektör denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında sıfır olmayan bir *v* vektörü için,

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$$

biçimindeki $\hat{v}$ vektörü, *v* vektörü ile aynı yönde bir birim vektördür. $\hat{v}$ vektörüne *v* nin ***normali*** denir.

Örnek:

i)

u=(1, -4, 5, -3, 7) ise $\|u\|$ yu hesaplayalım. Önce u nun her bir bileşenin karelerini alıp daha sonra toplayalım, yani

$\|u\|^2$ $=1^2$ + $(-4)^2$ $+5^2$ $+(-3)^2$ $+7^2$ =1+16+25+9+49=100 ve buradan $\|u\|$=$\sqrt{100}$=10.

ii)

u=(6, -2, 2, -1) ve *v*=$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ise $\|u\|$ ve $\|v\|$ yi hesaplayalım.

$\|u\|$ = $\sqrt{36+4+4+1}$ = $\sqrt{45}$ =3$\sqrt{5}$ ve

$\|v\|$ = $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}}$ = $\sqrt{\frac{16}{16}}$ =1 ve böylece *v*, birim vektör iken *u* birim vektör değil. Buradan *u* vektörünün normalini bulalım.

$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$ =$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)$.

Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): Bir *u*, *v* $\in \mathbb{R}^n$ vektörleri için, $|u \cdot v|$=$\|u\|\,\|v\|$.

Teorem(Üçgen Eşitsizliği/Minkowski): Bir *u*, *v* $\in \mathbb{R}^n$ vektörleri için, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

3-boyutlu bir dünyada yaşıyoruz ve bu yüzden çoğu uygulaması olan problemleri yalnız 3- boyutlu vektörlerle çözebiliriz. Fakat geçmişte olduğundan daha çok günümüzde ise, *n*-boyutlu vektörler kullanılmaktadır; bu gelişimde büyük pay bilgisayar sektörünündür. Vektör kavramının uygulamalarına örnek, gerek kendi matematik konuları içinde ve gerekse başka disiplinler arası uygulamaları oldukça yaygındır.

Misal: Borsada bir yatırımcı şirket hisse senetlerini dört farklı türden satmaya karar veriyor. Bir işlem sonucunda, A hisse senedi 100 hisseye, B senedi 500 hisseye, C senedi 700 hisseye ve D senedi 800 hisseye satılıyor.

Hisse başına satış bedeli sırasıyla 50 TL, 70Tl, 30TL ve 10TL dir. Satılan hisse senetlerinin toplam miktarını u=(100, 500, 7000, 800) vektörü ve satış bedelini de v=(50, 70, 30, 10) vektörü ile temsil edelim. Senetlerin satışından elde edilen toplam “kazanç” ,

$u \cdot v$=(100, 500, 700, 800).(50, 70, 80, 10)=5000+35000+56000+8000= 104.000 TL.

Misal: Üç sanayiden oluşan basit bir ekonomi modeli oluşturacağız. Ham petrol sanayi, ham petrolü işleyerek benzin üretecek rafine sanayi ve bunlara hizmet verecek olan elektrik sanayi ve bunlara ilaveten tüketim bazında kamu, hükümet ve ihracat yapacak firmalarla birlikte sanayinin kendisi dahil toplam altı tane tüketici tipi oluşmaktadır. Bu sanayi üzerinde hem tüketim ve hem de sanayi birimleri belirli tüketim talepleri olacaktır. Örneğin, ham petrol sanayisi, benzin üretimi için 2 ve elektrik üretimi için 4 birime ihtiyacı var ve böylece ham petrol sanayinin talep vektörü u_c=(0, 4, 2). Benzer biçimde diğer talep vektörlerini de belirleyeceğiz. Her bir sektör için talep vektörleri aşağıdaki biçimde olacaktır,

u=(ham petrol, benzin, elektrik).

Bu vektörler:

ham petrol sanayi: u_c=(0, 4, 2)
rafine sanayi: u_r=(8, 0, 6)
elektrik sanayi: u_e=(1, 6, 0)
kamu: u_1=(1, 9, 5)
hükümet: u_2=(8, 8, 8)
ihracat şirketleri: u_3=(7, 2, 0)

Bütün sanayideki toplam talep vektörü:

u_{toplam} =($u_c + u_r + u_e + u_1 + u_2 + u_3$)=(25, 29, 21).

Ayrıca ham petrolün birim başına maliyeti 4 TL, benzinin birim başına maliyeti 3 TL ve elektriğin birim başına maliyeti 2 TL olsun ve buradan bu sanayinin birim maliyet vektörü v=(4, 3, 2) biçiminde yazalım. Şimdi sanayilerin istedikleri talepleri ürettiğini varsayarak, ham petrol sanayinin geliri: *talep* x *birim maliyet* yani 25x4=100 TL. Ham petrol sanayi, benzin ve elektrik kullanmak zorunda olduğundan ham petrol sanayinin masrafı;

$u_c \cdot v$=(0, 4, 2)$\cdot$(4, 3, 2)=16 TL.

Böylece, ham petrol sanayinin brüt karları,

100 – 16= 84 TL.

Diğer sanayilerin brüt karları benzer biçimde hesaplanır.

*Misal***:** Dört tane R, S, T, ve U başlıklı maddelerin A, B, C gibi üç hakem tarafından dağıtıldığını varsayalım. (Bu R, S, T, ve U başlıklı unsurlar, bir hakem kurulu tarafından bölüştürülmüş bir mülkün payı veya bir bütçedeki dört tane kalemin ödeneği veya bir hastalığın kontrol altına alınması için dört kimyasal maddenin ödeneği gibi düşünülebilir, burada A, B ve C ler, R, S, T ve U dağılımında belirli bir konum almak zorunda olan temsilcilerdir.) Şimdi

$u = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, $v = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$ ve
$w = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$

bu koordinat vektörleri üçlü hakemin başlangıçtaki konumlarının temsil vektörleri ve $z = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$ hakemlerin son uzlaşım konum vektörü olsun. $z - u$, $z - v$ ve $z - w$ bu üç koordinat vektörleri, üçlü hakemin konumlarındaki değişimin hem büyüklüğünü ve hem de yönünü göstermektedir. $\|z - u\|$, $\|z - v\|$ ve $\|z - w\|$ değerleri hakemlerin eylemlerinin büyüklük sırası için kullanılabilir ve buradan belirli bir zaman aralığında liderlik, nüfuz/etkililik gibi unsurların çalışmasında da kullanılabilir. Örneğin, bir dört kişilik danışma kurulu, iki bütçe kalemi arasında ikişer bin (2000) TL'lik para ayırmak zorunda olsunlar. Danışma kurulu üyelerinin her birinin başlangıçtaki konum vektörleri aşağıdaki biçimde olsun:

u_1=(1000, 1000), u_2=(1500, 500), u_3=(1400, 600), u_4=(900, 1100).

Son ödenek vektörü (1200, 800) olsun. Şimdi her bir danışma kurulu üyesinin konumunu bir vektörle temsil edelim. Hesaplanan vektörlerin değeri ölçüt olarak dikkate alınırsa, hangi danışma kurulu üyesinin konumunda en büyük ve en küçük değişim yapılmıştır (Campbell, 1980)

13.3. Matris ve Doğrusal Denklem Sistemleri

Günümüzde birçok matematik kavram ya da konularının uygulama alanlarında, yadsınamaz bir yeri vardır. Bunlardan doğrusal cebir kavramlarından "matris", doğrusal denklemler ve "determinant" kavramlarının matematik dâhil bazı uygulama alanlarından bahsederek kavram tanımlarını ve özelliklerini vereceğiz. Matematik (*doğrusal tekrar denklemler, doğrusal diferensiyel denklemler, quadrik formlar, graf ve diyagram teorisi*), bilgisayar mühendisliği, fizik (*elektrik devre akımları, Quantum mekaniği*), kimya (*kimyasal çözeltide değerleri bulma, bir molekülün titreşim denklemleri*), mühendisliğin tüm alanları, biyoloji *("eleme"sürecini inceleyen genetik)*, istatistik, sosyoloji (*sosyal alt gruplar*), psikoloji, coğrafya ve iş-ekonomi (*borsa, kâr optimizasyonu ve zararın en aza indirilmesi*) dünyasıdır. Bunlardan en yaygın ve güçlü olanı, hata-bulma işleminden (*ISBN-Uluslararası Standart Sayılar Listesi*) hataları-düzeltme işlemine kadar (*uzaydan uydu aracılığıyla fotoğraf göndermede kullanılan, RM*) uğraş veren şifreleme teorisidir. Ayrıca idari ve yönetimsel bilimlerde, Codabar Sistemi, Evrensel Konum Sistemi (GPS), robotikler, İnternet Arama Motorlarında ve Dijital Fotoğraf Baskılarında da bu kavramların uygulamalarının hatırı sayılır yeri vardır.

13.3.1. Matrisler

Matris kavramını tanımlamadan önce bazı alanlarla ilgili uygulama örnekleri sunalım.

1.Üç tip kalem malın iki ayrı biçimde satışının yıllık üretiminin temsili aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{array}{cc} Branş & \begin{array}{ccc} A\,Madde & B\,Madde & C\,Madde \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \end{array} & \begin{bmatrix} 1578 & 1453 & 1915 \\ 1299 & 5071 & 6022 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.Bürodaki personelin sayısı aşağıdaki biçimde temsil edilir:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} odacı \\ çaycı \\ bilsayarcı \\ memur \end{array} \end{array}$$

3.Üç fabrikanın her birinden dört deponun her birine bir kalem malın taşımacılığının birim maliyeti aşağıdaki biçimde temsil edilebilir:

Depo

$$\begin{array}{cc} Fabrika & \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} & \begin{bmatrix} 13 & 23 & 14 & 21 \\ 17 & 29 & 16 & 23 \\ 19 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Haşiye: Bu üç tip temsil edilen tablolar, değer, büyüklük ve maliyet gibi bir anlam ifade etmez, fakat matris toplama ve çarpma kavramları yardımıyla birim, maliyet ve uzunluk bazında bir değer ifade edecektir.

Tanım: *K*, ℝ gerçel sayılar cismi ya da ℂ karmaşık sayılar cismi olarak varsayalım. *m* ve *n* pozitif tam sayılar olsun. *K* cismi üzerinde tanımlı ve aşağıdaki biçimde temsil edilen *K* cisminin sayılarının dikdörtgensel sayılar dizisine mxn tipinde bir ***matris*** denir;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Böyle temsil edilen bir A matrisinin ***satır***ları *K* daki sayıların *m* tane yatay dizinleridir;

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\ \dots,\ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

ve A nın ***sütunları*** *K* daki sayıların *n* tane dikey dizinleridir;

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

a_{ij} elemanına, i-inci satır ve *j-inci* sütun konumunda bulunan *ij*-inci ***giriş*** veya ***eleman*** denir. Bu tip bir A matrisini kısaca $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ile gösterilir.

m satır ve *n* sütunlu bir A matrisi *mxn* biçiminde gösterilir. *m* ve *n* sayı çiftine matrisin ***mertebesi*** (***boyutu)*** denir. Eğer iki tane A ve B matrislerinin mertebeleri aynı ve karşılıklı elemanları da eşit ise A matrisi ile B matrisi ***eşit matrisler*** denir. Böylece *mxn* tipinde iki matrisin eşitliği *mn* tane sisteme eşit demektir.

Eğer bir A matrisi yalnız bir satırdan müteşekkil ise A ya ***satır matrisi*** veya ***satır vektörü*** ve yalnız bir sütundan müteşekkil ise ***sütun matrisi*** veya ***sütun vektörü*** denir. Bileşenlerinin tamamı sıfır olan matrise ***sıfır matrisi*** denir ve 0 ile gösterilir.

Örnek:

(i) A=$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 2 x4 tipinde bir matristir. (1, – 5, 7, 8) ve (3, – 4, 0, 6) ve sütunları $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ dır.

(ii) 0= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3 x2 tipinde sıfır matristir.

(iii) $B = \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ olması için *a*=1, *b*=4, *c*=5 ve *d*=3 olması gerekir.

(iv) $C = \begin{bmatrix} m & m & m \\ 0 & m & m \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$, 3 x3 matrisini C=$[c_{ij}]_{3x3}$ biçiminde ifade edilebilir, burada

$$c_{ij} = \begin{cases} m, i \leq j \\ 0, diğer \end{cases}.$$

13.3.1.1. Matris Toplama ve Skalerle Çarpma

Tanım: $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ve $B = [b_{ij}]_{mxn}$ biçiminde aynı mertebeden (satır ve sütun sayıları eşit) iki matris olsun. *A*+*B* olarak gösterilen A ile B matrisinin ***toplamı***, matrislerin karşılıklı elemanları toplanır ve şu biçimdedir:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

kA olarak gösterilen bir $k \epsilon K$ skaleri bir *A* matrisinin bütün elemanlarının çarpımıyla elde edilen *k.A* ***skalerle çarpımı*** şu biçimdedir:

$$k\cdot A=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

A+*B* ve *kA* matrislerinin mertebeleri *m*x*n* dir. Aynı zamanda bir *A* matrisinin **eksilisi** (- *A*) ve ***farkı*** (*A* - *B*) aşağıdaki biçimdedir;

$-A=(-1)A$ ve $A-B=A+(-B)$.

Farklı mertebeden matrislerin toplamı tanımsızdır.

<u>Örnek</u>:

$A=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$A+B=\begin{bmatrix} 6+(-1) & 5+9 \\ 2+4 & (-7)+2 \\ (-2)+5 & 1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5A=\begin{bmatrix} 5(6) & 5(5) \\ 5(2) & 5(-7) \\ 5(-2) & 5(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 10 & -35 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5A-3B=\begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 10 & -35 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -27 \\ -12 & -6 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 33 & -2 \\ -2 & -41 \\ -25 & 2 \end{bmatrix}$$

$5A-3B$ matrisine *A* ile *B* matrisine ***doğrusal bileşim*** denir.

Teorem: A, B, C aynı mertebeden üç matris ve k_1 ve k_2 iki skaler olsun. Matris toplamı ve skalerle çarpım işlemi altında aşağıdaki bazı matris özellikleri sağlanır.

(i) $(A+B)+C=A+(B+C)$,
(ii) $A+0=0+A$,
(iii) $A+(-A)=(-A)+A=0$,
(iv) $A+B=B+A$,
(v) $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$
(vi) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$,
(vii) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$
(viii) $1\cdot A=A$

<u>*Misal*</u>: Bir şirketin 2008 ve 2009 yıllarına ait üç kalem malın dört farlı marketteki üç yıllık satışı aşağıdaki biçimdedir;

2008 yılı,

$$\text{A}=\begin{array}{c} \\ I \\ II \\ III \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 22 & 5 & 30 \\ 25 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix}\end{array}$$

2009 yılı

$$\text{B}=\begin{array}{c} \\ I \\ II \\ III \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 13 & 23 & 14 & 21 \\ 17 & 29 & 16 & 23 \\ 19 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix}\end{array}.$$

2008 ve 2009 yıllarına ait bu üç kalem malın toplam üç aylık satışını bulalım; matris toplam işlemi altında

$$A+B=\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 22 & 5 & 30 \\ 25 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 13 & 23 & 14 & 21 \\ 17 & 29 & 16 & 23 \\ 19 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 33 & 33 & 29 & 42 \\ 37 & 51 & 21 & 53 \\ 44 & 22 & 36 & 50 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

<u>*Misal*</u>: Bir bisküvi firmasının yılsonunda M_1 ve M_2 gibi iki markette *A* ve *B* gibi iki tane ürününün satış durumları aşağıdaki biçimde temsil ediliyor:

$$\text{B}=\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 70 & 90 \\ 35 & 80 \end{bmatrix}\end{array}$$

Eğer ilk üç ayın satışı aşağıdaki biçimde temsil edilirse;

$$\text{E}=\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}\end{array}$$ ise ürünlerin son dokuz ayın satış durumunu bulalım.

Tüm yıl boyunca ürünün satış durumu B ve ilk üç ayın satış durumu da E dir ve buradan geri kalan dokuz ayın satış durumunu veren matris aşağıdaki biçimde olacaktır, yani

$$B-E=\begin{bmatrix} 70 & 90 \\ 35 & 80 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 60 \\ 20 & 60 \end{bmatrix}.$$

13.3.1.2 Matris Çarpımı

$A = [a_i]$ ve $B = [b_i]$ aynı mertebeden sırasıyla satır matrisi (satır vektörü) ve sütun matrisi (sütun vektörü) olsun. Bu *A* ile *B* matrisinin çarpımı, karşılıklı bileşenleri çarpılıp toplanarak elde edilir ve bu çarpıma skaler bir değer (1 x 1 tipinde bir matris) denir, yani

$$AB = [a_1, a_2, \dots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

Tanım: A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit, yani $A = [a_{ik}]_{mxn}$ ve $B = [b_{kj}]_{nxp}$ biçiminde iki matris olsun. Bu durumda A matrisinin *i*.nci satırı ile B matrisinin *j*.nci sütununun çarpımı ile elde edilen *AB* ***çarpımı*** *ij*.nci bileşenli mxn tipinde bir matristir.

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pi} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}.$$

Eğer *A* matrisi *mxp* ve *B* matrisi *qxn* ise *p≠q* olduğundan *AB* çarpımı tanımlanamaz.

Örnek:

(i) A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve B= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. *A*, 2 x 3 ve *B*, 3 x 2 olduğundan *AB* çarpımı 2 x 2 dir, yani

$$AB=\begin{bmatrix} 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

BA çarpımı da tanımlıdır, yani 3 x 3 matristir:

$$BA=\begin{bmatrix} 2\cdot 0 + 0\cdot 2 & 2\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $L=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ olsun.

$$KL = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 6 + 4\cdot(-2) \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 0 & 3\cdot 6 + 4(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$LK = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 0\cdot 2 + (-2)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki örneklerde de görüldüğü gibi matrislerde "matris çarpma" işlemi altında ***değişme özeliği*** yoktur, yani $AB \neq BA$ ve üstelik mertebeleri aynı olmasına rağmen $KL \neq LK$ dır.

Teorem: A, B, C üç matris olsun. O halde aşağıdaki matris çarpım ve toplam özelikleri sağlanır.

(i) $(AB)C = A(BC)$, birleşme özelik,

(ii) $A(B + c) = AB + AC$, soldan dağılma özelik,

(iii) $(B + C)A = BA + CA$ soldan dağılma özelik,

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, k bir skalar.

Burada 0 sıfır matris olmak üzere, $0A=0$ ve $B0=0$ tanımlanır.

<u>*Misal*</u>: Sena, Furkan ve Mert, S, F ve M gibi üç farklı marka kek satın aldılar. Sena, S markadan 11 paket, F markadan 7 paket ve M markadan 5 paket aldı. Furkan; S markadan 5 paket, F markadan 7 paket ve M markadan 8 paket aldı. Mert; S markadan 4 paket, F markadan 5 paket ve M markadan 3 paket kek aldı. Eğer S marka kek 2 TL, F markalı 3 TL ve M markalı 5 TL ise matris işlemlerini kullanarak bu kişilerin harcadıkları paranın miktarını hesaplayalım.

Bu kişilerin satın aldığı S, F ve M markalı her bir kekin sayısını temsil eden matris B ve keklerin her bir markanın fiyatını temsil eden matris E olsun. Yani,

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} S & F & M \end{array} \\ \begin{array}{c} Sena \\ Furkan \\ Mert \end{array} & \begin{bmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ 3x 3 tipinde matris}$$

$$E = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} S \\ F \\ M \end{array} & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ 3 x 1 tipinde matris.}$$

$B = [b_{ij}]_{3x3}$ ve $E = [e_{ij}]_{3x1}$ olduğundan B ve E matrisleri aşağıdaki sırada çarpılabilir:

$$B \cdot E = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 11\cdot 2+7\cdot 3+5\cdot 5 \\ 5\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 5 \\ 4\cdot 2+5\cdot 5+3\cdot 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 88 \\ 71 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

Sena, Furkan ve Mert'in harcadıkları para sırasıyla 88 TL, 71 TL ve 48 TL'dir.

<u>*Misal*</u>: Bir fabrikada K, M, L maddelerinden oluşacak karışım için gerekli olan D, E ve F ürünleri üretiliyor. Her madde için her ürünün (birim başına) gereksinimleri temsil eden matris aşağıdaki biçimdedir;

$$B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} K & M & L \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matris işlemlerini kullanarak,

(i) Eğer fabrikada her üründen 100 birim mal imal edilirse, her maddeden gerekli toplam ihtiyacı bulalım. Aşağıdaki biçimde matris çarpımı kullanılarak gerekli hesaplama yapılabilir, yani

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} K & M & L \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} D \\ E \\ F \end{array} \end{array}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & M & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1200 & 1300 & 900 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ii) K, M, L maddelerinin birim başına maliyeti sırasıyla 5 TL, 10 TL, 5 TL ise her ürünün birim başına üretim maliyetini bulalım. Önce Her bir K, M, L maddelerinin birim başına üretim maliyetini temsil eden matris aşağıdaki biçimde olsun, yani

$$C=\begin{array}{c} K \\ M \\ L \end{array} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matris çarpımı yardımıyla her ürünün birim başına üretimin maliyeti aşağıdaki biçimde hesaplanır, yani

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 5 & 7 & 1\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 5\end{bmatrix} = \begin{array}{c}K\\ M\\ L\end{array}\begin{bmatrix}70\\ 100\\ 65\end{bmatrix}.$$

(iii) Eğer fabrika her üründen 200 birim üretirse üretimin toplam maliyetini bulalım. Üretimin toplam maliyetini temsil eden matris aşağıdaki biçimde elde edilir, yani

$$\begin{bmatrix}200 & 200 & 200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\ 100\\ 65\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47{,}000\end{bmatrix}.$$

Böylece üretimin toplam maliyeti 47,000 TL dir.

Misal: Hafize Teyze 5 kg peynir, 7 kg zeytin ve 3 kg reçel almak için alış verişe çıkar. Hafize Teyze'nin oturduğu yere yakın bir bakkalda bu nevalelerin etiket fiyatı sırasıyla, 15 TL, 12 TL ve 8 TL ve bir AVM'de aynı nevalelerin etiket fiyatı sırasıyla, 11 TL, 8TL ve 5 TL dir. AVM'ye gidiş geliş masrafı 18 TL ise, matris çarpımı kullanılarak Hafize Teyze'nin tasarrufunu hesaplayalım.

Nevalelerin miktarının temsil edildiği matris B ve etiket fiyatlarının temsil matrisi E olsun. Bu durumda,

Miktar Matrisi=$B=\begin{array}{ccc}peynir & zeytin & reçel\\ \end{array}$ $\begin{bmatrix}5 & 7 & 3\end{bmatrix}$,

Etiket Matrisi=$E=\begin{array}{c|cc} & Bakkal & AVM\\ \hline peynir & 15 & 11\\ zeytin & 12 & 8\\ reçel & 8 & 5\end{array}$ dır ve böylece

Toplam Fiyat=$B{\cdot}E=\begin{bmatrix}5 & 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & 11\\ 12 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}183 & 136\end{bmatrix}$.

Buradan, bakkaldan yapılan alış verişin maliyeti: 183 TL ve

AVM'den yapılan alış verişin maliyeti= 136 TL+ 18 TL (gidiş geliş masrafı)=154 TL.

Böylece AVM'den yapılan alış verişin sonunda Hafize Teyze'nin tasarrufu: 183-154= 29 TL.

13.3.1.3 Transpoze Matris

Tanım: Bir *A* matrisi m x n tipinde ise A matrisinin ***transpozesi*** *A* nın n x m olması, yani A matrisinin (i,j).nci bileşenlerinin (j,i).nci olması demektir ve A^T ile gösterilir. Bir başka deyişle satırların yerine sütunlar, sütunların yerine de satırlar yazılarak elde edilen matrise denir ve

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ ise $A^T = [a_{ji}]_{nxm}$ dir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorem: *A* ve *B* iki matris ve *k* bir skalar olsun. Aşağıdaki matris toplam ve çarpımlar tanımlıdırlar.

(i) $(A+B)^T = A^T + B^T$, (iii) $(kA)^T = kA^T$

(ii) $(A^T)^T = A$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

<u>*Not*</u>: (iv). maddede çarpımların transpozesi, transpozelerin çarpımı iken, tersi doğru değildir

13.3.1.4. Kare Matris

Tanım: Satır ve sütunları aynı sayıda olan bir A matrisine ***kare*** matris denir. n x n tipindeki kare matrise ***n.nci mertebeden*** veya bazen ***n-kare*** matris denir.

Her hangi iki matrisin toplanıp çarpılamayacağını aklımızda tutalım. Buna rağmen, yalnız *n.nci* mertebeden bir kare matrisi göz önüne almak sıkıntılıdır. Özellikle, matris toplama, matris çarpımı, skalerle çarpımı ve transpoze işlemleri n x n tipi matrisine dönüştürülebilir ve yeni matriler yine bir n x n matritir.

<u>*Örnek*</u>:

$B=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ ve $E=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ iki matriste 3 x 3 tpindedir.

$$B+E=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 8 & 11 \\ 8 & 4 & 2 \\ 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}, \ -7B=\begin{bmatrix} -7 & -35 & -49 \\ -42 & -14 & -14 \\ -35 & -49 & -56 \end{bmatrix}$$

$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ve BE= $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 42 & 32 & 69 \\ 45 & 38 & 76 \end{bmatrix}$

Tanım: $A = [a_{ij}]$ n kare matris olsun. $a_{11}, a_{22} \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A matrisinin ***köşegen elemanları*** veya ***esas köşegeni*** ve $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ A matrisinin ***izi*** denir ve *iz*A biçiminde gösterilir.

Teorem: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ n kare matrisler ve k bir skalar olsun. Buna göre,

(i) *iz* (*A*+*B*)=*iz* A + *iz* B, (iii) *iz* (A^T)=*iz* A,

(ii) *iz* (*kA*)=*k*(*iz* A), (iv) *iz* (*AB*)=*iz* (*BA*).

<u>*Örnek*</u>:

B= $\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & -7 \end{bmatrix}$ ve E= $\begin{bmatrix} -3 & * & * \\ * & 4 & * \\ * & * & 5 \end{bmatrix}$ ise

B nin köşegen elemanları: [1,0,(7]ve E nin köşegen elemanları:

[(3,4, 5]iz B =1+0+((7)= (6 ve iz E= - 3+4+5=6

Tanım: Köşegen üzerindeki bileşenleri 1 ve diğerleri sıfır olan n kare matrise birim matris veya birim denir ve In veya I ile gösterilir. I matrisi 1 sayısının özeliğine benzer, yani bir A kare matrisi için

AI=*IA*=*A*.

Genel olarak, *B m* x *n* tipinde matris ise $BI_n = I_m B = B$.

Bir *k* skaları için, *kI* matrisinin köşegen üzerindeki bileşenleri yalnız k dan müteşekkil ise matrise ***skalar matris*** denir. (*kI*)*A*=*k*(*IA*)=*kA*.

<u>*Örnek*</u>:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri 3 x3 ve 4 x4 tipinde birim matris

$\begin{bmatrix} 9 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix}$, *k*=9 skalar matrisi ve $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi de *k*=5 skalar matrisine karşılık gelir.

Haşiye: (i) 2. ve 3. matrislerde olduğu gibi sıfır bloklar ihmal edilebilir.

(ii) Kroneker delta fonksiyonu $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ biçiminde tanımlanır.

Birim matris $I = [\delta_{ij}]$ biçiminde tanımlanabilir.

13.3.1.5. Matrislerin Kuvvetleri ve Matrislerde Polinomlar

Tanım: *A*, bir *K* cisminde *n* kare matris olsun. *A* matrisinin ***kuvvetleri*** aşağıdaki biçimde tanımlanır.

A^2=AA, A^3=AAA, …, A^{n+1}=$A^n A$ ve $A^0 = I$

A matrisinde de polinomlar tanımlıdır. Aşağıdaki biçimde bir polinom için

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ ... + \ a_n x^n$$

ve a_i ∈K cisminde sabitler olmak üzere $f(A)$ matrisi aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ ... + \ a_n A^n.$$

Eğer $f(A)$ sıfır ise A matrisine $f(x)$ in ***sıfırı*** veya ***kökü*** denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ve $g(x) = x^2 + 3x - 10$ olsun.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 20 & -11 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -99 & 28 \\ -35 & -113 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 20 & -11 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -20 \\ 5 & -26 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 20 & -11 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -28 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}$$

13.3.1.6. Terslenir Matrisler

Tanım: *A* bir kare matris olsun. *I* birim matris olmak üzere

AB=*BA*=*I*

olacak biçimde bir *B* matrisi varsa, *A* matrisine ***terslenir matris*** denir. *B* matrisi "tek"tir ve *A* matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. *B*, *A* nın tersi ise *A*, *B* nin tersidir ve yukarıdaki bağıntı simetriktir.

Örnek:

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$ olsun.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{ve}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A ve *B* matrisleri terslenir.

Özelik: *A* ve *B* terslenir olsun. Bu durumda *AB* terslenir ise $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ dir ve genel olarak, $A_1, A_2, \dots, A_k$ matrisleri terslenir ise çarpımları da terslenir ve zıt yönde terslerin çarpına eşittir. Yani

$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$.

2 x 2 Matrisin Tersi:

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 2 x2 tipinde bir matris olsun ve bu matrisin tersi olan A^{-1} nın elde edilmesine yönelik bir formül bulacağız.

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}ax_1+by_1 & ax_2+by_2\\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olacak biçimdeki x_1, x_2, y_1, y_2 gibi sabitleri araştıracağız. Birim matristeki bileşenlere karşılık gelen dört bileşenli dört denklem elde edilir ve birim matrisi gerçekleyen 2x2 tipinde 2 denklem sistemi aşağıdaki biçimdedir.

$ax_1 + by_1 = 1, \quad ax_2 + by_2 = 0$

$cx_1 + dy_1 = 0, \quad cx_2 + dy_2 = 1$

A matrisinin *determinantı* $|A| = ad - bc$ ve $|A| \neq 0$ olsun. x_1, x_2, y_1, y_2 bilinmeyenlerini aşağıdaki biçimde elde ederek, yukarıdaki denklem sistemini çözebiliriz, yani

$x_1 = \frac{d}{|A|}, \quad y_1 = \frac{-c}{|A|}, \; x_2 = \frac{-b}{|A|}, \; y_2 = \frac{a}{|A|}$.

Buna göre,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$|A|\neq 0$ olmak üzere 2 x2 tipinde bir A matrisini tersi aşağıdaki biçimde izah edilebilir.

(i) Esas köşegen üzerindeki bileşenler yer değiştirilir,
(ii) Diğer köşegen üzerindeki bileşenlerin eksilisi yazılır,
(iii) Elde edilen matris $\frac{1}{|A|}$ ile çarpılır.

$|A|=0$ ise matris terslenmez.

<u>Örnek</u>: B= $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ matrislerinin tersini bulunuz.

Önce $|B|$ yi hesaplayalım, yani (-1)3 – 4.5= - 23 ve $|B| \neq 0$ olduğundan B matrisi terslenir ve

$$B^{-1} = -\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{4}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \end{bmatrix}.$$

$|E|=0$ olduğundan E matrisinin tersi bulunamaz.

13.3.1.7. Özel Matrisler

Tanım: $D = [d_{ij}]$ kare matris olsun. Buradan *D* nin köşegeni dışındaki bileşenlerinin hepsi sıfır ise *D* matrisine köşegen matris denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir

$$D = köşe(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

Burada bazıları veya tamamı sıfır olabilir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 4 & & \\ & & 5 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

Matrislerin sırasıyla köşegen elemanları şöyledir:

Köşegen(–1, 0, 2), köşegen(5, –4) ve köşegen(1, 4, 5, 3).

Tanım: $A = [a_{ij}]$ bir kare matris olsun. A matrisinin esas köşegeni altındaki bütün bileşenleri sıfır ($i>j$ için $a_{ij}=0$) ise *A* matrisine ***üst üçgensel***

matris ya da ***üçgensel*** ve esas köşegen üzerindeki bileşenlerin hepsi sıfır ise ***alt üçgensel*** matris denir. Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ & 5 & 3 & 9 \\ & & 7 & 11 \\ & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & & \\ 6 & 7 & \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 6 & 5 & & \\ -2 & 5 & -7 & \\ 2 & 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

köşegen matrislerde sıfır bileşenleri ihmal edilebilir.

Teorem: $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ n x n kare (üst) üçgensel matrisler olsun. Buna göre,

(i) Sırasıyla *A+B*, *kA* ve *AB* gibi üçgensel matrislerin köşegen elemanları aşağıdaki biçimdedir:

$(a_{11} + b_{11}, a_{22} + b_{22}, \dots, a_{nn} + b_{nn})$,

$(ka_{11}, ka_{22}, \dots, ka_{nn})$, $(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots a_{nn}b_{nn})$

(ii) Bir $f(x)$ polinomu için, $f(A)$ üçgensel matrisin köşegen elemanları aşağıdaki biçimdedir:

$(f(a_{11}), f(a_{22}), \dots, f(a_{nn}))$.

(iii) *A* matrisi terslenir ancak ve ancak köşegen üzerindeki bütün elemanlar sıfırdan farklı yani $a_{ii} \neq 0$ ve A^{-1} varsa üçgensel matriste vardır.

<u>*Haşiye*</u>: *A*, matrislerin sıfır olmayan bir sınıfı olsun. Eğer A matrisi matris toplamı, skalerle çarpım ve matris çarpımı altında kapalı ise A ya ***matrisler cebiri*** denir. Köşegen, skalar, alt ve üst üçgensel matrisler bu biçimdeki kare matrislere yani matris cebire en uygun örneklerdir.

A kare matrisinin bileşenleri gerçel sayılardan olsun yani, gerçel değerli kare matris olsun. Bu durumda *A* ve A^T arasında önemli bazı bağlantılar vardır.

Tanım: $A = A^T$ ise *A* ye ***simetrik matris*** denir. Buna denk olarak, eğer simetrik elemanlar (köşegene göre simetri) eşit yani, $a_{ij} = a_{ji}$ ise $A = [a_{ij}]$ simetrik matristir.

Eğer $A^T = -A$ ise yani $a_{ij} = -a_{ji}$ ise *A* ya ***ters simetrik*** matris denir. $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$ olduğundan bu tip matrislerin köşegen elemanlarının sıfır olması aşikârdır. $A = A^T$ veya $A^T = -A$ ise *A* kare matristir.

Örnek:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 7 & 5 & -1 \\ 11 & -1 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -5 \\ -9 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^T = B$ olduğundan, B matrisi simetriktir; $E^T = -E$ olduğundan, (*E* nin köşegen bileşenleri sıfır ve simetrik elemanlar eksilisi) *E* matrisi ters simetrik ve *M* matrisi kare matris olmadığından *M* ne simetrik ne de ters simetrik matristir.

Tanım: A matrisi gerçel matris olsun. $A^T = A^{-1}$ yani, $AA^T = A^TA = I$ ise A matrisine ***dik matris*** denir. Böylece A matrisi kare ve terslenir matris olmalıdır.

Örnek:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ olsun. Buradan } B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$BB^T = I$ ve $B^TB = I$

olduğundan $B^T = B^{-1}$ dir ve buradan *B* matrisi dik matristir.

A, satırları $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$ olan 3 x 3 tipinde gerçel bir dik matris olsun. Yani, $AA^T = I$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Gerekli matris çarpma işlemleri yapıldıktan sonra, birim matrisin bileşenlerine karşılık gelen dokuz tane denklem sistemi aşağıdaki biçimdedir;

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$
$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$
$$b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1,$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3C_3 = 0$$

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0,$$
$$c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0,$$
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

Bu durumda, $u_1u_1 = 1$, $u_2u_2 = 1$, $u_3u_3 = 1$ ve $i \neq j$ için , $u_iu_j = 0$ dir. Böylece u_1, u_2, u_3 satırları birim vektörler ve birbirlerine diktirler.

Genel olarak, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında olsun. Bu vektörler birim vektör ve birbirlerine dik ise yani,

$$u_iu_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases},$$

ise, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vektörlerinin ***ortanormal kümeleri*** denir. Benzer biçimde $u_iu_j = \delta_{ij}$, δ_{ij} kroneker delta fonksiyonudur.

$AA^T = I$ ise, A matrisinin satır vektörleri *A* nın bir ortanormal kümesi biçiminde ve benzer olarak $A^TA = I$ ise *A* matrisinin sütun vektörleri *A* nın bir ortanormal kümesi biçimindedir. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

Teorem: A bir gerçel matris olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktirler.

(i) A matrisi diktir,

(ii) A nın satırları bir ortanormal küme biçimindedir,

(iii) A nın sütunları bir ortanormal küme biçimindedir.

Tanım: *A* bir gerçel matris olsun. Eğer *A* matrisi transpozesi ile değişmeli yani, $AA^T = A^TA$ ise *A* ya ***normal*** denir. Eğer *A* simetrik, dik ve ters simetrik ise *A* normaldir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$ ve

$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$

Böylece $AA^T = A^TA$ olduğundan *A* matrisi normaldir.

13.3.1.8. Blok Matrisler

Yatay ve düşey doğrular kullanarak bir A matrisi, A nın blokları denilen daha küçük matrislere ayrılabilir. Bu biçimdeki A matrisine ***blok matris*** denir. Matrisler aşağıdaki biçimde bloklara ayrılabilir.

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 0 & -5 & 6 & -2 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 7 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 9 \\ \hline 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 0 & -5 & 6 & -2 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Matrislerin bloklara ayrılmasının uygunluğu, eğer bloklar *A* ve *B* matrislerinin elemanları gibi ayrılabilir ve hesaplamalar yoluyla elde edilen bu *A* ve *B* matrisleri üzerinde yapılan işlemlerin sonucu gibi bu bloklar üzerinde işlemler yapılabilir. Bunu aşağıdaki biçimde inceleyeceğiz. $A = [A_{ij}]$ gösterimini bir *A* blok matrisinin A_{ij} blokları için kullanacağız.

$A = [A_{ij}]$ ve $B = [B_{ij}]$ satır ve sütun blokları aynı olan blok matrisler ve karşılıklı blokların mertebesi de aynı olsun. Bu durumda *A* ve *B* nin bloklarına karşılık gelen blokların elemanlarına karşılık elemanlar toplanarak toplama yapılır ve bir *k* skalarıyla *A* nın her bloğu çarpılarak *k* ile *A* nın her elemanı çarpılır. Böylece

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \quad \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}$$

ve

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matris çarpımının durumu biraz daha az açıktır, fakat genelde doğrudur. U_{ik} nın her bloğunun sütunlarının sayısı V_{kj} nın her bloğunun satırlarının sayısına eşit olacak biçimde $U = [U_{ik}]$ ve $V = [V_{kj}]$

matrisleri blok matrisleri olsun. $U_{ik}V_{kj}$ çarpımları tanımlı ise buradan $W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj}$ olmak üzere,

$$UV = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tanım: *M* bir blok matris olsun. Eğer aşağıdaki ifadeler sağlanırsa M ye bir ***blok kare matris*** denir;

(i) M bir kare matris,
(ii) Bloklar kare matris biçiminde ,
(iii) Köşegen bloklar da kare matris.

Örnek:

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \text{ ve } B = \left[\begin{array}{cc:cc:c} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

A blok matrisinin ikinci ve üçüncü blok köşegen blokları kare olmadığından *A* blok matrisi kare blok matrisi değildir. Diğer yandan B blok matrisi kare blok matristir.

Tanım: $M = [A_{ij}]$ kare blok matris ve köşegen olmayan blokların hepsi sıfır matrisler yani, $i \neq j$ ise A_{ij}=0 olsun. Böyle bir M matrisine ***köşegen blok matris*** denir. Böyle matrisler aşağıdaki biçimde de tanımlanır;

M =köşegen($A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{rr}$) veya

$$M = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \cdots \oplus A_{rr}$$

Blok köşegen matrislerin önemi, sıklıkla özel blok matrislere indirgenmiş blok matrislerin işlemlerinden kaynaklanıyor. Özellikle *f*(x) bir polinom ve *M* yukarıdaki gibi bir blok köşegen matris olsun. Buradan *f*(*M*) bir blok köşegen matristir ve şöyledir:

$$f(M) = köşegen(f(A_{11}), f(A_{22}), \cdots, f(A_{rr}))$$

Ayrıca M matrisi terslenir ancak ve ancak her bir A_{ii} terslenir ve böyle bir M^{-1} matrisi blok köşegen matristir ve şu biçimdedir;

$$M^{-1} = köşegen(A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \cdots, A_{rr}^{-1})$$

Benzer biçimde bir blok köşegen matrisin, eğer köşegenin altındaki (üstündeki) blokların hepsi sıfır matrisler ise, sırasıyla bir ***üst üçgensel blok matris*** (***alt üçgensel blok matris***) denir.

<u>*Örnek*</u>:

$$B=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 5 & 7\\ 0 & 6 & 2\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right],\ E=\left[\begin{array}{c|cc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 5 & 5 & 4 & 0\\ 7 & 3 & 5 & 0\\ \hline 8 & 2 & 3 & 9\end{array}\right],$$

$$M=\left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 3\end{array}\right],\ L=\left[\begin{array}{cc|c}6 & 5 & 8\\ 2 & 7 & 1\\ \hline 2 & 1 & 1\end{array}\right]$$

B matrisi, köşegen bloğun altındaki blok sıfır olduğundan üst üçgensel blok matristir.

E matrisi, köşegen bloğun altındaki bütün bloklar sıfır blok olduğundan alt üçgensel blok matristir.

M matrisi, köşegenin altı ve üstündeki bütün bloklar sıfır blok olduğundan köşegen blok matristir.

L matrisi, ne alt üçgensel ne de üst üçgensel matristir. Aynı zamanda L matrisinin blok matrisleri blok alt üçgensel matris de değil, blok üst üçgensel matris de değildir.

13.3.1.9. Uygulamalı Sorular

1. $B=\begin{bmatrix}11 & 13 & 17\\ 7 & -5 & 2\end{bmatrix}$ ve $E=\begin{bmatrix}0 & 23 & -29\\ 2 & 3 & -5\end{bmatrix}$ olsun.

(i)

B+*E* toplam matrisini bulunuz.

(ii)

2*B*- *E* bulunuz.

<u>*Çözüm*</u>:

(i)

Karşılıklı bileşenler toplanır;

$$B+E=\begin{bmatrix}11 & 13 & 17\\ 7 & -5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 23 & -29\\ 2 & 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 36 & -12\\ 9 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

(ii)

Önce B matrisi 2 ile ve E matrisi de -1 ile çarpılır ve sonra toplama yapılır;

$$2B-E=\begin{bmatrix}22 & 26 & 34\\ 14 & -10 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -23 & 29\\ -2 & -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 3 & 63\\ 12 & -13 & 9\end{bmatrix}$$

2. (i)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0\end{bmatrix}=3,$$

$\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ çarpımı tanımlı değildir, zira satır ve sütun matrislerinin bileşenleri farklı sayıdadır.

(ii)

$U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 3\\-1 & -1\end{bmatrix}$, *UV* yi bulunuz ve *VU* tanımlı mıdır?

(iii)

$A=\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\4 & 5 & 3\end{bmatrix}$ olsun. *AB* ve *BA* yı bulunuz.

<u>*Çözüm*</u>:

(ii)

$$UV=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 3\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+2\cdot 3+3\cdot(-1)\\2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+3\cdot 3+4\cdot(-1)\\4\cdot 1+5\cdot 3+6\cdot(-1) & 4\cdot(-1)+5\cdot 3+6\cdot(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\7 & 3\\-13 & 5\end{bmatrix},$$

VU çarpımı tanımlı değil, çünkü *U* matrisi 3x3 ve *V* matrisi 3x2 olduğundan *V* ile *U* matrislerinin iç-çarpımları yapılamaz.

(iii)

$AB=\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\4 & 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10 & 6\\14 & 15 & 5\end{bmatrix}$ ve (ii) deki mülahazalarla BA çarpımı da tanımlanamaz.

(vi)

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\50\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\-1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 5 & -1 & 0\\2 & -7 & 3 & -1\\-2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -10 & 6 & -2\\-10 & -9 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

3. Bir beyaz eşya şirket dağıtıcısı, ülkenin farklı yerlerindeki üç farklı bayideki (*I. Bayi, II. Bayi, III. Bayi*) üç farklı ürün modelinin (*A Sınıf, B Sınıf, C Sınıf*) haftalık satışlarını kaydediyor. Üretilen ürünlerin her birinin maliyet fiyatı, C sınıfı: 520 TL, B sınıfı: 640 TL, A sınıfı: 1050 TL olsun. Her bir bayide satılan ürünün (beyaz eşyanın) adedi, Tablo 13.1'de ve üç farklı bayinin her birindeki her ürün perakende satış fiyatı da Tablo 13.2'de verilmiştir.

Tablo 13.1 Bayilerde satılan beyaz eşyanın adedi

	C sınıfı	**B sınıfı**	**A sınıfı**
I. Bayi	110	180	160
II. Bayi	125	390	170
III. Bayi	185	55	70

Tablo 13.2 Bayilerde satılan beyaz eşyanın satış fiyatları

	C sınıfı	**B sınıfı**	**A sınıfı**
I. Bayi	600	790	1610
II. Bayi	640	730	1390
III. Bayi	630	760	1800

Bu durumda, matris işlemlerini ve özeliklerini kullanarak;
(i) Haftalık, her bayiye ait ürünlerinin toplam maliyetini,
(ii) Haftalık, her bayinin her modele ait toplam gelirini,
(iii) Haftalık, her bayi için toplam kârını hesaplayınız.
Hepsinden en büyük kârı, hangi bayi elde eder?
Çözüm:
(i) Tablo 13.3.2.1'den satılan ürünlerin sayısını temsil eden matris aşağıdaki biçimde olsun ve B diyelim:

$$B = \begin{array}{r} \\ I.Bayi \\ II.Bayi \\ III.Bayi \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & B & A \\ \text{Sınıf} & \text{Sınıf} & \text{Sınıf} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 110 & 180 & 160 \\ 125 & 390 & 170 \\ 185 & 55 & 70 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ürünlerin (beyaz eşyaların) her birinin maliyetini temsil eden sütun matrisi aşağıdaki biçimdedir:

$$C = \begin{bmatrix} 520 \\ 640 \\ 1050 \end{bmatrix}.$$

Eğer bu maliyeti temsil eden C matrisi, satılan ürünlerin sayısını veren B matrisi ile çarpılırsa, elde edilen 3 x 1 tipindeki matrisin her bir satırındaki bileşenler her bayiye ait ürünlerin toplam maliyet matrisini verir ve şöyledir:

$$BC = \begin{bmatrix} 110 & 180 & 160 \\ 125 & 390 & 170 \\ 185 & 55 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 520 \\ 640 \\ 1050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340\ 400 \\ 493\ 100 \\ 204\ 900 \end{bmatrix}$$

Ürünlerin bayilere maliyeti: I. Bayi 340 400 TL, II.Bayi 493 100 TL ve III.Bayi 204 900 TL .

(ii) *Toplam gelir=fiyat* x *adet*. Tablo 13.3.2.1'den ürünlerin miktarını temsil eden matris *B* ve Tablo 13.3.2.2'den ürünlerin fiyatlarını temsil eden matris *E* olsun. Buradan, her model ürüne ait *miktar* x *fiyat* çarpımını yapmak için, Tablo 13.3.2.2'deki satırlar fiyat matrislerindeki sütunlar biçiminde yazılmalıdır. Yani fiyatlar matrisi *E*, miktarları temsil eden *B* matrisiyle çarpma yapmadan önce transpozesi alınmalıdır.

$$E = \begin{bmatrix} 600 & 790 & 1610 \\ 630 & 760 & 1390 \\ 640 & 730 & 1800 \end{bmatrix}^T = \begin{array}{r} C\ Sınıfı\ Fiyatı \\ B\ Sınıf\ Fiyatı \\ A\ Sınıfı\ Fiyatı \end{array} \begin{bmatrix} 600 & 630 & 640 \\ 790 & 760 & 730 \\ 1610 & 1390 & 1800 \end{bmatrix}$$

Şimdi miktarların matrisi *B* ve fiyatların matrisi *E* yi çarpalım:

$$BxE = \begin{array}{r} \\ I.Bayi \\ II.Bayi \\ III.Bayi \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & B & A \\ \text{Sınıf} & \text{Sınıf} & \text{Sınıf} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 110 & 180 & 160 \\ 125 & 390 & 170 \\ 185 & 55 & 70 \end{bmatrix} \end{array} \text{x} \begin{array}{r} C\ Sınıfı\ Fiyatı \\ B\ Sınıf\ Fiyatı \\ A\ Sınıfı\ Fiyatı \end{array} \begin{bmatrix} 600 & 630 & 640 \\ 790 & 760 & 730 \\ 1610 & 1390 & 1800 \end{bmatrix}$$

$$
BxE=\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{I. Bayi} & \text{II. Bayi} & \text{III. bayi} \end{array}
$$

$$
BxE=\begin{bmatrix} B\ 1.satırx\ E\ 1.sütun & * & * \\ * & B\ 2.satır\ x\ E\ 2.süt. & * \\ * & * & B\ 3.satır\ x\ E\ 3.süt. \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 465\ 800 & * & * \\ * & 614\ 450 & * \\ * & * & 284\ 550 \end{bmatrix}
$$

Her bayiye ait toplam gelir, çarpım matrisinin esas köşegenindeki bileşenlerle temsil edilir. Buradan, I., II. ve III. bayilere ait toplam gelir (TG) matrisini bir sütun matrisiyle özetleyebiliriz, yani

$$
(Toplam\ Gelir)TG = \begin{array}{r} I.bayi \rightarrow \\ II.bayi \rightarrow \\ III.bayi \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} 465\ 800 \\ 614\ 450 \\ 284\ 550 \end{bmatrix}
$$

(iii)

Kâr= (*Toplam Gelir*) TG x TM(*Toplam Maliyet*)

$$
=\begin{bmatrix} 465\ 800 \\ 614\ 450 \\ 284\ 550 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 340\ 400 \\ 493\ 100 \\ 204\ 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125\ 400 \\ 121\ 350 \\ 80\ 650 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow I.bayi \\ \leftarrow II.bayi \\ \leftarrow III.bayi \end{array}
$$

Sonuç olarak, en büyük haftalık kârı *I*. Bayi yapıyor.

4.

$$
B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix},
$$

$M=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin transpozelerini(devriğini) bulunuz.

Çözüm:

$$
B^T=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad E^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad D^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad M^T=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}
$$

E^T=*E* olduğundan E matrisi simetrik, D matrisinin devriği sütun vektörü ve M matrisinin devriği ise satır vektörüdür.

5.(i)

$$B=\begin{bmatrix}5&6&-1\\7&2&0\\1&2&-3\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-9&5&17\\7&-11&37\\3&0&23\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}7&17\\5&13\\3&11\end{bmatrix}$$

matrislerinin köşegen elemanlarını ve izlerini bulunuz.

(ii)

$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ ise, $g(x)=x^2+2x-11$ ise $g(A)$=?

<u>*Çözüm*</u>:

(i) *köşegen*(B)=(5, 2, -3) ve İz(A)=5+2+(-3)=4, *köşegen*(E)=(-9, -11, 23) ve İz(E)=(-9)+(-11)+23=3, L bir kare matris olmadığından köşegen ve iz tanımlı değildir.

(ii)

$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-4\\-8&17\end{bmatrix}$ ise

$g(A)=A^2+2A+11I_3$

$$g(A)=\begin{bmatrix}9&-4\\-8&17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\\8&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-11&0\\0&-11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$g(A)$=0 , yani sıfır matris olduğundan *A* matrisi g(x) polinomunun köküdür.

6.(i)

$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$ ise B ve E matrislerinin terslenir olduğunu bulunuz.

(ii)

$M=\begin{bmatrix}2&3\\1&-3\end{bmatrix}$ ve $N=\begin{bmatrix}-2&6\\1&-3\end{bmatrix}$ olsun. Eğer M ve N matrislerinin varsa terslerini bulunuz.

(iii)

$L^3=\begin{bmatrix}8&-57\\0&27\end{bmatrix}$ olacak biçimde bir üst üçgensel matris bulunuz.

Çözüm:

(i)

BE=$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$=$I$ ve

EB=$\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$=$I$

olduğundan, yani BE=I= EB, B ve E matrisleri terslenir.

(ii)

$|M|= -9$ ve köşegen bileşenleri yer değiştirir ve diğer köşegen bileşenlerinin eksilisi alınır ve $\frac{1}{|M|}$ ile çarpılır, yani

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix}-3&-3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

$|N|$=(-2).(-3)-6.1=0 olduğundan N matrisinin tersi yoktur.

(iii)

$L=\begin{bmatrix}x&y\\0&z\end{bmatrix}$ alalım. Bu durumda $x^3=8 \Rightarrow x=2$ ve $z^3=27 \Rightarrow z=3$. Daha sonra x=2 ve z=3 kullanarak L^3 yi hesaplayalım.

LL=$\begin{bmatrix}2&y\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&y\\0&3\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}4&5y\\0&9\end{bmatrix}$ ve L^3=$\begin{bmatrix}2&y\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5y\\0&9\end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix}8&19y\\0&27\end{bmatrix}$

Böylece $19y=-57 \Rightarrow y=-3$ dir. Bunlara göre $L=\begin{bmatrix}2&-3\\0&3\end{bmatrix}$ dir.

7.(i)

B=$\begin{bmatrix}5&-3&0\\-3&7&5\\0&5&1\end{bmatrix}$, E=$\begin{bmatrix}0&-11&13\\11&0&-4\\-13&4&0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}6&5\\2&7\\2&1\end{bmatrix}$

matrislerinden simetrik ve ters simetrik olanlarını belirleyiniz.

(ii)

A, 2 x 2 tipinde keyfi bir dik matris olsun. Eğer A matrisinin ilk satırı (a, b) ise

$a^2 + b^2$=1 ve

A=$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ veya A=$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$

olduğunu gösteriniz.

(iii) *B*, 2 x 2 tipinde keyfi bir dik matris olsun. *B* matrisinin ilk satırı (3, 4) nin pozitif katı ise *B* yi belirleyiniz.

Çözüm:

(i)

B matrisinin bileşenleri esas köşegenine göre ayna görüntüsü yani simetrik elemanlar eşit ve $B^T = B$ olduğundan *B* matrisi simetriktir.

E matrisinin esas köşegen bileşenler sıfır ve simetrik elemanları birbirlerine göre eksilisi olduğunda (11 ve -11, 13 ve -13, 4 ve -4) *E* matrisi ters simetriktir.

D matrisi kare matris olmadığından ne simetrik ne de ters simetriktir.

(ii) A matrisinin ikinci satırı (*x*, *y*) olsun. A nın satırları ortonormal bir küme biçiminde olduğundan

	Kiraz	**Kayısı**	**Şeftali**
Hadi	4	5	7
Sadi	6	10	3

	I. **Manav**	**II. Manav**
Kiraz	2	3
Kayısı	2,5	4
Şeftali	1,5	3

$a^2 + b^2=1$, $x^2 + y^2=1$, $ax + by=0$

Benzer biçimde A nın sütunları da ortonormal bir küme biçiminde olduğundan,

$a^2 + x^2=1$, $b^2 + y^2=1$, $ab + xy=0$

Böylece, $x^2=1-a^2=b^2$ ve buradan $x = \pm b$.

$x = b$ iken $ab + by=0 \Rightarrow b(a+y)=0$ ve $y=-a$

$x = -b$ iken $-ab + by=0 \Rightarrow b(y-a)=0$ ve $y=a$

Böylece

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ veya $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$.

(iii) (3, 4) nin normalini hesaplarsak, yani $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ elde edilir ve (ii) den dolayı

$A=\begin{bmatrix} \frac{3}{5}, & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ veya $A=\begin{bmatrix} \frac{3}{5}, & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

5.(i) $A=\left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ ve $B=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ blok matrisler olmak üzere blok çarpımları kullanarak AB yi bulunuz.

(ii) M= köşegen(A, B, C) olsun, burada $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=[5]$ $C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dır. O halde M^2 bulunuz.

Çözüm:

(i) E, F, G, R, S, T blok matrisler ve 0_{1x2} ve 0_{1x3} sıfır matrisler olmak üzere $A=\begin{bmatrix} E & F \\ 0_{1x2} & G \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} R & S \\ 0_{1x3} & T \end{bmatrix}$ olsun.

$$AB=\begin{bmatrix} ER & ES+FT \\ 0_{1x3} & GT \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) M matrisi bir köşegen blok matris ve her blok matris de kare matris olduğundan

$$A^2=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}, \qquad B^2=[25], \qquad C^2=\begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 40 & 64 \end{bmatrix}$$

böylece,

$$M^2=\left[\begin{array}{cc:c:cc} 7 & 10 & & & \\ 15 & 22 & & & \\ \hdashline & & 25 & & \\ \hdashline & & & 16 & 24 \\ & & & 40 & 64 \end{array}\right]$$

13.3.4 Doğrusal Denklem Sistemleri

Doğrusal denklem sistemleri (DDS), bir çok alandaki (Matematiğin kendi alanı dahil özellikle ekonomik ve iş dünyası ile ilgili problemlerin çözümünde Fizik, Kimya, Biyoloji, İstatistik, Bilgisayar-Elektronik Bilimleri, Mühendislikler…) problemlerin çözümünde ve yorumlanmasında önemli bir yere sahiptir. Ayrıca gerek doğrusal cebirin kendi bazı konuları içinde ve gerekse diğer disiplinlerin soyut kavramları, DDS biçiminde oluşturulup yorumlanmasıyla yeni bir bakış açısı vermesi bakımından önemlidir.

Doğrusal denklem sistemleri hem sabitler ve hem de katsayılardan oluşur ve bunlar herhangi bir K cisminden oluşur. Biz tüm bölüm boyunca tüm sayıları $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cisminden alacağız.

$\mathbb{R}^2$ de bir doğrunun genel denklemi $ax+by=c$ ve $\mathbb{R}^3$ de bir düzlemin genel denklemi $ax+by+cz=d$ biçimindedir. Bu biçimdeki denklemler ***doğrusal denklemler*** olarak adlandırılır.

13.3.4.1 Doğrusal Denklemler ve Çözümleri

Denklem çözümlerine yönelik bazı temel tanımları vermeden önce aşağıda bir doğrusal denklem oluşturmaya çalışalım.

Misal: (i) Karaman'da yıla başlayanların % 80 orda kalsın ve % 20 si taşınsın ve

(ii) Karaman'nın dışında yıla başlayanların ise % 90 orda kalsın ve % 10 Karaman'a taşınsın.

Eğer başlangıçta Karaman'da 30 milyon ve dışında 200 milyon kişi olduğunu bilirsek, yılsonunda içerde ve dışarıdakilerin sayısını veren *u* ve *v* yi bulmak kolay olur, yani

.9(200.000.000) + .2(30.000.000) = *u*

.1(200.000.000) + .8(30.000.000) = *v*

Şimdi verilenlere göre aşağıdaki biçimde iki yorum yapabiliriz:

(i) Yılsonunda *u* = 200 milyon ve *v* = 30 milyon ise başlangıçta bulunması istenen *u* ve *v* denklemini (çözümünü yapmadan) oluşturabiliriz.

(ii) Eğer yılsonundaki *u* ve *v* denklemi başlangıçtaki *u* ve *v* denklemi ile aynı ise, elde edilen denklem nedir? Böyle bir "sabit" duruma göre *u* ile *v* nin oranı nedir?

Tanım: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b sabitler ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler veya değişkenler olmak üzere aşağıdaki standart biçimde yazılan ifadeye ***doğrusal denklem*** denir.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (13.a)$$

a_k ya x_k nın ***katsayıları*** ve b ye denklemin ***sabitleri*** denir.

(13.a) denkleminin çözümü, x_k bilinmeyenlerine karşılık gelen çözüm kümesi aşağıdaki biçimde;

$$x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$$

veya buna denk bir ifadeyle $u \epsilon \mathbb{R}^n$ vektörünün değerler kümesi;

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$$

ifadesini sağlayacak biçimde denklemdeki x_i lerin yerine k_i ler yazarak elde edilen vektör bu denklemi sağlar denir ve aşağıdaki biçimdedir:

$u=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

<u>*Örnek*</u>:

$7x - y = -1$, $\quad u - \frac{3}{4}v - \frac{7}{13}z = 11$, $\quad 4x_3 - 5x_2 = 9 - x_1 + x_4$,

$\frac{\pi}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + (\cos\frac{\pi}{3})z = 0$, $\qquad 3{,}7x - 1{,}3y = 1{,}1$

Bu ifadelerin hepsi doğrusal denklem örnekleridir. Üçüncü denklemi yeniden yazarak onun da $x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 9$ doğrusal denklem olduğu görülür.

$xy + 2z = 1$, $x^2 - y^2 = 2$, $\frac{x}{y} + z = 2$,

$\frac{\pi}{3}x - \sqrt{3}y + \cos(\frac{\pi}{3}z) = 1$, $\sin x_1 + 5x_2 - 3^{x_3} = 0$, Bu ifadeler doğrusal olmayan denklemlerdir. Çünkü doğrusal denklemler birbirinin çarpımı, karşılıklı veya bir fonksiyon diğerinin çözümü olmamalıdır. Çözüm kümeleri yalnız birinci kuvvetten ve sabitlerin çarpımıyla meydana gelir.

<u>Örnek</u>: x, y, z, t bilinmeyenler ve bu bilinmeyenlerin oluşturduğu doğrusal denklem aşağıdaki biçimdedir:

$$x + 2y - 3z - t = -9$$

x=1, y=4, z=5, t=3 dir veya buna denk olarak u=(1, 4, 5, 3) vektörü bu denklemin çözüm vektörüdür, yani

1.1+2.4 −3.5 −1.3=−9 veya 1+8-15-3=−9 veya −9=−9

w=(1, 2, 0, 1) vektörü bu denklemin çözüm kümesi değildir, çünkü denklemde yerine koyduğumuzda eşitlik doğrulanmaz, yani

1.1 + 2.2 – 3.0 -1.1=−9 veya 1+4-1=−9 veya 4≠ −9.

13.3.4.2 Doğrusal Denklem Sistemleri

Tanım: a_{ij} ve b_j ler sabitler olmak üzere n tane $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenlerinden (değişkenlerinden) oluşan m tane $L_1, L_2, \cdots, L_m$ ***doğrusal denklemlerin sistemi*** (DDS) aşağıdaki biçimdedir;

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (13.b)$$

a_{ij} sayısına, L_i denkleminde x_j değişkeninin ***katsayısı*** ve b_i sayısına da L_i denkleminin ***sabiti*** denir.

(13.b) sistemine m x n tipindedir denir. Eğer n tane bilinmeyenlerin sayısı m tane denklem sayısına eşit, m=n ise sisteme ***kare sistem*** denir.

Eğer denklem sabitlerinin hepsi sıfır yani, b_i=0 ise (13.b) sistemine ***homojen*** denklem sistemi; aksi halde ***homojen olmayan*** denklem sistemi denir.

(13.b) sistemindeki değişkenlere karşılık gelen “değerlerin dizini”ne sistemin bir ***çözümü*** (özel çözüm) denir. Bu ifadeye denk olarak, $\mathbb{R}^n$ de bir u vektörüne sistemdeki her bir denklemin çözümü diyeceğiz. Sistemin bütün çözümlerinin kümesine ***çözüm kümesi*** veya ***genel çözüm*** denir.

<u>Örnek</u>:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - x_5 &= 3 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 4 \end{aligned}$$

denklem sistemi 5 bilinmeyenli ve 3 denklemdir. u=(0, 1, 2, 1, 1) ve v=(1, 0, 2, 0, 3) vektörlerinin sistemin çözümünü sağladığını bulunuz.

Her denklemde u nun değerlerini yerine yazarsak,

1.0 + 2.2 – 1.1=3 ⇒ 3=3

1.1 – 1.2 – 1.1 + 1.1= – 1 ⇒ −1= −1

1.1 + 2.2 + 1.1 + – 2.1= 4 ⇒ 4=4

Benzer biçimde v nin değerlerini de sistemdeki her denklemde yerine yazarsak;

1.2 + 2.2 –1.3=3 ⇒ 3=3

1.0 –1.2 –1.0 + 1.3 =–1 ⇒1≠(1

olduğundan v sistemin çözüm kümesi değildir. (13.b) doğrusal denklem sisteminin bir veya birden fazla çözümü varsa sistem "anlamlı", hiç çözümü yoksa "anlamsız" denir.

Teorem: K cismi sonsuz olsun. Bu durumda doğrusal denklem sisteminin 3 durumu vardır: DDS nin

(i) tek çözümü, (ii) hiç çözümü yok, (iii) çözüm kümesi sonsuz.

13.3.4.3 DDS nin Artırılmış Matrisi ve Katsayılar Matrisi

Tanım: n bilinmeyenli ve m tane denklemli (13.b) sisteminin genelini göz önüne alalım. Böyle bir sistem aşağıdaki iki matrisin birleşimidir.

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad \text{ve}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

İlk matris M ye sistemin ***artırılmış matrisi*** ve ikinci matris A ya da sistemin ***katsayılar matrisi*** denir. Bazen $M=[A \quad B]$, M matrisinin iki kısmını vurgulamak için bu biçimde yazılır, burada B matrisi sabitlerin sütun vektörüdür. Örneğin, (13.b) sisteminin artırılmış bir M matrisi ve katsayılar matrisi aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matrisi M matrisinin son sütunu hariç diğer bilişenlerinden meydana gelmiştir ve bu son sütun sabitlerin sütunudur. Bir DDS, artırılmış bir M matrisiyle tanımlanır. Özel olarak, M nin her satırı DDS nin her bir denklemine karşılık gelir ve DDS nin sabitlerine karşılık gelen son sütunu hariç, M nin her bir sütunu bilinmeyenlerin her bir katsayısına karşılık gelir.

Tanım: DDS nin tüm katsayıları sıfır ise yani,

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \qquad (13.c)$$

ise doğrusal denkleme ***anlamsız*** veya "***yozlaşmış***" denir. Böyle bir denklemin tek çözümü b sabitine bağlıdır.

(i) $b \neq 0$ ise çözüm yok,

(ii) $b=0$ ise, $\forall\, u = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in K^n$ vektörü biçiminde çözümdür.

Teorem: b, denklem sabiti olmak üzere $\mathcal{L}$, anlamsız bir L denklemini kapsayan DDS olsun.

(i) $b=0$ ise $\mathcal{L}$ sisteminin çözümü yoktur,

(ii) $b \neq 0$ ise sistemin çözüm kümesini değiştirmeden L sistemden silinebilir.

Tanım: L anlamlı bir doğrusal denklem olsun. Bunun anlamı, L nin katsayılarından biri ya da daha fazlası sıfır demektir ve L de sıfır olamayan katsayısının ***ilk bilinmeyeni*** denir. Örneğin, ilk bilinmeyenleri sırasıyla x_3 ve y olan denklemler aşağıdaki biçimdedir, yani

$$0x_1 + 0x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 0x_5 + x_6 = 7, \qquad 0x + 5y - 7z = 1 .$$

Genelde sıfır katsayılı terimler ihmal edilir ve buradan denklem yeniden aşağıdaki biçimde yazılır,

$$5x_3 - 7x_4 + 0x_5 + x_6 = 7, \qquad 5y - 7z = 1$$

Böylece ilk bilinmeyenler ilk sırada görünür.

13.3.4.4 Denk Sistemler ve Temel İşlemler

Tanım: n bilinmeyenli m tane doğrusal denklemli (13.b) sistemini göz önüne alalım. L, m tane denklem ile $c_1, c_2, \cdots, c_m$ katsayıların sırayla çarpılarak ve sonra da bu çarpımın toplanmasıyla elde edilen doğrusal denklem olsun. Özel olarak bu doğrusal denklem L aşağıdaki biçimde olsun;

$$(c_1 a_{11} + \cdots + c_m a_{m1})x_1 + \cdots + (c_1 a_{1n} + \cdots + c_m a_{mn})x_n = c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m$$

Buna göre, L ye sistemde denklemlerin ***doğrusal bileşimi*** denir.

Örnek:

$$\begin{array}{llllll} x_1 + & 2x_3 - & & x_5 & = 3 & L_1 \\ x_2 - x_3 - & & x_4 + & x_5 & = -1 & L_2 \end{array}$$

$x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \qquad L_3$

olsun ve L doğrusal bileşim, $5L_1$+$7L_2$–L_3 aşağıdaki biçimdedir

$$
\begin{array}{lrcl}
5L_1: & 5x_1 + 10x_3 \qquad - 5x_5 & = & 15 \\
7L_2: & 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 + \quad 7x_5 & = & -7 \\
(-1)\, L_3: & -x_2 - \quad 2x_3 - \quad x_4 + \quad 2x_5 & = & -4 \\
\hline
L: & 5x_1 + 6x_2 + x_3 - 8x_4 + 4x_5 & = & 4
\end{array}
$$

Böylece L=$5L_1$+$7L_2$–L_3 dir. *u*=(0, 1, 2, 1, 1) vektörü aynı zamanda bu yeni doğrusal bileşimli denklemin de çözüm kümesidir, yani

5.0 + 6.1 + 1.2 – 8.1 + 4.1=4.

Teorem: Doğrusal denklemin iki sistemi aynı çözüme sahiptir ancak ve ancak her sistemdeki her denklem biri diğerinkinin bir doğrusal bileşimidir.

Tanım: Eğer iki DDS aynı çözüme sahipse bu DDS leri ***denktirler***.

Tanım(<u>Üç Satır İşlemleri</u>): Aşağıdaki işlemlere $L_1, L_2, \cdots, L_m$ DDS üzerinde temel işlemler(üç satır işlemler) denir.

($\dot{I}_1$) Denklemlerden ikisi yer değiştirilir. L_i ve L_j denklemleri yer değiştirilmiş biçimde yazılır, " L_i ve L_j yer değişir" veya $L_i \leftrightarrow L_j$

($\dot{I}_2$) Bir denklemi kendinin sıfır olmayan bir katıyla yer değiştirilir. $k \neq 0$ olmak üzere L_i denklemi kL_i denklemi ile yer değiştirilmiş biçimde aşağıdaki gibi gösterilir;

"L_i ve kL_i yer değişir" veya $kL_i \rightarrow L_i$

($\dot{I}_3$) Bir denklem başka bir denklemin katı ve kendinin toplamıyla yer değiştirilir. L_j denklemi, kL_i ve L_j toplamıyla yer değiştirilmiş biçimde gösterilir;

"L_j ve $kL_i + L_j$ yer değişir" veya $kL_i + L_j \rightarrow L_j$

<u>*Haşiye*</u>: Bazen (2) ve (3) tek seferde işlem yapılır, yani

k'≠0 olmak üzere, "L_j ve $kL_i + k'L_j$ yer değişir" veya

$kL_i + k'L_j \rightarrow L_j$

<u>*Haşiye*</u>: Gauss indirgeme metodu; verilen DDS nin çözümünü bulmada kullanılan bir metodudur. Bu metot, verilen bir denklemin çözümünü kolay biçimde elde edilebilen denk bir denkleme dönüştüren yukarıdaki işlemlerden ibarettir.

13.3.4.5 Doğrusal Denklemlerin Karesel Biçimleri

Genel DDS çözümüne ışık tutacak bir bilinmeyenli ve iki bilinmeyenli doğrusal denklemlerin çözümlerinin özel durumlarını kısaca inceleyeceğiz.

Önce bir bilinmeyenli denklemin çözümüne uygun aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem: *ax*=*b* doğrusal denklemini ele alalım.

(i) $a \neq 0$ ise, *ax*=*b* nin tek çözümü $x = \frac{b}{a}$ dir.

(ii) $a=0$, fakat $b \neq 0$ ise *ax*=*b* nin çözümü yoktur.

(iii) $a=0$ ve $b=0$ ise her $k \in K$, *ax*=*b* nin çözümdür.

Örnek:

$4x - 9 = 5x - 3 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6$ buradan yukarıdaki teorem (i) den denklemin tek çözümü vardır.

$1 - 2x = 9 - 2x \Rightarrow 0x=8$ buradan yukarıdaki teorem (ii) den denklem çözümsüzdür.

$x - 5 + 7x = 8x - 5 \Rightarrow 0x = 0$, buradan teorem (iii) den her *k* sayısı denklem için çözümdür.

Tanım: Şimdi iki bilinmeyenli dds (2 x 2) inceleyelim. x *ve* y iki farklı bilinmeyen olmak üzere "bozulmamış" iki doğrusal denklem sistemi aşağıdaki biçimde olsun,

$$A_1x + B_1y = C_1$$
$$A_2x + B_2y = C_2 \qquad (13.d)$$

Denklem sistemi "bozulmamış" olduğundan hem A_1 ve B_1 ve hem de A_2 ve B_2 sıfır değildir. $\mathbb{R}^2$ düzleminde her denklemin grafiği bir doğrudur ve geometrik olarak üç durumu vardır:

(1) *Sistem Tek Çözümlü* :

Doğrular farklı açılarda veya denk olarak *x* ve *y* nin katsayıları orantılı değilse,

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ veya $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$

iki doğru tek noktada kesişir; örneğin , $\frac{1}{5} \neq -\frac{1}{7}$.

(2) *Sistem çözümsüz*:

Doğruların eğimleri aynı fakat farklı *y* noktasında kesişirler (ortak noktaları yok) yani,

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

Bu durumda iki doğru paraleledir. Örneğin, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \neq \frac{1}{7}$.

(3) *Sistem sonsuz çözümlüdür*

Doğrular aynı açıya sahip ve aynı y noktasını keser veya katsayılar ve sabitler orantılı yani,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Bu durumda iki doğru çakışır. Örneğin, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ (13.d) denklem sisteminin çözümü, yalnız bir bilinmeyen denkleme indirgeme işlemleri denilen indirgeme basamaklarının sonucuyla elde edilebilir. Sistemin tek çözümü ve iki kısımlı indirgeme "*hesaplamaya*" sahip olsun.

Tanım(İndirgeme "Hesaplama").1: Veriler tek çözümlü iki bilinmeyenli L_1 ve L_2 gibi iki bozulmamış dds olsun.

Kısım A (*İleri İndirgeme*): Her denklem, bilinmeyenlerinin katsayıları birinin diğerininkinin eksilisi olacak biçimde bir sabitle çarpılır ve sonra yalnız bir bilinmeyenli denklem olacak biçimde yeni bir L gibi bir denklem elde etmek için iki denklem toplanır.

Kısım B (Geri "Yerine Koyma"): Yalnız bir bilinmeyene sahip bu yeni L denklemde bilinmeyen çözülür, asıl denklemlerden birinde bilinmeyenin bu değeri yerine konulur ve diğerinin bilinmeyeni çözülür.

Örnek: Sistem tek çözümlü olsun.

L_1: $x + 3y = -2$

L_2: $2x + y = 1$

Yeni denklem L=(2 L1+ L2 elde etmek için x değişkeni indirgenir ("yok edilir"). L_1 –2 ile ve L_2 1 ile çarpılır ve aşağıdaki biçimde toplanır.

$-2L_1$: $-2x - 6y = 4$

L_2: $2x + y = 1$

$-5y = 5$

y için yeni denklem çözülür ve y=-1 elde edilir. Buradan y=-1, asıl denklemlerden birinde yerine konur ve *x* bilinmeyeni çözülür.

$x + 3(-1) = -2 \Rightarrow x = 1$

Böylece $u=(1, -1)$ sistemin tek çözüm ikilisidir. Geometrik olarak bu iki doğru $u=(1, -1)$ noktasında kesişir.

Örnek:

(a) Sistem tek çözümlü olmasın.

L_1: $x - 3y = -2$

L_2: $-2x + 6y = 1$

L_1 denklemi 2 ile çarpılır ve sonra L_2 ile toplanır ise denklemden *x* değişkeni indirgenir. L= $-2L_1 + L_2$ gibi yeni denklem aşağıdaki biçimde düzenlenir ve bozulmuş denklem elde edilir.

$0x + 0y = -3$

b=-3 bir sabit ve sıfır olmadığından denklem sisteminin çözümü yok. Geometrik olarak doğrular paraleldir.

(b)

L_1: $x-3y$=–2

L_2: $-2x+6y$=4

L_1 denklemi 2 ile çarpılır ve sonra L_2 ile toplanır ise denklemden *x* değişkeni indirgenir. Sabit sıfır olma üzere, L= $-2L_1+L_2$ gibi yeni denklem aşağıdaki biçimde düzenlenir ve bozulmuş denklem elde edilir.

$0x+0y$=0

Buradan, sistemin her bir denklemine karşılık gelen sonsuz sayıda çözümü vardır. Geometrik olarak doğrular çakışıktır.

Genel çözümü bulmak için, *y*=*k* olsun ve L_1 denklemde yerine koyarsak

$x-3k$=–2 ⇒ $x=3k-2$

Böylece sistemin genel çözümü $x=3k-2$, *y*=*k* veya u=($3k-2$, *k*) , burada *k* ya herhangi bir sayı (***parametre***) denir.

13.3.4.6 DDS' de Üçgensel ve Basamak Biçimler

DDS'nin çözümü için en temel metod Gauss İndirgemedir. Bu dds'nin de iki tipini ele alalım: Üçgensel ve basamak biçimleridir.

Tanım: Aşağıdaki ***üçgensel biçimdeki*** dds'yi göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} x_1-x_2-x_3-x_4&=5\\ 3x_2+4x_3+2x_4&=-7\\ 4x_3+11x_4&=-7\\ 35x_4&=-35 \end{aligned}$$

Burada ilk denklemde ilk bilinmeyen x_1, ikinci denklemde ilk bilinmeyen olarak ikinci değişken x_2 dir ve diğer denklemlerdeki ilk değişkenler x_3 ve x_4 dür. Böylece sistem kareseldir ve her ilk bilinmeyen bir önceki denklemde ilk bilinmeyenin doğrudan sağındadır.

Bu tip üçgensel denklem sisteminin çözümü tektir. Yerine koyma yöntemiyle elde edilir. Yani,

(1) Son denklemde $x_4=-1$ elde edilir.

(2) Sonra bu $x_4=-1$ değeri son denklemden bir öncekinde yerine konur ve son değişken bir önceki değişken olan x_3 çözülür, yani $x_3=1$ olur.

(3) $x_3 = 1$ ve $x_4 = -1$ değerleri ikinci denklemde yerine yazılır ve $3x_2 = -9$ ve $x_2 = -1$ elde edilir.

(4) Son olarak $x_2 = -1, x_3 = 1$ ve $x_4 = -1$ ilk denklemde yerine yazılır ve $x_1 = 4$ olur. Buradan u=$(4, -1, 1, -1)$ vektörü sistemin tek çözümüdür.

<u>Haşiye</u>: Matris formatı kullanılarak sistemin çözümünde kullanılacak olan alternatif bir yerine koyma biçimi şöyledir: Son değişken bulunduktan sonra, son denklemden önceki denklemin çözümü yapılmadan önce, geri kalan bütün denklemde son değişkenin bu değeri yerine konur. Böylece bir değişken ve bir denklem eksik olarak üçgensel bir sistem elde edilir. Örneğin yukarıdaki sistemde $x_4 = -1$ değeri tüm diğer denklemlerde yerine konursa, yeni üçgensel bir sistem elde edilir:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_2 + 4x_3 &= -5 \\ 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Bu son denklem kullanılarak işlem basamakları tekrar edilir ve bütün çözümler elde edilir.

Tanım: Aşağıdaki dds bir ***basamak biçim***inde sistemdir:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ 6x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Burada hiçbir denklem bozulmuş denklem değildir ve her denklemdeki birinci bilinmeyen biri diğerinden bir önceki denklemedeki birinci bilinmeyenin sağında olmak zorundadır. Sistemdeki ilk x_1, x_3 ve bilinmeyenlere "***esas***" veya "***bağlı***" değişken ve diğer x_2, x_4, x_5 bilinmeyenlere ***keyfi*** **(*serbest*)** değişken denir.

Genel olarak ***basamak sistem*** ve ya ***basamak biçimindeki sistem*** aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{13} + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad (13.e) \\ a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

burada $1 < j_2 < \cdots < j_r$ ve a_{11}, a_{2j_2}, …, a_{rj_r} ler sıfır değildir. $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ esas değişkenler ve $r \leq n$ dir.

Teorem: Aşağıda *n* bilinmeyenli ve *r* tane basamak biçimde dds yi ele alalım. İki durum var;

(i) $r=n$ ise yani, bilinmeyen sayısı denklem sayısı aynı ise, dds nin tek çözümü vardır.

(ii) $r < n$ ise yani, bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla ise, keyfi olarak $n - r$ tane keyfi değişken belirlenebilir ve r tane "esas" veya "bağlı" değişken için sistemin çözümü elde edilir.

Basamak biçimindeki sistemde bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazladır. K sonsuz bir cisim olsun. $n - r$ tane keyfi değişkenlerde her biri, bir sayıya tekabül edeceğinden sistemin sonsuz çözümü vardır.

Keyfi değişkene bağlı dds nin genel çözümünün iki denk yöntemi vardır. Yukarıdaki basamak sistemini kullanarak, burada r=3 tane denklem ve n=6 tane değişken vardır. Bu yöntemlerden biri "parametrik biçim" diğeri "keyfi-değişkenli biçim" dir.

Tanım: Keyfi değerlere keyfi değişkenler atanır ve buna ***parametre*** denir. $x_4 = p, x_5 = r$ ve $x_2 = s$ ise, p, r ve s parametreli terimlere göre $x_6 = \frac{1}{3}$ olmak üzere x_1, x_3 bağımlı değişkenlerin elde edilmesi için yerine koyma kuralını kullanabiliriz.

Örneğin,

(1) Son denklemden $6x_6=2 \Rightarrow x_6 = \frac{1}{3}$ elde edilir.

(2) $x_6 = \frac{1}{3}$ ve $x_4 = p$ ikinci denklemde yerine konursa, $x_3 + 2p + 3\frac{1}{3}=1 \Rightarrow x_3=-2p - 1$ elde edilir.

(3) İlk denklemde

$x_6 = \frac{1}{3}$, $x_4 = p, x_5 = r$ ve $x_2 = s, x_3=-2p - 1$ yerine konursa,

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6=-1$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 6.s - 5.(-2p - 1) - 2p + 4r - 3.\frac{1}{3}=-1$$

$$x_1=\frac{-5-8p-4r-6s}{2}$$

Böylece p, r ve s keyfi değişkenler olmak üzere, $u = (\frac{-5-8p-4r-6s}{2}, s, -2p - 1, p, r, \frac{1}{3})$ sistemin çözüm kümesidir.

Tanım: x_2, x_4, x_5 keyfi değişkenlere göre x_1 ve x_3 bağımlı değişkenleri bulmak için geri yerine koymayı kullanalım. Son denklemde $x_6 = \frac{1}{3}$ olur. İkinci denklemde $x_3 = -2x_4$. Birinci denklemde

$$2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6=-1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-8x_4 - 4x_5 - 6x_2}{2} = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$

$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$, x_2 keyfi,

$x_3 = -2x_4$, x_4 keyfi, x_5 keyfi, $x_6 = \frac{1}{3}$

$$u = (-3x_2 - 4x_4 - 2x_5, x_2, -2x_4, x_4, x_5, \frac{1}{3})$$

Bu *u* vektörüne sistemin genel çözümü için ***serbest değişkenli*** biçimi denir.

<u>*Haşiye*</u>: Yukarıdaki sistemde keyfi değişkenlere bir gerçel sayı vererek, bir özel çözüm bulunabilir ve sonra yerine koyma kuralıyla bağımlı değişkenler çözülür. $x_2 = 1, x_4 = -1, x_5 = 1$ olsun. Buradan

$x_1 = -1$, $x_3 = 2, x_6 = \frac{1}{3}$

elde edilir. Böylece

u=$(-1, 1, 2, -1, 1, \frac{1}{3})$.

13.3.4.7 Gauss İndirgeme

Tanım: (13.b)'deki DDS'nin genel çözümüne yönelik esas metod Gauss İndirgeme'dir ve iki kısımdan oluşur.

Kısım A (İleri İndirgeme): Bu hesaplama, ya çözümsüz olan "bozulmuş" bir dds'nin (*hiç çözümü olmayan dds yi belirten*) adım adım indirgenmesi ya da buna denk daha basit bir üçgensel veya basamak biçimindeki sistemlerdir.

Kısım B (Geri İndirgeme): Bu hesaplama, daha basit bir dds'nin çözümünü bulmak için adım adım yerine koymadır.

Hesaplama yöntemimizin ilk kısmını önceden izah ettik. Şimdi ikinci kısmını aşağıdaki gibi izaha çalışalım.

Tanım (İndirgeme "Hesaplama"-2): (13.b)'deki DDS'nin m x n yi ele alalım.

İndirgeme Adımı: DDS'de sıfır olmayan ilk bilinmeyen x_1 bulalım.

(a) $a_{11} \neq 0$ olacak biçimde düzenleyelim, yani birinci denklemde sıfır olmayan ilk bilinmeyenin x_1 olacak biçimde denklemleri yer değiştirelim.

(b) Birinci denklem hariç diğer tüm denklemlerden x_1 eleyelim. *i*>1 için

$m = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ve L_i ile $mL_1 + L_i$ yer değiştirelim

Buradan aşağıdaki sistemi elde ederiz;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{13} + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{mj_m}x_{j_m} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Burada $a_{11} \neq 0$ olmak üzere ilk denklem hariç diğer denklemlerde x_1 gözükmeyecek ve x_{j_2} bundan sonraki ilk denklemde sıfır olmayan birinci bilinmeyeni temsil edecek.

(c) Yeni bir L denklemini inceleyelim.

(i) Eğer L denklemi $b \neq 0$ olmak üzere, $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ biçiminde ise, burada indirgeme işlemi durur. Sistem anlamsızdır ve sistemin çözümü yoktur.

(ii) Eğer L denklemi $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ biçiminde ya da denklerden biri diğerinin bir katı ise, sistemden bu L denklem silinir.

Bu İndirgeme Adımı tekrar edilir, yani ilk denklem dahil diğer tüm denklemlerin her biri daha küçük alt sisteme dönüştürülür.

Sonuç olarak, sistem üçgensel veya basamak biçime indirgenir ya da çözümsüz olan bozulmuş bir denklemin anlamsız bir sistem olduğu tespit edilir.

Haşiye: (1) (b)'deki *m* sayısı bir ***çarpan***dır, yani

$$m = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} = -\frac{silinen\ katsayılar}{ilk\ katsayı}$$

(2) (b)'deki işlemlere alternatif olarak aşağıdaki gibi işlem yapılabilir;

L_i ile $-a_{i1}L_i + a_{11}L_1$ yer değiştirelim.

eğer tüm katsayılar tamsayı ise bölme işlemleri ihmal edilebilir.

Şimdi Gauss İndirgeme metodunun uygulamasına yönelik örnekler verelim.

Örnek:

(i)

L_1: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$

L_2: $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -8$

L_3: $3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$

sistemini göz önüne alalım.

Gauss Eliminasyon yönteminin ilk *kısmı A* yı adım adım uygulamaya başlayalım. Birinci denklemde L_1 'de x in katsayısı 2 olduğundan L_2 ve L_3 'deki *x* leri eleyelim, yani L_2 ile $-2L_1 + L_2$ ve L_3 ile $-3L_1 + 2L_3$ yer değiştirelim.

Buradan

$$
\begin{array}{rl}
-2L_1: & -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -2 \\
L_2: & 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\
\hline
L_2: & 4x_2 - 7x_3 = -10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
-3L_1: & -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -3 \\
2L_3: & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\
\hline
L_3: & 5x_2 - 5x_3 = -5
\end{array}
$$

Böylece yeni sistem aşağıdaki biçimdedir.

$$
\begin{array}{ll}
L_1: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\
L_2: & 4x_2 - 7x_3 = -10 \\
L_3: & x_2 - x_3 = -1
\end{array}
$$

Yeni sistemde L_2 'de x_2 ilk bilinmeyen olduğundan, L_3 ile $L_2 + (-4)L_3$ yer değiştirilir:

$$
\begin{array}{ll}
L_2: & 4x_2 - 7x_3 = -10 \\
-4L_3: & -4x_2 + 4x_3 = 4 \\
\hline
L_3: & -3x_3 = -6
\end{array}
$$

Buradan yeni sistem aşağıdaki duruma gelir.

$$
\begin{array}{ll}
L_1: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\
L_2: & 4x_2 - 7x_3 = -10 \\
L_3: & 3x_3 = 6
\end{array}
$$

Gauss İndirgeme metodunun ilk kısmı (*Kısım A*) burada tamamlanmış olup, şimdi metodun ikinci kısmını (*Kısım B*) gerçekleyelim, yerine koyma kuralını sağlayalım.

L_3 'de $x_3 = 2$ elde edilir. $x_3 = 2$ bir önceki denklemde yerine konur ve $x_2 = 1$ elde edilir. Son olarak $x_3 = 2$ ve $x_2 = 1$ ilk denklemde yerlerine yazılırsa $x_1 = -2$ olur.

Böylece üçgensel sistemin çözümü $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ dir veya u=(= $-2, 1, 2$) olur.

$$
\text{(ii)}\quad
\begin{array}{ll}
L_1: & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
L_2: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\
L_3: & 4x_1 + x_2 + x_3 = 15
\end{array}
$$

Denklem sistemini Gauss İndirgeme metoduyla çözelim. Önce birinci kısma ait kuralı uygulayalım, yani ileri indirgeme kısmı (k*ısım A*).

L_2 ile $-2L_1 + L_2$ ve L_3 ile $-4L_1 + L_3$ yer değiştirelim.

$$\begin{array}{lr}
-2L_1: & -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -8 \\
L_2: & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\
\hline
L_2: & -3x_2 + 5x_3 = -1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
-4L_1: & -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -16 \\
L_3: & 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\
\hline
L_3: & -3x_2 + 5x_3 = -1
\end{array}$$

Buradan bu iki adımdan yeni sistem şöyledir;

$$\begin{array}{ll}
L_1: & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
L_2: & -3x_2 + 5x_3 = -1 \\
L_3: & -3x_2 + 5x_3 = -1
\end{array}
\text{ ya da }
\begin{array}{ll}
L_1: & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
L_2: & -3x_2 + 5x_3 = -1
\end{array}$$

Üçüncü denklem ikinci denklemin katı olduğundan silinir. x_3 serbest değişken olmak üzere sistem basamak biçimindedir.

Şimdi Gauss İndirgeme metodunun ikinci kısmını yani geri indirgeme (*Kısım B*) kuralını uygulayıp sistemin genel çözümünü bulalım. $x_3 = p$ olsun ve x_1 ve x_2 çözümünü bu parametreye bağlı olarak belirleyelim. Buradan ikinci denklemde $x_3 = p$ yerine koyalım ve $-3x_2 = -1 - 5p \Rightarrow x_2 = \frac{5p+1}{3}$ elde edilir ve bu $x_2 = \frac{5p+1}{3}$ yi birinci denklemde yerine koyalım. $x_1 = 4 + p - \frac{5p+1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{11-2p}{3}$ elde edilir.

Böylece sistemin genel çözümü *p* bir parametre olmak üzere,

$x_1 = \frac{11-2p}{3}$, $x_2 = \frac{5p+1}{3}$, $x_3 = p$ ya da $u = (\frac{11-2p}{3}, \frac{5p+1}{3}, p)$

dir.

$$\text{(iii)}\quad \begin{array}{ll}
L_1: & x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\
L_2: & 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
L_3: & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2
\end{array}$$

Sistemini çözelim. Gauss İndirgeme metodunun ilk kısmıyla sistemi çözmeye başlayalım.

L_2 ile $(-2)L_1 + L_2$ ve L_3 ile $(-1)L_1 + L_3$ yer değiştirelim

$$\begin{array}{lr}
(-2)L_1: & -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2 \\
L_2: & 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
\hline
L_2: & x_2 - 3x_3 = 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
(-1)L_1: & -x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\
L_3: & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
\hline
L_3: & -x_2 + 3x_3 = -1
\end{array}$$

Buradan yeni sistem;

$$L_1: \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$L_2: \quad x_2 - 3x_3 = 2$$
$$L_3: \quad -x_2 + 3x_3 = -1$$

Yeni sistemde ikinci denklem ile üçüncü denklem toplanırsa yani, L_3 ile $L_2 + L_3$ yer değiştirilirse L_3 aşağıdaki biçimde olur ve bozulmuş bir denklem elde edilir.

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Böylece sistem anlamsız olur ve sistemin çözümü olmaz.

13.3.4.8 Basamak Matrisler, Satır Standart Matrisler ve Satır Denk Matrisler

Bir DDS yi çözmek yerine artırılmış bir *M* matris üzerinde bazı işlemler yardımıyla sistemin çözümü hakkında bilgi ediniriz. Buna göre *basamak matrisler* ve "*temel" satır işlemleri* veya *üç satır işlemleri* gibi bazı matris kavramlarını verelim.

Tanım: *A* bir matris olsun ve eğer *A* matrisi aşağıdaki iki şartı sağlarsa (*A* matrisinin bir satırının ***sıfır olmayan birinci elemanı*** satırdaki sıfır olmayan ilk bileşendir) A ya ***basamak matris*** veya ***basamak biçimi*** denir.

(1) Matrisin alt kısmındaki satırların tamamı sıfır,

(2) Bir satırdaki sıfır olmayan her bileşen, bir önceki satırda sıfır olmayan ilk bileşenin sağında olmalıdır.

$A = [a_{ij}]$ olsun ve $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ olmak üzere

$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$ ve $\begin{cases} i \le r & j < j_i \\ i > r, & \end{cases}$ için, $a_{ij} = 0$ ise A ya basamak matris denir.

Matrisin satırlarına göre sıfır olmayan ilk $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$ bileşenlere basamak matrisin ***esas elemanları*** denir.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki matris esas elemanları daire içine alınmış basamak matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 4 & 5 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 9 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2., 4., 6. ve 7. sütundaki esas bileşenlerin her biri üstündeki satırın sağındadır. Yukarıdaki gösterimleri kullanarak esas bileşenler aşağıdaki biçimdedir,

$$a_{1j_1} = 1, a_{2j_2} = 2, a_{3j_3} = 9, a_{4j_4} = 3$$

burada $j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 6, j_4 = 7$ ve r=4 tür.

Tanım: Bir A matrisi eğer basamak matris ve bir önceki tanımlara ait şartlar sağlanır ve ilaveten aşağıdaki iki şartı da sağlarsa A ya ***satır standart matris*** denir.

(3) Her esas bileşen (sıfır olmayan ilk giriş) 1'e eşit,

(4) Sütunundaki her giriş, yalnız sıfır olmayan bileşendir.

Basamak biçimindeki matris ile satır standart biçimindeki matris arasında önemli fark; basamak matrislerde esas bileşenlerin altındaki girişler sıfır olmalı[özelik (1) ve (2)], fakat satır standart biçimindeki matrislerde her esas bileşenler 1'e eşit (özelik 3) ve esas bileşenlerin üstündekiler sıfır olmalıdır (özelik 4).

Her hangi bir mertebeden sıfır ve birim matris, satır standart biçimindeki matrislere özel örneklerdir.

<u>*Örnek*</u>:

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 7 & 1 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{2} & 8 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Üçüncü matris satır standart biçiminde matrise örnek. 4. Özeliği sağlamadığından yani, üçüncü sütundaki esas bileşenin üstündeki giriş sıfır olmayan eleman olduğundan ikinci matris satır standart matris değildir. Birinci matris 3. ve 4. özeliği sağlamadığından yani, bazı esas bileşenler 1 değil ve esas bileşenlerin üstündekiler sıfır olmayan girişler olduğundan satır standart biçiminde matris değildir.

Tanım(Matris için üç satır işlemler): $R_1, R_2, \cdots, R_m$ bir A matrisinin satırları olsun. Aşağıdaki A'daki işlemlere ***üç satır işlemler*** veya ***temel satır işlemler*** denir.

[M_1] (Satırların Değişmesi) : R_i ile R_j satırları değiştirilir ve aşağıdaki biçimde yazılır;

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

[M_2] (Satırlar Çarpılır Değişir): R_i satırıyla bir k≠0 için kendinin kR_i katıyla yer değiştirilir ve aşağıdaki gibidir.

$$kR_i \to R_i$$

[M_3] (Satırların Toplanması) : R_j satırı ile R_i nin bir katı ve kendisiyle toplamı yer değiştirilir ve aşağıdaki gibidir.

$kR_i + R_j \rightarrow R_j$

[M] 2. ve 3. özelikli işlemler tek adımda birleştirilir yani,

$kR_i + k'R_j \rightarrow R_j$.

Tanım: A ve B iki matris olsun. Eğer B matrisi bazı temel satır işlemlerinin yardımıyla A matrisiyle elde edilebiliyorsa A matrisi B matrisine ***satır denk matrisi*** denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$A \sim B$

Bu durumda B basamak matrisi aynı zamanda A nın basamak matrisidir.

Teorem: Esas bileşenleri $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$ olan $A = [a_{ij}]$ ve esas bileşenleri $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \cdots, a_{sk_s}$ olan $B = [b_{ij}]$ matrisleri satır denk matrisler olsunlar. Bu durumda sıfır olmayan satırlarının sayısı aynıdır, yani *r*=*s* dir. Esas bileşenleri aynı konumdadırlar ve şöyledir: $j_1 = k_1$, $j_2 = k_2$, …, $j_r = k_r$.

Teorem: Her *A* matrisi, satır standart biçimindeki bir tek matrise denktir. Bu A ya ***satır standart biçim matris*** denir.

Tanım: Bir *A* matrisi için, basamak biçimindeki esas bileşenlerin sayısına denk bir matrise *A* nın ***rankı*** denir ve *rank*(A) şeklinde gösterilir.

13.3.4.9 Matrislerde Gauss İndirgeme

Gauss indirgeme metodunun dds'den ziyade matrislere uygulanması daha pratik sonuçlar verir.

Tanım: ("hesaplama-3"- *İleri İndirgeme*) Bir A matrisi başlangıç matrisi olsun (Temel işlemler sonucunda her esas bileşen sıfırın altındadır ve yukarıdan aşağı doğru işlem yapılır). Temel işlemler sonunda A matrisi basamak biçiminde elde edilir.

1. Adım: Birinci bileşeni sıfır olmayan ilk sütunu bulalım. Bu sütun j_1 olsun.

(a) $a_{1j_1} \neq 0$ olacak biçimde düzenleyelim. Eğer gerekli ise, sıfır olmayan bileşenli satır, j_1 inci sütundaki ilk satırda gözükecek biçimde diğer satırla yer değiştirilir.

(b) a_{1j_1} altındaki sıfırları elde etmek için esas bileşen olarak a_{1j_1} kullanılır.

Özel olarak, *i*>1 için $m = -\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}$ alalım ve $mR_1 + R_i \rightarrow R_i$ yer değişir.

2. Adım: 1. Adım, ilk satır dahil bütün satırların alt matrisler biçimine gelecek biçimde tekrar edilir. Burada j_2 , alt sistemde sıfır olmayan bileşeni tanımlayan ilk satır olsun. 2. Adımın sonunda $a_{2j_2} \neq 0$ elde ederiz.

r. Adım: Alt matris, yalnız sıfır satırlar oluncaya kadar yukarıdaki işlem basamaklarına devam edilir.

"Hesaplama" (temel işlemler) sonunda, *r* son basamak matriste sıfır olmayan satırların sayısını göstermek üzere esas bileşenler aşağıdaki şekildedir.

$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$

Haşiye: 1. Adım (b)'deki m sayısına çarpan denir ve $m = -\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} = -\frac{silinen\ bileşenler}{esas\ bileşen}$ biçiminde tanımlıdır.

Haşiye: 1. Adım (b)'deki işlemler $-a_{ij_1}R_1 + a_{1j_1}R_i \rightarrow R_i$ biçiminde düzenlenebilir.

Tanım: ("hesaplama-4"_*Geriye İndirgeme*) Basamak matris biçiminde ki esas bileşenleri $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{rj_r}$ olan $A = [a_{ij}]$ başlangıç matrisi olsun. İşlemler sonunda satır standart biçimindeki matris A olsun.

1. Adım: (a) En son esas bileşen 1'e eşit olacak biçimde satırlara çarpım işlemleri kullanılır. Yani, en son sıfır olmayan R_r satırı $\frac{1}{a_{rj_r}}$ ile çarpılır.

(b) Esas bileşenin üstündeki sıfırları elde etmek için $a_{rj_r} = 1$ yi kullanalım. *i*= *r*–1, *r*–2, … 2, 1 için

$m = -a_{ij_r}$ alalım ve $mR_r + R_i \rightarrow R_i$ yer değişir.

(*r*–1). Adım: $R_{r-1}, R_{r-2}, \cdots, R_2$ satırlar için 1. Adım tekrar edilir.

r. Adım: İlk esas bileşen 1'e eşit olacak biçimde satır işlemleri kullanılır. R_1 satırı $\frac{1}{a_{1j_1}}$ ile çarpılır.

Haşiye: Gauss-Jordan indirgeme (matrisin satırlarının satır standart biçime indirgenmesi), alternatif bir yöntem olarak kullanılabilir. Sütün-sütun sağdan sola doğru işlem yapmaktan ziyade alttan yukarı doğru satır-satır esas bileşenlerin üstündeki sıfırlar yazılır.

Gauss İndirgemenin özel olarak iki safhası kullanılır.

(A) Yukarıdan R_1 satırdan aşağı doğru işlemler yapılarak her esas bileşenin altına sıfırlar yazılır,

(B) Alttan R_r satırdan yukarı doğru işlemler yaparak her esas bileşenin üstüne sıfırlar yazılır.

<u>*Örnek*</u>:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrisi önce basamak biçimine, sonra da satır standart biçimine indirgeyeniz.

a) Önce basamak biçimine getirelim: İlk satırın ilk esas bileşeni sıfır olmayan giriş haline gelmesi için bir ve ikinci satırı yer değiştirilir yani, $R_2 \leftrightarrow R_1$. Bundan sonra sırayla aşağıdaki işlemler yapılırsa A matris basamak matrisine denk olur: $R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$ ve $R_3 \rightarrow (-2)R_1 + R_3$. $R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2$ ve $R_3 \rightarrow (-5)R_2 + R_3$ dir. Buradan

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Matris basamak biçimine gelmiştir.

b)Şimdi satır (***indirgenmiş***)standart biçime getirelim.Önce $R_3 \rightarrow 2R_3$, sonra

$R_2 \rightarrow (\frac{7}{2})R_1 + R_2$ ve $R_1 \rightarrow (-6)R_3 + R_1$. Son olarak

$R_1 \rightarrow 5R_2 + R_1$ işlemleri yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Son matris A nın satır indirgenmiş standart biçimidir.

Açıklama: Bir DDS yi çözmenin yöntemlerinden biri de sistemi çözmekten ziyade sistemin artırılmış matrisi üzerinde çalışıp, sistemin çözümü hakkında bilgiye ulaşmaktır. Artırılmış M matrisinin basamak biçimine getirilmiş olması sistemin çözümlü olup olmadığı ve satır indirgenmiş standart biçime gelmesi de dds nin orijinalinin çözümü hakkında bilgiye ulaşırız.

(a) DDS nin artırılmış M matrisi üzerinde bir temel satır işlem, sistemin kendi üzerindeki işleme karşılık gelen uygulamaya denktir.

(b) DDS nin bir çözümü vardır ancak ve ancak artırılmış M matrisinin basamak biçimi k≠0 olmak üzere (0, 0, …, 0, *b*) şeklinde bir satırının olmamasıdır.

(c) Artırılmış M (sıfır satırlar dahil) matrisinin satır indirgenmiş standart biçiminde, her esas değişkenin katsayısı ilk esas bileşeni 1’e eşit ve sütununda sıfır olmayan tek bileşendir. Böylece DDS nin çözümünün serbest-değerli çözüm biçimi, serbest değerlere bağlı olarak elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki denklem sistemlerinin çözümlerini artırılmış matrislerini kullanarak çözünüz.

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$

$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

b)

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2$

$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$

$3x_1 - 3x_4 = -3$

c) $x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5$

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$

a) Artırılmış matrisi önce basamak biçimine ve sonra da satır indirgenmiş standart biçime indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Böylece sistemin tek çözümü var, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ veya denk olarak *u*=(3, 1, 2). Artırılmış M matrisinin basamak biçimi üçgensel sisteme karşılık geldiğinden sistem tek çözümlüdür.

b) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece dds nin satır indirgenmiş standart biçimi yeniden yazılırsa sistemin çözümünün serbest değerlere bağlı sonsuz çözümü elde edilir.

$x_1 - x_4 = -1 \Rightarrow x_1 = x_4 - 1$

$x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

x_1 ve x_2 sistemin esas/bağımlı değişkenleri ve x_3 ve x_4 ler serbest değişkenlerdir.

c)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5\\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

Böylece üçüncü satır bozulmuş yani, $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -5$ olduğundan artırılmış matrisin satır indirgenmiş standart biçimine devam edilmesine gerek yoktur. Burdan sistem anlamsız ve çözümsüzdür.

Teorem: $M = [A, B]$ *n* bilinmeyenli dds nin bir artırılmış matrisi olsun. Bu durumda,

(i) DDS anlamlıdır (çözümlüdür) ancak ve ancak *rank*(A)=*rank*(M)

(ii) Çözüm tektir ancak ve ancak *rank*(A)=*rank*(M)=*n* .

13.3.4.10 DDS nin Matris Denklemi

Tanım: (13.b)'deki *n* bilinmeyenli *m* tane dds aşağıdaki matris denklemine denktir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} \text{ veya } AX = B$$

Burada $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi, $X = [x_j]$ bilinmeyenlerin sütun vektörü ve $B = [b_i]$ sabitlerin sütun vektörüdür.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki dds ile matris denklemi denktirler.

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 4$$

$$3x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 8 \qquad \text{ve}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 7\\ 3 & -5 & 6 & -8\\ 4 & -3 & -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 11\end{bmatrix}$$

$$4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 11$$

Böylece $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ dds nin bir çözümüdür veya denk olarak u=(3, 1, 2, 1) çözüm vektörüdür.

Teorem: K sonsuz bir cisim kümesi olsun. O halde *AX*=*B* sisteminin: (i) tek çözümü, (ii) çözümsüz ve (iii) birden fazla çözümü vardır.

<u>*Haşiye*</u> : *AX*=*B* dds kareseldir ancak ve ancak katsayılar matrisi *A* kareseldir.

Teorem: *AX*=*B* DDS nin tek çözümlüdür ancak ve ancak *A* matrisi terslenir. O halde dds nin tek çözümü $A^{-1}B$ biçimindedir.

Örnek: Aşağıdaki DDS yi ele alalım ve katsayılar matrisi A ve tersi A^{-1} olsun.

x - 2z = 4

2x + 2y + 3z = 15, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

x + 3y + 2z = 12

Sistemin tek çözümü; $X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,77 \\ 2,15 \\ 0,38 \end{bmatrix}$$

Buradan $x = 4.77, y = 2.15, z = 0.38$.

13.3.4.11 DDS'de Vektörlerin Doğrusal Bileşimleri

Tanım: (13.b)'deki dds yi aşağıdaki biçimde vektör denklemi olarak yeniden yazılabilir.

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m$$

olacak biçimde $a_1, a_2, \cdots, a_m$ ler K'de sayıları varsa K^n de v vektörü K^n deki $u_1, u_2, \cdots, u_m$ vektörlerinin ***doğrusal bileşimi*** olarak yazılır.

Teorem: $AX=B$ DDs nin anlamlıdır (çözümlüdür) ancak ve ancak B matrisi, katsayılar matrisi A nın sütunlarının bir doğrusal bileşimidir.

Örnek: v=(1, -2, 5) vektörünü $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$ ve $u_3 = (2,-1,1)$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazınız.

Önce x, y, z değişkenler olmak üzere $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ yazalım ve çözeceğimiz DDS ye denk sistemi bulalaım.

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y\\2y\\3y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2z\\-z\\z\end{bmatrix}$$

Buradan karşılıklı bileşenler aşağıdaki biçimde DDS ye denktir.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \qquad (**) \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

Şimdi sistemi basamak biçimine indirgeyerek çözelim.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 2y - z &= 4 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Geri eliminasyonla $x = -6$, $y = 3$ ve $z = 2$ dir ve böylece $v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$.

Örnek:

(a) $v=(4, 9, 19)$ vektörünü $u_1 = (1,-2,3)$, $u_2 = (3,-7,10)$ ve $u_3 = (2,1,9)$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazalım.

$v= xu_1 + yu_2 + zu_3$ yazarak DDS ye denk sistemi bulalım ve basamak biçimine indirgeyelim.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ -2x - 7y + z &= 9 \\ 3x + 10y + 9z &= 19 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ -y + 5z &= 17 \\ y + 3z &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ -y + 5z &= 17 \\ 8z &= 24 \end{aligned}$$

Buradan geri indirgeme yöntemiyle çözüm elde edilir: $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$ olur ve böylece $v=4u_1 - 2u_2 + 3u_3$.

(b) $v=(2, -3, 5)$ vektörünü $u_1 = (1,2,-3)$, $u_2 = (2,3,-4)$ ve $u_3 = (1,3,-5)$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazalım.

$v= xu_1 + yu_2 + zu_3$ yazarak DDS ye denk sistemi bulalım ve basamak biçimine indirgeyelim.

$$
\begin{array}{lll}
x + 2y + z = 2 & x + 2y - 3z = 2 & x + 2y - 3z = 2 \\
2x + 3y + 3z = -3 & -y + z = -7 & -y + z = -7 \\
-3x - 4y - 5z = 5 & 2y - 2z = 11 & 0 \neq -4
\end{array}
$$

Sistemin çözümü olmadığından *v* vektörü u_1, u_2, u_3 vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazılamaz.

13.3.4.12 Homojen Denklem Sistemleri

Tanım: Sabitlerin tümü sıfır olan DDS ye ***homojen*** denir. Böylece homojen dds *AX*=0 biçimindedir. Böyle bir sistemin çözüm olarak daima sıfır vektörü 0=(0, 0, …,0) vardır ve buna ***sıfır*** veya ***aşikâr çözüm*** denir.

AX=0 dds nin en az bir sıfır çözümü olduğundan, basamak biçimine getirilebilir.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{13} + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a_{rn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Burada *r* basamak biçimindeki denklemlerin sayısını ve *n* bilinmeyenlerin sayısını tanımlar. Böylece sistemin *n-r* tane serbest-değişkenli çözümü vardır. Buradan iki durum vardır:

(i) *r*=*n* ise sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

(ii) *r*<*n* ise sistemin sıfır olmayan bir çözümü vardır.

Teorem(H): Denklem sayısı bilinmeyen sayısından daha fazla olan *AX*=0 homojen DDS nin sıfır olmayan çözümü vardır.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki homojen DDS nin sıfır olmayan çözümlerinin olup olmadığını belirleyelim.

$$
\begin{array}{lll}
x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\
2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 & 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\
x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 & 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 & & \\
\text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)}
\end{array}
$$

(i) Basamak biçimine indirgeyelim.

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\
x_2 + 4x_3 = 0 & x_2 + 4x_3 = 0 \\
2x_2 + 8x_3 = 0 & \\
x_2 + 4x_3 = 0 &
\end{array}
$$

Basamak biçimindeki sistem üç değişken iki denklem olduğundan sıfır olmayan çözümü vardır; özel bir çözüm bulunabilir. $x_3 = 1$ keyfi olarak seçebiliriz ve geri indirgeme ile yerine yazılırsa $x_2 = -4$ olur ve $x_1 = 9$ ve denk olarak u=(9, -4, 1) özel sıfır olmayan bir çözümdür.

(ii) Basamak biçime indirgenirse,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -7x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 61x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Basamak biçimindeki matrisin üç denklem ve üç bilinmeyen olduğundan sistemin yalnız sıfır çözümü vardır.

(iii) Sistemde dört bilinmeyen ve üç denklem olduğundan (Teorem-H) (basamak biçimine indirgemeye gerek yok) sistemin sıfır olmayan çözümü vardır.

Tanım: *W*, *AX*=0 bir homojen DDS nin genel çözüm kümesi olsun. Eğer her çözüm vektörü $w \in W$, $u_1, u_2, \cdots, u_s$ vektörlerinin bir doğrusal bileşimi olarak tek türlü ifade edilebilirse yani,

$$w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_s u_s$$

olacak biçimde yalnız $a_1, a_2, \cdots, a_s$ sayıları varsa, sistemin sıfır olmayan $u_1, u_2, \cdots, u_s$ çözüm vektörlerinin bir dizinine W için ***baz/taban*** denir. Bu tarz baz vektörlerin sayısı serbest değişkenlerin sayısına eşittir. Bu sayıya W nin ***boyutu*** denir ve *boy* $W = s$ şeklinde gösterilir. $W = \{0\}$ ise sistemin tek sıfır çözümü vardır ve *boy* $W = 0$.

Teorem: *W*, *AX*=0 bir homojen DDS nin genel çözüm kümesi olsun ve homojen dds basamak biçiminin *s* tane serbest değişkene sahip olsun. $u_1, u_2, \cdots, u_s$ vektörler, serbest değişkenlerden birini 1'e ve diğerlerini 0'a eşitleyerek elde edilen çözümler olsun. O halde *boy* $W = s$ ve $u_1, u_2, \cdots, u_s$ vektörler *W* için bazdır.

Örnek: Aşağıdaki *AX*=0 homojen DDS nin genel çözümü *W* için bir baz ve boyutunu bulalım.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 4x_4 - 16x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Önce basamak biçimine indirgeyelim ve aşağıdaki işlemleri gerçekleyelim.

$L_2 \rightarrow (-2)L_1 + L_2$ ve $L_3 \rightarrow (-5)L_1 + L_3$ ve daha sonra

$L_3 \rightarrow (-2)L_2 + L_3$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \text{ ve } \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$2x_3 - 6\,x_4 + 4x_5 = 0$$

Basamak biçimindeki sistemde x_2 , x_4 ve x_5 gibi üç tane serbest değişken var ve *boy* $W = 3$. W için baz olan çözüm vektörleri aşağıdaki gibi elde edilir.

(1) $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ alalım.

Geri-yerine koyma kuralı çözümü sağlar; u_1=(–2, 1, 0, 0, 0)

(2) $x_2 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ alalım.

Geri-yerine koyma kuralı çözümü sağlar; u_2=(7, 0, 3, 1, 0)

(3) $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$ alalım.

(4) Geri-yerine koyma kuralı çözümü sağlar; u_3=(–2,0,–2,0, 1)

W için u_1=(–2, 1, 0, 0, 0), u_2=(7, 0, 3, 1, 0) ve u_3=(–2, 0, –2, 0, 1) vektörleri bir bazdır.

<u>*Haşiye*</u>: Sistemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = a(-2,1,0,0,0) + b\,(7,0,3,1,0) + c\,(-2,0,-2,0,1)$$
$$=(-2a + 7b - 2c,\ a,\ 3b - 2c,\ b,\ c)$$

a, *b*, *c* keyfi değişkenler olmak üzere

$$x_1 = -2a + 7b - 2c, x_2 = a, x_3 = 3b - 2c, x_4 = b, x_5 = c.$$

Tanım: $AX = B$ homojen olmayan dds olsun. Buradan $AX = 0$ sistemine Birleştirilmiş homojen sistem denir. Örneğin,

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 8 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{array}$$

Teorem (**GÇ**): v_0, $AX = B$ nin özel çözümü ve W, $AX = 0$ nin genel çözümü olsun. Buradan $AX = B$ nin genel çözümü aşağıdaki gibi gösterilir

$$U = v_0 + W = \{w: \quad w \in W\}.$$

13.3.4.13 "Temel" Matrisler

Tanım: *e*, ***üç satır işlemlerini*** ("***temel" satır işlemleri***) ve *e*(*A*), *e* işleminin *A* matrisine uygulayarak elde edilen matrisi tanımlasın. *E*, *e* nin *I* birim matrisine uygulamasıyla elde edilen matris olsun yani,

$$E = e(I)$$

Bu E ye *e* üç satır işlemlerine karşılık gelen matrise "***temel matris"*** denir. E daima bir kare matristir.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki üç (temel) satır işlemlerini ele alalım.

(1) $R_2 \leftrightarrow R_3$, (2) $R_2 \to (-6)R_2$, (3) $R_3 \to (-4)R_1 + R_3$

Aşağıdaki 3x3 temel matrisler, yukarıdaki üç satır işlemlere karşılık gelir.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem: *A* mxn tipinde bir matris olmak üzere *e*, üç satır işlemi ve bu işleme karşılık gelen temel matris *E* olsun. O halde

$e(A) = EA$.

Bir A matrisine *e*, üç satır işlemlerinin uygulanmasının "ürünü", E temel matrisine karşılık gelen matris çarpımlarıyla elde edilir.

<u>*Haşiye*</u>: e', üç satır işlemi *e* nin tersi ve E ve E' bu işlemlere karşılık gelen temel matrisler olsun. Bu durumda E terslenir ve E' onun tersidir. Özel olarak,

$P = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$

$E_k, \ldots, E_2, E_1$ temel matrislerinin çarpımı terslenir.

Teorem (T_1): *A* bir kare matris olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler.

(a) *A* terslenir,

(b) *A*, *I* matrise satır denktir,

(c) *A*, temel matrislerin çarpımıdır.

Teorem(T_2): *AB*=*I* olsun ve *BA*=*I* ise $B = A^{-1}$ dir.

Teorem (T_3): B, *A* matrisine satırca denktir ancak ve ancak $B = PA$ olacak biçimde bir *P* terslenir matris vardır.

Tanım(<u>**A matrisinin Bulunması**</u>): *A* "ham" bir kare matris ve "ürün " A matrisinin tersi olsun ya da "ürün" terslenmesin.

1. Adım: *A*, M nin sol taraf matrisi ve *I*, M nin sağ taraf birim matrisi olmak üzere, $n\ x\ 2n$ tipinde blok $M = [A \quad I]$ matrisini oluşturalım,

2. Adım: M matrisini basamak biçimine indirgeyelim. Eğer *M* nin sağ tarafındaki matrisi *A* da sıfır satırlar ortaya çıkarsa işlem basamağı devam ettirilmez.

3. Adım: M nin satırları, aşağıdaki gibi satır (indirgenmiş) standart biçime indirgenir yani,

$M \sim [I \quad B]$

burada *I*, *M* nin sol tarafındaki *A* ile yer değişen birim matris.

4. Adım: $B = A^{-1}$ alalım, yani matris M nin sağ tarafındadır.

<u>*Haşiye*</u>: *A*, terslenir bir matris olsun. $e_1, e_2 \ldots, e_q$, $M = [A \quad I]$ blok matrisine uygulanan üç satır işlemlerinin dizisi olsun ve M yi indirger,

burada A, M nin sol tarafı ve I, M nin sağ tarafıdır. E_i , e_i işlemlerine karşılık gelen temel matrisler olsun. Böylece Teorem(GÇ) yi uygulayarak,

$$E_q \dots E_2E_1A = I \Rightarrow (E_q \dots E_2E_1I)A = I \Rightarrow A^{-1} = E_q \dots E_2E_1I.$$

<u>*Örnek*</u>:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini yukarıdaki işlemleri uygulayarak bulalım.

Önce $M = [A \quad I]$ biçiminde blok matrisini oluşturup sonra basamak biçimine indirgeyelim.

$$M = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to (-1)R_1 + R_3]{R_2 \to (-2)R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_3 + R_2]{R_1 \to (-3)R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to (-2)R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{40}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Birim matris son matrisin sol tarafında oluşmuştur ve buradan sağ taraf A^{-1} dır.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{40}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Tanım: *A*, bir matris ve $C_1, C_2, \cdots, C_n$ ler matrisin sütunları olsun. *A* üzerindeki işlemler, aynı satır işlemlerinde olduğu gibi yapılır ve bu işlemlere de ***temel sütun işlemler*** adını alır.

[S_1] (Sütunlar Değişir): $C_j \leftrightarrow C_i$

[S_2] (Sütunlar Çarpılıp Değişir): $kC_i \rightarrow C_i$, k≠0

[S_3] (Sütunlar Toplanıp Değişir): $kC_i + C_j \rightarrow C_j$.

f, temel sütun işlemleri ve *F*, bu işlemlerin *I* birim matrise uygulanması yoluyla elde edilen matris olsun. Bu *F* ye, *f* temel sütun işlemlerine karşılık gelen ***temel matris*** denir.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki üç (temel) sütun işlemlerini ele alalım.

(1) $C_1 \leftrightarrow C_3$, (2) $C_2 \rightarrow (-7)C_2$, (3) $C_3 \rightarrow (-3)C_1 + C_3$

Aşağıdaki 3x3 temel matrisler, yukarıdaki üç sütun işlemlere karşılık gelir.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem: Her hangi bir *A* matrisi için, *f* (*A*)=*AF*.

Tanım: *A* ve *B* iki matris ve eğer *B*, *A* nın satır ve sütun işlemlerinin dizisiyle elde edilirse *B*, *A* ya denktir denir.

Teorem: Her m x n tipinde *A* matrisi, aşağıdaki gibi tanımlı blok matrise tek biçimde denktir;

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

burada, I_r *r*-kare birim matristir.

Tanım: Bir önceki teoremdeki sıfır olmayan *r*, matrisin ***rank***ını tanımlar ve *rank*(*A*)=*r* ile gösterilir.

13.3.4.14 Uygulamalı Sorular

1.Bir fabrikatör P ve Q marka iki tür gübre üretiyor. P markalı gübrenin her miktarı, A kimyasalından 20 birim ve B kimyasalından 10 birim kapsıyor. Q markalı gübrenin miktarı, A kimyasalından 30 birim ve B kimyasalından 50 birim kapsıyor. A kimyasalından 1,200 birimlik ve B kimyasalından 900 birimlik sınırlı bir stok var, fakat diğer tüm içeriklerden bol miktarda olduğunu varsayalım. Kimyasalların sınırlı miktarıyla belirli bu kısıtlama içinde, her markadan ne kadar gübre üretilir?

<u>*Çözüm*</u>:

x_1 , üretilen P gübresinin miktarını ve x_2, üretilen Q gübresinin miktarını temsil edersek, yukarıda ortaya konulan durumu aşağıdaki doğrusal eşitsizlik sistemi biçiminde ifade edebiliriz:

$$20x_1 + 30x_2 \leq 1{,}200$$
$$10x_1 + 50x_2 \leq 900$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Bu eşitsizlik sistemiyle birleştirilmiş denklem sistemi anlamsızdır (çözümsüz).

Grafikler sınırlı doğrular adını alır ve

$$20x_1 + 30x_2 = 1{,}200$$
$$10x_1 + 50x_2 = 900$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$

Her doğrusal eşitsizliğin çözüm kümesini tüm noktaların kümesi olarak gösterilebilir ve tek yanlı sınırlı doğrular kümesine ***yarı-düzlem*** kümesi denir. Verilen eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi (“***makul” küme***), dört yarı-düzlemin arakesitidir.

Birleştirilmiş denklem sistemi anlamsızdır. Buradan bu iki marka gübrenin makul miktarı, makul kümedeki her hangi bir noktanın koordinatlarına göre temsil edilebilir. Örneğin, x_1=40 (P nin miktarı) ve x_2=10 (Q nun miktarı) ya da x_1=20 (P nin miktarı) ve x_2=14 (Q nun miktarı).

2.a) Bir biyolog deney tüpüne I, II ve III ile belirli üç farklı ırktan bakteri yerleştiriyor ve bu bakteriler A, B ve C gibi üç farklı yiyecekle besleniyorlar. Deney tüpüne her gün, A dan 2,300 birim, B den 800 birim ve C den 1,500 birim yiyecek yerleştiriliyor ve her bakteri günlük her yiyecekten birim olarak belirli bir miktar tüketiyor (Tablo 13.3.). Şimdi deney tüpünde her ırktan ne kadar bakteri, bir arada yaşayabilir ve yiyeceklerin tamamını tüketebilirler?

Tablo 13.3.

	I. Irk Bakteri	**II. Irk Bakteri**	**III. Irk Bakteri**
A Yiyecek	2	2	4
B Yiyecek	1	2	0
C Yiyecek	1	3	1

<u>*Çözüm*</u>:

x_1 , x_2, x_3 değişkenleri sırayla I, II ve III ırklarından bakterilerin sayısı olsun. I. Irktan bakterinin her x_1 günlük A dan 2 birim tükettiğinden, I. Irk bakteri günlük olarak $2x_1$ birim tüketir. Benzer olarak II. ve III. Irk bakteriler de günlük A yiyeceğinden $2x_2$ ve $4x_3$ tüketir. A nın tamamının tükenmesini istediğimizden,

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$$

denklemini elde ederiz ve benzer biçimde B ve C yiyeceklerinin tüketimine karşılık gelen denklemler aşağıdaki gibidir;

$$x_1 \quad + 2x_2 \qquad = 800$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 1500$$

Böylece üç değişkenli bir DDS elde ederiz. Buradan aşağıdaki artırılmış matrisin satırca indirgenmesine karşılık gelen sistemin çözümünü elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & \cdot & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & \cdot & 800 \\ 1 & 3 & 1 & \cdot & 1500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 100 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 350 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 350 \end{bmatrix}$$

Böylece, x_1=100, x_2=350 ve x_3=350 dir. Sonuç olarak, eğer biyolog yiyeceklerin tamamının tükenmesini istiyorsa, deney tüpünde I. Irk bakteriden 100, II ve III. Irk bakterinin her birinden 350'er tane olmalıdır.

b) Aşağıdaki Tablo 13.4'de verildiği gibi günlük yiyecek tüketimine ait verileri kullanarak (a) şıkkındaki soruyu (Deney tüpünde her ırktan ne kadar bakteri, bir arada yaşayabilir ve yiyeceklerin tamamını tüketebilirler?) yeniden düzenleyip çözelim. Deney tüpüne günlük olarak A dan 1500, B den 3000 ve C den 4500 birim miktar yiyecek yerleştirilsin.

Tablo 13.4

	I. Irk Bakteri	**II. Irk Bakteri**	**III. Irk Bakteri**
A Yiyecek	1	1	1
B Yiyecek	1	2	3
C Yiyecek	1	3	5

<u>*Çözüm*</u>:

x_1 , x_2, x_3 değişkenleri sırayla I, II ve III ırklarından bakterilerin sayısı olsun. DDS nin artırılmış matrisi ve basamak biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1500 \\ 1 & 2 & 3 & \cdot & 3000 \\ 1 & 3 & 5 & \cdot & 4500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdot & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemi yeniden düzenleyip sistemin birden fazla çözümü olduğu aşağıdaki gibi görülmektedir.

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 1500$

$x_3 = t$ olsun ve $x_1 = t$ de olur ve buradan $x_2 = 1500 - 2t$ elde edilir. Bu gibi soruların sonucunu yorumlarken dikkat edilecek hususlar vardır. Burada olduğu gibi bakterilerin sayısı negatif olamaz. Buradan $t \geq 0$ ve $1500 - 2t \geq 0$ dir. İkinci eşitsizlikten $t \leq 750$ ve böylece $0 \leq t \leq 750$ elde ederiz. Tüm bakterilerin muhtemel sayısı, eşitsizliği sağlayan *t* nin değeri 751 dir. Sonuç olarak $0 \leq t \leq 750$ olacak biçimde *t* nin her tamsayı değeri için, bu *t* nin (bir özel çözüm) 751 çözümü aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1500 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu sistemin matematiksel olarak sonsuz sayıda çözümü olmasına rağmen, fiziksel olarak yalnız sonlu sayıdadır.

3.Osman Bey tahvil senetleri alıyor: Osman Bey yatırımının %10 nu *A* bonosuna ve %15 ni *B* bonosuna yatırım yapıyor. Osman Bey'in ilk yıldaki faiz geliri 4.000 Tl dir. Eğer Osman Bey A bonosunun %10 na %20 daha ve B bonosunun %15 ne %10 daha ek yatırım yaparsa, Osman Bey'in ikinci yıl faiz geliri 500 TL artıyor. Osman Bey'in A ve B bonolarına yaptığı başlangıçtaki ve yeni yatırımını bulunuz.

Çözüm:

Başlangıçtaki yatırımın %10 luk *A* bonosunun temsili x_1 ve %15 lik *B* bonosunun temsili x_2 olsun. İkinci yıla ait yüzdelik yatırımlar %10+% 2 $(= \frac{10 \cdot 20}{100})$ = %12 ve %15+%1,5($= \frac{15 \cdot 10}{100}$)=%16,5 olmak üzere dds aşağıdaki biçimdedir.

$0.10x_1 + 0.15x_2 = 4{,}000 \quad \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 80{,}000$

$0.12x_1 + 0.165x_2 = 4{,}500 \quad \Rightarrow 8x_1 + 11x_2 = 300{,}000$

Yukarıdaki denklem matris biçimine getirilir. Matris veya DDS özeliklerini kullanarak çözüm elde edilir, şöyleki:

$$AX = B \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80{,}000 \\ 300{,}000 \end{bmatrix}, \quad AX = B \text{ ise}$$

$X = A^{-1}B$ yazılabilir.

A nın determinantı ($det(A)$=–2) sıfırdan farklı olduğundan, A^{-1} var ve çözümü aşağıdaki gibidir.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80{,}000 \\ 300{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix}.$$

Böylece başlangıçtaki yatırım x_1=10,000 YL ve x_2=20,000 TL ve yeni yatırımdaki miktar ise sırayla, 12,000 TL ve 22,000 TL dir.

4.Bir otomobil şirketi, üç marka araba üretimi için üç farklı çelik malzemesi kullanıyor ve üç çelik h_1, h_2, h_3 ile ve üç araba r_1, r_2, r_3 ile temsil edilsin. Arabalar için gerekli çelik ihtiyacı (ton başına) aşağıda Tablo 13.5'de verilmiştir.

Tablo 13.5

		Arabalar		
		r_1	r_2	r_3
Çelik	h_1	2	3	4
	h_2	1	1	2
	h_3	3	2	1

Arabalar için kullanılan üç tip çeliğin miktarları sırayla 29 ton, 13 ton ve 16 ton olduğuna göre, her tip arabadan ne kadar üretildiğini bulalım.

<u>Çözüm</u>:

Her tipten üretilen arabaların sayısını x_1, x_2, x_3 olsunlar. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

olur ve DDS aşağıdaki gibi artırılmış matris biçiminde yazılır ve matris satır indirgenmiş standart biçime indirgenir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & . & 29 \\ 1 & 1 & 2 & . & 13 \\ 3 & 2 & 1 & . & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & . & 13 \\ 2 & 3 & 4 & . & 29 \\ 3 & 2 & 1 & . & 16 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to (-3)R_1 + R_3]{R_2 \to (-2)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & . & 13 \\ 0 & 1 & 0 & . & 3 \\ 0 & -1 & -5 & . & -23 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & . & 13 \\ 0 & 1 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & -5 & . & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 13 \\ x_2 &= 3 \\ -5x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Böylece, x_3= 4, x_2= 3 ve x_1= 2. Arabalara göre r_1 =2 tane, r_2 =3 tane ve r_3 =4 tane üretilir.

5.(a) Bir bölgenin ekonomisi üç sanayiye dayalıdır: “hizmet”, “elektrik” ve “gaz üretimi”. Bir yıl boyunca bu üç sanayinin izlenme faaliyetleri, aşağıdaki gözlemlere göre yapılabilir.

(i) Hizmet bedelinin 1 birimini üretmek için, hizmet sektörü kendi üretiminden 0.3 birim, elektrikten 0.3 birim ve yakıttan 0.3 birim tüketmek zorundadır.

(ii) Elektrik bedelinin 1 birimini üretmek için, güç-üretim tesisi hizmet bedelinden 0.4 birim, kendi üretim bedelinden 0.1 birim ve yakıttan 0.5 birim tüketmelidir.

(iii) Son olarak yakıt bedelinin 1 birimini üretmek için, yakıt üretim tesisinin gereksinimleri hizmetten 0.3 birim, elektrikten 0.6 birim ve kendi üretiminden 0.2 birim olmalıdır.

Şimdi iç ve dış talepleri karşılamak için bu üç sanayinin üretim seviyelerini bulunuz. Bu tip ekonomiye **kapalı ekonomi** (ne dışarı mal bırakmama ne de ekonomik sisteme dahil olmama) denir.

Çözüm:

p_1 : hizmet sanayinin üretim düzeyi, p_2:güç-üretim tesisinin (elektrik) üretim düzeyi,

p_3: yakıt üretim fabrikasının üretim düzeyi olsun. Ekonomik model kapalı olduğundan, her sanayinin toplam tüketimi toplam üretimine eşittir. Bu aşağıdaki DDS yi verir;

$0.3p_1 + 0.3p_2 + 0.3p_3 = p_1$
$0.4p_1 + 0.1p_2 + 0.5p_3 = p_2$
$0.3p_1 + 0.6p_2 + 0.2p_3 = p_3$

Sistemin “girdi-çıktı” matrisi aşağıdaki gibidir

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ve yukarıdaki sistem $(A - I)P$=0 gibi yazılabilir. Her sütundaki katsayılar matrisinin toplamları 1 olduğundan bu homojen denklem sisteminin sonsuz olarak çözümü (aşikar olmayan çözüm) vardır. Bu homojen dds nin artırılmış matrisi

$$(A - I) = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & -0.9 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & -0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisin indirgenmiş biçimi;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.82 & 0 \\ 0 & 1 & -0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemi çözmek için, $p_3 = t$ (parametre) alalım. Buradan sistemin çözümü

$p_1 = 0.82t$
$p_2 = 0.92t$
$p_3 = t$

yukarıda bahsedildiği gibi model anlamlı olması için, sistemdeki değişkenlerin değeri negatif olmamalıdır. $t \geq$ 0 olmalıdır. Örneğin t=100 alalım ve özel bir çözüm;

p_1= 82 birim, p_2= 92 birim ve p_3= 100 birim.

(b) Kömür-madeni işletmeciliği, elektrik-üretim tesisi ve araba-üretim fabrikası olan açık bir ekonomi modelini ele alalım. Kömürden 1 birim üretmek için, madencilik faaliyetleri kendi üretiminden 0.1 birim, elektrikten

0.3 ve taşımacılık için araç bedelinden 0.1 birim harcamaları yapmalıdır. Elektriğin 1 birimini üretmek için, kömürden 0.25 birim, elektrikten 0.4 ve otomobilden 0.15 birim harcama yapılmalıdır. Son olarak otomobilin 1 birimlik üretim değeri için, otomobil fabrikası kömürden 0.2 birim, elektrikten 0.5 ve kendinden 0.1 birim miktar harcamalıdır. Bir hafta boyunca ekonominin, kömürden 50,000 TL, elektrikten 75,000 TL ve otomobilden 125,000 TL lik dış talebi karşıladığını varsayalım. Şimdi hem iç ve hem dış talepleri karşılamak için bir haftalık periyotta bu üç sanayinin her biri için üretim seviyelerini bulunuz.

Çözüm: Bu ekonomik modelin "girdi-çıktı" matrisi aşağıdaki gibidir

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}$$

ve talep vektörü de şöyledir;

$$d = \begin{bmatrix} 50,000 \\ 75,000 \\ 125,000 \end{bmatrix}.$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.25 & -0.2 \\ -0.3 & 0.6 & -0.5 \\ -0.1 & -0.15 & 0.9 \end{bmatrix}$$

olmak üzere aşağıdaki denklemi kullanarak çözüme gidilir.

$$P = (I - A)^{-1} d$$

Gauss-Jordan indirgeme tekniği kullanılarak

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.464 & 0.803 & 0.771 \\ 1.007 & 2.488 & 1.606 \\ 0.330 & 0.503 & 1.464 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve *P* aşağıdaki gibidir;

$$P = \begin{bmatrix} 1.464 & 0.803 & 0.771 \\ 1.007 & 2.488 & 1.606 \\ 0.330 & 0.503 & 1.464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50,000 \\ 75,000 \\ 125,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 229921.59 \\ 437795.27 \\ 237401.57 \end{bmatrix}$$

Böylece, kömür-maden işletmeciliğin toplam gelir düzeyi 229921.59 TL, elektrik-üretim tesisinin toplam gelir düzeyi 437795.27 TL ve otomobil üretim fabrikasının toplam gelir düzeyi de 237401.57 olmalıdır.

6.DDS yi Gauss-Jordan ile çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + \quad\quad 2x_5 \quad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \quad + \quad 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + \quad\quad 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Çözüm:
Artırılmış matrisi oluşturup Gİ metodunu uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to (-2)R_1 + R_4]{R_2 \to (-2)R_1 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \xrightarrow[R_4 \to 4R_2 + R_4]{R_3 \to 5R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{6}R_3]{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DDS ye karşılık gelen sistem:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + \quad\quad 2x_5 \quad\quad = 0$$

$$x_3 + \quad 2x_4 \quad + \quad 3x_6 = 1$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Son denklem $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0$ olduğundan silinir ve $x_2,\ x_4,\ x_5$ serbest değişkenlere sırayla r, s, t parametrelerini verirsek sistemin genel çözümü:

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r,$$
$$x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

7. DDS Sistemini çözelim.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$
$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Çözüm:

Artırılmış matris biçimine dönüştürüp Gauss indirgeme ve geri indirgemeyi uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Basamak matrise karşılık gelen sistem,

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2}$$
$$x_3 = 3$$

İlk bilinmeyenleri düzenleyelim,

$$x_1 = 9 - x_2 - 2x_3$$
$$x_2 = \frac{7}{2}x_3 - \frac{17}{2}$$

$x_3 = 3$

Bu değerler yukarıdaki denklemde yerine yazılır,

$x_1 = 9 - x_2 - 2x_3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 3$

ve $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ son olarak ilk denklemde yerine yazılır. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ elde edilir.

8.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 5 & 10 \\ 2 & 7 & a & b \end{bmatrix}$ Bir DDS nin artırılmış matrisi olsun.

(i) Sistemin tek çözümü olması için a ne olmalıdır?

(ii) Sistemin birden fazla çözümü olması için (a, b) ne olmalıdır?

Çözüm:

(i) Matrisi basamak biçimine indirgeyelim.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 5 & 10 \\ 0 & 3 & a-2 & b-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a & 5 & 10 \\ 0 & 0 & a^2-2a-15 & ab-6a-30 \end{bmatrix}$$

Basamak matrisi aşağıdaki sisteme tekabül eder.

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$ax_2 + 5x_3 = 10$

$(a^2 - 2a - 15)x_3 = ab - 6a - 30$

Sistemin tek çözümü olması için x_3 ün katsayısı sıfır olmamalıdır, yani

$a^2 - 2a - 15 \Rightarrow (a-5)(a+3) \neq 0 \Rightarrow a \neq 5$ ve $a \neq -3$

(ii) Sistemin birden fazla çözümü olması için basamak biçimindeki sistemdeki son denklemin her iki yanı sıfır olmalıdır. Sol taraf $(a-5)(a+3) = 0$ ise $a=5$ veya $a=-3$ durumunu bakalım. $a=5$ ise sağ taraf, $5b - 60 = 0$ ise $b = 12$ veya $a = -3$ ise $-3b - 12 = 0$ ise $b=4$ dir. Böylece (5, 12) veya (–3, 4) çiftleri sistemin birden fazla çözümünü verir.

9. Aşağıdaki DDS nin çözülebilirliğini inceleyelim.

$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1$

$$x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 0$$
$$-2x_1 \qquad + \qquad x_3 = -1$$
$$x_1 + x_2 - \quad 2x_3 = 0$$

Çözüm:

Sistemi önce basamak biçimine getirelim.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 0 \\ -2 & 0 & 1 & . & -1 \\ 1 & 1 & -2 & . & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 0 \\ -3 & 1 & 4 & . & 1 \\ -2 & 0 & 1 & . & -1 \\ 1 & 1 & -2 & . & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 0 \\ 0 & 4 & 7 & . & 1 \\ 0 & 2 & 3 & . & -1 \\ 0 & 0 & -3 & . & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 0 \\ 0 & 4 & 7 & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 3 \\ 0 & 0 & -3 & . & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 0 \\ 0 & 4 & 7 & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 3 \\ 0 & 0 & 0 & . & 9 \end{bmatrix}$$

Buradan basamak matrisi aşağıdaki sistemi verir ve son denklemden dolayı çözümsüzdür.

$$x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 0$$
$$4x_2 + 7x_3 = 1$$
$$x_3 = 3$$
$$0.\,x_3 = 9$$

10. Homojen denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad = 0$$

Çözüm:

Katsayılar matrisini oluşturalım ve sonra basamak biçimine indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basamak matrisi aşağıdaki sisteme karşılık gelir.

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \quad = 0$$
$$-x_3 + 4x_4 = 0$$
$$x_4 = 0$$

Böylece, $x_2 = t$ keyfi değişken ve $x_1 = -t$ bağımlı değişken olmak üzere sistemin çözümü $u=(-t,\ t, 0, 0)$.

11. Aşağıdaki matrisin tersini blok matris biçimine dönüştürerek çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Çözüm: M matrisini önce basamak biçimine sonra da satır standart biçimine indirgeyelim.

$$M = [A \quad I] \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & \cdot & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & \cdot & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdot & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \frac{9}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdot & -12 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \frac{9}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \sim [I \quad B]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 7 & -2 \\ \frac{9}{2} & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Aşağıdaki denklem sistemini, $AX = B$ iken katsayılar matrisinin tersi (A^{-1}) varsa $X = A^{-1}B$ biçiminde çözünüz.

$$2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

<u>Çözüm</u>:

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -\frac{4}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Böylece, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

13.4 Determinantlar

Doğrusal cebirin önemli konuları arasında yer almakta ve birçok uygulamalı problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Matris kavramından bağımsız olarak ve matrise dayalı tanımlamaları mevcuttur. Kendi başına *determinant* fonksiyonu olarak da tanımlıdır. Determinant kavramını vermeden önce permütasyon kavramından bahsedelim.

Tanım: $\{1, 2, \cdots, n\}$ sayılar kümesine kendi üzerinde bire bir ve örten dönüşüme ***permütasyon*** denir ve genelde σ, τ, μ harfleriyle gösterilir ($\{\sigma: \{1, 2, \cdots, n\} \xrightarrow{bire\ bir} \{1, 2, \cdots, n\}\}$). Şekli gösterimi ise, $\sigma(i) = j_i$ olmak üzere

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \text{veya } \sigma=j_1 j_2 \ldots j_n$$

biçiminde tanımlanır. Bu biçimdeki tüm permütasyonların kümesini S_n ile ve mertebesini (sayısını) $n!$ ile gösterilir. $\sigma \in S_n \Rightarrow \sigma^{-1} \in S_n$ ters dönüşümü tanımlıdır. $\sigma, \tau \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \tau \in S_n$ bileşke dönüşümü de tanımlıdır. $e = \sigma \circ \sigma^{-1}$ birim dönüşümü de tanımlı yani,

$(S_n, \circ)$ gruptur.

Tanım: $\sigma=j_1 j_2 \ldots j_n$ olacak biçimde $\sigma \in S_n$ olsun. $i > k$ olacak fakat σ da i, k dan önce gelecek biçimdeki (i, k) tamsayı çiftlerine σ nın "***ters dönmeleri***" denir. Buradan σ nın ters dönmelerinin sayısı, σ nın tek ya da çift olduğunu belirtir. Buna σ permütasyonun işareti denir ve aşağıdaki gibi gösterilir,

$$iş(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ çift} \\ -1, & \sigma \text{ tek} \end{cases}$$

$A = [a_{ij}]$, *K* cisminde n-kare matris olsun. *A* nın *n* elemanlarının çarpımı, her satırının bir ve yalnız bir satırından ve her sütununun bir ve yalnız bir sütunundan gelen elemanların çarpımıdır. Bu çarpım $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ biçiminde yazılabilir. Çarpımlar ardışık satırlardan oluşur ve buradan ilk "temsilci" çarpım $1, 2, \cdots, n$ doğal sıradadır. Şimdi çarpımlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci temsilci çarpımın dizisi $\sigma = j_1 j_2 \ \ldots j_n$ biçimindedir. S_n deki her permütasyon yukarıdaki çarpımlardan biriyle belirlenirse, A matrisi *n*! tane çarpım kapsar.

13.4.1 Mertebeler Bakımından Determinantlar

Tanım: Temsilci çarpımlar permütasyonun işaretiyle çapılmak üzere, yukarıdaki *n*! tane çarpımların toplamına $A = [a_{ij}]$ nın ***determinantı*** denir ve *det*(*A*) ya da $|A|$ ile gösterilir.

$|A| = \sum_{\sigma} (iş\sigma)\, a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ veya
$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (iş\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

Bu n-kare matrisin determinantı, n mertebedendir denir.
Örnek:

(i) $A = [a_{11}]$ 1 x 1 matris olsun. S_1 yalnız bir permütasyon ve çift olduğundan det(*A*)= a_{11} .

(ii) $A = [a_{11}]$ 2 x 2 matris olsun. S_2 de 12 çift permütasyon ve 21 tek permütasyondur. Böylelece

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(iii) $A = [a_{11}]$ 3 x 3 matris olsun. S_3 de 123, 231, 312 çift permütasyon ve 321, 213, 132 tek permütasyon. Buradan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{32}a_{13}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Tanım: $A = [a_{ij}]$ n-kare matris olsun ve özel sayılarla belirli bu matrisin determinantı det(A) veya $|A|$ ile tanımlı ve aşağıdaki gibi gösterilir,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu gösterime ***n. merteben determinant*** denir.

Tanım: Bir önceki örnekteki (ii) ve (iii) şıklarındaki 2. ve 3. Mertebeden determinantlar aşağıdaki biçimde hesaplanır:

2. mertebeden determinant:

İki satırlı determinant aşağıdaki gösterimle hesaplanır:

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Örnek:

det(-13)=-13, *det*($\pi - 7$)= $\pi - 7$, tek satırlı determinant, tek sayı olduğundan kendisidir.

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}$=$1(-3) - 4(-5)$=17, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} = 1(9) - 2(9)$ =–18.

3. Mertebeden Determinant:

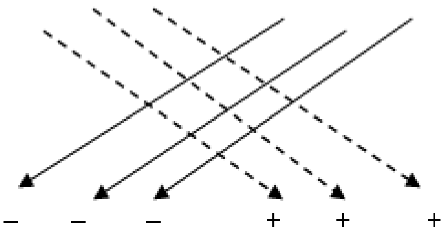
$A = [a_{ij}]$, 3 x 3 matris olsun. A nın determinantının hesaplanması şöyledir;

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{32}a_{13}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Altı çarpımdan oluşur; üçü artı ve üçü eksili olarak gruplanır ve toplanır.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$



<u>*Örnek*</u>:

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ ve $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ olsun.

$\det(B)$ = 1(–2)(9) +(–2)(–2)(2) + (–1)(1)(–1) – (–1) (–1)(2) – 1(–2)(–1) – (–2) (1)(9)
= –18+8+1–2–2 +9=4

E nin determinantını ilk satırını "*açılım*" yöntemiyle hesaplayalım;

$$\det(E) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3-2(-2)+3((1)=4$$

13.4.2 Determinant Özelikleri

Teorem_1: Bir A matrisi ve ▯ QUOTE ▯ ▯▯▯ devriğinin determinantı eşittir, ▯ QUOTE ▯ ▯▯▯=▯ QUOTE ▯ ▯▯▯ .

Teorem_2: A bir kare matris olsun.

(i) Eğer A matrisinin satır ya da sütunlarından biri sıfır ise, $|A|$= 0,

(ii) Eğer A matrisinin iki satır ya da sütunu aynı ise, $|A|$= 0,

(iii) Eğer A matrisi üçgensel yani, köşegenin üstü ya da altı sıfırsa $|A|$= *köşegen elemanların çarpımıdır.* Özel olarak *I* birim matris olmak üzere $|I|$= 1.

Teorem_3: *B* matrisi, *A* matrisine üç satır (sütun) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilen matris olsun.

(i) A nın iki satırı (sütunu) yer değişirse, $|B| = -|A|$,

(ii) A nın bir satırı (sütunu) bir k skalarıyla çarpılırsa, $|B| = k|A|$,

(iii) A nın bir satırının (sütununun) bir katı başka bir satırıyla (sütunuyla) toplanırsa, $|B| = |A|$

Teorem_4: *A* ve *B* matrisinin çarpımlarının determinantı, determinantlarının çarpımına eşittir, det(*AB*)=det(*A*)det(*B*).

Teorem_5: *A* bir kare matris olsun, buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A terslenir bir matris ise, A nın tersi A^{-1} dır.

(ii) $AX = 0$ yalnız sıfır çözümü (aşikâr) vardır.

(iii) A nın determinantı sıfır değildir; $|A| \neq 0$.

Yardımcı Teorem: *E* temel matris olsun. Bu durumda bir *A* matrisi için, $|EA| = |E||A|$.

Tanım ve Teorem: $B = P^{-1}AP$ olacak biçimde bir *P* terslenir matris (singüler olmayan) varsa, A ile B matrislerine benzer denir. A ile B matrislerine benzer olsun, $|B| = |A|$.

13.4.3 Minör, İşaretli Minör (Kofaktör), Ek Matris(Adjoint)

Tanım: $A = [a_{ij}]$ *n*-kare matris ve M_{ij} matrisi, *i-inci* satır ve *j-inci* sütunun silinmesiyle elde edilen A nın (*n-1*)-kare alt matrisi olsun. $|M_{ij}|$ determinantına A nın a_{ij} bileşeninin ***minörü*** ve C_{ij} ye a_{ij} nin işaretli minörü (kofaktör) denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir;

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| .$$

C_{ij} işaretli minörün $(-1)^{i+j}$ işaretleri satranç tahtası modeli kullanarak elde edilir ve esas köşegen üzeri +1 den oluşur.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

C_{ij} bir skalar iken M_{ij} bir matristir.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki A matrisinin $|M_{23}|$ ve C_{23} ; $|M_{31}|$ ve C_{31} minör ve işaretli minörlerini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$|M_{23}| = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$=–5+6=1 ve

$C_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}|$=–1

$|M_{31}| = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$= –5 –0= –6 ve

$C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = -(-6)$=6

Teorem(*Laplace*): $A = [a_{ij}]$ bir kare matrisinin determinantı, matrisin işaretli minörlerine göre bir satırının (sütun) bileşeninin çarpımıyla elde edilen çarpımlarının toplamına eşittir;

$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$

$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$

$|A|$ için, teoremdeki bu ifadeye A matrisinin *i-inci* satır ve *j-inci* sütunun determinantının Laplace "***açılımı***" denir.

Tanım: $A = [a_{ij}]$, K cisminde n x n kare matris ve C_{ij} , a_{ij} nin işaretli minörü olsun. A matrisinin işaretli minörlerinin matrisinin devriğine (transpozesine) A nın ***ek matrisi*** (***adjoint***) denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir;

ek(A)=$[C_{ij}]^T$.

<u>*Örnek*</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ise, işaretli minörlerini bulalım:

$C_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=1, $C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=1, $C_{13} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$=0

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=–2, $C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=1, $C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$=3

$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$= –1, $C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$=–1, $C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$=3

Buradan işaretli minörlerin yukarıdaki matrisin devriği A nın ek matrisini:

$$\text{ek}(A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}.$$

Teorem: A bir kare matris olsun. I birim matris olmak üzere,
$A.(\text{ek}A)=A.(\text{ek}A)=I$.
Böylece $|A|\neq 0$ ise,
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(ekA).$$

Örnek: A, bir önceki örnekteki matris olsun ve buradan A nın determinantı için birinci satıra göre açılım teoremini uygularsak:

det(A)= $a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$=2(1)+1(1)+1(0)=3

Böylece,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(ekA)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Yöntem(*Bir Determinantın Mertebesinin İndirgenme Kuralıyla Hesaplanması***):** $n>1$ olmak üzere esas matris $A=[a_{ij}]$, sıfır olmayan n-kare matris olsun.

(i) a_{ij}=1 bir bileşen seçelim veya eğer silinirse $a_{ij}\neq 0$ alalım,

(ii) a_{ij} yi esas bileşen olarak kullanarak, a_{ij} dâhil sütunundaki (satırındaki) diğer tüm konumdaki bileşenleri sıfır yapmak için temel satır (sütun) işlemleri uygulayalım,

(iii) a_{ij} dâhil sütuna (satıra) göre determinant açılımını yapalım.

Haşiye: (i) Yukarıdaki yöntem, 4 ya da daha fazla mertebeden determinantlar için kullanılır. 4 den küçük mertebeden determinantların hesaplanması daha önceki yöntemlerle yapılır.

(ii) Gauss indirgeme ya da yukarıdaki yöntemin satır değişiminin tekrar tekrar kullanımı, bir A matrisinin üst üçgensel matrise dönüştürülmesinde kullanılabilir ve bu matrisin determinantı, köşegen elemanlarının çarpımıdır. Bu sebeple, her satır değişimi determinantın işaretini de değiştireceğinden satır değişiminin sayısı izlenmeli.

Örnek: $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -4 & 5\\ 3 & 0 & -3 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 7\\ 5 & -1 & -3 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin determinantını yukarıdaki yöntemle bulalım.

a_{44} =1 yi esas bileşen olarak seçip, sütunundakileri sıfır yapmak için aşağıdaki "üç satır" işlemlerini uygulayalım.

$R_3 \to (-7)R_4 + R_3,\quad R_2 \to (-6)R_4 + R_2\,,\quad R_1 \to (-5)R_4 + R_1$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25 & 7 & 11 & 0 \\ -27 & 6 & 15 & 0 \\ -33 & 11 & 26 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dördüncü sütuna göre determinantın açılımını yapalım. 0 içeren tüm terimler ihmal edilir ve M_{44} ün işareti +1 dir. Böylece

$$|B| = \begin{vmatrix} -25 & 7 & 11 & 0 \\ -27 & 6 & 15 & 0 \\ -33 & 11 & 26 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25 & 7 & 11 \\ -27 & 6 & 15 \\ -33 & 11 & 26 \end{vmatrix}$$

=–25(6)(26)+7(15)((33)+11((27)(11)(11(6)((33)(7((27)(26)(((25)(15)(11)
=(3900 (3465 (3267 + 2178 + 4914 + 4125= 585

13.4.4 DDS ve Kramer Kuralı

$AX = B$, *n* bilinmeyenli ve *n* tane dds; $A = [a_{ij}]$, katsayıların bir kare matris ve $B = [b_i]$, sabitlerin sütun vektörü olsun. A_i, *B* sütun vektörüne göre *A* nın *i-inci* sütunun yer değişikliğiyle *A* matrisinden elde edilen matris olsun. Buradan,

$D = \det(A),\qquad N_1 = \det(A_1),$
$N_2 = \det(A_2),\ \ldots,\ N_n = \det(A_n)$

$AX = B$ dds ile determinant arasında aşağıdaki ilişki teoremle verelim.

Teorem: $AX = B$ kare dds nin bir çözümü vardır ancak ve ancak $D \neq 0$ olmasıdır. Buradan tek çözümlü dds aşağıdaki biçimdedir,

$$x_1 = \frac{N_1}{D},\quad x_2 = \frac{N_2}{D},\quad \ldots,\quad x_n = \frac{N_n}{D}$$

Bu teorem DDS nin çözümü için ***Kramer Kuralı*** denir. D=0 ise dds çözümsüzdür.

Teorem: $AX = 0$ homojen kare dds nin sıfır olmayan bir çözümü vardır ancak ve ancak $D = |A| = 0$ dır.

<u>*Örnek*</u>: Aşağıdaki dds yi Kramer yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ -y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Önce katsayılar matrisi *D* yi bulalım,

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 3 = 13$$

$D \neq 0$ olduğundan dds nin tek çözümü var ve sabit terimlere göre katsayılar matrisinde x, y, z nin katsayıları sırayla N_x, N_y, N_z, leri hesaplayalım,

$$N_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Böylece sistemin tek çözümü, $x = \frac{N_x}{D} = 0$, $y = \frac{N_y}{D} = 1$, $z = \frac{N_z}{D} = 0$, yani çözüm vektörü: $u = (0, 1, 0)$.

13.4.5 Uygulama Soruları

1. Bir şirket her gün üç farklı ürün imal ediyor. Bazı günlere göre toplam üretim 45 tondur. Üçüncü ürünün üretimi, ilk ürünün üretiminde 8 ton fazla ve birinci ile üçüncü ürünün toplamı, ikinci ürünün üretiminin iki katıdır. Kramer yöntemini kullanarak her ürünün üretim düzeyini bulunuz.

<u>*Çözüm*</u>:

Üç farklı ürünün üretim düzeylerini x, y, z ile temsil edelim. Buradan aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$x + y + z = 45$$

$$-x + 0y + z = 8 \,, \qquad (z = x + 8)$$

$x - 2y + z = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $(x + z = 2y)$

Buradan önce katsayılar matrisinin determinantını ve daha sonra x, y, z lere karşılık gelen katsayılar matrisinin determinantını bulalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan sistemin tek çözümü mevcuttur.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 45 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 45 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 90,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 45 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 114$$

Buradan,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 11, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 15, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 19$$

Böylece ürünlerin üretim düzeyleri

birinci ürün: 11 ton, *ikinci ürün*: 15 ton ve *üçüncü ürün*: 19 ton olarak gerçekleşiyor.

2. (i) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını açılım yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Birinci satıra göre determinantı açalım;

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 30 + 120 + 270 + 480 = 900$

(ii) $E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisin determinantını bulunuz.

Çözüm: Üçgensel matris olduğundan E matrisinin determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır,

det(E)=6.

(iii) $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 2t+6 \\ 2 & 2 & 6-t & t \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını polinom biçiminde indirgeme yaparak belirleyip, matrisin tersinin olması için t ne olmalıdır?

Çözüm: a_{11}=1 olduğundan birinci sütunun diğer bileşenlerini sıfır yapmak için aşağıda belirli temel işlemleri uygulayalım:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 2t+6 \\ 2 & 2 & 6-t & t \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2t+4 \\ 0 & 0 & 2-t & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2t+4 \\ 0 & 2-t & t-2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2t-2 \\ 0 & 2-t & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2t-2 \\ 2-t & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(2t-1)$$

Buradan $|M|=0 \Leftrightarrow t=2$ ve $t=\frac{1}{2}$. Böylece M matrisi terslenir olması için $\Leftrightarrow t\neq 2$ ve $t\neq \frac{1}{2}$ olmalıdır.

(iv) $N=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{bmatrix}=(1-x^3)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
Sütun temel işlemler uygulanırsa;

$$\det(N)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4\to S_4-S_1]{\substack{S_2\to S_2-S_1\\ S_3\to S_3-S_1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 0 & 0 \\ x & x & 1-x & 0 \\ x & x & x & 1-x \end{vmatrix}=(1-x)^3$$

3. $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı, ek matrisini ve tersini bulunuz.

Çözüm:

$$|B|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}=12+4+12+36=64$$

$$\text{ek}(B)=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

=)=$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T$ = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

B^{-1}=$\frac{1}{|B|}$ek(B)= $\frac{1}{64}$ $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

4.Kramer kuralını kullanarak aşağıdaki DDS yi çözünüz.

−2x + 3y − z = 1
x + 2y − z = 4
−2x − y + z = −3

Çözüm:

Önce katsayılar matrisinin determinantını bulalım;

$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ =3–5= –2

D ≠0 olduğundan sistemin tek çözümü vardır. Şimdi x, y, z lere karşılık gelen katsayılar matrisinin determinantlarını bulalım;

$$N_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$N_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$N_Z = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8$$

Böylece,

$x = \frac{N_x}{D}$=2, $y = \frac{N_y}{D}$= 3, $z = \frac{N_Z}{D}$= 4.

13.2.5 Bölüm Soruları

1.u=(-7, 5, 3), v=(5, 7, 1), w=(4, 0, 1) olsun. (i) 4u-2v (ii) u+3v-7w hesaplayınız.

2.(i) $(3x,\ 7,\ z)$ ve $(6, x+y, z-y)$, (ii) (-7, 2-y, 0) ve (x+y, 0, z+x) ise *x*, *y*, *z* yi bulunuz.

3.(i) v=(1, -2, 5) vektörünü, u_1=(1, 1, 1), u_2=(1, 2, 3) ve u_3=(2, -1, 1) vektörlerinin doğrusal bileşimi biçiminde yazınız.

(ii) v=(2, -5, 3) vektörünü, u_1=(1, -3, 2), u_2=(2, -4, -1) ve u_3=(1, -5, 7) vektörlerinin doğrusal bileşimi biçiminde yazınız.

4.(i) u=(5, 4, 1), v=(3, -4, 1) ve w=(1, -2, 3) olsun. Bu durumda hangilerinin dik vektörler olduğunu bulunuz.

(ii) u=(1, k, -3) ve v=(2, -5, 4) olsun, buna göre u ile v vektörleri dik ise k nedir?

(iii) u=(2, 3k, -4, 1, 5), ve v=(6, 3, 1, 7, 2k) olsun, bu durumda u ile v vektörleri dik ise k=?

5.u=(5, -7), v=(1, 2, -2, 4), w=$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ olsun. O halde u, v ve w vektörlerinin normallerini bulunuz.

13.3.4.15 Bölüm Soruları

1.x, y ve z değişkenler olmak üzere aşağıdaki denklemlerden hangileri doğrusal denklemlerdir. Eğer dd değilse sebebini izah ediniz.

(i) $x - \pi y + \sqrt[7]{5}z$=0, (ii) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

(iii) $x^{-1} + 7y + z = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$, (iv) $2x - xy - 5z = 0$

(v) $9csecx - 7y + z$=$\sqrt{3}$, (vi) $(sin17)x - 13y + 29z = \sqrt{35}$

2.Aşağıda verilen sistemleri "geri yerine koyma" yöntemiyle çözünüz.

(i) $x - 2y = 1$, $y = 3$ (ii) $2u - 3v = 5$, $4v = 12$ (iii) $x - 3y + z = 5$, $y - 2z = -1$

(vi) $x + y - z - w = 1$, $y + z + w = 0$, $z - w = 0$, $w = 1$

(iv) $x - y + z = 0$, $2y - z = 1$, $3z = -1$

(v) $x + 2y + 3z = 0$, $-5y + 2z = 0$, $4z = 0$)

3.Aşağıdaki DDS nin önce artırılmış matrisini yazınız ve sonra DDS nin çözümünü bulunuz.

(i) $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ x \quad + z &= 0 \\ -x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$ (iv) $\begin{aligned} x - 2y \qquad + w &= 2 \\ -x + y \quad - z - 3w &= 1 \end{aligned}$

4.Aşağıdaki matrislerin hangilerinin basamak biçiminde olduğunu belirtitiniz ve eğer satır (indirgenmiş) standart basamak biçime indirgenebilirse işlemleri devam ettiriniz.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (vi) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(vii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,(viii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Üç satır (temel) işlemlerini kullanarak aşağıdaki matrisleri önce basamak sonra satır standart basamak biçimine indirgeyiniz.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

(iv)$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$,(v) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,(vi)$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

6. Artırılmış matris biçiminde verilen aşağıdaki matristen yararlanarak, önce DDS yi $AX = B$ biçiminde yazıp sonra katsayılar matrisinin varsa tersini bularak $X = A^{-1}B$ yi gerçekleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

7.Aşağıdaki DDS yi Gauss ya da Gauss-Jordan İndirgeme ile çözünüz.

(i) $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 9 \\ 2x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x - 2y + 3z &= 4 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 5 \\ 3x + y + 7z &= 2 \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$ (iv) $\begin{aligned} 3x - y + 4z + 2w &= 0 \\ -x \quad\quad + z + 3w &= 1 \\ -4x + y - z + 3w &= 2 \end{aligned}$

(v) $\begin{aligned} -x + 3y - 2z + 4w &= 0 \\ x - 6y + z - 2w &= -3 \\ x - 3y + 4z - 8w &= 2 \end{aligned}$ (vi) $\begin{aligned} \sqrt{5}x + y + 2z &= 1 \\ \sqrt{5}y - 2z &= -\sqrt{5} \\ -y + \sqrt{5}z &= 1 \end{aligned}$

8. Aşağıda artırılmış matrisle verilen dds nin tek çözümlü, birden fazla çözümlü veya çözümsüz olduğunu matrisleri çözmeden araştırınız.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

9. Aşağıdaki DDS nin çözümsüz, tek çözümlü ya da sonsuz sayıda çözümü olması için k ne olmalıdır?

(i) $kx + 2y = 3$ (ii) $x + ky = 1$

$$2x - 4y = -6 \qquad kx + y = 1$$

(iii) $x - 2y + 3z = 2$ (iv) $x + y + kz = 1$

$x + y + z = k$ $x + ky + z = 1$

$2x - y + 4z = k^2$ $kx + y + z = -2$

10. (i) Bir fabrika B ve E gibi iki metal alaşımı üretiyor. Bu alaşımlı maddeler ton olarak satılır fakat satın alırken 100-librelik karışımında bazı içerikler olması gerekir. Üretilen B alaşımının her tonunda, U metalinden 4 birim ve V metalinden 4 birim kullanılmaktadır. E nin her tonunda, U dan 7 ve V den 3 birim kullanılmaktadır. Şimdi fabrika günlük U metalinden 60 birim ve V metalinden 40 birim elde edebilir ve tamamını da kullanabilirse, her alaşımdan kaç ton üretebilir?

(ii) Bir nakliye şirketinin I, II ve III ile numaralandırılmış üç tırı var. Bu tırlar, yük başına üç tip makine taşıyacak biçimde teçhiz edilmiş ve aşağıdaki Tablo 13.6'da verilmiştir.

Tablo 13.6

TIRLAR			
	I. TIR	II. TIR	III. TIR
A Makine	1	1	1
B Makine	0	1	2
C Makine	2	1	1

Tırların tam kapasite dolu olduğunu varsayalım. Bu durumda, A makineden 12, B makineden 10 ve C makineden 16 tane yüklenen tırlardan kaç tane gönderilebilir?

(iii) Sağlık Bakanlığı salgın olan bir hastalığı (Pandemik A Virüs) kontrol altına almak için, ilaç şirketlerine üç tip sprey hazırlatıyor. Bu spreyler için A kimyasalından 6 birim, B kimyasalından 10 birim ve C kimyasalından 8 birim kullanılmalıdır. Bir varil P spreyi, sırayla her kimyasaldan 1, 2 ve 3 birimden oluşuyor. Bir varil Q spreyi, sırayla her kimyasaldan 3, 3, 3 birimden ve bir varil R spreyi, A dan 2, B den 3 birimden oluşuyor. Şimdi bu hastalığı kontrol etmede gerekli olan spreylerden kaç tane kullanılmalıdır?

13.3.2.10 Bölüm Soruları

1. Bir ülkede 2007 yılında yapılan genel seçimlerde 7 bölgesi olan bir ilde 5 partinin aldığı oylarla ilgili bilgiler aşağıdaki Tablo 13.7'de verilmiştir.

Tablo 13.7 *Partilerin aldıkları oylar*

Parti	Bölge						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
K	7 070	12 310	1 012	5 350	1 356	21 000	750
L	11 011	25 018	2 300	125	1 025	1 460	650
M	13 130	5 125	5 110	459	2 036	1 890	1 520
N	5 950	21 215	7 717	55 000	61 098	32 546	25 087
P	3 785	4 015	8 888	1 115	1 065	12 036	4 555

Satır toplamı, sütun toplamı ve peş peşe olan seçimlerle ilgili farkı temsil eden matrislerle ilgili yorumlarınızı yapınız.

2. Hadi ve Sadi yarına meyve alış verişi yapmak için plan yaparlar. Her biri farklı miktarlarda olmak üzere biraz kiraz, kayısı ve şeftali almak isterler. Hadi ve Sadi'nin alacakları meyvelerin miktarını ve iki farklı manavdaki meyvelerin fiyatları gösteren tablolar aşağıdaki biçimdedir. Buna göre, Hadi ve Sadi'nin iki manavdan yapacakları alış veriş sonucuna göre manavlara kaçar TL ödeyeceklerdir?

Tablo 13.8 *Manavlardan Alınan Meyve Miktarları* (kg)

	Kiraz	**Kayısı**	**Şeftali**
Hadi	4	5	7
Sadi	6	10	3

Tablo 13.9 *Meyvelerin Manavlardaki Fiyatları* (TL)

	I. **Manav**	**II. Manav**
Kiraz	2	3
Kayısı	2,5	4
Şeftali	1,5	3

3. Bir kişiye ait farklı üç okulda birer kantin var ve bunlar K_1 , K_2 ve K_3 olsun. Her bir kantindeki günlük ortalama satış ve kâr aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 13.10 *Satılan Ürünlerin Birim Miktarı*

	K_1	K_2	K_3
Tost	150	175	165
Dürüm	210	225	300
İçecekler	750	875	925

Tablo 13.11 *Satılan Ürünlerin Birim Kârı*

	K_1	K_2	K_3
Tost	11	13	15
Dürüm	8	12	10
İçecekler	15	20	25

Matris çarpım ve özeliklerini kullanarak her bir ürüne ve kantine ait kârı hesaplayınız.

4. Bir yerel seçimde üç partinin K, P, S adaylarının üç bölgedeki aldıkları oy yüzdesi ve o bölgelerin seçmen sayısı aşağıdaki biçimdedir;

	K Adayı	**P Adayı**	**S Adayı**	**Seçmen Sayısı**
I. Bölge	%25	%15	%60	35 000
II. Bölge	%35	%10	%55	75 000
III. Bölge	%20	%12	%68	145 000

O halde matris işlem özeliklerini kullanarak her adayın aldığı toplam oy sayısını hesaplayınız.

5. Birçok iş âleminde envanterleri güncel tutmak hayati önem arz eder. Eğer bu güncel kayıtları muhafaza edecek bilgileri bilgisayarlarla denetlenebilirse bilgisayarlar bu işlem sürecine yardımcı olacaktır. Bir bölgedeki otomobil satış müdürü, elindeki renk ve modeldeki araçların güncel envanterini kayıt altında tutmak ister. Ayrıca müdür, temsilci bayilerinin de elindeki araçlarının kaydını ve muhafazasını istemektedir. A_k, satış müdürünün bölgesindeki *k*.ncı satıcının envanterini temsil eden matris aşağıda biçimdedir:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} Gri & Mor & Kırmızı & Yeşil & Mavi \end{array} \\ A_k = & \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right] \begin{array}{l} Steyşın \\ 2-kapılı \\ 4-kapılı \end{array} \end{array}$$

Eğer satış müdürünün bölgesinde 99 tane temsilci bayisi varsa, bu bölgenin toplam envanterini temsil eden matris *T* şöyledir:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{99} = T.$$

Aritmetik hesaplamaları yapacak bir bilgisayar program yardımıyla bu miktarlar bulunabilir. Öyle ise bu toplam stok envanterini oluşturan kalem için sipariş verilebilir.

Bu durumda satış müdürü aşağıdaki bağıntıyı veren T_2 yi hesaplayabilir:

$$T_2 = T_1 - S_2 = T_1 + (-1)S_2$$

Burada T_1 :ilk haftadaki satılan toplam envanteri temsil eden matris, S_2: ilk hafta satılan araçlardan sonraki oluşan envanteri temsil matristir.

Bununla birlikte satış müdürü ilerideki talepleri karşılayabilmek için, yeni araçların gönderilmesine yönelik sipariş alma ve vermeye devam etsin, burada S_1: ilk hafta çift olarak satılan arabalardır. Böylece aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$T_2 = T_1 - S_2 + 2S_1$$

Örneğin, bir hafta içinde bir satıcı 10 tane mavi ve 20 kırmızı steyşın tipi arabadan, 50 gri ve 10 yeşil 2-kapılı arabadan ve 20 beyaz ve 30 kırmızı 4-kapılı arabadan satış yapar ve sattığının üç katı sipariş alır ve verirse ve ayrıca T_1 aşağıdaki biçimde olursa

$$T_1 = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 30 & 20 & 50 \\ 80 & 40 & 70 & 40 & 50 \\ 90 & 40 & 80 & 60 & 40 \end{bmatrix}$$

$T_2 = T_1 - S_2 + 2S_1$ yi hesaplayınız.

6. Bir fabrika B ve E gibi iki tip marka ürün imal ediyor. Her ürün dört tip marka K, M, L, N gibi malzemeyi kapsıyor. Her malzemenin bir biriminin üretimi için gerekli olan elektrik, yakıt ve su giderleri biçiminde üç kalem masraf bulunmaktadır. Bu malzemelerin her bir tipinin bir biriminin üretimi için gerekli olan giderlerinin her birinin birim miktarını veren Tablo 13.12'de verilmiştir. Her ürünün bir birimi için gerekli olan her malzemenin birimlerinin sayısı da Tablo 13.113'de verilmiştir.

Tablo 13.12 *Giderlerin Miktarı*

Malzeme	Elektrik(kwh)	Yakıt(lt)	Su(lt)

K	5	3	**6**
M	1	0	**1**
L	0	4	**0**

	Malzemeler			
	K	L	M	**N**
Ürün B	2	3	1	**1**
Ürün E	4	2	0	**1**

Tablo 13.13 *Ürünlere Gerekli Malzemelerin Sayısı*

Matris özeliklerini kullanarak her ürünün bir birimini üretmek için giderlerin her tipinin birimlerinin miktarını belirleyecek olan matrisi belirleyiniz.

7. (i)

$B=\begin{bmatrix}1 & -6\\ -5 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -7 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 7 & 8\end{bmatrix}$, $L=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ olsun.

B-3E, F + 7L , $B(F+L)$, $(B+E)L$, FE^T matris işlemlerini gerçekleyiniz.

(ii)

$U=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 6\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}2 & -2 & 6\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$,

$W=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 2\\ -3 & 5 & 7 & 8\end{bmatrix}$, $Z=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 1\end{bmatrix}$ olsun.

UV, UW, VZ, $W^T U$ matrislerini hesaplayınız.

8. (i)

$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & -6\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ ise

$f(x)=x^2+2x-22$ ve $g(x)=x^2-3x-6$

olsun. Bu durumda $f(A)$ ve $f(B)$, $g(A)$ ve $g(B)$ matrislerini bulunuz.

(ii)

$C=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ varsa matrislerin terslerini bulunuz.

(iii)

$E=\begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$, $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$ olmak üzere $A^2=E$ olacak biçimde gerçel değerli bir üst üçgensel matris ve $A^3=L$ olacak biçimde gerçel değerli bir alt üçgensel matris bulunuz.

9. (i)

$E=\begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & y \\ z & 1 & 7 \end{bmatrix}$, ve $L=\begin{bmatrix} 7 & -6 & 2x \\ y & z & -2 \\ x & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ise *E* ve *L* matrislerinin simetrik olması için x, y, z gerçel sayılarını bulunuz.

(ii)

$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini bir *S* simetrik matrisi ile *A* antisimetrik matrisin toplamı biçiminde yazınız.

(iii) *M*, 3 x3 tipinde bir matris olsun. İlk iki satırı (1,3,1) ve (1,0, -1) vektörlerinin katları biçiminde ise *M* dik matrisini bulunuz.

(iv)

$B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ve $E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri normal matris midir?

10. (i)

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, matrislerini, mümkün olduğu kadar köşegen blok matrislere ayrılabilecek biçimde kare blok matrisler biçiminde yazınız.

(ii)

$$M=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&4&0\\0&2&1&0\\0&0&0&3\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\2&3&0&0\\0&0&1&2\\0&0&4&5\end{bmatrix}$$ ise

M^2, M^3 , N^2 ve N^3 matrisleri bulunuz.

13.4.7 Bölüm Soruları

1. a) Aşağıdaki determinantları ilk satır ya da ilk sütuna göre işaretli minör açılımını kullanarak çözünüz.

(i) $\begin{vmatrix}1&0&3\\5&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$,

(iii) $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$, (iv) $\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\3&-2&1\end{vmatrix}$

b) Aşağıdaki determinantları herhangi bir satır (sütuna) göre işaretli minör açılımını kullanarak çözünüz.

(i) $\begin{vmatrix}1&-1&0&3\\2&5&2&6\\0&1&0&0\\1&4&2&1\end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&c\\0&d&e&f\\g&h&i&j\end{vmatrix}$,

(iii) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&c&d\\0&e&0\end{vmatrix}$, (iv) $\begin{vmatrix}cos\theta&sin\theta&tan\theta\\0&cos\theta&-sin\theta\\0&sin\theta&cos\theta\end{vmatrix}$

2. Aşağıdaki matrislerin terslenir olması için *k* değerlerini bulunuz.

(i) $\begin{vmatrix}k&-k&3\\0&k+1&1\\k&-8&k-1\end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix}k&k&0\\k^2&2&k\\0&k&k\end{vmatrix}$

3. Aşağıdaki matrislerin işaretli minör, ek matrisleri ve terslerini bulunuz.

(i) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, (ii) $E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

4.Aşağıdaki dds leri Kramer kuralını uygulayarak çözünüz.

(i) $3x - 3y + 2z = 3$
$-x + y + 2z = -3$
$2x + 4y - 2z = 10$

(ii) $x + y - z = 1$
$x + y + z = 2$
$x - y = 3$

(iii) $3x + 4y = 2$
$x + y = 0$

(iv)) $2x + 3y = 0$
$x + 4y = 0$

Yararlanılan Kaynaklar

Anton, H. And Rorres, C., (2005). **Elementary Linear Algebra** (9th Edition).USA: Jhon Willey &Sons, Inc.

Blyth, T.S. and Robertson, E.F., (2002). **Basic Linear Algebra** (2th Edition). London: Sringer- Verlag.

Bradley, T. and Patton, P. (2002). **Essential Mathematics For Economics and Business** (2th Edition). England: Jhon Wiley and Sons Ltd.

Cameron, Peter J. (2008**). Introduction to Algebra**. New York : Oxford University Press, Inc.

Campbell, Hugh G., (1980). **Linear Algebra with Applications**. New York: Prentice-Hall, Inc.

Hoffman, K. and Kunze, R., (1971). **Linear Algebra** (2th Edition). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Hungerford, Thomas W., (1974). **Algebra**, New York: Sringer-Verlag, Inc.

Lipschutz, S. and Lipson, Marc L., (2004). **Linear Algebra** (3th edition), New York: McGraw-Hill Companies.

http://www.scribd.com/doc/19613606/Applications-of-Matrices-to-Business-and-Economics, 19.04.2010.

Poole, D., (2006). **Linear Algebra: A Modern Introduction** (2th Edition). Canada: Brooks/Cole.

Rotman, Joseph J., (2005). **A First Course in Abstract Algebra** (3th Edition), New Jersey:Prentice Hall.

Strang, G., (1988). **Linear Algebra and Its Applications** (3th Edition). USA: Brooks/Cole.