ESTRATEGIAS COGNITIVAS DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMBINATORIA SIMPLE

ANDRÉS LEONEL SIERRA
JUDITH ORJUELA ARCE

Trabajo de grado como requisito parcial para obtener el título de Magíster en Educación

Director
JUAN PABLO PEREZ PERDOMO
Magister en Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
IBAGUÉ
2015

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

ACTO DE SUSTENTACION TRABAJO DE GRADO

Fecha : 7 de Marzo de 2015
Hora : 12:00 m
Lugar : SALA DE CONSEJO FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA

1. *Presentación :*

TITULO DEL TRABAJO: ESTRATEGIAS COGNITIVAS DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMBINATORIA SIMPLE.

AUTOR : ANDRÉS LEONEL SIERRA
JUDITH ORJUELA ARCE.

JURADO: GLADYS MEZA

1. *Reseña Bibliográfica*
2. *Exposición del autor (20 minutos)*
3. *Intervención y preguntas del jurado.*
4. *Intervención y aclaraciones del director.*
5. *Deliberación del jurado.*
6. *Lectura del acta de sustentación.*

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

ACTA DE SUSTENTACION PUBLICA N° 024

SEMESTRE A-2015

Siendo las 12:00 m *horas del día* 7 *de Marzo de 2015 se reunieron en* SALA DE CONSEJO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS E. *Universidad del Tolima, el estudiante, el jurado Director del Trabajo de Grado e invitados al acto de sustentación:*

TITULADO:
ESTRATEGIAS COGNITIVAS DESARROLLADAS POR ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMBINATORIA SIMPLE.

La calificación otorgada por el el jurado a la sustentación es la siguiente:

JURADO NOMBRE	GLADYS MEZA	*CALIFICACION*	4.5

SIENDO LAS: 12:00 m *, HORAS SE CERRO EL ACTO DE SUSTENTACION*

EN CONSTANCIA SE FIRMA:

JURADO NOMBRE	GLADYS MEZA	*FIRMA*	

Barrio Santa Elena – Ibagué Colombia. Tel. directo 2668912
A.A. 546 – PBX 644219 – FAX (982) 644869 – 9800665348

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACIÓN

FORMATO PARA CALIFICACION DE TRABAJOS DE GRADO
(Para uso del Jurado)

FUNCIONES	CALIFICACION ASIGNADA
1. Aspectos de estilo y presentación	4.2
2. Marco teórico y actualización de conocimientos.	4.4
3. Método y técnicas adecuadas o de innovación en la metodología.	4.5
4. Relevancia científica y/o tecnológica e importancia socioeconómica de los resultados y recomendaciones.	4.5
NOTA FINAL	4.5

La calificación numérica equivale a la siguiente escala cualitativa así: Una nota definitiva menor de tres coma cero (3.0) equivale a REPROBADO; Entre tres coma cero (3.0) y tres coma nueva (3.9) APROBADO, entre cuatro coma cero (4.0) y cuatro coma cuatro (4.4) SOBRESALIENTE, y entre cuatro coma cinco (4.5) cuatro coma nueve (4.9) MERITORIO y cinco coma cero (5.0) LAUREADO.

COMENTARIO DEL JURADO CALIFICADOR El trabajo toca una temática importante de relevancia para la comunidad educativa, su planteamiento debe impactar a la educación media. El debe convertirse en un aporte para el área de matemáticas

CALIFICACION CUALITATIVA "Meritoria".

NOMBRE DEL JURADO GLADYS MEZA, ***FIRMA***

ANDRES LEONEL SIERRA

NOMBRE DEL ESTUDIANTE JUDITH ORJUELA ARCE, ***FIRMA*** Judith Orjuela Arce

NOMBRE DEL DIRECTOR TRABAJO DE GRADO:

JUAN PABLO PEREZ, ~~FIRMA~~ J.P.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se convierte en un peldaño más en el camino de lograr las metas trazadas a lo largo de nuestras vidas, queremos expresar nuestros más sinceros agradecimientos a aquellas personas que estuvieron presentes durante esta experiencia y que con su apoyo, orientación, compañía y guía, alentaron nuestras acciones para obtener dicho logro.

A nuestro director y amigo, Magister Juan Pablo Pérez, quien con su respaldo, orientación y experiencia, hizo que este trabajo se llevara a cabo con responsabilidad, objetividad y trascendiera como una herramienta de aplicación dentro del aula de clase, propiciando estrategias novedosas que faciliten los procesos de enseñanza y aprendizaje del análisis combinatorio. De igual manera, agradezco a los estudiantes que participaron en el proceso y nos permitieron la aplicación del cuestionario, sus aportes fueron de mucho valor para llevar a feliz término nuestro proyecto.

Al equipo docente del programa de maestría en educación de la universidad de la universidad del Tolima, por su exigencia y vocación; particularmente a Marco Raúl mejía, Santiago González y María Cristina Ovalle; a nuestros compañeros y amigos Elkin Oswaldo Forero, y Francia Helena cruz, por su apoyo incondicional, los queremos y admiramos profundamente.

Finalmente, a nuestros familiares, quienes con su amor y apoyo incondicional nos han dado las fuerzas necesarias para llevar a feliz término este maravilloso proyecto.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

Esta investigación tuvo como población de estudio estudiantes de grado noveno, estudiantes que se encuentran en un rango de edad entre 13 y 15 años, quienes hasta el día de hoy no han recibido instrucción alguna sobre conceptos relacionados con el análisis combinatorio. Nuestra investigación identificará y caracterizará las diferentes estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes del grado 9 cuando resuelven problemas simples de combinatoria, apoyados exclusivamente en su intuición y su capacidad cognitiva, evidenciando cómo los adolescentes descubren procedimientos sistemáticos de enumeración y recuentos combinatorios de manera espontánea y sin ayuda de la instrucción. La investigación se apoya en trabajos realizados por Carmen Batanero sobre educación Estadística, la clasificación planteada por Dubois, trabajos sobre el desarrollo cognitivo de Piaget y la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud.

Palabras Claves. Combinatoria, Educación Estadística, Teoría de los Campos Conceptuales, Desarrollo Cognitivo.

ABSTRACT

This research was to study population ninth year students, students who are at an age range between 13 and 15 years, who until today have not received any instruction on concepts related to combinatorial analysis. Our research will identify and characterize the different cognitive strategies used by students in grade 9 when solving simple combinatorial problems, supported solely on intuition and cognition, demonstrating how teens discover systematic procedures and combinatorial enumeration counts spontaneously without aid instruction. The research is based on trabajaos made by Carmen Batanero on education statistics, silver classification Dubois, work on the cognitive development of Piaget and theory of conceptual fields of Vergnaud.

Keywords. Combinatorics, Education Statistics, theory of conceptual fields, Cognitive Development.

INTRODUCCIÓN

El análisis combinatorio como componente de la teoría probabilística, cumple un papel esencial en el estudio de la estadística a nivel de secundaria, como quiera que las operaciones combinatorias extienden el nivel de razonamiento hipotético-deductivo de estos estudiantes. Piaget e Inhelder (1951) Afirman. “La combinatoria no es simplemente una herramienta de cálculo para la probabilidad. Si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales". p.27

En la actualidad los currículos siempre hacen recomendaciones generales sobre la enseñanza de la estadística en secundaria. Sin embargo, en la práctica son pocos los profesores que incluyen el tema y en otros casos lo tratan muy brevemente o en forma excesivamente formal. Por otro lado, la cantidad reducida de investigaciones que se han hecho alrededor de la enseñanza de la estadística y en especial investigaciones relacionadas con la descripción de las estrategias empleadas por los estudiantes en el momento de enfrentar problemas de combinatoria, muestran la importancia de esta investigación que servirá como referente para futuros trabajos en esta línea.

Atendiendo a estas inquietudes y motivados esencialmente en promover el desarrollo de nuevas estrategias didácticas al interior de nuestras aulas de clase, se realiza este trabajo que pretende mostrar cómo el análisis combinatorio puede emplearse para educar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas y el desarrollo del pensamiento sistemático.

Adicional a esto, se quiere evidenciar la importancia de la combinatoria en el desarrollo de muchos conceptos; como los de aplicación, relaciones de orden y de equivalencia. No se puede olvidar que la combinatoria tiene aplicaciones en diferentes campos, como la biología, la química, la física, las comunicaciones, la probabilidad, la teoría de grafos, entre otras.

Esta investigación tendrá como población objeto de estudio estudiantes de grado noveno, con un rango de edad de entre 13 y 15 años, quienes hasta el día de hoy no han recibido instrucción alguna sobre conceptos relacionados con el análisis combinatorio. Nuestra investigación identificará y caracterizará las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes de básica secundaria cuando resuelven problemas simples de combinatoria apoyados exclusivamente en su intuición y su capacidad cognitiva, evidenciando cómo los adolescentes descubren procedimientos sistemáticos de enumeración y recuentos combinatorios de manera espontánea y sin ayuda de la instrucción.

La propuesta se apoya en los trabajos del grupo de investigación sobre educación estadística de la universidad de granada en España bajo la dirección de La profesora Carmen Batanero, quienes han desarrollado toda una teoría didáctica alrededor de la enseñanza de la probabilidad en todos los niveles de formación. Así como las investigaciones de Piaget sobre el desarrollo cognitivo, donde muestra la influencia que tienen los esquemas combinatorios sobre el razonamiento formal del individuo.

En Colombia, el ministerio de educación nacional a través de los lineamientos curriculares, establece que la enseñanza de la matemática debe incluir en sus planes de estudio, todos los conceptos relacionados con el ordenamiento de los objetos de un conjunto bajo unas condiciones dadas. Todo esto como parte del aprendizaje de la teoría estadística y a partir de la implementación de nuevas propuestas pedagógicas dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La institución educativa técnica general Roberto Leyva del Municipio de Saldaña- Tolima y la Institución educativa Fundadores "Ramón Bueno y José Triana del Municipio de Girardot- Cundinamarca, posee un currículo muy limitado en temas que se relacionan con el análisis combinatorio en secundaria, simplemente porque se tiene la idea de que esta herramienta de cálculo solo tiene aplicación en la probabilidad, y subestiman su importancia en la solución de problemas de mayor complejidad o en contextos diferentes a la teoría estadística. En estas instituciones educativas, la enseñanza del análisis combinatorio como componente del pensamiento aleatorio, solo se aproxima brevemente al concepto de probabilidad, limitando su aprendizaje a las definiciones y a la resolución de sencillos ejercicios de cálculo con dichas expresiones, desconociendo así, la importancia de La combinatoria en el desarrollo de otros conceptos matemáticos y dejando a un lado los diferentes campos en que se puede aplicar el análisis combinatorio, afectando considerablemente los procesos de análisis que permiten el desarrollo del pensamiento hipotético-deductivo de los estudiantes.

De allí la importancia llevar a cabo al interior de las instituciones, un estudio que permita entre otras cosas, identificar las estrategias que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas combinatorios. Y partir de ahí, para desarrollar el aprendizaje de la teoría estadística en todos los niveles de formación; incentivando en la comunidad educativa, el rediseño y la apropiación de un currículo pertinente con la enseñanza de la estadística en los niveles de formación básica y media.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES.

En este capítulo realizaremos una breve descripción de las investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la combinatoria, es de resaltar que son pocas las investigaciones que se encuentran en esta línea.

1.1.1 Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. (Navarro-Pelayo, Bataner, & Godino, 1996), centran su investigación en el papel de la combinatoria en la probabilidad y en la matemática, en como la combinatoria no es solo un instrumento matemático sino un componente fundamental del razonamiento lógico. Proponen un cuestionario compuesto por 13 items que evalúa el razonamiento combinatorio en los estudiantes, cuestionario que fue aplicado a 720 estudiantes de 14 y 15 años de diferentes instituciones de Granada y Córdoba, se aplicó a 352 estudiantes que habían recibido instrucción y a 368 sin instrucción, determinan que la instrucción tiene un efecto positivo en el razonamiento de los estudiantes, pero consideran que en el grupo de estudiantes que recibieron instrucción se evidenciaba que muchos no comprendieron el concepto de combinación dada la aparición de nuevos errores, además de la identificación de los errores cometidos por los estudiantes también hacen una descripción de cada uno de ellos, basados en la clasificación planteada por Dubois (1984).

1.1.2 Razonamiento Combinatorio en Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada. Roa Guzman (2000) estudia las estrategias que usan los estudiantes de últimos semestres de Licenciatura de Matemática en la resolución de problemas elementales de combinatoria, también analiza sus dificultades y errores. Roa Guzmán (2000) aplica un cuestionario a un total de 147 estudiantes y realiza entrevistas a un número menor. Esta investigación es la continuación del trabajo realizado por Navarro-Pelayo, Bataner, y Godino (1996) en la cual aplicó los problemas de combinatoria a estudiantes de secundaria, los cuales resultaron difíciles para estos estudiantes y analizo los resultados de los estudiantes sin recibir instrucción y después de haber recibido instrucción de la combinatoria.

1.1.3 Modelos Combinatorios Implícitos y Resolución de Problemas en Clase de cuarto año. Un Estudio de los Efectos Relacionados con la Semántica de Situación. Esta investigación es resultado de la tesis doctoral realizada por Richard (2007) y es un estudio centrado en el efecto de la formulación semántica de problemas combinatorios, estudia los procedimientos y procesos de resolución de problemas realizados por los estudiantes, su objetivo principal es proponer un modelo de los vínculos existentes entre las producciones de los estudiantes y los procesos de resolución de problemas utilizados. Se aplicó un primer cuestionario individual en el cual se identifican todos los procedimientos discernibles, luego se aplica un segundo cuestionario grupal en el cual se identifican los procesos utilizados en la solución de los problemas. El investigador después de realizar un análisis profundo, propone dos modelos dominantes en la resolución de problemas con algunas variaciones.

1.1.4 Conteo. Una Propuesta Didáctica y su Análisis. En el artículo de Salgado y Trigueros (2009), se muestran el diseño y análisis de una propuesta didáctica para el aprendizaje de las ordenaciones y combinaciones desde el marco teórico de la teoría Acciones, Procesos, Objetivos y Esquemas (APOE). La investigación se realiza durante tres semestres en los cuales primero se aplicó una serie de problemas que fueron diseñados a partir de la descomposición genética sobre ordenación, luego hicieron lo mismo pero con las combinaciones y por último se refino la descomposición genética y diseñaron una tercera serie de problemas que incluyen problemas de ordenación y combinación.

Los estudiantes trabajaron las secuencias de situaciones en diferentes etapas, la primera fue antes de estudiar el tema y durante dos horas de clase con trabajo colaborativo discutieron los problemas sin ayuda de libros o el docente, la segunda etapa fue a través de una discusión general sobre el tema de conteo, la tercera fue después de haber generalizado el proceso en fórmulas los estudiantes resolvieron algunos ejercicios de la serie y la última etapa que consistió en que los estudiantes resolvieran los problemas de la secuencia de manera individual y como tarea.

Dentro de los resultados más importantes de esta investigación se tienen. que la descomposición genética de los conceptos de conteo fue un aporte para el análisis de la enseñanza del conteo dada la no existencia de investigaciones sobre la enseñanza de estos conceptos en la universidad, al utilizar como base la descomposición genética para la construcción de los problemas y el uso de una metodología especifica permitió observar una evolución en la construcción de los conceptos de conteo en los estudiantes, también se logró determinar las estrategias utilizadas por los estudiantes.

Es importante resaltar como en la investigación concluyen que los conceptos de conteo son difíciles para los estudiantes y resalta que estas dificultades pueden ser superadas con el diseño de estrategias didácticas.

1.2 PREGUNTA GENERADORA

¿Cuáles son las estrategias conceptuales que utilizan los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Técnica General “Roberto Leyva” del Municipio de Saldaña-Tolima y de la Institución Educativa Fundadores “Ramón Bueno y José Triana del Municipio de Girardot- Cundinamarca, cuando resuelven problemas simples de Combinatoria, teniendo en cuenta que no han recibido instrucción alguna en la resolución de este tipo de problemas?

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar, describir y analizar las estrategias conceptuales que utilizan los estudiantes del grado noveno cuando resuelven problemas simples de Combinatoria.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las estrategias conceptuales evocadas por los estudiantes al solucionar problemas simples de combinatoria sin haber recibido instrucción alguna sobre este concepto.

- Caracterizar las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes del grado noveno según el modelo y el esquema combinatorio que plantea cada problema de combinatoria.

- Indagar sobre las circunstancias que llevan a los estudiantes del grado noveno a hacer una interpretación (correcta o incorrecta) de los problemas combinatorios.

3. MARCO DE REFERENCIA

3.1 MARCO TEÓRICO

3.1.1 La teoría de los campos conceptuales**.** El conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso periodo de tiempo, a través de la experiencia, madurez y aprendizaje. (Vergnaud, 1982).

La teoría de los campos conceptuales pretende suministrar un escenario adecuado y unos principios básicos que permitan el aprendizaje de competencias complejas, para nuestro caso particular las que se refieren a las ciencias. Su principal finalidad es la de suministrar un marco propicio para describir en detalle, el origen y la disolución entre los conocimientos. Entendiendo "conocimiento" como lo que el individuo sabe hacer y sabe expresar sobre la base de que el aprendizaje y el desarrollo cognitivo del niño y del adolescente siempre se dan de manera conjunta. Hay que aclarar que aunque la teoría de los campos conceptuales no sea exclusiva de las matemáticas, esta tiene origen en los procesos de conceptualización de las estructuras aditivas y multiplicativas, relaciones numero-espacio, y del algebra básica.

Para el autor, el desarrollo cognitivo se da a partir de la conceptualización y el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales. Este retoma la definición de Piaget sobre 'esquema', y hace una definición detallada de sus componentes, donde el elemento teórico fundamental es la noción de invariante operatorio. Contrario a Piaget, Vergnaud (1982) propuso modelos lógicos de desarrollo del pensamiento para momentos específicos en cada área del conocimiento. Pues considera que para cada campo del conocimiento son necesarios ciertos procesos de conceptualización que dependen del tipo de situación y que requieren de una determinada actividad.

Todo esto llevó a Vergnaud a enlazar el desarrollo cognitivo del individuo con la didáctica a la que entiende como "El estudio de los procesos de transmisión y de apropiación de los conocimientos teniendo en cuenta los contenidos específicos que dichos conocimientos poseen". (Vergnaud, 2007. p. 6).

Gerard Vergnaud en su teoría de los campos conceptuales propone sustituir la interacción sujeto-objeto por la interacción esquema-situación ya que para estudiar cada situación de aprendizaje se hace necesario precisar una relación con esa parte de la realidad que se descubre en una situación determinada. Haciendo que la relación entre esquema y relación sea una relación dialéctica.

Para Vergnaud (1988) una situación "tiene el carácter de tarea y toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas acerca de las cuales es importante conocer su naturaleza y sus obstáculos" (p. 29)

Una situación hace parte de una variedad de situaciones que definen patrones cognitivos, donde los individuos no hacen otra cosa que adaptarse a ella mediante la modificación de los esquemas que utilizan en dicha situación. Llevando a que una situación traiga consigo la utilización de cierto tipo de esquema acorde con la situación. Existe una reciprocidad lógica entre situación y esquema ya que la una no podría existir sin la otra.

El dominio de un campo conceptual exige el desarrollo de esquemas a largo plazo. Esto se consigue cuando el sujeto ha enfrentado una variedad de situaciones a través del tiempo. Tal es el caso de la proporcionalidad, y la combinatoria que se presentan en múltiples situaciones de la vida cotidiana y requieren un periodo prolongado de conceptualización.

Para desarrollar una competencia es necesario incluir muchos conocimientos en la tarea. Conocimientos que en un momento dado, son difíciles de manifestar verbalmente. Esto muestra la dificultad que tienen las palabras y los textos para explicar puntualmente el conocimiento que se utiliza al momento de enfrentar un hecho real, es decir, el conocimiento operatorio que se pone en acto en una situación.

Un concepto adquiere sentido a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver. De allí que para la conceptualización sean tan indefectibles, la acción operatoria y la utilización de significantes explícitos a la vez.

La teoría de los campos conceptuales hace una diferenciación entre lo que llama la forma operatoria y la forma predicativa del conocimiento, y justifica la importancia de cada una en el proceso de conceptualización.

3.1.2 Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento**.** La forma operatoria del conocimiento se encarga de que el sujeto actúe ante una situación, y la forma predicativa, enuncia las relaciones entre los objetos. Es complejo hacer y también lo es, decir que se hace. (Vergnaud, 2007)

La enunciación es fundamental en el proceso de conceptualización. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas tienen que ver con la complejidad de las situaciones y de las operaciones que se hacen mentalmente, como también las limitaciones que ofrecen los enunciados y la simbología matemática.

Esto denota claramente cómo el lenguaje dificulta el aprendizaje de las matemáticas. Aunque Vergnaud (2007) sostiene que. Las matemáticas no son un lenguaje, sino un conocimiento.

3.1.3 Actividad**.** La teoría de los campos conceptuales en uno de sus principios fundamentales sostiene que la actividad no se puede reducir a la conducta del sujeto, pues supone que el comportamiento es tan solo la parte perceptible de la actividad.

¿En qué consiste la actividad? La actividad encierra la conducta observable y los procesos de representación que no se pueden observar. La teoría de los campos conceptuales establece que la actividad del sujeto en situación está compuesta por.

- **Gestos.** tales como señalar, mover las manos y el cuerpo, las expresiones faciales, incluso se considera el pensamiento como un gesto.
- **Acciones.** estas son las que se realizan directamente sobre los objetos o sobre el contexto, como también aquellas operaciones que se interiorizan a través del pensamiento.
- **Selección de información.** en una situación determinada el sujeto elige la información relevante para él, a partir de los esquemas que posee.
- **Invariantes operatorios.** son los conceptos en acto, definidos como categorías pertinentes para el sujeto en la situación, y los teoremas en acto, o afirmaciones que el sujeto considera verdaderas.
- **Reglas de acción.** son reglas del tipo si… entonces, cuya sucesión gobierna y decide el camino a seguir, orientado a una meta.
- **Mecanismos de control.** son utilizados para evaluar las acciones y verificar el cumplimiento de las metas contenidas en el esquema.

El concepto de esquema es imprescindible para entender hasta qué punto la actividad no es reducible a la conducta o al comportamiento.

No se puede negar la importancia de las funciones del lenguaje y de los símbolos en el desarrollo mental del sujeto. No obstante, es necesario identificar convenientemente qué propiedades del significante representan qué propiedades del significado. Cada individuo le otorga un significado diferente a cada palabra, esto se puede observar claramente en un salón de clase donde los significados del profesor difieren ampliamente con los de cada estudiante.

Si queremos que nuestros estudiantes desarrollen conceptos y competencias complejas, habría que empezar por identificar los invariantes operatorios que intervienen en las actividades y en los esquemas, independiente de los significados que se le den a las palabras.

3.1.4 Jean Piaget. Los cambios intelectuales y cognoscitivos del ser humano son una consecuencia de su desarrollo. Este desarrollo se puede observar como un proceso de cambios sucesivos donde cada uno de ellos es una consecuencia lógica del anterior. (Piaget e Inhelder, 1951)

Piaget sostiene que el desarrollo intelectual se divide en cuatro estadios o etapas del pensamiento.

- **Etapa de la inteligencia sensomotora.** En esta etapa, la conducta del niño es en esencia, motora. El niño aún no representa internamente los acontecimientos o fenómenos ni razona mediante conceptos, aunque en su desarrollo cognoscitivo, puede verse conforme elabora sus esquemas.

- **Etapa del pensamiento preoperativo.** Esta etapa se caracteriza por el desarrollo del lenguaje y de otras formas de representación y de rápido desarrollo conceptual. Durante esta etapa el desarrollo es prelógico o semilógico.

- **Etapa de las Operaciones concretas.** En esta etapa el niño desarrolla la capacidad de aplicar el pensamiento lógico a problemas concretos.

- **Etapa de las operaciones formales.** En esta etapa, las estructuras cognoscitivas del niño alcanzan su máximo nivel de desarrollo y adquiere la capacidad de aplicar el razonamiento lógico a toda clase de problemas

Según Vásquez (2008), Piaget hace referencia a los factores que aseguran la aparición de las etapas del desarrollo cognoscitivo. Entre los más importantes están.

- Los factores biológicos que explican la regularidad e inevitabilidad de las etapas o estadios que postula, de la misma manera como vemos aparecer las características sexuales durante un determinado período evolutivo de los varones y las niñas, antes que se los pueda llamar adultos maduros.

- La transmisión educacional y cultural que, según Piaget, explica las diferencias en las edades cronológicas en que aparecen sus estadios al pasar de un individuo a otro.

- Las actividades a que se dedican los niños. Piaget tiene una visión "activa", no "pasiva", del papel que desempeñan los niños en su propio desarrollo. La actividad motriz autodirigida del niño la ve como una necesidad de desarrollo cognoscitivo. La ocupación anterior de Piaget, en biología y lógica, se refleja en el amplio uso del lenguaje técnico de esas ciencias.

Inhelder y Piaget (1951) sostienen que:

> El razonamiento hipotético deductivo opera por medio de las operaciones combinatorias que se aplican sobre un conjunto de posibilidades que deben examinarse y enumerarse hasta llegar a una conclusión. Alcanzado el periodo de las operaciones formales los adolescentes descubren de manera espontánea procedimientos sistemáticos de enumeración y recuento combinatorios, por lo que serían capaces de resolver problemas combinatorios sencillos sin ayuda de la instrucción. (p. 29)

Lo anterior evidencia el valor que tienen los esquemas cognitivos combinatorios en el desarrollo del pensamiento formal. Para Piaget, estos tienen una importancia comparable con los esquemas de la proporcionalidad y de la correlación, las cuales también salen a relucir en el individuo a partir de los 12 o 13 años.

3.1.5 Efraim Fischbein. Fischbein y Gazit (1988) sostiene que "El análisis combinatorio, con sus conceptos y métodos no representa un manejo exclusivo de las matemáticas, sino que además expresa ¡un prerrequisito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general". (p. 193)

Fischbein (1988), presentó toda una teoría sobre la intuición, analizó la importancia de las formas intuitivas del conocimiento en el razonamiento matemático y además, estudió las consecuencias de esta idea en el terreno de la educación matemática. Donde analizó principalmente los efectos de la instrucción en el proceso de aprendizaje, a partir de la importancia del pensamiento intuitivo.

Para Fischbein (1988) hay intuiciones que son correctas, pero no siempre nuestras creencias intuitivas expresan verdades objetivas. Principalmente por dos razones:

> Nuestra experiencia, está, necesariamente limitada por nuestras propias condiciones de vida.
>
> Tenemos una tendencia natural hacia las interpretaciones causales, con lo que tendemos a interpretar los sucesos distinguiendo siempre entre causa y efecto y tendemos a creer que “la misma causa producirá el mismo efecto”. Esto nos lleva irremediablemente a una simplificación excesiva de la realidad. (p. 193)

Fischbein (1988) hace distinción de las diferentes Características del razonamiento intuitivo, las cuales son.

- Autoevidente. Es la principal característica que posee la intuición. Autoevidenciar no implica solamente que el sujeto sea capaz de justificar la afirmación pertinente. Una afirmación aceptada de manera intuitiva no siempre puede ser verdadera pero parece ser explicativa por sí misma.

- Certeza Intrínseca. El razonamiento intuitivo es aceptado como cierto, aunque el ser evidente y tener la certeza estén correlacionados, se debe estar plenamente convencido de que una afirmación es verdadera. Cuando tratamos de identificar la presencia de un razonamiento intuitivo se debe determinar hasta dónde le parece al individuo que es una creencia intrínseca. La sensación de certeza no es criterio absoluto de verdad objetiva. Sin embargo permanece como un criterio para el conocimiento intuitivo.

- Perseverancia. Las intuiciones, una vez establecidas, están arraigadas firmemente. La instrucción formal que provee al estudiante el conocimiento conceptual tiene muy poco impacto sobre el conocimiento intuitivo. Las intuiciones erróneas pueden convivir toda la vida con las interpretaciones conceptuales correctas.

- Carácter Coercitivo. Las intuiciones se imponen subjetivamente sobre el individuo como absolutas y únicas representaciones o interpretaciones. En la historia de la ciencia y la matemática la naturaleza de las intuiciones ha contribuido a perpetuar las interpretaciones incorrectas y a rechazar las correctas, aún después de que hayan sido probadas.

- Estatus de teoría. Una intuición es una teoría, nunca es una realidad o una percepción de un hecho. En una intuición se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley a través de la realidad particular. Una intuición es una teoría expresada en una representación particular utilizando un modelo. un paradigma, una analogía, un diagrama, una construcción.

- Carácter Extrapolable. Una intuición excede la información disponible. Sin embargo, una conjetura obtenida por extrapolación no es suficiente para definir una intuición. El aspecto extrapolable de una intuición no siempre se puede evidenciar, ya que lo obvio de la intuición oculta el carácter incompleto de la información sobre la que está basada. El papel fundamental del conocimiento intuitivo es el de otorgar la certeza de las ideas obtenidas después de haberlas extrapolado.

- Globalidad. La intuición es un conocimiento estructurado que ofrece una mirada global, única de cierta situación. Las intuiciones pueden ser más o menos estructuradas y consecuentemente más o menos estables.

- Carácter Implícito. Las reacciones intuitivas son en realidad la estructura superficial que expresa lo tácito y subyacente de los mecanismos y procesos. El carácter tácito de los procesos sobre los cuales una intuición está basada explica su aparente obviedad. Esto hace que el control sobre las intuiciones sea una tarea difícil.

- “solo es posible desarrollar nuevas actitudes intuitivas si el alumno se involucra personalmente en una actividad práctica que le proporcione la experiencia necesaria”. (Fischbein & Gazit, 1988)

Hay que decir que, Batanero, Godino y Navarro Pelayo (1994) no son muy optimistas con relación al desarrollo de las capacidades combinatorias de los sujetos en forma espontánea. Sin embargo, reconocen la importancia de los esquemas combinatorios en el razonamiento lógico en general, ellos, al igual que Fischbein (1988) sostienen que “es importante determinar las edades y las circunstancias en las cuales los sujetos adquieren los esquemas combinatorios, así como las posibilidades y estrategias de intervención didáctica adecuadas". (p. 48)

4. METODOLOGÍA

4.1 ESTRATEGIAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este Trabajo analiza las estrategias cognitivas que aplican los estudiantes del grado noveno al resolver problemas combinatorios simples (cuya solución viene dada por una única operación combinatoria). Para esto, se propuso a un grupo de 56 estudiantes del grado noveno, un cuestionario con 8 problemas, quienes hasta el momento de la aplicación de la prueba, no habían recibido instrucción alguna sobre combinatoria. Nuestra población objeto de estudio pertenece a la institución educativa técnica general Roberto Leyva del Municipio de Saldaña- Tolima y a la Institución educativa Fundadores "Ramón Bueno y José Triana del Municipio de Girardot- Cundinamarca.

4.1.1 Descripción del cuestionario**.** El cuestionario utilizado se presenta como anexo y se compone de 8 problemas combinatorios simples. Estos han sido tomados y adaptados del cuestionario de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996) y se divide según el modelo que propuso Dubois (1984), quien clasifica las configuraciones combinatorias simples, en tres modelos diferentes: selección, colocación y partición.

Tabla 1. Clasificación de las configuraciones.

CLASIFICACIÓN	**PROBLEMA**
Selección	1,5 y 7.
Colocación	2,6 y 8.
Partición	3 y 4.

Fuente. Los autores

En el modelo de **selección** se considera un conjunto de m objetos (distintos), de los cuales se extrae una muestra de n elementos. Este modelo acentúa la idea de población y muestra, orden y repetición.

El modelo de **colocación** hace referencia a una serie de n objetos, donde el conjunto original y el conjunto final pueden estar ordenados.

Finalmente, nuestro interés está en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, generar una **partición** de un conjunto donde se utilizan las ideas de conjunto, subconjunto y partición. En este modelo se puede ver como el conjunto original y los subconjuntos pueden estar ordenados.

Los tres tipos de problemas aquí descritos, no suponen una equivalencia frente a su grado de dificultad, así estos se puedan resolver utilizando la misma operación combinatoria.

4.2 ESTRATEGIAS GENERALES EMPLEADAS POR LOS ALUMNOS

Cabe destacar, que en la resolución de problemas combinatorios es particularmente útil la utilización de estrategias generales tales como: traducir el problema a otro equivalente, descomponer el problema en subproblemas, fijar los valores de algunas de las variables y principalmente, el empleo de las tres reglas combinatorias básicas (suma, Producto).

A continuación analizamos si el alumno ha utilizado alguna estrategia (correcta o incorrecta) en la resolución de los problemas combinatorios que plantea el cuestionario. Para la realización de este análisis, hemos tenido en cuenta aquellos alumnos que han contribuido con algún tipo de solución (correcta o incorrecta) a los problemas. Estas soluciones serán clasificadas en grupos de respuesta según su similitud con las resoluciones de cada institución educativa. La resolución de los alumnos de la institución educativa técnica General Roberto Leyva se identifica con la letra **R,** acompañada del número asignado a cada estudiante. La resolución de los alumnos de Institución Educativa Fundadores “Ramón Bueno y José Triana se demarca con la letra **L**, acompañada del número asignado para cada alumno. A continuación presentamos nuestros resultados.

4.2.1 Problema 1**.** En una caja hay cuatro fichas de colores; 2 azules, 1 blanca y 1 roja. Se toma una ficha al azar y se anota el color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuantas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo. Se pueden seleccionar en el siguiente orden, blanca, azul, roja y azul.

4.2.1.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L23:

Figura 1. Pregunta 1, Alumno L23.

1º las otRos difeRentes foRmas de elegiR las fichas pueden seR 2

- azul, Roja, Blanca, azul
- Roja, Blanca, azul y azul.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R5:

Figura 2. Pregunta 1, Alumno R5.

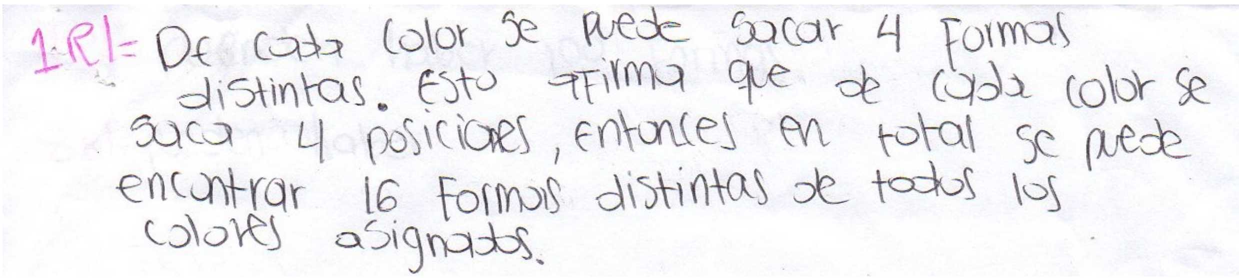
1R/= de diferentes formas porque. son 4 por eyemplo.
roja, Azul, blanca y Azul.

Fuente: Los autores

Estos alumnos afirman sin hacer ninguna comprobación, que existen diferentes formas de elegir las fichas. La deducción que los estudiantes hacen es válida, principalmente porque proponen la existencia de otros posibles resultados. En estas resoluciones se puede ver como los alumnos, aun desconociendo las operaciones combinatorias, tratan de generar intuitivamente un modelo combinatorio.

4.2.1.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L11:

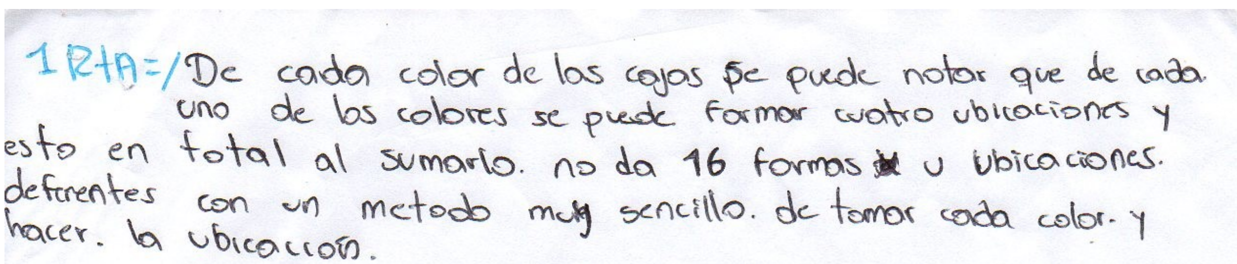
Figura 3. Pregunta1, Alumno L11.


1:R1= De cada color se puede sacar 4 formas
distintas. Esto afirma que de cada color se
saca 4 posiciones, entonces en total se puede
encontrar 16 formas distintas de todos los
colores asignados.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R21:

Figura 4. Pregunta 1, Alumno R21.

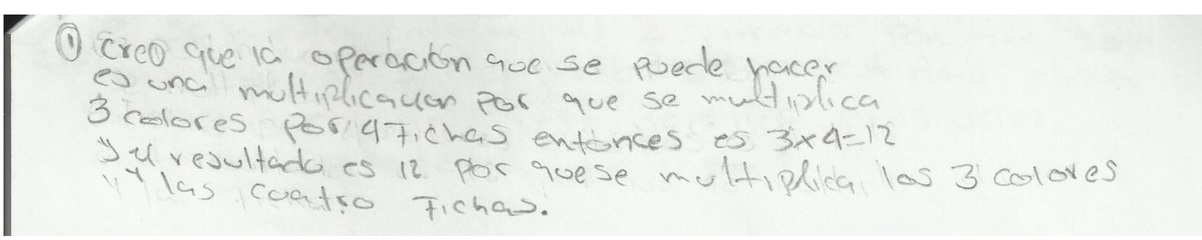

1 RtA=/ De cada color de los cajas se puede notar que de cada
uno de los colores se puede formar cuatro ubicaciones y
esto en total al sumarlo. no da 16 formas u ubicaciones.
deferentes con un metodo muy sencillo. de tomar cada color. y
hacer. la ubicaccion.

Fuente: Los autores

Los alumnos generan intuitivamente un modelo combinatorio aplicando la regla de la adición, pero en un contexto inadecuado, porque hacen una interpretación incorrecta acerca de los tipos de elementos (distinguibles o no) que aparecen en el problema.

4.2.1.3 Tipo de respuesta 3. Resolución del alumno R7:

Figura 5. Pregunta 1, Alumno R7.


① Creo que la operación que se puede hacer
es una multiplicacion por que se multiplica
3 colores por 4 fichas entonces es 3x4=12
y el resultado es 12 por que se multiplica las 3 colores
y las cuatro fichas.

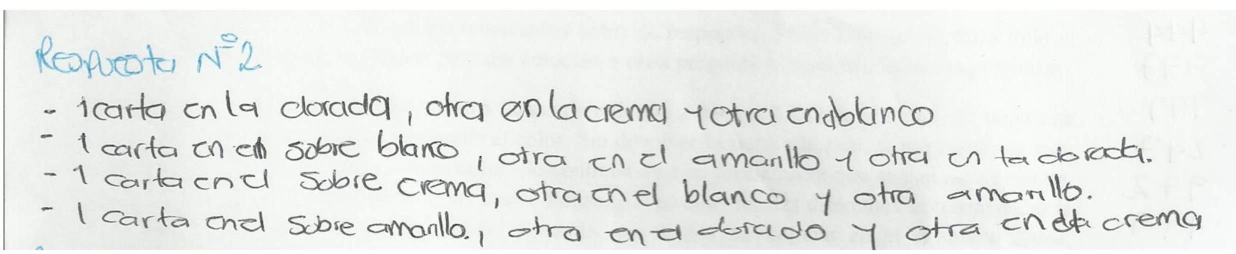
Fuente: Los autores

El alumno aplica la regla del producto pero no en el contexto adecuado, porque realiza una multiplicación entre los datos del problema. Llega a la respuesta correcta sin hacer una interpretación correcta de los elementos (distinguibles o no) que aparecen en el problema.

4.2.2 Problema 2**.** Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores, amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo, podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en la crema.

4.2.2.1 Tipo de respuesta 1. Resolución Del alumno L3:

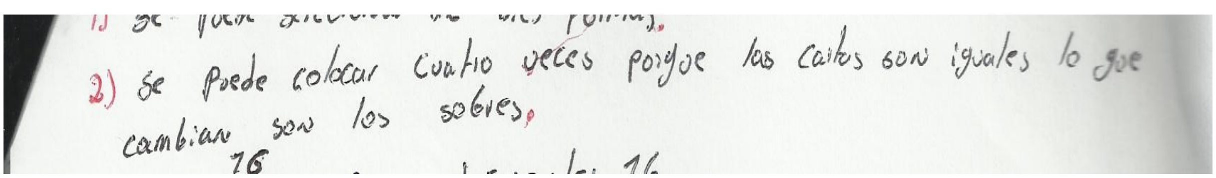
Figura 6. Pregunta 2, Alumno L3


Respuesta N°2
- 1carta en la dorada, otra en la crema y otra en el blanco
- 1 carta en el sobre blanco, otra en el amarillo y otra en la dorada.
- 1 carta en el sobre crema, otra en el blanco y otra amarillo.
- 1 carta en el sobre amarillo, otra en el dorado y otra en la crema

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R16:

Figura 6. Pregunta 2, Alumno R16

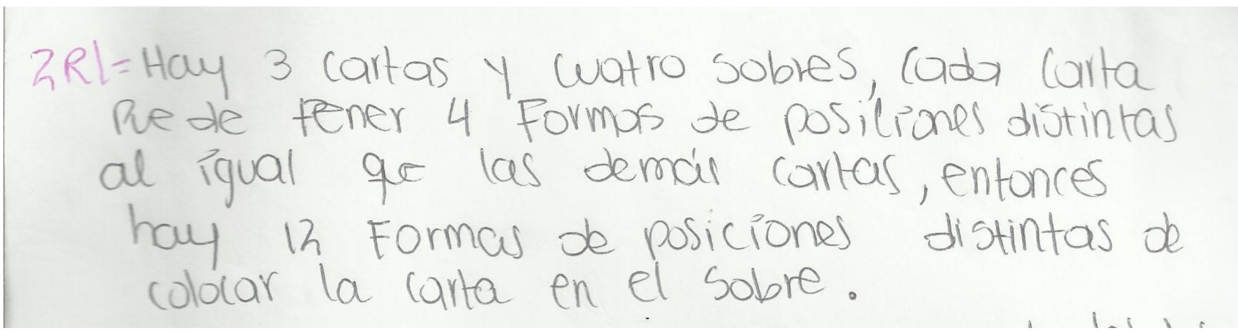

2) se puede colocar cuatro veces porque las cartas son iguales lo que cambian son los sobres.

Fuente: Los autores

Los alumnos encuentran la respuesta correcta con interpretaciones distintas; el alumno L3 realiza un proceso explícito de conteo directo, el alumno R16 solo sustenta su respuesta a partir de la cantidad de sobres diferentes que plantea el problema y no tiene en cuenta la información restante, por ejemplo si el problema plateara que fueran 7 sobres de diferentes colores su respuesta seria 7.

4.2.2.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L11:

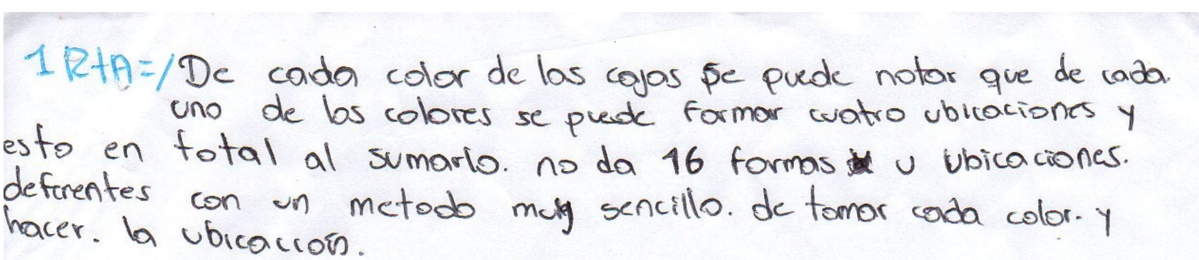
Figura 7. Pregunta 2, Alumno L11.


2R1=Hay 3 cartas y cuatro sobres, cada carta
Puede tener 4 Formas de posiciones distintas
al igual qe las demás cartas, entonces
hay 12 Formas de posiciones distintas de
colocar la carta en el sobre.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R21:

Figura 8. Pregunta 2, Alumno R21.


1RtA=/De cada color de los cajos se puede notar que de cada
uno de los colores se puede formar cuatro ubicaciones y
esto en total al sumarlo. no da 16 formas u ubicaciones.
deferentes con un metodo muy sencillo. de tomar cada color. y
hacer. la ubicacion.

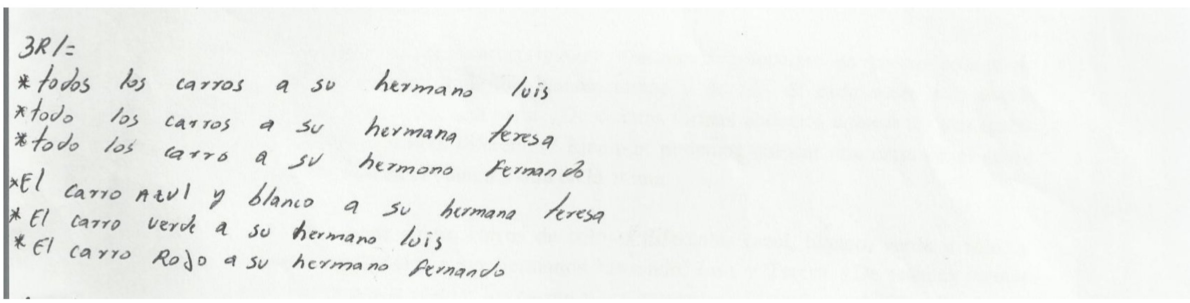
Fuente: Los autores

Hacen una interpretación incorrecta de los elementos que aparecen en el problema, porque hacen una diferenciación de las cartas. En estas resoluciones los alumnos aplican la regla del producto en un contexto inadecuado porque los subconjuntos que se multiplican no son los pertinentes para este problema de colocación.

4.2.3 Problema 3**.** Un niño tiene cuatro carros de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los carros a sus hermanos? Ejemplo. Podría dar los cuatro carros a su hermano Luis.

4.2.3.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L27:

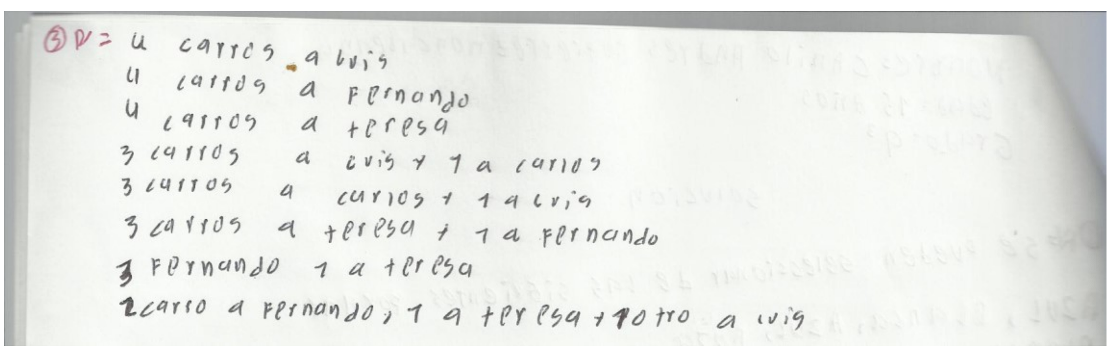
Figura 9. Pregunta 3, Alumno L27.


3R/=
*todos los carros a su hermano luis
*todo los carros a su hermana teresa
*todo los carro a su hermono Fernando
*El carro azul y blanco a su hermana teresa
*El carro verde a su hermano luis
*El carro Rojo a su hermano fernando

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R11:

Figura 10. Pregunta 3, Alumno R11.

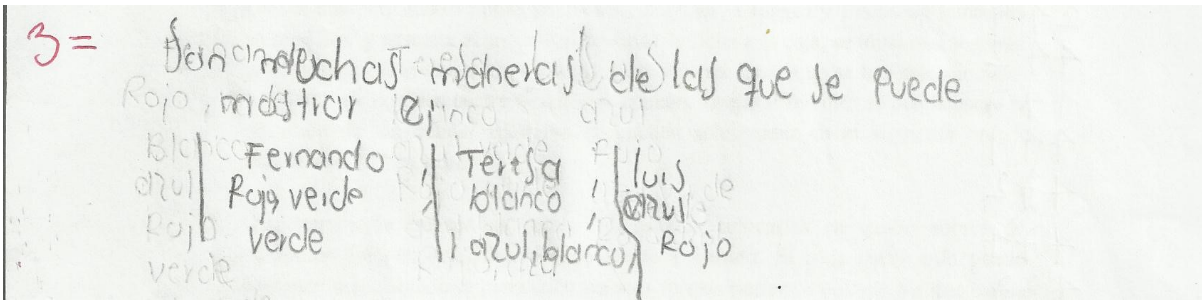

③ R= 4 carros a luis
4 carros a fernando
4 carros a teresa
3 carros a luis y 1 a carlos
3 carros a carlos + 1 a luis
3 carros a teresa + 1 a fernando
3 fernando 1 a teresa
2 carro a fernando, 1 a teresa + 1 otro a luis

Fuente: Los autores

Aplican la regla de la suma en un contexto inadecuado porque los subconjuntos dados no cubren el conjunto total de posibilidades. Aquí vemos como los alumnos tratan de crear intuitivamente un modelo combinatorio a través de la enumeración de los posibles resultados, estableciendo un orden en el proceso de recuento, pero no logran completar el total de configuraciones.

4.2.3.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L13:

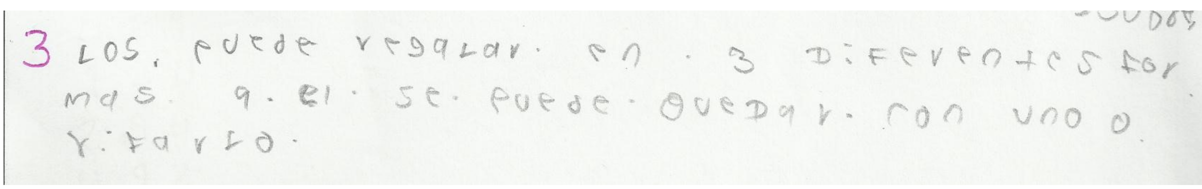
Figura 11. Pregunta 3, Alumno L13.


3= De cuantas maneras de las que se puede mostrar
Fernando Rojo verde verde, Teresa blanco azul, blanco, luis azul Rojo

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R24:

Figura 12. Pregunta 3, Alumno R24.


3 LOS. puede regalar en 3 diferentes formas todos
mas. q. el se puede quedar con uno o
repartido.

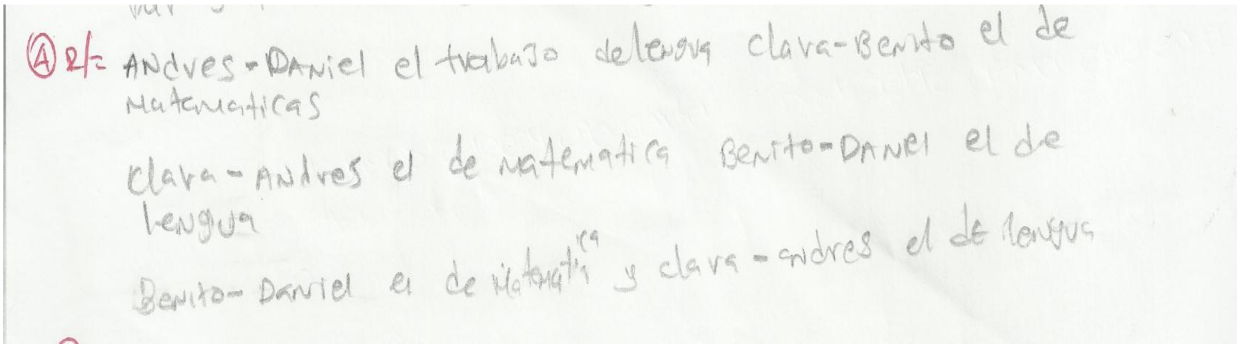
Fuente: Los autores

Los alumnos no logran reconocer los elementos del problema, lo cual hace que el proceso de enumeración de los posibles resultados se desarrolle en un contexto inadecuado.

4.2.4 Problema 4**.** Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes; uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo. Andrés-Benito puede hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

4.2.4.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L16:

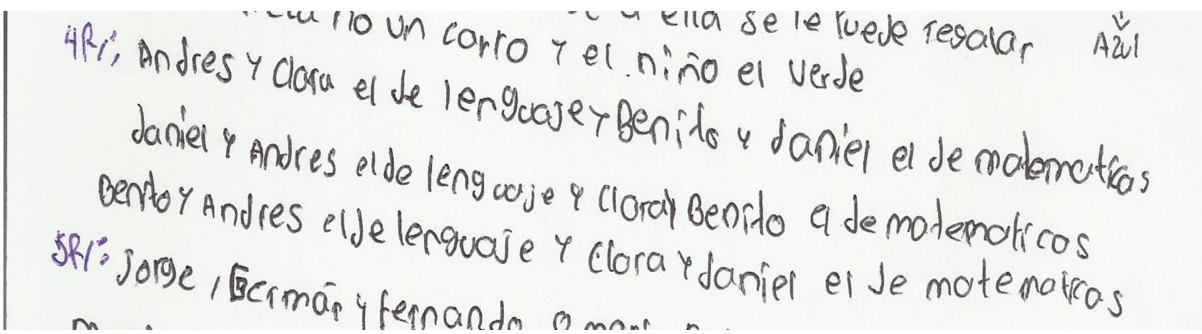
Figura 13. Pregunta 4, Alumno L16.


4 R/= Andres - Daniel el trabajo de lengua Clara - Benito el de matematicas
Clara - Andres el de matematica Benito - Daniel el de lengua
Benito - Daniel el de matematica y clara - andres el de lengua

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R18:

Figura 14. Pregunta 4, Alumno R18.

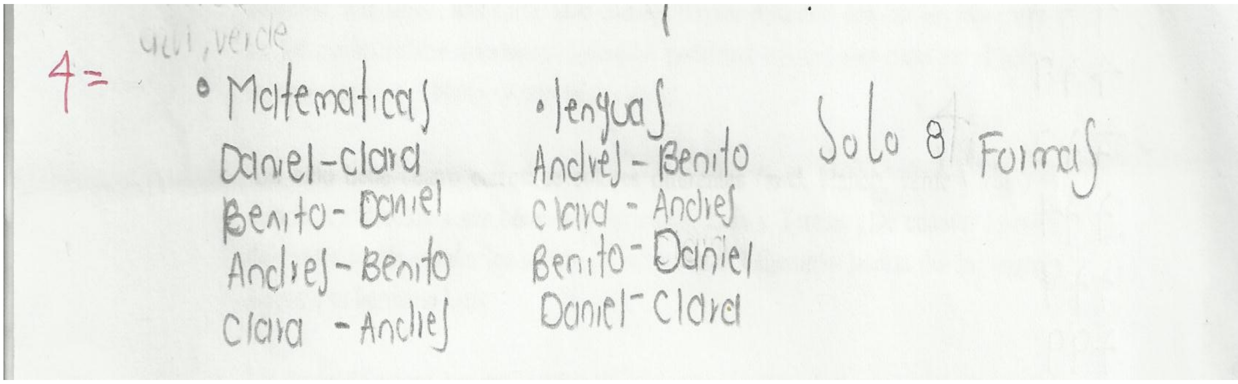

ella se le puede regalar Azul
un carro y el niño el verde
4R/: Andres y Clara el de lenguaje y Benito y daniel el de matematicas
daniel y Andres el de lenguaje y Clara y Benito a de matematicas
Benito y Andres el de lenguaje y Clara y daniel el de matematicas
5R/: Jorge, German y fernando

Fuente: Los autores

Aplican la regla de la suma en un contexto inadecuado, porque los subconjuntos dados no son excluyentes. Esto se debe principalmente a una interpretación incorrecta de los elementos que aparecen en el problema.

4.2.4.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L13:

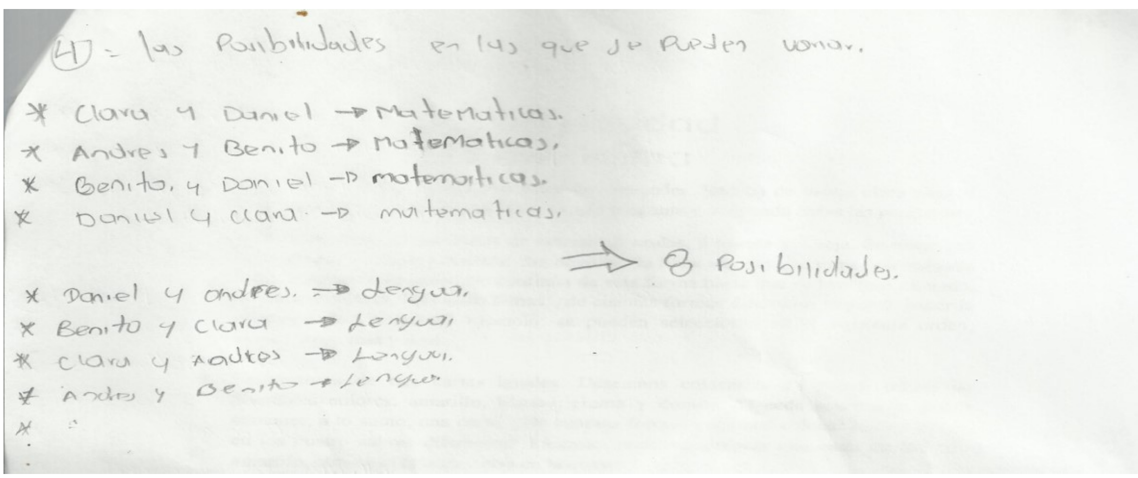
Figura 15. Pregunta 4, Alumno L13.



Fuente: Los autores

Resolución del alumno R15:

Figura 16. Pregunta 4, Alumno R15.



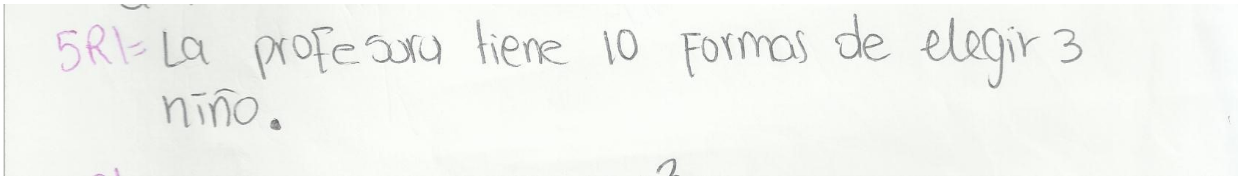
Fuente: Los autores

Aplican la regla de la suma en un contexto inadecuado, porque los subconjuntos dados no son excluyentes. Esto se debe principalmente a una interpretación incorrecta de los elementos que aparecen en el problema.

4.2.5 Problema 5. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios. Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo. Elisa, Fernando y María.

4.2.5.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L11:

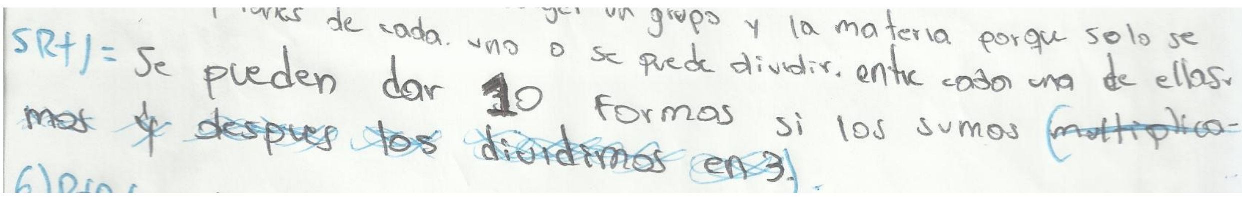
Figura 17. Pregunta 5, Alumno L11.


5R1= La profesora tiene 10 Formas de elegir 3 niño.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R21:

Figura 18. Pregunta 5, Alumno R21.


de cada. uno o se puede dividir. entre cada una de ellas. y la materia porque solo se

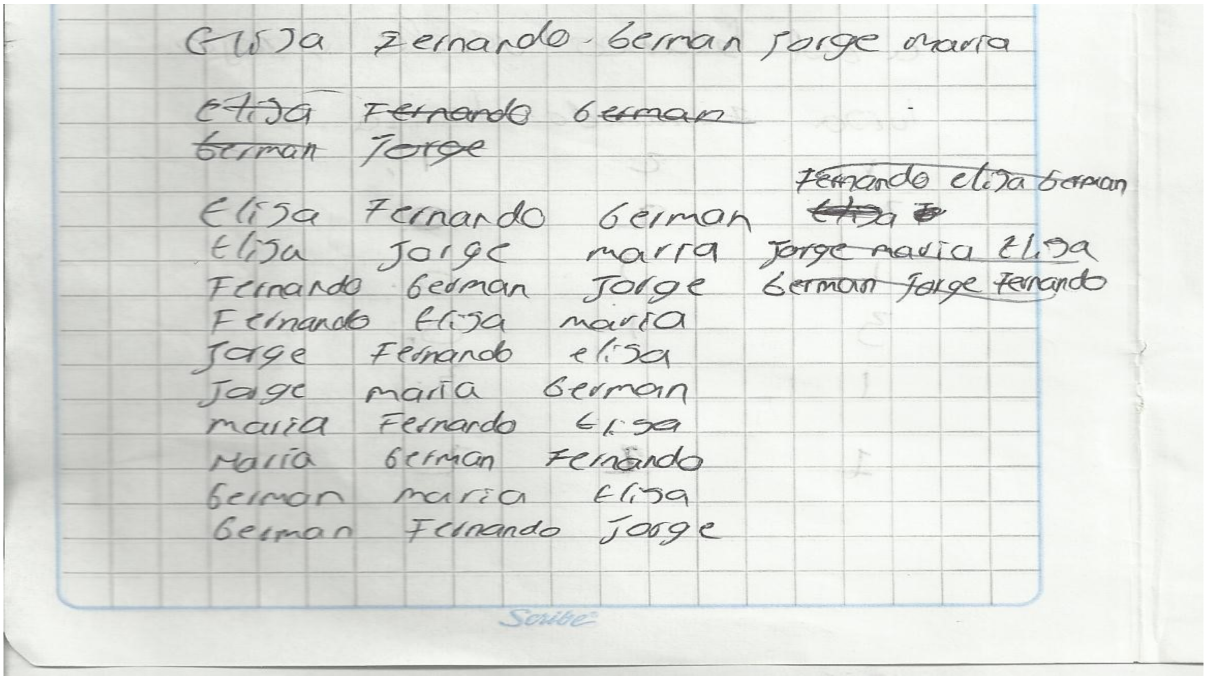
5R+1= Se pueden dar 10 formas si los sumos ~~multiplicamos~~ ~~y despues los dividimos en 3~~.

Fuente: Los autores

Aplican la regla de la suma en un contexto adecuado. Los estudiantes generan un modelo combinatorio sin hacer algún tipo de recuento o enumeración; afirman sin hacer ninguna comprobación, que existen 10 formas de elegir los 3 niños que van a borrar el tablero.

4.2.5.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L33:

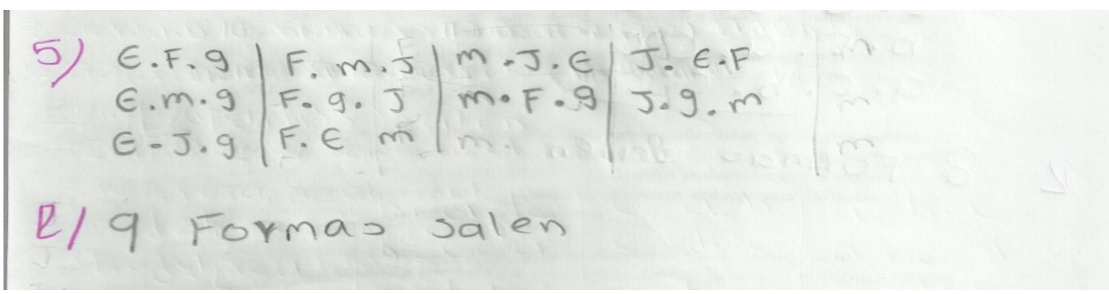
Figura 19. Pregunta 5, Alumno L33.



Fuente: Los autores

Resolución del alumno R6:

Figura 20. Pregunta 5, Alumno R6.



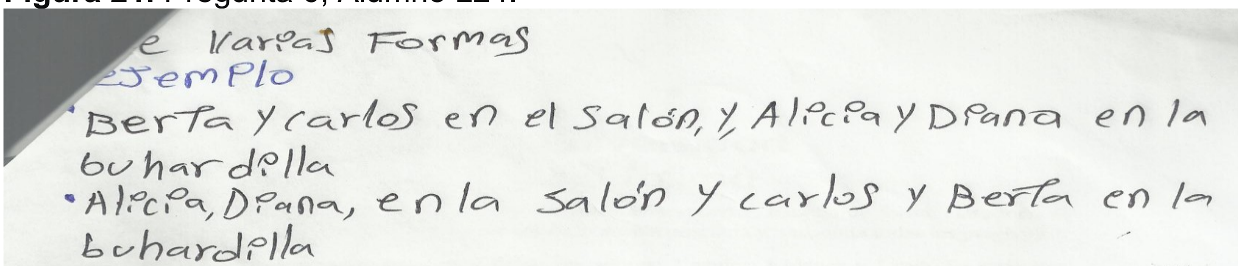
Fuente: Los autores

Los estudiantes generan un modelo combinatorio fijando un elemento en la primera posición, escriben todos los casos manteniendo el elemento fijo, esto les permite establecer un orden en la enumeración que los conduce a encontrar todos resultados posibles. Aplican la regla de la suma en un contexto adecuado, dividiendo el conjunto de configuraciones en subconjuntos mutuamente excluyentes.

4.2.6 Problema 6**.** Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo. Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

4.2.6.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L24:

Figura 21. Pregunta 6, Alumno L24.

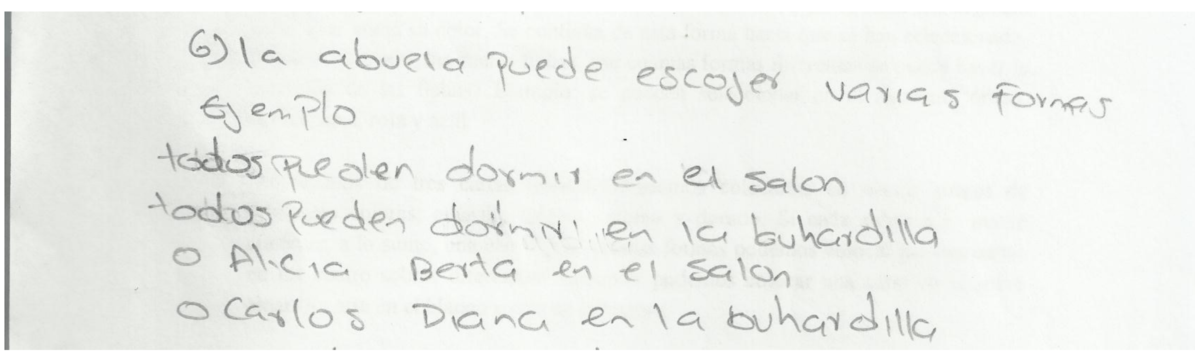


e Varias Formas
ejemplo
• Berta y carlos en el salón, y Alicia y Diana en la buhardilla
• Alicia, Diana, en la salón y carlos y Berta en la buhardilla

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R26:

Figura 22. Pregunta 6, Alumno R26.



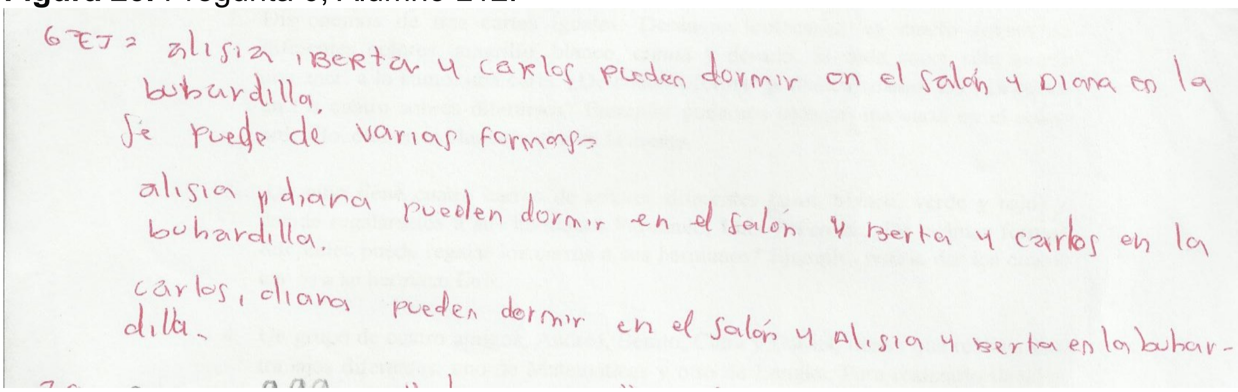
6) la abuela puede escojer varias formas
Ejemplo
todos pueden dormir en el salon
todos pueden dormir en la buhardilla
o Alicia Berta en el salon
o Carlos Diana en la buhardilla

Fuente: Los autores

Estos alumnos afirman sin hacer ninguna comprobación, que existen muchas formas de colocar los niños para dormir e incluso se atreven a escribir algunas configuraciones, pero, no desarrollan un proceso sistemático de enumeración. No reconocer las operaciones combinatorias, los conduce a generar intuitivamente un modelo combinatorio a través de la enumeración. La deducción que los estudiantes hacen es correcta en el sentido que se estaría proponiendo el uso de la regla de la suma en la solución del problema.

4.2.6.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L12:

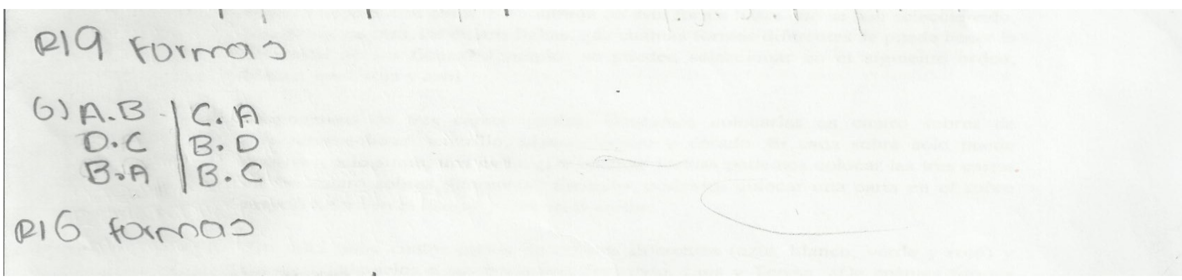
Figura 23. Pregunta 6, Alumno L12.


6 EJ = alisia, Berta y carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla,
Se puede de varias formas
alisia y diana pueden dormir en el salón y Berta y carlos en la buhardilla.
carlos, diana pueden dormir en el salón y Alisia y berta en la buhar-dilla.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R29:

Figura 24. Pregunta 6, Alumno R29.


R19 formas
6) A.B | C.A
D.C | B.D
B.A | B.C
R16 formas

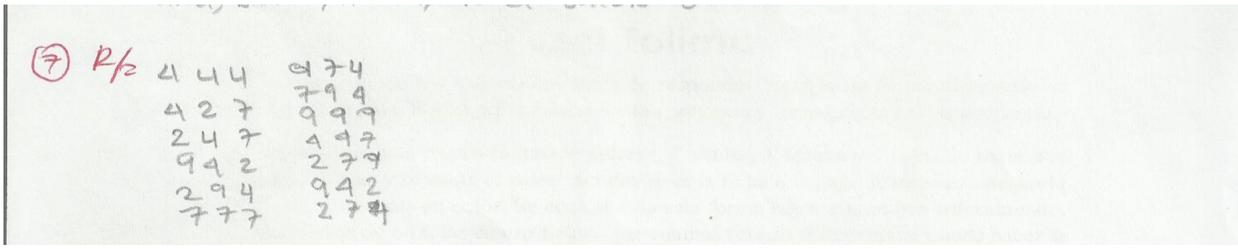
Fuente: Los autores

En esta solución los alumnos hacen una enumeración de todos los resultados posibles, pero sin establecer un orden en dicho procedimiento. Estos aplican la regla de la suma en un contexto inadecuado debido a que los subconjuntos que proponen no cubren el total de posibilidades.

4.2.7 Problema 7. En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraída se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo. Se puede obtener el número 222.

4.2.7.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L16:

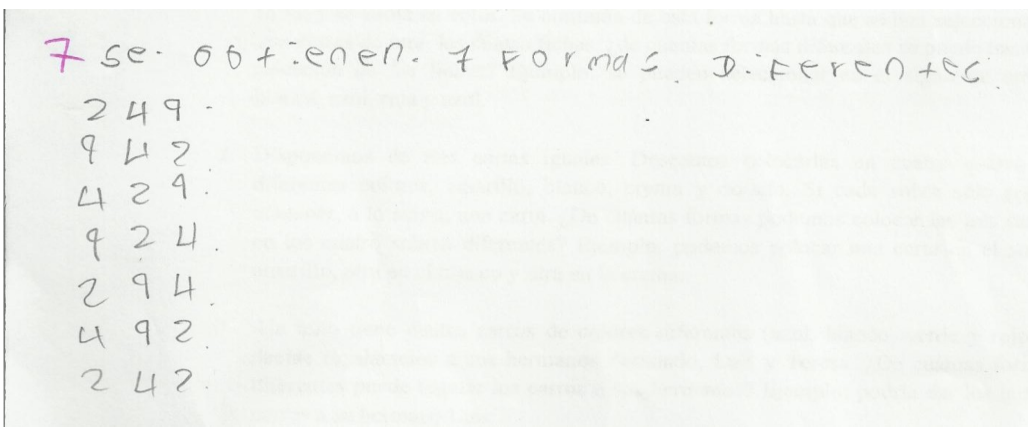
Figura 25. Problema 7, Alumno L16.



Fuente: Los autores

Resolución del alumno R24:

Figura 26. Problema 7, Alumno R24.

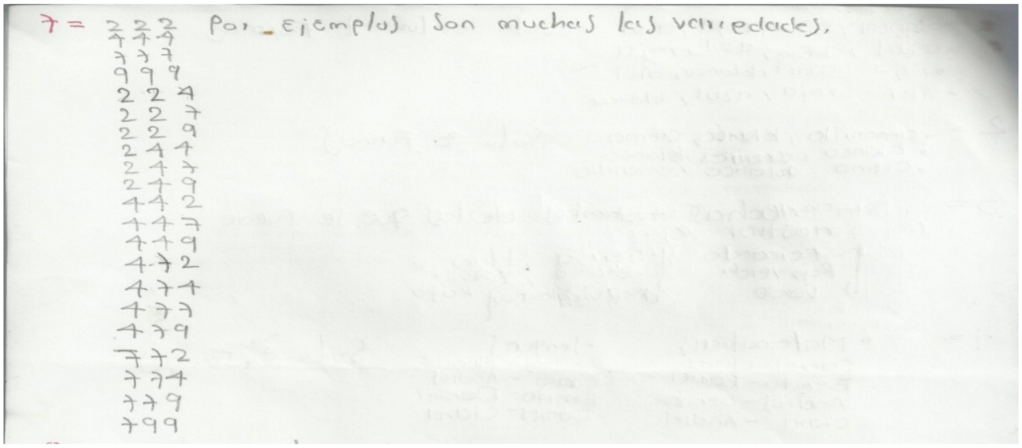


Fuente: Los autores

Usan el ensayo y error sin establecer un orden en la enumeración, escriben solo algunos delos casos posibles y lo hacen de una manera incorrecta porque dejan casos por escribir. En ambos casos los alumnos proponen como estrategia para resolver el problema, la utilización de la regla de la suma, aunque no sería una operación combinatoria adecuada para aplicar en este caso.

4.2.7.2 Tipo de respuesta 2. Resolución del alumno L13:

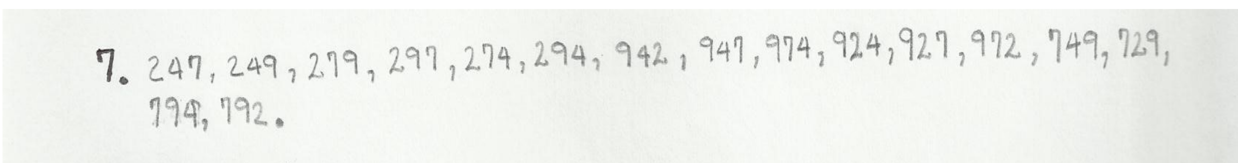
Figura 27. Problema 7, Alumno L13.


7 = 222 Por ejemplos Son muchas las variedades,
444
777
999
224
227
229
244
247
249
442
447
449
472
474
477
479
772
774
779
799

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R22:

Figura 28. Problema 7, Alumno R22.


7. 247, 249, 279, 297, 274, 294, 942, 947, 974, 924, 927, 972, 749, 729, 794, 792.

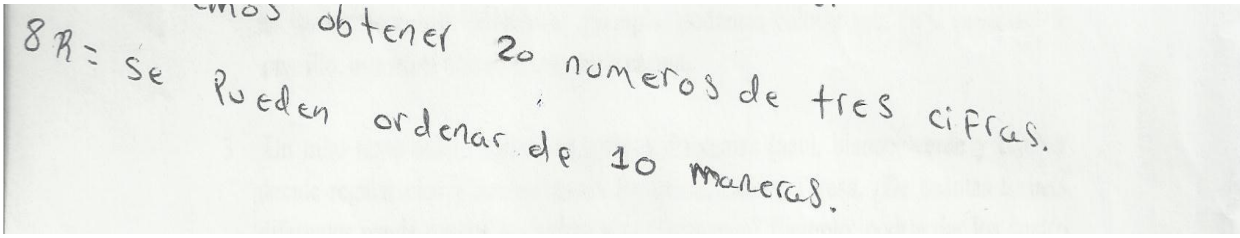
Fuente: Los autores

Estos alumnos fijan un primer elemento que les permite establecer un orden en la enumeración, pero solo escriben algunos de los casos. Tampoco repiten el procedimiento cambiando sucesivamente el primer elemento por otros, por lo cual es muy complicado que puedan encontrar el total de configuraciones. En estas dos resoluciones los alumnos proponen como estrategia la utilización de la regla de la suma., aunque esta no sería la operación combinatoria adecuada para aplicar en la resolución de este problema de selección.

4.2.8 Problema 8**.** Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra. A, B, C, C y C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo. Pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

4.2.8.1 Tipo de respuesta 1. Resolución del alumno L4:

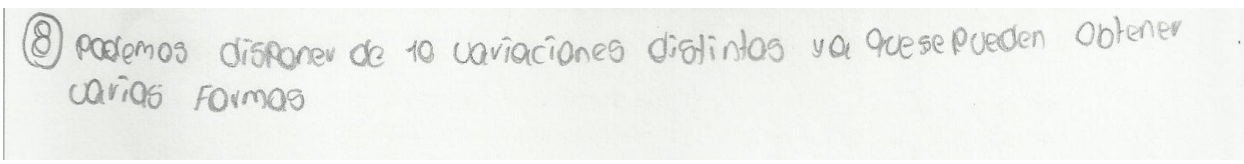
Figura 29. Problema 8, Alumno L4.


obtener 20 numeros de tres cifras.
8 R= Se pueden ordenar de 10 maneras.

Fuente: Los autores

Resolución del alumno R13:

Figura 30. Problema 8, Alumno R13.


8 podemos disponer de 10 variaciones distintas ya que se pueden obtener varias formas

Fuente: Los autores

Estos alumnos afirman sin hacer ninguna comprobación, que existen 10 formas de colocar las cartas, en estas resoluciones no se percibe el interés de los alumnos en utilizar una estrategia adecuada que los pueda llevar a encontrar la solución del problema planteado.

Los siguientes son los invariantes operatorios (conceptos y teoremas en acto) que se evidencian en las resoluciones.

Tabla 2. Conceptos y teoremas en actos

Conceptos en acto	Teoremas en acto
Variaciones	Un evento puede ocurrir de m formas diferentes
Combinación	Todos los elementos de un conjunto dado pueden formar diferentes grupos o subconjuntos.

Conceptos en acto	Teoremas en acto
Permutación	Una permutación es diferente de otra cuando el orden de los elementos es distinto.
Regla de la adición	Si un evento A puede ocurrir en m formas y un segundo evento B puede ocurrir en n formas y ambos eventos no pueden ocurrir en forma simultánea entonces A o B pueden ocurrir en m + n formas diferentes.
Regla de la multiplicación	Si un evento puede efectuarse de n_1 formas diferentes y si continuando el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de n_2 formas diferentes, entonces el número de formas en que los eventos puede realizarse será $n_1 \times n_2$ formas diferentes.

Fuente: Los autores

Este conjunto de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas acto) sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas evocados para resolver esta situación, tienen que ver con el significado que nuestros alumnos le dan al concepto de combinatoria. En relación a esta situación, Cabe destacar que ni los significantes ni la situación, evocan en el individuo todos los esquemas disponibles (por ejemplo, haber utilizado de manera generalizada la enumeración y el recuento como estrategia para encontrar todas las posibles configuraciones, o haber calculado el total de configuraciones a partir de una simple operación (suma o producto) sin tener en cuenta los elementos propios de cada problema). Es decir que esta situación relativa a la combinatoria no es su sentido, ni es el sentido de uno de sus símbolos en particular; sino el conjunto de esquemas que permiten diferenciar las diferentes formas en que pueden ocurrir los sucesos y a su vez, esto es apenas un subconjunto, de todos los esquemas disponibles en el sujeto, relativos al concepto de combinatoria.

5. CONCLUSIONES

En el capítulo anterior hemos hecho un análisis de las soluciones de los estudiantes a los problemas planteados, respecto a la interpretación del enunciado en cada problema, y la utilización o no de alguna estrategia (correcta o incorrecta) de resolución. Las principales conclusiones se describen a continuación.

Nuestro análisis pone de manifiesto la notable dificultad que tienen los alumnos para hacer una diferenciación correcta del tipo de elementos (distinguibles o no) que se plantean en los problemas de permutaciones y de variaciones con repetición. Los errores en la ordenación y en la repetición aparecen en la mayoría de las resoluciones, aunque cabe aclarar, que esto es algo que se podría considerar como frecuente en estos casos, donde los alumnos no han recibido instrucción sobre combinatoria.

Los alumnos no se valen de la simbolización como un elemento de ayuda en la visualización de la estructura combinatoria que plantea cada problema. Estos en cambio, se apoyan en la enumeración y el recuento, aunque mayoritariamente muestran métodos no sistemáticos o no completos de enumeración. Muy pocos alumnos utilizan la enumeración sistemática como una estrategia que los pueda llevar a encontrar todas las posibles configuraciones. En ambas experiencias, los alumnos no generalizan correctamente una enumeración parcial o no son capaces de completar un proceso recursivo de resolución.

El análisis hecho muestra claramente como los alumnos que contribuyeron con algún tipo de solución se apoyaron principalmente en la aplicación de la regla de la suma sin hacer una diferenciación de las operaciones y los esquemas combinatorios que planteaba el cuestionario. Esto hizo que en algunos casos, sus planteamientos fueran los adecuados para cierto tipo de problemas, pero para otros, no. Estos estudiantes mostraron la intención de construir un modelo combinatorio a partir del recuento y la enumeración (sistemática o no) sin distinguir el tipo de problema al que se enfrentaban.

Hacer una diferenciación de las distintas situaciones implica, en primer lugar, una comprensión profunda del problema.

Los resultados nos muestran claramente que el razonamiento combinatorio no se desarrolla espontáneamente con tanta facilidad como se podría pensar en cuanto al uso de estrategias generales y aritméticas, ya que como se puede ver en estas resoluciones, los alumnos evocaron mayoritariamente la utilización de la regla de la suma, cuando se suponía que podían aplicar todo un conjunto de estrategias acordes con los esquemas combinatorios que planteaba cada uno de los problemas.

Nuestro trabajo muestra lo difícil que es para los alumnos, la construcción de conceptos relacionados con la combinatoria. Aunque, se debe aclarar que todas las dificultades aquí expuestas, pueden ser superadas a través del diseño de estrategias didácticas que se puedan estructurar a partir de diferentes teorías como las propuestas por Vergnaud, Piaget, Fischbein y Dubinsky.

La enseñanza de la combinatoria generalmente se introduce en nuestras instituciones educativas a partir del nivel medio de formación. De allí que, el análisis aquí presentado, podría ser de mucha ayuda en el diseño de estrategias didácticas propias para estos niveles. Analizar la conveniencia, la relevancia y la efectividad del análisis expuesto en esta experiencia podría ser objeto de una futura investigación.

Este trabajo cuestiona la manera en que se está enseñando la combinatoria en nuestras instituciones educativas. Estamos convencidos que aquí hay una oportunidad de ayudar al estudiante a desarrollar nuevas herramientas, a través de la práctica adecuada de estas habilidades dentro del aula de clase. Ya es hora de cambiar los métodos actuales de enseñanza de la combinatoria que hacen énfasis excesivo en las definiciones de las operaciones combinatorias y su aplicación como un único método de resolución de problemas, por una combinatoria donde las estrategias de resolución se puedan utilizar adecuadamente a la diversidad de situaciones planteadas en cualquier campo de aplicación. Esta experiencia puede ser un primer paso en la construcción de una secuencia didáctica que pueda llevar al alumno a desarrollar la capacidad de plantear problemas a partir de la utilización de razonamientos individuales adecuados.

REFERENCIAS

Batanero, M.; Godino, J.; y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio. Madrid. Síntesis.*

Dubois, J. G. (1984). *Une systematique des configurations combinatoires simples. Educational Studies in Mathematics* , pp. 181-199.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). *The combinatorial solving capacity in children and adolescents. Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik* , pp. 193-198.

Grimald, R. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics*. Addison-Wesley.

Kapur, J. (1970). *Combinatorial analysis and school mathematics*.

Navarro-Pelayo, V.; Bataner, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. *Educación Matemática*, 8 (1), 26-39.

Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). *La génése de l´idée d´hasardchez chez l´enfant*. Paris. Presses Universitaire de France.

Roa Guzman, R. (2000). *Razonamiento Combinatorio en Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada*. (D. d. Granada, Ed.) Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada .

Salgado, H. y Trigueros, M. (2009). Conteo. Una Propuesta Didáctica y su Análisis. *Educación Matemática*, 21 (1), 91-117.

Trigueros, M. y Martínez, R. (2010). Geometrical Representations in the Learning of two - Variable Functions. *Educ Stud Math*, (73).3-19.

Vásquez F. (2008) Su vida y sus obras. Recuperado de http://www.ufrgs.br/psicoeduc/piaget/francisco-vazques-jean-piaget-su-vida-y-sus-obras/

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *A cognitive Perspective*. , pp. 39-59.

Vergnaud, G. (2005). *En sur la Théorie des situations didactiques. Hommage a Guy Brousseau.* La penseé savage .

Vergnaud, G. (2007). *Forma Operatoria y Forma Predicativa del Conocimiento.* Actas primer encuentro Nacional sobre enseñanza de la Matemática. Tandil.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. (L. p. Sauvage, Ed.) *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23) , pp.133-170.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Agenda In Mathematics. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. , pp. 141-164.

Zuñiga, L. (2007). El Cálculo en Carreras de Ingeniería. Un Estudío Cognitivo. *Relime* , 10 (1), pp. 145-175.

ANEXOS

Anexo A. Instrumento aplicado a los estudiantes.

Universidad del Tolima

Lea bien cada uno de los enunciados antes de responder. Escriba de forma clara todo el procedimiento empleado para dar solución a cada pregunta y responda todas las preguntas.

1. En una caja hay cuatro fichas de colores; 2 azules, 1 blanca y 1 roja. Se toma una ficha al azar y se anota el color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿de cuantas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo. se pueden seleccionar en el siguiente orden, blanca, azul, roja y azul.

2. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores. amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo. podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en la crema.

3. Un niño tiene cuatro carros de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los carros a sus hermanos? Ejemplo. podría dar los cuatro carros a su hermano Luis.

4. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes. uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo. Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

5. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios. Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo. Elisa, Fernando y María.

6. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo. Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

7. En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraída se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo. se puede obtener el número 222.

8. Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra. A, B, C, C y C. De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo. pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

Anexo B. Protocolos realizados por los estudiantes.

Protocolo L11

1R|= De cada color se puede sacar 4 formas distintas. Esto afirma que de cada color se saca 4 posiciones, entonces en total se puede encontrar 16 formas distintas de todos los colores asignados.

2R|= Hay 3 cartas y cuatro sobres, cada carta puede tener 4 formas de posiciones distintas al igual que las demás cartas, entonces hay 12 formas de posiciones distintas de colocar la carta en el sobre.

3R|= El niño puede tener 30 formas de regalarles los carros a sus hermanos, porque cada hermano tiene 10 formas distintas y son 3 hermanos entonces ~~cada~~ ~~uno~~ se suma y da 30.

4R|= Salen 24 formas para hacerlen en los trabajos de lenguaje y matemáticas porque cada niño tiene 3 formas de elegir y 2 materias que escoger y se puede sumar las opciones o dividir.

5R|= La profesora tiene 10 formas de elegir 3 niño.

6R|= La abuela puede tener 2 formas de colocar los niños en 1 o las 2 habitaciones.

Protocolo L13

1 = • blanca , azul , roja , azul Solo odtuve 4 Formas
• azul , blanca azul , roja
• roja azul , blanca , azul
• azul roja , azul , blanca

2 = • amarillo , blanco , crema Solo 3 Formas
• blanco , crema , blanco
• crema blanco , amarillo

3 = Hay muchas maneras de las que se puede mostrar ej

Fernando Roja verde verde , Teresa blanco azul , blanco , luis azul Rojo

4 = • Matematicas
Daniel - clara
Benito - Daniel
Andres - Benito
clara - Andres

• lenguas
Andres - Benito
clara - Andres
Benito - Daniel
Daniel - clara

Solo 8 Formas

5 = Elisa - Fernando - Maria Solo hay 5 Formas
Maria - German - German
Fernando - jorgue - Elisa
German - Elisa - Fernando
jorgue - Maria - jorgue

6 = Salon
Diana - Alicia - carlos - Berta
vacio
Diana
Alicia
Berta
carlos
Diana - alicia
Diana - Berta

buhardilla
vacio
Alicia - Diana - Berta - carlos

ha muchas Formas

7 = 222 Por Ejemplos Son muchas las variedades.
444
777
999
224
227
229
244
247
249
442
447
449
472
474
477
479
772
774
779
799

8 = ABCC hay 4 Formas
CCAB
CABC
BCCA

Protocolo R6

Angie Lorena Pinto Montaña   Edad: 15 años

1 4- Ficha
2- azules
1- Blanca
1- roja

1) B, a, r, a. 2) a, r, B, a 3) a, a, B, r. 4) a. a. r. B
5) r. B, a, a. 6) B, r, a, a 7) r. a. B, a. 8) B, a. a. r
9) a. r. a. B 10) a. B. a. r 11) r. a. a. B. 12) a. B. r. a
13) 14) 15) 16)

R/ 12 Formas salen

2)

d. b. c	b. a. d	c. a. b	a. b. c
d. c. a	b. c. a	c. d. c	a. c. d
d. a. c	b. d. c	c. b. a	a. d. b

R/ 12 Formas salen

3)

a. b. v. r	b. a. v. r	v. a. b. r	a. b. v. r
a. v. b. r	b. v. a. r	v. b. a. r	a. v. b. r
a. r. v. b	b. r. v. a	v. a. r. b	a. b. r. v
a. r. b. r	b. r. a. v	v. r. a. b	a. r. b. v

R/ 16 Formas salen

4)

a.b	b.c	c.d
a.c	b.d	
a.d		

R/ 6 Formas salen

5)

E.F.g	F.m.J	m.J.E	J.E.F
E.m.g	F.g.J	m.F.g	J.g.m
E.J.g	F.E m	m.	

R/ 9 Formas salen

6)

a.b	b.C	c.d
a.C	b.d	
a.d		

R/ 6 Formas salen

7)

2.2.2	2.4.7	9.7.4	9.4.2
4.4.4	9.4.7	7.2.4	9.2.7
9.9.9	2.4.9	4.9.7	
7.7.7			

R/ 12 Formas salen

8) a.b. c c c
c c c a b
a c c c b
b c c c a
c . a . b . c . c
c . b . a . c c
b . c . a . c c
a . c . b . c c

R 8 Formas salen

Protocolo R7

MARIHA ISABEL TIQUE YARA 15 AÑOS

① creo que la operación que se puede hacer es una multiplicación por que se multiplica 3 colores por 4 fichas entonces es 3x4=12 y el resultado es 12 por que se multiplica los 3 colores y las cuatro fichas.

② si se puede colocar las cartas encima de un sobre por que hay cuatro colores dorado, crema, blanco amarillo entonces se puede formar de 4 maneras por que se multiplica 2x2 = 4 formas.

③ los puede regalar de dos maneras porque son cuatro carros de color azul, rojo, verde, blanco a Fernando y a luis se los puede regalar Luis y dos a Fernando entonces los repartirian de dos a para así repartirlos bien:

④ se pueden dividir en dos por que son dos trabajos y cuatro compañeros entonces son dos formas en las que pueden dividir por que un trabajo es de lenguaje y otro de matematicas y entonces son cuatro chicos y se agrupan de dos para poder realizar el trabajo

⑤ se puede formar de cinco formas por que la profesora elige 3 estudiantes y hay cinco voluntarios entonces los cincos pueden borrar la pizarra.

⑥ Son cuatro niños y son dos habitaciones de su habuelo un salon y una buhardilla entonces se divide $4 \underline{|2}$ entonces Alicia, Berta duermen en un salon carlos y diana en la buhardilla entonces no sobra ni un salon

⑦ Podemos obtener cuatro numeros de cuatro cifras por que hay cuatro bolas del bombo y cada bola anota un numero.

8 Se pueden colocar de 3 formas por que son 6 letras pero hay 3 diferentes y 3 repetidas estan la A B C y la c esta repetida po 3 vecez entonces la hilera puede ser

A
B
C
C
C

y la hilera tiene que estar siempre ordenada

Protocolo R21

1 RtA=/ De cada color de las cajas se puede notar que de cada uno de los colores se puede formar cuatro ubicaciones y esto en total al sumarlo. no da 16 formas u ubicaciones. deferentes con un metodo muy sencillo. de tomar cada color. y hacer. la ubicaccion.

2 RtA/= Si hay 3 carta y 4 sobres para colocarlos de diferente forma al posicionar las cartas en solo 3. sobre nos da. 9 y al tomar cada sobre y sumarle 1, a cada color nos dare 12 formas de poderlo colocar.

3 RtA/= En este caso solo hay 30 casos diferentes porque al sumar los opciones que tiene cada uno y si al sumar la de los tres nos da 30 opciones diferentes.

4 RtA/= Salen 24 formas de escoger un grupo y la materia porque solo se suman. los opciones de cada. uno o se puede dividir. entre cada una de ellas

5 Rt/= Se pueden dar 10 formas si los sumos ~~(multiplicamos y despues los dividimos en 3)~~.

6) RtA/= existen 2 formas en una abitacion tres, en el buardilla una. Sola nina o dos en el salon y 2 en la buarhardilla.

7) RtA/= Se pueden optener 1.000 formas desde el 000 hasta el 999. porque habla de 3 sifros.

~~8) RtA~~/=