PRINCIPIOS MATEMÁTICOS DE LOS HIPERREALES

Deiver Suárez G.
Oscar Andrés Lugo C.

Director
Leonardo Solanilla Ch.

Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas y Estadística
Programa de Matemáticas con Énfasis en Estadística

Ibagué, febrero de 2014

Principios matemáticos de los hiperreales

Trabajo de grado para optar al título de
profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

Deiver Suárez G., código 070250112008

Oscar Andrés Lugo C., código 070200022008

Director
Leonardo Solanilla Ch.
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas y Estadística
Programa de Matemáticas con Énfasis en Estadística

Ibagué, febrero de 2014

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: "PRINCIPIOS MATEMÁTICOS DE LOS HIPERREALES"

AUTORES: DEIVER SUAREZ GÓMEZ, CÓDIGO 070250112008
OSCAR ANDRÉS LUGO, CÓDIGO 070200022008

DIRECTOR: LEONARDO SOLANILLA CHAVARRO

JURADOS: ARNOLD OOSTRA
JUAN PABLO YAÑEZ PUENTES

CALIFICACIÓN: 5,0 (Trabajo LAUREADO)

X APROBO ___ REPROBO

OBSERVACIONES: Trabajo LAUREADO.

FIRMAS

Arnold Oostra
ARNOLD OOSTRA
Jurado 1

Juan Pablo Yañez P.
JUAN PABLO YAÑEZ PUENTES
jurado 2

Leonardo Solanilla Ch.
LEONARDO SOLANILLA CHAVARRO
Director del Trabajo

Horacio Molano E.
HORACIO MOLANO
Director del Programa

Ciudad y Fecha: Ibagué, 2 de mayo de 2014

Resumen. Se introducen los hiperreales por medio de la llamada *construcción del ultrafiltro*. Se parte del concepto conjuntista de hiperextensión, para mostrar luego las ventajas que la Lógica proporciona al estudio de los hiperreales. Se realiza, así mismo, una aplicación de la teoría obtenida al estudio de la continuidad y la diferenciabilidad de las funciones univariadas reales. También se trata brevemente la convergencia de las sucesiones de números reales con ayuda de los infinitesimales.

Abstract. We present a construction of the hyperreals by means of ultrafilters. We depart from the set-theoretic concept of hyperextension and then show the benefits provided by Logic to the study of hyperreals. Furthermore, we perform an application of the theory to the study of continuity and differentiability of real univariate functions. In this framework, we briefly discuss the convergence of sequences of real numbers.

La mónada, de la que hablaremos aquí, no es otra cosa que una substancia simple, que forma parte de los compuestos; simple, es decir, sin partes.

. . .

Se sigue de lo que acabamos de decir que los cambios naturales de las mónadas vienen de un principio interno, puesto que una causa externa no puede influir en su interior.

W. G. Leibniz en la *Monadología.*

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Cavalieri, Mengoli, Roberval y muchos otros soñaron los indivisibles, versión temprana de los infinitesimales, durante la primera mitad del siglo XVII. En la segunda mitad de este grandioso siglo del cálculo infinitesimal, Leibniz y Giovanni Bernoulli, en el continente, y Newton con su escuela, en Inglaterra, sacaron ventajoso provecho de los "infinitamente pequeños". Sin embargo, durante los dos siglos siguientes, los infinitesimales fueron desapareciendo lentamente de las matemáticas, al punto de que Cauchy, Bolzano y Weierstrass, entre otros, los dejaron totalmente por fuera de la rigurosa formalización del Análisis decimonónico. Algunos atribuyen esta reacción a las dificultades técnicas y teóricas, como por ejemplo, a la pérdida de la propiedad arquimediana. A pesar de esto, el inconsciente matemático se empeñaba en revivir su antiguo sueño. Así lo dejan ver algunos trabajos, no muy bien acogidos por cierto, de du Bois-Reymond y de Hadamard. No olvidemos tampoco que Félix Klein fue un gran defensor de la utilidad didáctica de los infinitesimales.

A partir de 1930, los trabajos de Skolem abrieron la posibilidad de extender rigurosamente los reales (de varias maneras) mediante la adjunción de nuevos elementos. Dichos elementos comprendían números más grandes que cualquier entero y números positivos menores que el inverso de cualquier entero positivo. Con ello, nacía un nuevo cálculo infinitesimal. En el marco de sus investigaciones sobre anillos de funciones reales, Edwin Hewitt bautizó en 1948 a estos números con el nombre de hiperreales. En 1955, Jerzy Łoś demostró que dichos cuerpos tenían todas las propiedades de una extensión elemental de los reales. A comienzos de los años 1960, Abraham Robinson, en la línea de Hewitt, afronta el problema con ayuda de la Teoría de Modelos y desarrolla su famosa construcción de los ultraproductos. Estas teorías se enmarcan ya dentro del llamado Análisis no-estándar. La teoría de Robinson encontró luego una generalización axiomática en la Teoría de Conjuntos Internos de Edward Nelson. En ella, se agregan tres nuevos axiomas a la teoría de Zermelo-Fraenkel. Y la explosión de resultados continúa hasta nuestros días. Reconocemos que no somos expertos en el tema y dejamos el recuento histórico en este punto. Por cierto, los últimos años han visto la publicación de varios textos elementales de Cálculo que usan sin remordimiento a los infinitesimales.

Como toda teoría nueva en las matemáticas, el Análisis no-estándar ha tenido sus oponentes. Las críticas vienen de dos direcciones. Por un lado, se critica la complejidad del aparato lógico que lo soporta; por otro, se critica su enseñanza. En nuestra humilde opinión, la construcción de Robinson es natural, pues desde sus orígenes el Cálculo ha querido ser lo que su etimología sugiere: una ciencia de los números, una "aritmética". La construcción es, además, "canónica", pues tiene los mismos ingredientes que las construcciones de los sistemas numéricos usuales. Además de esto, ofrece una alternativa de simplificación a los argumentos de tipo épsilon-delta. Creemos así mismo que estas observaciones respaldan la posición de Klein sobre su utilidad que un enfoque infinitesimal reporta a la enseñanza. Sin duda alguna, el asunto de la enseñanza del Análisis no-estándar merece muchas otras reflexiones que nos apartarían de los objetivos que nos hemos propuesto.

En este trabajo de grado se presenta una construcción de los hiperreales que no quiere ser tan elemental como para un primer curso de Cálculo, pero que tampoco pretende alcanzar las alturas del estado del arte sobre la materia. Se busca simplemente contar una historia accesible a estudiantes de últimos semestres de pregrado en Matemáticas. Nuestro punto de partida ha sido la presentación de Henson (1997), que es bastante flexible en cuanto a prerrequisitos de Lógica y Teoría de Conjuntos. Además del libro imprescindible de Robinson (1960), consideramos la construcción del ultrafiltro dada por Keisler (2010) y el conocido libro de Takeuchi (1988). A los escritos fundacionales de Newton y Leibniz, agregamos la presentación histórica de Hairer y Wanner (2008). Para el estudio de los temas de Análisis en el Capítulo 5, seguimos las ideas de Goldblatt (1998).

En el primer capítulo se define con conjuntos la noción de hiperextensión de un conjunto no vacío. El segundo capítulo está dedicado a probar la existencia de tales hiperextensiones. Para ello, se usa el ultraproducto de Robinson sin entrar en mayores detalles sobre los ultrafiltros. En el tercer capítulo se reescriben los resultados de los dos primeros en términos del lenguaje más apropiado y transparente de las fórmulas lógicas de primer orden. El cuarto capítulo está dedicado a aplicar la teoría anterior a la construcción del sistema de números hiperreales. En este capítulo se desarrollan conceptos ya conocidos de una manera nueva (o sea, distinta a la presentada en las referencias conocidas). Ellos tienen que ver con la construcción de los infinitesimales y los infinitos. En el quinto y último capítulo se estudian algunos temas básicos de Cálculo en el lenguaje de los hiperreales. Ellos comprenden las funciones continuas, las funciones diferenciables y las sucesiones. Al final, se esbozan algunas conclusiones sobre lo aprendido durante la elaboración de este trabajo.

Agradecemos al profesor Arnold Oostra por sus asesorías y motivación.

CAPÍTULO 1

Hiperextensiones

Quae de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta.[1]
I. Newton en sus *Principia*, libro I, sección I, Lema XI, escolio.

La cita de Newton que introduce este capítulo inicial puede entenderse en el sentido de que el cálculo en varias variables (es decir, en $\mathbb{R}^n$) se desprende sin mayores complicaciones del cálculo en una sola variable real. En relación con esto, nuestro propósito inicial consiste en extender un conjunto abstracto de tal manera que la extensión resultante preserve la "estructura de primer orden" del conjunto de partida. Esta estructura comprende subconjuntos y funciones en todos los productos cartesianos finitos. Veamos.

1.1. Definición

Sea X un conjunto abstracto no vacío. Una hiperextensión de X es un par $(*X, h)$ donde $*X$ es un conjunto no vacío y h es una inyección graduada con las características que se especifican enseguida.

[1]*. . . those things which have been demostrated of curve lines, and the surfaces they comprehend, are easily applied to the curve surfaces and contents of solids.*

1. Para cada grado $n \in \mathbb{N}$, se tiene una aplicación inyectiva de conjuntos de partes $h_n : \mathcal{P}(X^n) \hookrightarrow \mathcal{P}((*X)^n)$. Si $A \subseteq X^n$, escribimos $h_n(A) = *A \subseteq (*X)^n$. En el grado cero se asume $X^0 = (*X)^0 = \emptyset$ y la aplicación queda definida por $h_0(\emptyset) = \emptyset$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n define un monomorfismo (homomorfismo inyectivo) de álgebras de Boole de $(\mathcal{P}(X^n), \cup, \cap, ^c)$ en $(\mathcal{P}((*X)^n), \cup, \cap, ^c)$. Es decir, si $A, B \subseteq X^n$, entonces $*(A \cup B) = *A \cup *B$, $*(A \cap B) = *A \cap *B$ y $*(A^c) = (*A)^c$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n preserva las diagonales básicas. Es decir, si $1 \leq i < j \leq n$ y D es la diagonal $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i = x_j\} \subset X^n$, entonces
$$*D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i = x_j\} \subset (*X)^n.$$

4. Para cada par $m, n \in \mathbb{N}$, la aplicación producto $h_m \times h_n$ es compatible con h_{m+n} por medio de las idenficaciones usuales de los productos cartesianos
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X^m) \times \mathcal{P}(X^n) \arrow[r, "h_m \times h_n"] \arrow[d, shift right] & \mathcal{P}((*X)^m) \times \mathcal{P}((*X)^n) \arrow[d, shift right] \\ \mathcal{P}(X^{m+n}) \arrow[r, "h_{m+n}"] \arrow[u, shift right] & \mathcal{P}((*X)^{m+n}). \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$
Con precisión, si $A \subseteq X^m, B \subseteq X^n$, es lícito escribir $*(A \times B) = *A \times *B$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la proyección π_n, que omite la última coordenada, se preserva o es compatible con h_{n+1}, h_n. En concreto, el siguiente diagrama conmuta.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X^{n+1}) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "h_{n+1}"'] & \mathcal{P}(X^n) \arrow[d, "h_n"] \\ \mathcal{P}((*X)^{n+1}) \arrow[r, "*\pi_n"] & \mathcal{P}((*X)^n). \end{tikzcd}$$
Es decir, si $A \subseteq X^{n+1}$, entonces $*(\pi_n(A)) = *\pi_n(*A)$.

1.2. Consecuencias para los subconjuntos

Observemos primeramente que la condición de homomorfismo sobre el complemento se puede cambiar por otra equivalente sobre la diferencia de conjuntos.

Proposición 1.1. *Para cada grado n, $*(A - B) = (*A - *B)$.*

Demostración. Si $A, B \in X^n$, entonces

$$*(A - B) = *(A \cap B^c) = *A \cap *(B^c) = *A \cap (*B)^c = *A - *B.$$

□

El orden de la inclusión también se preserva.

Proposición 1.2. *Para cada grado n, $A \subseteq B \leftrightarrow *A \subseteq *B$.*

Demostración. Si $A, B \subseteq X^n$ y $A \subseteq B$, entonces $A = A \cap B$. Al aplicar h_n, $*A = *A \cap *B$, o sea, $*A \subseteq *B$. La implicación en la otra dirección se obtiene con las imágenes inversas. □

Notemos igualmente que la inyectividad de las aplicaciones se puede remplazar por una condición algebraica equivalente.

Proposición 1.3. *En la definición de hiperextensión, usemos la palabra homomorfismo en lugar de monomorfismo. Para cada grado $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,*

$$h_n \textit{ es inyectiva } \leftrightarrow \ker h_n = \{\emptyset\}.$$

Demostración. De izquierda a derecha, tenemos

$$*\emptyset = *(\emptyset - \emptyset) = *\emptyset - *\emptyset = \emptyset.$$

Como h_n es inyectiva, $\ker h_n = \{\emptyset\}$.

Supongamos ahora que el único elemento en el kernel es el conjunto vacío. Resta pues, considerar $*A = *B \neq \emptyset$. Por la proposición anterior,

$$*A \subseteq *B, *B \subseteq *A \leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \leftrightarrow A = B \neq \emptyset.$$

De este modo, h_n es inyectiva. □

Algo similar sucede con los universos.

Proposición 1.4. *Para todo grado n, $*(X^n) = (*X)^n$.*

Demostración. El caso $n = 0$ es evidente. Si $n = 1$, $*(X^1) = *X = (*X)^1$. Para los demás naturales, la tesis se logra por inducción, usando la condición 4 de la definición:

$$*(X^n) = *(X^{n-1} \times X) = *(X^{n-1}) \times *(X) = (*X)^{n-1} \times (*X) = (*X^n).$$

□

Para los unitarios se tiene lo siguiente.

Proposición 1.5. *h_1 envía conjuntos unitarios en conjuntos unitarios.*

Demostración. Sea $x \in X$. Así, $*\{x\} \neq \emptyset$. Sea Δ la diagonal $\{(u,u)|u \in X\}$ y escribamos $\{x\} \times \{x\} = \{(x,x)\} \subseteq \triangle$. En virtud de la definición y la Proposición 1.2,

$$*\{x\} \times *\{x\} \subseteq *\triangle.$$

Esto es, $*\{x\}$ es unitario. □

Esta proposición sugiere la notación $*\{x\} = \{*x\}$, donde $h_1(x) = *x$. Este hecho se generaliza sin dificultad.

Proposición 1.6. *En cada grado $n \geq 1$, h_n envía unitarios en unitarios. Es decir, si $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $*\{(x_1, ..., x_n)\} = \{(*x_1, ..., *x_n)\}$.*

Demostración. De las proposiciones anteriores y la condición 4, obtenemos

$$\begin{aligned} *\{(x_1, ..., x_n)\} &= *\left(\{x_1\} \times ... \times \{x_n\}\right) \\ &= *\{x_1\} \times ... \times *\{x_n\} \\ &= \{*x_1\} \times ... \times \{*x_n\} \\ &= \{(*x_1, ..., *x_n)\}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.7. *Para cada $A \subseteq X^n$ y $x_1, ..., x_n \in X$,*

$$(x_1, ..., x_n) \in A \leftrightarrow (*x_1, ..., *x_n) \in *A.$$

Demostración. Claramente,

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_n) \in A \leftrightarrow &\{(x_1, ..., x_n)\} \subseteq A \\ \leftrightarrow &* \{(x_1, ..., x_n)\} \subseteq *A \\ \leftrightarrow &\{(*x_1, ..., *x_n)\} \subseteq *A \\ \leftrightarrow &(*x_1, ..., *x_n) \in *A.\end{aligned}$$

□

Esta proposición pueden confundir si no se aclara que, en el caso interesante, $*X$ es "más grande" que X. Es decir,

$$\bullet A = \{(*x_1, ..., *x_n)|(x_1, ..., x_n) \in A\} \subseteq *A.$$

La igualdad está garantizada para los conjuntos finitos.

Proposición 1.8. *Si $A \subseteq X^n, n \geq 0$, es finito, entonces $\bullet A = *A$ es finito y tiene la misma cardinalidad $|A|$ de A.*

Demostración. Ciertamente, A es de la forma

$$\bigcup_{i=1}^{|A|} \{(x_1, ..., x_n)\}.$$

□

Queremos que una hiperextensión $*X$ de un conjunto X no sea una simple copia de él. Para precisar estas nociones, diremos que un elemento de $(*X)^m, m \geq 1$, es estándar si es de la forma $(*x_1, \ldots, *x_m)$, para cierto $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$. Los demás elementos, que no tienen esta forma, se llaman hiperelementos o, por influencia del inglés, elementos no-estándar.

Dado que los conjuntos finitos se preservan por nuestra inyección graduada, la única esperanza que queda para una hiperextensión sea propia descansa en los subconjuntos infinitos. Estas consideraciones nos llevan a decir que una hiperextensión $*X$ de X es propia si para todo subconjunto infinito $A \subseteq X$, $*A$ contiene un hiperelemento de $*X$. En breve, si A es infinito, $\bullet A$ es un subconjunto propio de $*A$. La existencia de las hiperextensiones propias será tratada en el próximo capítulo. Por ahora, asumamos que tales objetos existen.

Recalquemos que, en cualquier caso, $*A$ contiene una copia $\bullet A$ de A. Esa es la principal consecuencia de esta sección: toda hiperextensión, trivial o propia, $*X$ de X contiene copias de todos los subconjuntos de X.

1.3. Consecuencias para las funciones

Para usar nuestra definición conviene identificar a las funciones con sus gráficas. Recordemos que si $A \subseteq X^m$ y $B \subseteq X^n$, la gráfica de una función $f : A \to B$ es el subconjunto Φ de X^{m+n} tal que:

1. $\Phi \subseteq A \times B$.

2. La aplicación $\Pi : \Phi \to A$ que omite la componente de B es una proyección, es decir, es $\Pi(\Phi) = A$.

3. $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \Phi \times \Phi : x_1 = x_2\} \subseteq \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \Phi \times \Phi : y_1 = y_2\}$.

Con esta aclaración obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.9. *Si $A \subseteq X^m$, $B \subseteq X^n$ y Φ es la gráfica de una función $f : A \to B$, entonces $*\Phi$ es la gráfica de una función $*f : *A \to *B$.*

Demostración. En verdad,

1. $*\Phi \subseteq *(A \times B) = *A \times *B$.

2. Usando la propiedad 5 de la definición n veces, $*\Pi(*\Phi) = *(\Pi(\Phi)) = *A$.

3. $\{((*x_1, *y_1), (*x_2, *y_2)) \in *\Phi \times *\Phi : *x_1 = *x_2\}$
$\subseteq \{((*x_1, *y_1), (*x_2, *y_2)) \in *\Phi \times *\Phi : *y_1 = *y_2\}$.

□

Nota 1.10. *Observamos que estamos introduciendo una nueva notación para las funciones $*f$ que aparecen en las imágenes de la inyección graduada de la definición. Esta notación se extiende sin problemas a la gráfica de esta función y a las proyecciones involucradas.*

Proposición 1.11. *Sean $A \subseteq X^m$, $B \subseteq X^n$ y $f : A \to B$ una función. Para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in A$,*

$$(*f)(*x_1, \ldots, *x_m) = *(f(x_1, \ldots, x_m))$$

Demostración. En nuestro método de trabajo,

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \Phi.$$

Por lo visto más arriba, esto pasa si y sólo si

$$(*x_1, \ldots, *x_m, *y_1, \ldots, *y_n) \in *\Phi \leftrightarrow (*y_1, \ldots, *y_n) = (*f)(*x_1, \ldots, *x_m).$$

□

A partir de las diagonales simples o básicas de nuestra definición podemos construir diagonales compuestas, las cuales se preservan por las h_n. Procedemos por inducción sobre el número de pares de componentes iguales de la diagonal. El inciso 3 de la definición es la validez de nuestra proposición para $k = 1$. Supongamos que se cumple para k y consideremos una diagonal del tipo $k + 1$:

$$D_{k+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_{i_1} = x_{j_1}, \ldots, x_{i_k} = x_{j_k}, x_{i_{k+1}} = x_{j_{k+1}}\}.$$

Notemos que $D_{k+1} = D_k \cap D_1$, donde $D_k = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_{i_1} = x_{j_1}, \ldots, x_{i_k} = x_{j_k}\}$ y $D_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_{i_{k+1}} = x_{j_{k+1}}\}$. Entonces, por la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} *D_{k+1} &= *D_k \cap *D_1 \\ &= \{(*x_1, *x_2, \ldots, *x_n) | *x_{i_1} = *x_{j_1}, \ldots, *x_{i_k} = *x_{j_k}, *x_{i_{k+1}} = *x_{j_{k+1}}\}. \end{aligned}$$

Notamos que cada diagonal (simple o compuesta) corresponde, en su sentido más general, a la elección de una relación de equivalencia en el conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Proposición 1.12. *Si $id : A \to A$ es la función identidad de $A \subseteq X^m$, entonces $*id : *A \to *A$ es la función identidad de $*A \subseteq (*X)^m$.*

Demostración. La gráfica de id es simplemente

$$D_{2m} = \{(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) | x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_m = y_m\}.$$

Por lo que hemos dicho antes,

$$*D_{2m} = \{(*x_1, \ldots, *x_m, *y_1, \ldots, *y_m) | *x_1 = *y_1, *x_2 = *y_2, \ldots, *x_m = *y_m\}$$

es la gráfica de $*id$. $\square$

Esta proposición se puede extender, en cierto sentido útil, con la ayuda de una función $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$. Nos interesa la función cuya gráfica está formada por los puntos

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in X^{n+m}$$

que toma valores en cierto $B \subseteq X^m$. Por lo tanto, el dominio de esta función es

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n | (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in B\}$$

Observemos que la función identidad $id : A \to A$ corresponde al caso $n = m$, $\sigma = id : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Una permutación de las n-uplas

$(x_1, \ldots, x_n)$ con valores en B corresponde al caso $n = m$, $\sigma \in S_n$ (grupo simétrico de n letras). Por simplicidad, podemos tomar en estos casos, $A = B = X^n$. En general, la gráfica de $f_\sigma : A \to B$ es $\Gamma_f =$

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})|\ x_{n+i} = x_{\sigma(i)},\ 1 \leq i \leq m, (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \in B\}$$

Es decir, es la intersección de una diagonal compuesta con $B \subseteq X^m$. Por lo tanto, se preserva por las h_n. Así hemos probado lo siguiente.

Proposición 1.13. *Sea $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ una función. Si $f_\sigma : A \to B \subseteq X^m$ es la función descrita más arriba, entonces $*f_\sigma : *A \to *B$ realiza las mismas operaciones en $*A$. En particular, el dominio*

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n)|(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in B\}$$

se envía a $*A = \{(*x_1, \ldots, *x_n)|(*x_{\sigma(1)}, \ldots, *x_{\sigma(m)}) \in *B\}$.

De paso, hemos generalizado lo que sigue. Recordemos que, para $m \leq n$, una proyección escoge m componentes de cada n-upla de tal manera que los índices de la imagen están dispuestos en una sucesión finita no decreciente (de m términos) con valores entre 1 y n, inclusive.

Corolario 1.14. *Sea $m \leq n$. El enciso 5. de nuestra definición se cumple para todas las proyecciones π de n-uplas a m-uplas.*

Para finalizar esta sección, establecemos otros resultados que muestran cómo ciertas nociones elementales sobre funciones se llevan a las hiperextensiones.

Proposición 1.15. *Sea $A \subseteq X^m$, $B \subseteq X^n$ y $C \subseteq X^p$. Sean, además $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Entonces, $*(g \circ f) = (*g) \circ (*f)$*

Demostración. Sean Φ_f,Φ_g y $\Phi_{g\circ f}$ las gráficas de las funciones f, g y $g \circ f$ respectivamente. Consideremos el conjunto

$$A = \{(a, b, b', c) \in X^{m+2n+p}|b = b'\} \cap (\Phi_f \times \Phi_g).$$

Entonces, si $\Pi : \mathbb{X}^{m+2n+p} \to \mathbb{X}^{m+p}$ es la proyección que realiza $\Pi(a, b, b', c) = (a, c)$, entonces $\Phi_{g\circ f} = \Pi(A)$. De los resultados anteriores, se sigue que

$$*A = \{(*a, *b, *b', *c) \in (*X)^{m+2n+p} | *b = *b'\} \cap (\Phi_{*f} \times \Phi_{*g}).$$

Por la proposición anterior,

$$\Phi_{*g\circ *f} = *\Pi(*A) = *(\Pi(A)) = *(\Phi_{g\circ f}).$$

Es decir, $*(g \circ f) = (*g) \circ (*f)$ □

Proposición 1.16. *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{X}^m$, $B \subseteq \mathbb{X}^n$ y $f : A \to B$ es una función.*

(a) f es inyectiva $\Leftrightarrow *f$ es inyectiva.

(b) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow *f$ es sobreyectiva.

(c) f es biyectiva $\Leftrightarrow *f$ es biyectiva. En este caso, si f^{-1} es la función inversa de f, entonces $*(f^{-1})$ es la inversa de $*f$.

Demostración. Sean Φ_f la gráfica de f y Φ_{*f} la gráfica de $*f$.

(a) La condición de inyectividad se puede escribir como $\{(x, f(x), y, f(y)) \in \Phi_f \times \Phi_f | f(x) = f(y)\} \subseteq \{(x, f(x), y, f(y)) \in \Phi_f \times \Phi_f | x = y\}$. Esta condición se cumple si y sólo si $\{(*x, *f(x), *y, *f(y)) \in \Phi_{*f} \times \Phi_{*f} | *f(x) = *f(y)\} \subseteq \{(*x, *f(x), *y, *f(y)) \in \Phi_{*f} \times \Phi_{*f} | *x = *y\}$. Es decir, si $*f$ es inyectiva.

(b) Sea Π la proyección $A \times B \to B$. f es sobreyectiva si y sólo si $\Pi(\Phi_f) = B$. Es decir, si sólo si $*\Pi(\Phi_{*f}) = *B$. Esto equivale a que $*f$ sea sobreyectiva.

(c) Basta aplicar (a) y (b) al mismo tiempo. Ahora, por la proposición anterior, $*(f \circ f^{-1}) = (*f) \circ (*f^{-1}) = *id$, donde $*id : *A \to *A$ es la función identidad. □

Proposición 1.17. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{X}^n \to \mathbb{X}^m$ una función. Entonces*

(a) Si $B \subseteq A$, entonces $*(f(B)) = (*f)(*B)$.

(b) Si $C \subseteq \mathbb{X}^n$*, entonces* $*(f^{-1}(C)) = (*f)^{-1}(*C)$.

(c) Si $B \subseteq A$*, entonces* $*(f|_B) = (*f)|_{(*B)}$.

Demostración. Las notaciones f, f^{-1} y $f|_B$ denotan aquí la imagen directa, la imagen recíproca y la restricción de f a B, respectivamente.

(a) Tenemos que $f(B) = \{f(x_1, \ldots, x_n)|(x_1, \ldots, x_n) \in B\}$. La condición se sigue inmediatamente de las proposiciones vistas hasta ahora.

(b) La imagen recíproca o imagen inversa es $f^{-1}(C) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A|f(x_1, \ldots, x_n) \in C\}$. De nuevo, el resultado se sigue de lo anterior.

(c) La gráfica de la restricción $f|_B$ es $\Phi_{f|_B} = \Phi_f \cap (B \times \mathbb{X}^m)$. La tesis se desprende de los resultados anteriores. □

Proposición 1.18. *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{X}^m \to B \subseteq \mathbb{X}^n$ *una función definida por* $f = (f_1, \ldots, f_n)$*, donde cada* $f_i : \mathbb{X}^m \to \mathbb{X}$*,* $1 \leq i \leq n$*, es una función "coordenada". Entonces,* $*f = (*f_1, \ldots, *f_n)$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ ya está resuelto. Supongamos entonces que el resultado se cumple para $n = k$, o sea, $*f_{[1,k]} = (*f_1, \ldots, *f_k)$. Sea

$$A = (\Phi_{f_{[1,k]}} \times \Phi_{f_{k+1}}) \cap \{(x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \mathbb{X}^{m+n+m+1}|x = \widetilde{x}\},$$

donde $\Phi_{f_{k+1}}$ denota la gráfica de $f_{k+1} : \mathbb{X}^m \to \mathbb{X}$. Con esto, la gráfica de $f_{[1,k+1]}$ es

$$\Phi_{f_{[1,k+1]}} = \Pi(A),$$

donde $\Pi : \mathbb{X}^{m+n} \times \mathbb{X}^{m+1} \to \mathbb{X}^{m+(n+1)}$ es la proyección

$$\Pi(x, y, y_2, \ldots, y_k, \widetilde{x}, y_{k+1}) = (x, y_1, \ldots, y_{k+1}),\ x, \widetilde{x} \in \mathbb{X}^m.$$

Entonces,

$$\Phi_{*f_{[1,k+1]}} = (*\Pi)(*A).$$

Esto significa que $*f_{[1,k+1]} = (*f_1, \ldots, *f_{k+1})$. □

Esta sección se puede resumir como sigue. La identificación usual de A con $\bullet A$, nos da pie para decir que toda función $X^m \to X^n$ se extiende naturalmente a una función $(*X)^m \to (*X)^n$. Las permutaciones e identificaciones de las variables se llevan sin problema a las hiperextensiones. Lo mismo sucede con las nociones de composición, inyectividad, sobreyectividad, imagen directa, imagen inversa o recíproca, restricción y funciones coordenadas, entre muchas otras.

1.4. Una consecuencia para las relaciones

Las relaciones, en general, se pueden tratar de una forma similar a las funciones. Con ellas, se pueden estudiar en particular las llamadas "funciones multivaluadas".

Proposición 1.19. *Sea R una relación, es decir, $R \subseteq X^m \times X^n = X^{m+n}$. Fijemos $(a_1, \ldots, a_m)$ y consideremos el conjunto*

$$R(a_1, \ldots, a_m) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n | (a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n) \in R\}.$$

Entonces, $*(R(a_1, \ldots, a_m)) =$

$$\{(*x_1, \ldots, *x_n) \in (*X)^n | (*a_1, \ldots, *a_m, *x_1, \ldots, *x_n) \in *R\}$$

$= (*R)(*a_1, \ldots, *a_m)$.

Demostración. Sea $(a_1, \ldots, a_m) \in X^m$ fijo y $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ variable como en las hipótesis. La Proposición 1.7 implica que $(*a_1, \ldots, *a_m) \in (*X)^m$ es fijo y las $(*x_1, \ldots, *x_n) \in (*X)^n$ variables. Ahora bien, el conjunto de todos los elementos $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ que se relacionan con $(a_1, \ldots, a_m)$ es $R(a_1, \ldots, a_m)$. Por lo tanto, el conjunto de los elementos $(*x_1, \ldots, *x_n) \in (*X)^n$ que se relacionan con $(*a_1, \ldots, *a_m)$ será $(*R)(*a_1, \ldots, *a_m) =$

$$\{(*x_1, \ldots, *x_n) \in (*X)^n | (*a_1, \ldots, *a_m, *x_1, \ldots, *x_n) \in *R\}.$$

□

En el próximo capítulo enfrentamos la tarea pendiente: probar la existencia de hiperextensiones propias de un conjunto no vacío X.

CAPÍTULO 2

Existencia

By means of Q and D we now define a new first order structure Q_D, called an ultraproduct as follows. . .

A. Robinson en *Non-Standard Analysis*, Chapter II, 2.3.

En este capítulo demostramos la existencia de hiperextensiones para cada conjunto $X \neq \emptyset$. Naturalmente, nos interesa que dichas hiperextensiones sean propias. Recordemos que la única posibilidad de lograrlo es a través de los conjuntos infinitos, puesto que la inyección graduada preserva la cardinalidad de los conjuntos finitos. Algunos aspectos técnicos sobre ultrafiltros y ultraproductos no se cubrirán completamente, sino que se explicarán y se tomarán como supuestos.

La presentación formal detallada de la construcción es como sigue. Comencemos por precisar el objeto matemático que nos ocupa.

2.1. Definición

Si X es un conjunto no vacío, una hiperextensión propia de X es un pareja $(*X, h)$ tal que

1. es una hiperextensión de X (es decir, satisface las propiedades 1 a 5 de la sección 1.1) y

2. para cada subconjunto infinito A de X^n, $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\bullet A$ es un subconjunto propio de $*A$.

Recordemos que $\bullet A$ es la copia estándar de A en $h_n(A) = *A$.

2.2. Ultrafiltros

Sea J un conjunto no vacío. Un filtro en J es una colección no vacía $F \subset \mathcal{P}(J)$ que cumple los tres requisitos siguientes:

1. $\emptyset \notin F$,

2. si $f, f' \in F$, entonces $f \cap f' \in F$ y

3. si $f \in F$ y $f \subseteq f' \subseteq J$, entonces $f' \in F$.

Notemos que siempre $J \in F$. Si se cumple también que

4. para cada $a \in \mathcal{P}(J)$, bien $a \in F$, bien $a^c \in F$ (pero no las dos cosas al mismo tiempo),

decimos que F es un ultrafiltro en J. Denotaremos a los ultrafiltros con la letra U.

Para lo que sigue es conveniente tener a mano las siguientes propiedades de los (ultra)filtros.

Proposición 2.1. *Sea U un (ultra)filtro. $u, v \in U$ si y sólo si $u \cap v \in U$. También, para un ultrafiltro U, $u \in U$ o $v \in U$ si y sólo si $u \cup v \in U$.*

Demostración. Para la primera propiedad, la implicación directa se tiene por el requisito 2 de los (ultra)filtros. La recíproca es el requisito 3 de los (ultra)filtros, ya que $u \cap v \subseteq u, v$.

Para la otra propiedad, si $u \in U$ o $v \in U$, entonces $u, v \subseteq u \cup v$ y, por propiedad 3 de (ultra)filtros, $u \cup v \in U$. Recíprocamente, si $u \cup v \in U$, entonces (esta vez sí se necesita el requisito 4, diferenciador de un ultrafiltro) $(u \cup v)^c \notin U$, si y sólo si $(u^c \cap v^c) \notin U$. Por la propiedad de la interseción, esto se verifica si y sólo si $u^c, v^c \notin U$, si sólo si $u, v \in U$ y así, $u \in U$ o $v \in U$. $\square$

Asumimos sin demostración la validez del teorema de Tarski -conocido también como "axioma del ultrafiltro"- que asegura que si F es un filtro en J, entonces existe un ultrafilto $U \supseteq F$ en J.

En el caso que nos interesa para la construcción de la hiperextensión propia, J es un conjunto infinito. Así pues, es posible construir el filtro de Fréchet en J, que consta de todos los subconjuntos cofinitos (complementos de los finitos) de J.

Un ultrafiltro libre en J es un ultrafiltro en J que contiene al filtro de Fréchet. Por el teorema de Tarski de más arriba, los ultrafiltros libres en J existen.

Para un conjunto cualquiera J, los únicos ultrafiltros en J que no son libres son los principales. Ellos tienen la forma $U = \{u \subseteq J | j_0 \in u\}$, para algún $j_0 \in J$.

Cuando J es finito, todos sus ultrafiltros son principales y hay tantos de ellos como elementos tiene J. Cuando J es infinito y tiene cardinal κ, el conjunto de sus ultrafiltros tiene cardinal 2^{2^κ} (teorema de Pospíšil).

Decimos que un ultrafilto U en J es numerablemente completo si es cerrado bajo intersecciones finitas. Si no lo es, se llama numerablemente incompleto. Esto equivale a la existencia de una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en U tal que su intersección $\cap_{k\in\mathbb{N}} u_k = \emptyset$.

Todo ultrafiltro principal es numerablemente completo. Para lo que sigue, damos por sentado que todo conjunto infinito J posee un ultrafiltro numerablemente incompleto.

2.3. Ultraproductos

Sea J el conjunto infinito de índices de una familia indexada de conjuntos $\{A_j\}_{j\in J}$. Sea también U un ultrafiltro en J. En el producto cartesiano

$$\times_{j\in J} A_j = \{\alpha : J \to \cup_{j\in J} A_j \mid \alpha(j) \in A_j, \forall j \in J\},$$

definamos la relación

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \{j \in J | \alpha(j) = \beta(j)\} \in U.$$

Ya que U es un ultrafiltro en J, ella es una equivalencia. El ultraproducto de los A_j con respecto a U es el cociente

$$\times_U A_j = (\times_{j\in J} A_j)/\sim,$$

es decir, las clases de equivalencia que $\sim$ determina en el producto cartesiano.

Cuando todos los A_j son iguales a un mismo conjunto A, el ultraproducto $\times_U A$ se suele llamar ultrapotencia de A con respecto a U.

2.4. Teorema fundamental

Teorema 2.2. *Todo conjunto no vacío X posee una hiperextensión $*X$. Cuando X es infinito, se puede lograr que $*X$ sea propia.*

Demostración. Sea J un conjunto infinito y U un ultrafiltro numerablemente incompleto en J. Afirmamos que

$$*X = \times_U X$$

se logra con la inyección graduada h que se define enseguida.

Para cada grado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h_n : \mathcal{P}(X^n) \hookrightarrow \mathcal{P}((*X)^n)$ se define mediante

$$h_n(A) = *A = \big\{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \mid \{j \in J \mid (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) \in A\} \in U\big\},$$

donde $[\alpha_k] \in \times_U X$ denota la clase de equivalencia de $\alpha_k \in \times_{j\in J} X = X^J$, $1 \leq k \leq n$. Mejor dicho, si existen aplicaciones $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : J \to X$ y $u \in U$ tales que

$$\{j \in J \mid (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) \in A\} = u,$$

entonces $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in *A$. Y viceversa. Claramente, las h_n están bien definidas.

Procedemos a verificar la validez de las condiciones en la sección 1.1.

Sean $A, B \in \mathcal{P}(X^n)$. Entonces, $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in *A$ si y sólo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : J \to X$ y $u_A \in U$ tales que $\{j \in J \mid (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) \in A\} = u_A$. Igualmente, $([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in *B$ si y sólo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : J \to X$ y $u_B \in U$ tales que $\{j \in J \mid (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) \in B\} = u_B$. *Et cetera.* En consecuencia,

$$\begin{aligned}
(*A) \cup (*B) &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_A \in U\} \\
&\quad \cup \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_B \in U\} \\
&= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_A \in U \text{ o } u_B \in U\} \\
&= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_A \cup u_B = u_{A\cup B} \in U\} \\
&= *(A \cup B).
\end{aligned}$$

En el paso crucial hemos usado las propiedades que resaltamos en la sección anterior. Lo propio sucede en la demostración de $(*A) \cap (*B) = *(A \cap B)$. De forma parecida,

$$\begin{aligned}
*(A^c) &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_{A^c} \in U\} \\
&= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_{A^c}^c = u_A \notin U\} \\
&= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) \in (*X)^n | u_A \in U\}^c \\
&= (*A)^c.
\end{aligned}$$

Además, si $*A = \emptyset$, entonces para toda muestra $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : J \to X$ se tiene $\{j \in J \mid (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) \in A\} \notin U$. De esta manera, cada h_n es un monomorfismo de álgebras booleanas.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, h_n preserva las diagonales básicas. Ciertamente, si $1 \leq i < j \leq n$ y $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i = x_j\} \subset X^n$, entonces

$$\begin{aligned} *D &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ \{j \in J | u_D \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ \{j \in J | (\alpha_k(j) = \alpha_l(j)\} \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ \alpha_k \sim \alpha_l\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ [\alpha_k] = [\alpha_l]\}. \end{aligned}$$

Si $A \subseteq X^n$ y $B \subseteq X^m$, se cumple que $*(A \times B) = (*A) \times (*B)$. En efecto,

$$\begin{aligned} *(A \times B) &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n], [\beta_1], \ldots, [\beta_m])| \ u_{A \times B} \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n], [\beta_1], \ldots, [\beta_m])| \ u_A \cap u_B \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ u_A \cap u_B \in U\} \\ &\quad \times \{([\beta_1], \ldots, [\beta_m])| \ u_A \cap u_B \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ u_A \in U\} \\ &\quad \times \{([\beta_1], \ldots, [\beta_m])| \ u_B\} \in U\} \\ &= (*A) \times (*B). \end{aligned}$$

Llamamos de nuevo la atención sobre el uso de la Proposición 2.3.

Para terminar con la verificación de las condiciones en la sección 1.1, sean $A \subseteq X^n$ y π_n la proyección que omite la última coordenada. Entonces,

$$\begin{aligned} *(\pi_n(A)) &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ u_{\pi_n(A)} \in U\} \\ &= \{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_{n-1}])| \ u_{\pi_n(A)} \in U\} \\ &= *\pi_n \left(\{([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n])| \ u_A \in U\}\right) \\ &= *\pi_n(*A). \end{aligned}$$

Con esto, la inyección graduada es una hiperextensión de X.

Resta verificar que la hiperextensión es propia. Sea A un subconjunto infinito de X y usemos el hecho de que U es un ultrafiltro numerablemente incompleto. Es decir, existe una sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en U tal que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} u_k = \emptyset.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$u_0 = J, \quad u_{n+1} \subseteq u_n, n \geq 1.$$

Definamos ahora una función $m : J \to \mathbb{N}$ mediante

$$m(j) = n \quad \text{si y sólo si} \quad j \in u_n - u_{n+1}.$$

Es decir, $m(j)$ es el natural n más grande para el que $j \in u_n$, pero $j \notin u_{n+1}$. Esta función está bien definida por nuestra escogencia de la sucesión $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, cuya intersección es vacía. Tomemos a continuación una sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en A sin términos repetidos. Con ello, sea $\alpha : J \to A \subseteq X, \alpha \in X^J$, dada por

$$\alpha(j) = a_{m(j)}.$$

Afirmamos que $[\alpha] \notin \bullet A$, es decir, $[\alpha]$ no es estándar. Procedemos por contradicción, si $[\alpha] = *a$ para cierta $a \in X$, entonces

$$u = \{j \in J | \alpha(j) = a\} = \{j \in J | a_{m(j)} = a\} \in U.$$

Esto quiere decir que a es el término en la posición $m(j)$ de la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esta posición única es el $n \in \mathbb{N}$ más grande para el que $j \in u_n$, pero $j \notin u_{n+1}$. Es decir,

$$u = u_n - u_{n+1} = u_n \cap u_{n+1}^c \notin U.$$

La contradicción prueba la afirmación. $\square$

A continuación señalamos algunos hechos interesantes de la construcción anterior, que guardan relación con lo visto en el primer capítulo.

Proposición 2.3. *Sea J un conjunto de índices y U un ultrafiltro sobre J. Consideremos la ultrapotencia que produce la extensión no estándar de X en el teorema anterior.*

1. *Si $a \in X$, entonces $*a = [\alpha]$, donde $\alpha : J \to X$ es la función constante con $\alpha(j) = a$, para todo $j \in J$.*

2. *Sean* $f : X^n \to X$ *una función y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X^J$. *Sea, así mismo,* $\beta \in X^J$, *definida por* $\beta(j) = f(\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j))$, *para cada* $j \in J$. *Entonces,* $(*f)([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) = [\beta]$. *En general, sean* $f : X^n \to X^m, f = (f_1, \ldots, f_m)$, *una función y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X^J$. *Al definir* $\beta_1, \ldots, \beta_m \in X^J$ *mediante*

$$\begin{aligned} \beta_1(j) &= f_1(\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)), \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \beta_m(j) &= f_m(\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)), \end{aligned}$$

para cada $j \in J$, *se tiene*

$$(*f)([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) = ([\beta_1], \ldots, [\beta_m]).$$

Demostración. Por el capítulo anterior, sabemos que

$$*a = *\{a\} = \{[\alpha] | \{j \in J | \alpha(j) = a\} \in U\}$$

es un conjunto unitario, ya que $\{a\}$ es finito. Para determinar la clase $[\alpha]$, basta encontrar un $\alpha \in X^J$ tal que

$$u_{\{a\}} = \{j \in J | \alpha(j) = a\} \in U.$$

Pero tal α es muy fácil de encontrar. La aplicación constante $\alpha : J \to X$, $\alpha \equiv a$, cumple con esto ya que $\{j \in J | \alpha(j) = a\} = J \in U$. Esto prueba la primera parte.

Ahora, para j fijo, pongamos

$$(\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j)) = (a_1, \ldots, a_n),$$

un arreglo de constantes. También, $b = \beta(j)$ es una constante. Entonces, por lo visto en el capítulo anterior,

$$(*f)(*a_1, \ldots, *a_n) = *(f(a_1, \ldots, a_n)) = *b$$

Por la primera parte,

$$(*f)([\alpha_1], \ldots, [\alpha_n]) = [\beta],$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las aplicaciones constantes $\alpha_1 \equiv a_1, \ldots, \alpha_n \equiv a_n$ y $\beta \equiv b$. La generalización es evidente. $\square$

La proposición anterior nos ayuda a determinar el kernel de h_n, para cada $n \in N$. Si $A \subseteq X^n$ es infinito, hemos visto que $*A = h_n(A)$ es infinito y, por lo tanto, no vacío. Es decir, $\ker h_n$ no contiene ningún A infinito. Por el capítulo anterior, $*A$ tiene (en este caso) el mismo cardinal de A. Así pues, el único A que produce $*A = \emptyset$ es $A = \emptyset$. En breve,

$$\ker h_n = \{\emptyset\}.$$

También es posible demostrar que si $A \subseteq X^n$ cualquiera, $*A$ se identifica naturalmente con la ultrapotencia $\times_U A$, donde J y U son como antes.

CAPÍTULO 3

Transferencia

Using logical formulas permits us to take advantage of our natural linguistic and logical abilities. Moreover, this turns out to be an ideal framework for bringing out the main properties of nonstandard extensions.
C. Ward Henson en *Foundations of Nonstandard Analysis.*

En este capítulo reescribimos lo encontrado en los dos capítulos anteriores en el lenguaje más natural y transparente de las fórmulas lógicas de primer orden sobre un conjunto. De paso, se nos revelan algunas propiedades de las hiperextensiones que no son tan evidentes cuando se las mira desde los conjuntos. Veamos.

3.1. Fórmulas lógicas

Para la siguiente definición se da por hecho que el lector tiene cierta familiaridad con la lógica "matemática" usual de primer orden.

Definición 3.1 (Fórmulas lógicas sobre X)**.** *Sea $X \neq \emptyset$, x y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ variables libres en X, es decir, pueden tomar cualquier valor en X (no necesariamente distintas). El conjunto de fórmulas F (de primer orden)* *sobre X es el conjunto mas pequeño de fórmulas lógicas que satisface las siguientes condiciones de clausura.*

(i) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq X^n$, se tiene que $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ es una fórmula sobre X.

(ii) Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y cada función $f : A \to B$, con $A \subseteq X^n$ y $B \subseteq X^m$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 \ldots, y_m)$ es una fórmula sobre X.

(iii) Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ es una fórmula sobre X y $a_1, \ldots, a_m \in X$ son constantes, entonces $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ es una fórmula sobre X.

(iv) Si φ y ψ son fórmulas sobre X, entonces $\neg\varphi, \varphi\vee\psi, \varphi\wedge\psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ son fórmulas sobre X.

(v) Si φ es una fórmula sobre X, entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son fórmulas sobre X.

Las condiciones (i), (ii) y (iii) constituyen el paso básico de la construcción de las fórmulas. Las condiciones (iv) y (v) forman el paso inductivo.

Notamos que hay dos formas de usar las variables en estas fórmulas. En este sentido, conviene definir con precisión la noción de variable libre en una fórmula lógica dada.

Definición 3.2 (Variables libres en una fórmula φ)**.** *Sea $\varphi \in F$.*

(i) Todas las variables de la fórmula $(x_1, \ldots, x_n) \in A$ son libres.

(ii) Todas las variables que aparecen en $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 \ldots, y_m)$ son libres.

(iii) Si $\varphi, \psi \in F$, entonces las variables libres en las fórmulas $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ son las variables libres de φ y ψ (para la negación, se ignora ψ).

(iv) *Las variables libres en las fórmulas $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son las variables libres en φ que son distintas de x.*

Entenderemos, como se hace a menudo en las Matemáticas, que una fórmula lógica, en la que aparecen un número finito de variables, se deja entender también como una fórmula lógica que involucra cualquier número mayor de variables.

Una sentencia es una fórmula lógica en la que no aparecen variables libres. Por lo tanto, se le puede asignar un valor verdadero o falso sobre las estructuras a las que se refiere.

3.2. Principio de transferencia

La transformación h de conjuntos hacia una hiperextensión, descrita del Capítulo 1, se deja expresar de forma más transparente como una transformación de fórmulas lógicas. Por abuso del lenguaje, notaremos las dos transformaciones con la letra h.

Definición 3.3 (Transformada $*$). *Sea $X \neq \emptyset$ y F el conjunto de fórmulas lógicas sobre X. Sea también $*X$ una hiperextensión de X y $*F$ las fórmulas lógicas sobre $*X$. Definimos la transformada $*$ como la aplicación $h : F \to *F$ que satisface las siguientes condiciones.*

(i) *Sea $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y $B \subseteq X^m$, la imagen de la fórmula básica $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in B$ es la fórmula $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}) \in *B$.*

Llamamos la atención sobre el uso de las mayúsculas para denotar las variables en la hiperextensión.

(ii) *Con la misma notación, la imagen de la formula $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ es*

$$*f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) = (X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}).$$

La transformada $*$ de $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F$ se denotará mediante

$$*\varphi(X_1, \ldots, X_n) \in *F.$$

Para terminar la parte básica,

(iii) Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$ es una fórmula básica y $a_1, \ldots, a_p \in X$ son constantes, entonces la imagen de $\varphi(x_1, \ldots, x_n,\ a_1, \ldots, a_p)$ bajo $*$ es $*\varphi(X_1, \ldots, X_n, *a_1, \ldots, *a_p)$.

Para la parte inductiva, sean $\varphi, \psi \in F$ y $*\varphi, *\psi \in *F$ sus respectivas imágenes.

(iv) La imagen de la negación $\neg\varphi$ es $\neg * \varphi$. La imagen de la disyunción $\varphi \vee \psi$ es $*\varphi \vee *\psi$.La imagen de la conjunción $\varphi \wedge \psi$ es $*\varphi \wedge *\psi$.

(v) Si x es una variable que toma valores en X, la imagen de la fórmula de $\exists x\varphi$ es $\exists X * \varphi$ y la imagen de la fórmula $\forall x\varphi$ es $\forall X * \varphi$.

Ciertamente, podemos hacer corresponder fórmulas lógicas a los conjuntos del Capítulo 1 de la forma usual. Es decir, podemos interpretar la negación como el complemento, la disyunción como la unión, la conjunción como la intersección. Más allá, podemos incluso dar interpretaciones conjuntistas a los cuantificadores existencial y universal. De esta manera se establece la conexión entre lo que estamos haciendo y los desarrollos de los capítulos anteriores. Las ventajas de las fórmulas lógicas son bien conocidas por los matemáticos, especialmente cuando se estudian nociones más y más complicadas. Como este trabajo está dirigido principalmente a matemáticos, nos permitimos todas las licencias generalmente aceptadas por ellos sobre la interpretación y el uso de las fórmulas lógicas de primer orden. Como ya lo hemos hecho más arriba, se usarán sin mayores explicaciones los conectivos lógicos usuales que se forman a partir de los "básicos", como la implicación $\rightarrow$, la equivalencia $\leftrightarrow$, la disyunción exclusiva $\veebar$, etc.

El principio de transferencia es un resultado útil sobre la transformada $*$ de la definición anterior. En términos intuitivos y en concordancia con los capítulos anteriores, garantiza que *las propiedades importantes de un conjunto X se transfieren a cada hiperextensión $*X$ de X*. El principio de transferencia es un resultado de la teoria de modelos, un caso particular del teorema de Löwenheim-Skolem.

Teorema 3.4 (Principio de transferencia)**.** *Sean $X \neq \emptyset$ y una hiperextensión $*X$ de X. Las siguientes afirmaciones valen.*

a) *Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_m) \in F$ y $*\varphi(X_1, \ldots, X_m) \in *F$ su imagen bajo la transformada $*$. Si $B \subseteq X^m$ es el conjunto definido por $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, es decir, $B = \{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m | \varphi(x_1, \ldots, x_m) \text{ es verdad en } X\}$, entonces $*B$ está definido por $*\varphi(X_1, \ldots, X_m)$, es decir,*

$$*B = \{(X_1, \ldots, X_m) \in (*X)^m | * \varphi(X_1, \ldots, X_m) \text{ es verdad en } *X\}.$$

b) *Sea $\varphi \in F$ una sentencia y sea $*\varphi \in *F$ su imagen bajo la transformada $*$, entonces φ es verdad en X si y solamente si $*\varphi$ es verdad en $*X$.*

Demostración. Comencemos por demostrar que *a)* se cumple para todos los tipos de fórmulas.

(i) Sea $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ una función y $B \subseteq X^m$. La transformada $*$ de $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in B$ es $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)}) \in *B$. La Proposición 1.13 muestra la validez de la afirmación.

(ii) Con las mismas notaciones del item anterior, tomemos $1 < k < m$. Consideremos un subconjunto Γ_f de B, formado por puntos de la forma

$$(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}, x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}),$$

tales que constituyan la gráfica de una función de k variables en $m-k$ variables. Entonces, aplicando el item (i) a dicha gráfica, tendremos que la transformada $*$ de

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

es $*f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) = (X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(m)})$.

(iii) Por las proposiciones 1.13 y 1.19 (sobre las relaciones), la transformada $*$ de la fórmula básica $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_p)$ es

$$*\varphi(X_1, \ldots, X_n, *a_1, \ldots, *a_p).$$

(iv) La transformada $*$ de la negación y los conectivos lógicos se siguen directamente de la parte 2 de la Definición 1.1 (morfismo de álgebras booleanas).

(v) Si x es una variable que toma valores en X, la transformada $*$ de $\exists x\varphi$ es $\exists X * \varphi$ en virtud del Corolario 1.14 (que permite proyectar en cualquier componente). La transformada $*$ de $\forall x\varphi$ es $\forall X * \varphi$ porque el cuantificador universal se puede escribir en términos de la negación y el cuantificador existencial.

En seguida, probaremos que *a)* implica *b)*. Sea φ una sentencia sobre X, es decir, una fórmula sin variables libres. Si denotamos con B el subconjunto de X^n definido por esta sentencia, entonces, por *a)*, $*B$ será el subconjunto de $(*X)^n$ definido por la fórmula trasformada $*\varphi$. Ya que φ es falsa o verdadera, A es respectivamente $\emptyset$ o X^n. Por lo tanto, Proposición 1.4, $*A$ es $\emptyset$ o $(*X)^n$. La equivalencia lógica de φ con $*\varphi$ es inmediata. $\square$

Observamos que este teorema está incluido en la Definición 1.1 de hiperextensión dada al comienzo del Capítulo 1. En verdad, si asumimos la validez de este principio y definimos la igualdad convenientemente, recuperamos dicha definición.

La parte *b)* del Principio de Transferencia pone en claro una ventaja de la aproximación lógica al estudio de las hiperextensiones, que no se aprecia tan fácilmente en la aproximación conjuntista. Este hecho revela la potencia del resultado, sobre todo en relación con las fórmulas lógicas que involucran cuantificadores.

Para ilustrar la utilidad de este resultado, vamos a tratar algunos de los hallazgos del Capítulo 1. Consideremos en primer lugar la Proposición 1.17, con sus mismas notaciones. El conjunto $f(B)$ se define por la equivalencia

$$(y_1, \ldots, y_m) \in f(B) \leftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_n) \\ [(x_1, \ldots, x_n) \in B \wedge f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)].$$

Por lo tanto, el Principio de Transferencia produce

$$(Y_1, \ldots, Y_m) \in *(f(B)) \leftrightarrow \exists (X_1, \ldots, X_n) \\ [(X_1, \ldots, X_n) \in *B \wedge (*f)(X_1, \ldots, X_n) = (Y_1, \ldots, Y_m)].$$

La fórmula en el lado derecho define a $(*f)(*B)$, así que tenemos la igualdad de la parte (a). Para las partes (b) y (c) usamos respectivamente

$$(x_1, \ldots, x_n) \in f^{-1}(C) \leftrightarrow \exists (y_1, \ldots, y_m) \\ [(y_1, \ldots, y_m) \in C \wedge f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)]$$

y $(f|_B)(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$

$$\leftrightarrow [f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m) \wedge (x_1, \ldots, x_n) \in B].$$

El Principio de Transferencia arroja lo que necesitamos.

Miremos ahora a la Proposición 1.18, con $m = n = 2$ por comodidad. La función f se caracteriza por

$$[f(u, v) = (w, z)] \leftrightarrow [f_1(u, v) = w \wedge f_2(u, v) = z],$$

donde u, v, w, z son variables en X. Por el Principio de Transferencia,

$$[(*f)(U, V) = (W, Z)] \leftrightarrow [(*f_1)(U, V) = W \wedge (*f_2)(U, V) = Z],$$

las variables mayúsculas respectivas en $*X$. De este modo, $*f = (*f1, *f2)$.

Lo mismo pasa con la inyectividad de la parte (a) en la Proposición 1.16. Por simplicidad, tomemos $m = n = 1$. f es una aplicación inyectiva si y sólo si la sentencia

$$\forall x \forall y \forall z [[f(x) = z \wedge f(y) = z] \rightarrow x = y]$$

es verdadera en los conjuntos respectivos. La transformada $*$ de esta sentencia es

$$\forall X \forall Y \forall Z[[*f(X) = Z \wedge *f(Y) = Z] \rightarrow X = Y].$$

Esta sentencia vale si y sólo si la función $*f$ es inyectiva en las imágenes correspondientes bajo h. Las partes (b) y (c) se tratan de manera análoga.

El lector deberá estar ya convencido de la utilidad que las fórmulas lógicas ofrecen al estudio de las hiperextensiones.

CAPÍTULO 4

Hiperreales

¿Son todos los números infinitesimales respresentables por sucesiones convergentes a cero? La respuesta es "si" y "no", dependiendo de la escogencia del ultrafiltro con que se construye el cuerpo $\mathbb{R}^*$ de los números no-estándar.

Y. Takeuchi en *Métodos analíticos del Análisis no standar.*

En este capítulo verificamos que $*\mathbb{R}$ es un campo ordenado que extiende naturalmente a $\mathbb{R}$. Además, precisamos los ultrafiltro que se van a usar, con el fin de descubrir elementos no-estándar de $*\mathbb{R}$. Efectivamente, en los hiperreales existen elementos infinitesimales -que recuerdan a aquellos de Leibniz- y elementos infinitos.

4.1. $*\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

En virtud del Principio de transferencia, nuestra tarea se reduce a verificar que los axiomas de cuerpo ordenado, que cumplen los números reales, se escriben con fórmulas lógicas de primer orden. Recordemos que la estructura de cuerpo ordenado consta de los axiomas algebraicos de cuerpo, de los axiomas de orden y de los axiomas de compatibilidad entre la estructura algebraica y la estructura de orden.

4.1.1. Axiomas de cuerpo

- La adición o suma de números reales es una ley de composición interna. En verdad, existe una función $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, notada usualmente como $s(x, y) = x + y$.
- La suma es asociativa. $\forall x \forall y \forall z[x + (y + z) = (x + y) + z]$.
- La suma tiene identidad. $\exists 0 \forall x[x + 0 = 0 + x = x]$.
- La suma tiene inversos. $\forall x \exists(-x)[x + (-x) = (-x) + x = 0]$.
- La suma es conmutativa. $\forall x \forall y[x + y = y + x]$.
- La multiplicación es una ley de composición interna. Existe una función $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, denotada por $m(x, y) = x \cdot y = xy$.
- La multiplicación es asociativa. $\forall x \forall y \forall z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$.
- La multiplicación tiene identidad. $\exists 1 \forall x[x \cdot 1 = 1 \cdot x = x]$.
- Los reales distintos de 0 (cero) tienen inversos multiplicativos. $(\forall x \neq 0)\exists x^{-1}[x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1]$.
- La multiplicación es conmutativa. $\forall x \forall y[x \cdot y = y \cdot x]$.

4.1.2. Axiomas de orden y de compatibilidad

El conjunto de los números reales es totalmente ordenado. Es decir, existe una relación binaria $O \subset \mathbb{R}^2$, denotada usualmente como

$$(x, y) \in O \leftrightarrow x < y,$$

tal que

- Cumple la tricotomía: $\forall x \forall y[[x < y] \veebar [x = y] \veebar [y < x]]$.
- Es transitiva: $\forall x \forall y \forall z[[x < y \wedge y < z] \to x < z]$.

La compatibilidad entre la estructura de cuerpo y el orden viene dada por las dos condiciones siguientes:

- $\forall x \forall y \forall z [x < y \rightarrow x + z < y + z]$.
- $\forall x \forall y [[0 < x \wedge 0 < y] \rightarrow 0 < x \cdot y]$.

Concluimos, por el Principio de transferencia, lo que hemos dicho en el Capítulo 1 sobre las relaciones: $*\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado.

Usaremos sin más explicaciones las convenciones y propiedades habituales en las Matemáticas: $x \leq y \leftrightarrow [x < y \vee x = y]$; $\leq$ es reflexiva y antisimétrica; $x > y \leftrightarrow y < x$; x es positivo si y sólo si $x > 0$; $x = y \leftrightarrow x \leq y \wedge y \leq x$, etc.

4.2. Paréntesis sobre ultrafiltros

En la sección anterior hemos usado el Principio de transferencia con $X = \mathbb{R}$. Si se quiere profundizar en las propiedades de $*\mathbb{R}$, es preciso dar mayores detalles sobre la construcción de la ultrapotencia $\times_U \mathbb{R}$.

Tomemos como conjunto infinito a $J = \mathbb{N}$. Sabemos que $\mathbb{N}$ tiene un ultrafiltro numerablemente incompleto U, que contiene al filtro de Fréchet. Con esto, los hiperreales son las clases de equivalencia -determinadas por U- de las sucesiones de números reales.

Este proceder es único por lo siguiente. Consideremos un ideal maximal I del anillo producto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. El cuerpo cociente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/I$ pueder ser o no isomorfo a $\mathbb{R}$. No es difícil encontrar ideales maximales I que realizan el isomorfismo del cociente con $\mathbb{R}$. También es fácil encontrar ideales maximales I que realizan el isomorfismo de este cociente con $*\mathbb{R}$. Más precisamente, si I es un ideal maximal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces la colección

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n = 0 \text{ para alguna } \alpha_n \in I\}$$

es un ultrafiltro U en $\mathbb{N}$. Si se da por válida a la hipótesis del continuo, los cuerpos construidos de esta manera, que no son isomorfos a $\mathbb{R}$, son todos isomorfos entre sí. Este resultado, probado por Erdös, Guillman y Henriksen en 1955, constituye el Teorema de unicidad de $*\mathbb{R}$.

En fin, para sucesiones cualesquiera α_n, β_n se tiene que

$$[\alpha_n] + [\beta_n] = [\alpha_n + \beta_n],$$
$$[\alpha_n] \cdot [\beta_n] = [\alpha_n \cdot \beta_n].$$

También, $[\alpha_n] < [\beta_n] \ \leftrightarrow \ \alpha_n < \beta_n, \forall n \in S, S \in U$. De paso, notemos que la compatibilidad siguiente también es evidente.

$$\Big[[\alpha_n] < [\beta_n] \wedge [\alpha_n] = [\gamma_n] \wedge [\beta_n] = [\delta_n]\Big] \to [\gamma_n] < [\delta_n].$$

La transferencia de primer orden permite igualmente extender la función valor absoluto real a $*\mathbb{R} \to *\mathbb{R}, \alpha \mapsto |\alpha|$, de tal modo que

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es una métrica. En particular, $\forall \alpha \in *\mathbb{R}\ [|\alpha| \geq 0]$.

4.3. Infinitesimales e infinitos

En esta sección consideramos algunos tipos de hiperreales, que justifican la construcción de la teoría que hemos venido desarrollando.

Concentrémonos, para empezar, en la clase de equivalencia de una sucesión constante $\rho_n = r \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, la clase $[\rho_n]$ está formada por las sucesiones que toman el valor r en las posiciones o índices determinados por el complemento de un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, o que toman el valor r en las posiciones de cierto subconjunto infinito $S \in U$. Los elementos de $*\mathbb{R}$ de la forma $[\rho_n]$, para cierto $r \in \mathbb{R}$, son los elementos estándar. Ciertamente, la inyección $\mathbb{R} \to *\mathbb{R}, r \mapsto [\rho_n]$, permite identificar a los reales con un subconjunto de los hiperreales.

Ahora bien, si una sucesión σ_n de números reales es tal que $[\sigma_n] \neq [\rho_n]$, para cualquier $r \in \mathbb{R}$, entonces $[\sigma_n]$ es un hiperelemento o hiperreal no-estándar. Dicha clase de equivalencia está formada por las sucesiones que toman únicamente el valor r en los índices determinados por un conjunto finito de naturales, o en el complemento S^c de un infinito $S \in U$. Por lo tanto, hay un representante $\sigma_n \in [\sigma_n]$ tal que $\sigma_n \neq r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lo importante aquí es que hay hiperelementos que se pueden interpretar como los infinitesimales del sueño de Leibniz. Consideremos una sucesión de números reales ι_n que contiene una subsucesión convergente a cero, cuyos miembros se ubican en las posiciones determinadas por cierto $S \in U$. Podemos tener incluso $S = \mathbb{N}$, o sea, la subsucesión es toda la sucesión original. Asumamos que todos los términos de ι_n son distintos y que ninguno de ellos es igual a cero. Conviene, pues, pensar en una sucesión como $\iota_n = 1/n$, por ejemplo. A este tipo de subsucesiones las llamaremos U-subsucesiones convergentes a cero. Formalmente, ι_n es una sucesión que contiene una U-subsucesión convergente a cero, si y sólo si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists S \in U \ \forall n \in S \ \exists N \in \mathbb{N}[n \geq N \to |\iota_n| < \varepsilon].$$

La convergencia de una U-subsucesión esta descrita, pues, por algún $S \in U$. Observemos lo siguiente.

Proposición 4.1. *Una sucesión de reales ι_n contiene una U-subsucesión convergente a cero si y sólo si*

$$|[\iota_n]| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ fijo cualquiera y usemos notación de intervalos en los naturales. Entonces,

$$\exists S_\varepsilon \in U \ \exists N_{\varepsilon,S} \in \mathbb{N} \ \forall n \in (S_\varepsilon \cap [N_{\varepsilon,S}, \infty)) \ [|\iota_n| < \varepsilon].$$

Pero, por la construcción del ultrafiltro, $S_\varepsilon \cap [N_\varepsilon, \infty) \in U$. $\square$

Esto motiva la definición de hiperreal infinitesimal.

Definición 4.2. *$\iota \in {*\mathbb{R}}$ es un infinitesimal si $\iota \neq 0$ y $|\iota| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Es decir, $\iota \neq 0$ es la clase de una sucesión ι_n que contiene una U-subsucesión que converge a cero.*

La segunda parte de la definición indica la manera de construir infinitos infinitesimales. Llamemos $\mathbb{I}$ a dicho conjunto. Ése se particiona en elementos positivos y negativos, que forman respectivamente los subconjuntos $\mathbb{I}^+$ e $\mathbb{I}^-$. Claramente, si $\iota \in \mathbb{I}^+$, entonces $0 < \iota < \varepsilon$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Es decir, $\mathbb{I}^+$ esta ubicado entre cero y cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. De manera similar, $\mathbb{I}^-$ esta ubicado entre cualquier $-\varepsilon \in \mathbb{R}^-$ y cero. Ahora bien, si $r \in \mathbb{R} \subset *\mathbb{R}$ y $\iota \in \mathbb{I}^+$, la compatibilidad de la suma con el orden implica que $r < r + \iota < r + \varepsilon$, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. O sea, el conjunto

$$r + \mathbb{I}^+ = \{r + l \ \mid \ l \in \mathbb{I}^+\}$$

se ubica entre r y $r + \varepsilon$, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Lo propio sucede para $r + \mathbb{I}^-$. De esta manera, hemos logrado extender $\mathbb{R}$ a un conjunto como el que muestra la Figura 1.

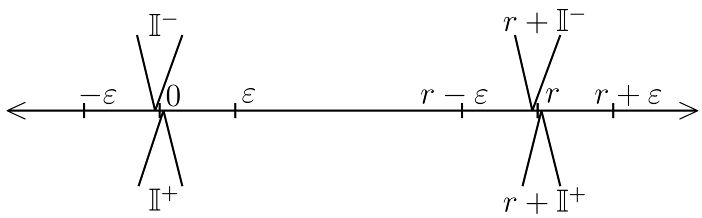

Figura 1.

Los hiperreales infinitos se pueden construir de una manera análoga a los infinitesimales. Una sucesión μ_n de números reales, contiene una U-subsucesión convergente a $+\infty$ (respectivamente a $-\infty$) si y sólo si

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists S \in U \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in S \cap [N, \infty)[\mu_n > M]$$

(respectivamente $\forall M \in \mathbb{R} \exists S \in U \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in S \cap [N, \infty)[\mu_n < M]$). Por lo tanto, μ_n contiene una U-subsucesión convergente a $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) si y sólo si $|[\mu_n]| > M$, $\forall M \in \mathbb{R}$ (resp. $|[\mu_n]| < M$, $\forall M \in \mathbb{R}$). La demostración calca el procedimiento usado para los infinitesimales.

Definición 4.3. *$\mu \in *\mathbb{R}$ es un infinito si $\mu > M$ o $\mu < M$, $\forall M \in \mathbb{R}$. Es decir, μ es la clase de equivalencia de una sucesión μ_n que contiene una U-subsucesión que converge a $+\infty$ o a $-\infty$.*

Con ayuda de la Figura 2 podemos entender la ubicación del conjunto ∞ de los hiperreales no estándar infinitos, que se puede particionar en ∞^- e ∞^+, según éstos sean negativos o positivos.

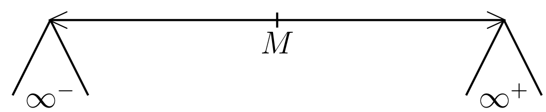

Figura 2.

De paso, hemos encontrado hiperreales que son mayores que cualquier entero positivo. En consecuencia, el cuerpo $*\mathbb{R}$ no cumple la propiedad arquimediana, que juega tan importante papel en el Análisis Clásico.

Las proposiciones siguientes se siguen inmediatamente.

Proposición 4.4. *$\iota \in \mathbb{I}$ si y sólo si $\iota^{-1} \in \infty$.*

Proposición 4.5. *Si $r \in \mathbb{R} \subseteq *\mathbb{R}$ y $\mu \in \infty^+$ entonces $r + \mu \in \infty^+$. Un enunciado similar se cumple para los infinitos negativos ∞^-.*

En el capítulo siguiente profundizaremos sobre la estructura de los infinitesimales y su utilidad para la construcción del Cálculo.

CAPÍTULO 5

Análisis infinitesimal

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0*, & d* $\overline{ax}$ *erit aequ. adx: si sit y aequ v (seu ordinata quaevis curvae* YY*, aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae* VV*) erit dy aequ. dv.*[1]

G. W. Leibniz en *Nova methodus pro maximis et minimis. . ..*

Este capítulo está dedicado al estudio de ciertas estructuras de los infinitesimales, en cuanto subconjunto de los hiperreales. Nos concentraremos únicamente en algunas propiedades algebraicas y topológicas que sirven para discutir las ventajas que ofrece la construcción de $*\mathbb{R}$ al Cálculo infinitesimal. Concretamente, nos referimos a los conceptos de continuidad, diferenciabilidad y sucesión. Con esto, termina el trabajo.

5.1. Algunas propiedades algebraicas

Comenzamos por dotar a los infinitesimales con algunas estructuras algebraicas evidentes.

Proposición 5.1. $(\mathbb{I} \cup \{0\}, +)$ *es un subgrupo del grupo abeliano* $(*\mathbb{R}, +)$*.*

[1] *Sea a una cantidad constante dada. Se tendrá* $da = 0$ *y* $d(ax) = adx$*. También, si* $y = v$ *son ordenadas de curvas, se tendrá* $dy = dv$*.*

Demostración. Sean $\iota_1, \iota_2 \in \mathbb{I} \cup \{0\}$, o sea, $|\iota_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\iota_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, $|\iota_1 + \iota_2| \leq |\iota_1| + |\iota_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Es decir, $\iota_1 + \iota_2 \in \mathbb{I} \cup \{0\}$. Además, si $\iota \in \mathbb{I} \cup \{0\}$, $|\iota| = |-\iota| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Es decir, $-\iota \in \mathbb{I} \cup \{0\}$. $\square$

Proposición 5.2. *Si $\iota \in \mathbb{I} \cup \{0\}$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $r\iota \in \mathbb{I}$. Por lo tanto, si denotamos $r\iota = r.\iota$, $(\mathbb{I} \cup \{0\}, +, .)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $\iota \in \mathbb{I} \cup \{0\}$ y $r \in \mathbb{R}$, o sea, $|\iota| < \frac{\varepsilon}{|r|+1}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, $|r\iota| = |r||\iota| < |r|\frac{\varepsilon}{|r|+1} < \varepsilon$. $\square$

Este espacio vectorial juega un papel crucial al momento de definir el concepto de derivada de una función.

Proposición 5.3. $(\mathbb{I} \cup \{0, 1\}, \cdot)$ *es un monoide (recordemos que el punto alto denota multiplicación de hiperreales).*

Demostración. Basta comprobarlo para $\iota_1, \iota_2 \in \mathbb{I} \cup \{0\}$, o sea, $|\iota_1| < \sqrt{\varepsilon}$ y $|\iota_2| < \sqrt{\varepsilon}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Luego, $|\iota_1 \cdot \iota_2| = |\iota_1||\iota_2| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$. Es decir, $\iota_1 \cdot \iota_2 \in \mathbb{I} \cup \{0\}$. $\square$

Proposición 5.4. *Si $\iota \in \mathbb{I}$, entonces $\iota^{-1} \in \infty$. Del mismo modo, si $\mu \in \infty$, $\mu^{-1} \in \mathbb{I}$. En consecuencia, $(\mathbb{I} \cup \{1\}, \cdot)$ no es un grupo abeliano.*

Demostración. Sea $\iota \in \mathbb{I}$, o sea, $|\iota| < \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, $|\iota^{-1}| > \varepsilon$. Es decir, $\iota^{-1} \in \infty$. $\square$

5.2. Algunas propiedades topológicas

La topología evidente de $*\mathbb{R}$ es la del orden. Como $*\mathbb{R}$ es un conjunto lineal y totalmente ordenado por la relación $\leq$, consideramos la colección de todos los intervalos abiertos

$$(\alpha, \beta) = \{\gamma \in *\mathbb{R} \mid \alpha < \gamma < \beta\},$$

para $\alpha, \beta \in *\mathbb{R}$. Ella constituye una base para la topología del orden, cuyos abiertos son los subconjuntos de $*\mathbb{R}$ que se pueden expresar como uniones de elementos de dicha base. Todas las nociones topológicas se desprenden de aquí: un subconjunto A de $*\mathbb{R}$ es cerrado si su complemento $A^c = *\mathbb{R} - A$ es abierto. Así mismo, una función $f : *\mathbb{R} \to *\mathbb{R}$ es continua si, para cada subconjunto abierto $V \in *\mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de $*\mathbb{R}$. *Et cetera*.

Ahora bien, sean $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto (real), $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Denotemos por $*f : *(a, b) \to *\mathbb{R}$, como en el Capítulo 1, a la extensión de f a los hiperreales. Queremos usar el poder de los hiperreales para obtener una noción elegante y útil de continuidad de f en c, con base en el comportamiento de $*f$ en $c = *c$. Para ello, sean $\alpha, \beta \in *\mathbb{R}$ y comencemos por definir la relación

$$\alpha \simeq \beta \leftrightarrow \alpha \text{ está infinitamente cerca a } \beta \leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{I}.$$

Ella es una equivalencia y sus clases de equivalencia se llaman halos. Es decir, el halo de α es la clase

$$\mathrm{hal}(\alpha) = \{\beta \in *\mathbb{R} \mid \alpha \simeq \beta\}.$$

Los halos satisfacen las propiedades siguientes

Proposición 5.5. *Si $\alpha \simeq \beta$ y $w \in *\mathbb{R} - \infty$ (en breve, w es acotado), entonces $w\alpha \simeq w\beta$ y $w + \alpha \simeq w + \beta$. Si $\alpha \simeq \beta$, con $\alpha, \beta \in *\mathbb{R} - \infty$ (acotados), se tiene que $\alpha^2 \simeq \beta^2$.*

Demostración. Partamos de $w\alpha - w\beta = w(\alpha - \beta)$. Ya que, por hipótesis, $\alpha - \beta \in \mathbb{I}$, así $w\alpha \simeq w\beta$. Para las sumas, $w + \alpha - (w + \beta) = \alpha - \beta \in \mathbb{I}$, así $w + \alpha \simeq w + \beta$. Finalmente, si $\alpha \simeq \beta$, por lo anterior, $\beta\alpha \simeq \beta^2$ y $\alpha^2 \simeq \alpha\beta$. O sea, $\alpha^2 \simeq \beta^2$, por transitividad. □

Los halos sirven para caracterizar la continuidad como sigue, lo que coincide con la formulación original del Cauchy en su *Cours d'Analyse*: . . . *la fonction $f(x)$ restera continue par rappport à x entre les limites données,* *si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujour un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même*[2].

Teorema 5.6. *Sean* $(a, b), c, f$ *y* $*f$ *como más arriba. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *es continua en* c *en el sentido real. O sea, para cada intervalo abierto* $(f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon), \epsilon > 0$, *alrededor de* $f(c)$*; existe un intervalo abierto* $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b), \delta > 0$, *alrededor de* c*; tal que*

$$f(c - \delta, c + \delta) \subseteq (f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon).$$

   Es decir, se verifica la fórmula

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (a, b) \ \left[|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \epsilon \right].$$

2. $*f(\xi) \simeq *f(*c)$ *para todo* $\xi \in *(a, b)$ *tal que* $\xi \simeq *c$*. En otras palabras,*

$$*f(hal(*c) \cap *(a, b)) \subseteq hal(*f(*c)).$$

3. *Para todo* $\xi \in *(a, b)$ *tal que* $*f(\xi) \in hal(*f(*c))$*, existe un* $\iota \in \mathbb{I}^+$ *tal que* $|\xi - *c| < \iota$.

Demostración. Veamos que 2. implica 1. Suponemos, pues, que

$$\xi \in *(a, b) \wedge \xi \simeq *c \to *f(\xi) \simeq *f(*c).$$

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Debemos hallar un $\delta \in \mathbb{R}^+$ adecuado. Para ello, sea $\iota \in \mathbb{I}^+$, entonces si $\xi \in *(a, b)$ con $|\xi - *c| < \iota$, tenemos que $\xi \simeq *c$. Por hipótesis, $| * f(\xi) - *f(*c)|$ es menor que algún infinitesimal positivo y, por lo tanto, menor que ϵ. Resumiendo,

$$\exists \iota \in \mathbb{I}^+ \forall \xi \in *(a, b)[|\xi - *c| < \iota \to | * f(\xi) - *f(*c)| < *\varepsilon].$$

[2]. . . la función $f(x)$ permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre tales límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable resulta siempre en un incremento infinitamente pequeño de la función.

En consecuencia, cuando se regresa a la variable real mediante "transferencia existencial",

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in (a,b)[|x-c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon].$$

Consideremos ahora 1. $\rightarrow$ 2.: asumamos que se cumple la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad en $\mathbb{R}$ y tomemos un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que exite $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall x \in (a,b)[|x-c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon].$$

Por el Principio de transferencia (universal),

$$\forall \xi \in *(a,b)[|\xi - *c| < *\delta \rightarrow | * f(\xi) - *f(*c)| < *\epsilon].$$

Ahora bien, $*\delta$ es mayor que cualquier infinitesimal positivo y, como $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ puede ser cualquiera,

$$\xi \in *(a,b) \wedge \xi \simeq *c \rightarrow *f(\xi) \simeq *f(*c).$$

La equivalencia con 3. es evidente. □

A continuacion damos algunos ejemplos del uso de esta caracterización.

Ejemplo 5.7. *Sea* $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *la función identidad y* $c \in \mathbb{R}$. *En vista de que* $*id(hal(*c)) = hal(*id(*c))$, *id es continua en c.*

Ejemplo 5.8. *Sean* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces, por la Proposición 5.5,*

$$\xi \simeq *c \rightarrow *f(\xi) = \xi^2 \simeq (*c)^2 = *f(*c).$$

Luego, $f(x) = x^2$ *es continua en c. El caso,* $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}^+$, *se prueba por inducción matemática.*

Ejemplo 5.9. *Sea* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *el seno trigonométrico y* $c \in \mathbb{R}$. *Si* $\iota \in \mathbb{I}$, *entonces*

$$\begin{aligned} * \operatorname{sen}(*c + \iota) - * \operatorname{sen}(*c) &= * \operatorname{sen}(*c) * \cos(\iota) + * \cos(*c) * \operatorname{sen}(\iota) - * \operatorname{sen}(*c) \\ &= * \operatorname{sen}(*c)[* \cos(\iota) - 1] + * \cos(*c) * \operatorname{sen}(\iota). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$*\cos(\iota) = *1 - \frac{\iota^2}{2!} + \frac{\iota^4}{4!} - \ldots \simeq *1,$$
$$*\operatorname{sen}(\iota) = \iota - \frac{\iota^3}{3!} + \frac{\iota^5}{5!} - \ldots \simeq *0,$$

por las propiedades algebraicas de $\mathbb{I}$. *De este modo,*

$$*\operatorname{sen}(*c + \iota) \in hal(*\operatorname{sen}(*c))$$

y sen *es continua en* c.

Ejemplo 5.10. *Sea* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función exponencial* $\exp(x) = e^x$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces, por las propiedades de* $\simeq$, *con* ξ *acotado,*

$$\xi \simeq *c \to *\exp(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty_{\mathbb{N}}} \xi^n \simeq \sum_{n=0}^{\infty_{\mathbb{N}}} (*c)^n = *\exp(*c).$$

O sea, $\exp(x)$ *es continua en* c.

Las series de los ejemplos anteriores no ofrecen mayor problema.

Ejemplo 5.11. *Consideremos* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $c \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & Si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & Si \quad x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

La densidad de $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{Q}^c$ *en* $\mathbb{R}$ *implica, para* $c \in \mathbb{R}$, *que*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x, y \in \mathbb{R}[|x - c| < \varepsilon \wedge |y - c| < \varepsilon \wedge f(x) = 0 \wedge f(y) = 1].$$

Por el Principio de transferencia,

$$\forall \iota \in \mathbb{I}^+ \exists *x, *y \in *\mathbb{R}[|*x - c| < \iota \wedge |*y - c| < \iota \wedge *f(*x) = 0 \wedge *f(*y) = 1].$$

Ahora bien, si $c \in \mathbb{Q}$, *entonces* $\exists *y \in hal(c) : *f(*y) = 1$. *Pero* $1 \notin hal(0)$. *Por lo tanto,* f *no es continua en* c. *Un argumento análogo prueba la afirmación para* $c \in \mathbb{Q}^c$. *Con ello,* f *no es continua en ningún real.*

5.3. Diferenciación

Todo número acotado $*b \in *\mathbb{R} - \infty$ está infinitamente cerca o es igual a un único número real. Llamaremos a dicho número real la sombra de $*b$ y lo denotaremos como $\mathrm{som}(*b)$. En efecto, existen $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $*r < *b < *s$. El conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r < *b\} \neq \emptyset$ es acotado superiormente por s, luego posee *supremum*. Pongamos $c = \sup(A)$ y probemos que $*c \simeq *b$. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, se tiene que $c + \varepsilon \notin A$. O sea, $*b \leq *c + *\varepsilon$. Por otro lado, se sigue de las propiedades del *supremum* que $*c - *\varepsilon < *b$ y, en consecuencia, $c - \varepsilon < b \leq c + \varepsilon$. Como para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se tiene $| * b - *c| < *\varepsilon$, $*b - *c \in \mathbb{I}$; es decir, $*b$ es infinitamente cercano a $*c$. El *supremum* es único.

No sobra decir que la sombra se deja entender como una función $\mathrm{som} : *\mathbb{R} - \infty \to \mathbb{R}$.

Proposición 5.12. *Sean $*b, *c \in *\mathbb{R} - \infty$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

1. $som(*b \pm *c) = som(*b) \pm som(*c)$,
2. $som(*b \cdot *c) = som(*b) \cdot som(*c)$,
3. $som(*b / *c) = som(*b)/som(*c)$, *cuando* $som(*c) \neq 0$,
4. $som(*b^n) = som^n(*b)$,
5. $som(| * b|) = |som(*b)|$,
6. $som(\sqrt[n]{*b}) = \sqrt[n]{som(*b)}$, *para* $*b \geq 0$,
7. *si* $*b \leq *c$, *entonces* $som(*b) \leq som(*c)$.

Demostración. Abreviemos poniendo $som(*b) = r$ y $som(*c) = r'$. Basta probar las condiciones de cercanía porque la existencia del supremum está garantizada por la completitud de los reales. Así pues, las pruebas usan las mismas desigualdades usadas para las propiedades de los límites de números reales. Por ejemplo, si $| * b - *r| < *\varepsilon/2$ y $| * c - *r'| < *\varepsilon/2$, entonces

$$|(*b + *c) \pm (*r + *r')| \leq | * b - *r| + | * c - *r'| < *\varepsilon.$$

La propiedad 4 se demuestra por inducción y la 5 por el conocido corolario de la desigualdad triangular $|| * b| - | * r|| < | * b - *r| < *\epsilon$. $\square$

Teorema 5.13. *Sean (a,b) un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función real y $*f:*(a,b)\to *\mathbb{R}$ su extensión a $*\mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es diferenciable en $x\in(a,b)$ en el sentido clásico. Es decir,*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=L$$

existe, en cuyo caso se escribe $f'(x)=L$ y se dice que L es la derivada de f en x. Recordamos que esto equivale a la existencia de una aplicación lineal $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que, cuando $x+h\in(a,b)$,

$$f(x+h)=f(x)+L(h)+\varphi(h),$$

donde φ es una función tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{|h|}=0.$$

2. *Para todo $\iota\in\mathbb{I}$, $*f$ está definida en $x+\iota$ y*

$$som\left(\frac{*f(x+\iota)-*f(x)}{\iota}\right)=L\in\mathbb{R},$$

donde hemos identificado a $*x$ con x. De este modo,

$$\frac{*f(x+\iota)-*f(x)}{\iota}\simeq *L.$$

3. *Existe una aplicación lineal $L:\mathbb{I}\cup\{0\}\to\mathbb{I}\cup\{0\}$ (Proposición 5.2, recordemos que éste es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) tal que, cuando $*f$ está definida en $x+\iota$, $\iota\in\mathbb{I}$, se tiene*

$$*f(x+\iota)-*f(x)\simeq L(\iota).$$

Demostración. Veamos que 1. implica 2., Sea $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Sabemos que existe $\delta\in\mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall h\in\mathbb{R}-\{0\}\left[x+h\in(a,b)\wedge|h|<\delta\to\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-L\right|<\varepsilon\right].$$

Por el Principio de transferencia,

$$\forall \iota \in \mathbb{I}\left[x+\iota \in *(a,b) \wedge |\iota| < *\delta \to \left|\frac{*f(x+\iota) - *f(x)}{\iota} - *L\right| < *\varepsilon\right]$$

Es decir,

$$\frac{*f(x+\iota) - *f(x)}{\iota} \simeq *L$$

y la sombra del "cociente diferencial" de la izquierda es L.

También, 2. $\to$ 1. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y busquemos un $\delta \in \mathbb{R}^+$ que haga cierta la tesis. Por hipótesis, tenemos que

$$\exists * \delta \in *\mathbb{R}^+ \forall \iota \in \mathbb{I}\left[x+\iota \in *(a,b) \wedge |\iota| < *\delta \to \left|\frac{*f(x+\iota) - *f(x)}{\iota} - *L\right| < *\varepsilon\right].$$

Ahora, por transferencia "existencial",

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall h \in \mathbb{R} - \{0\}\left[x+h \in (a,b) \wedge |h| < \delta \to \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L\right| < \varepsilon\right].$$

Claramente, 2. y 3. son equivalentes. □

El número $L \in \mathbb{R}$ (o su elemento dual, cuando se entienda como forma lineal) es la derivada de f en x. Esta definición recoge la lucha de Newton por dar un significado a ciertas cantidades y, sobre todo, a los cocientes de ellas. Comparemos el teorema anterior con el siguente pasaje, tomado de los *Principia: Quantitates, ut quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendum, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, sunt ultimo aequales.*[3]

Corolario 5.14. *Con las notaciones anteriores, si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*

Para los ejemplos que siguen supondremos, sin dar mayor detalle, que las funciones están definidas en dominios adecuados.

[3] *Quantities and the ratio of quantities which, in any finite time, tend continouslly to equality, and before the end of that time, approach nearer to each other than by any given difference, become ultimately equal.*

Ejemplo 5.15. *Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. Efectivamente,*

$$\frac{*f(*x + \iota) - *f(*x)}{\iota} = \frac{*c - *c}{\iota} = 0$$

Ejemplo 5.16. *La función lineal $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, tiene derivada $f'(x) = a$. En verdad,*

$$\begin{aligned}\frac{*f(*x + \iota) - *f(*x)}{\iota} &= \frac{*a(*x + \iota) + *b - (*a * x + *b)}{\iota} \\ &= \frac{*a * x + *a\iota + *b - *a * x - *b}{\iota} = *a.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.17. *Ya que, en virtud del Teorema del binomio de Newton,*

$$\frac{(*x + \iota)^n - *x^n}{\iota} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} * x^{n-k}\iota^k - *x^n}{\iota},$$

la derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejemplo 5.18. *Sean $u(x)$ una función diferenciable, $c \in \mathbb{R}$ y $f(x) = c \cdot u(x)$. Entonces, $f'(x) = c \cdot u'(x)$. El cociente diferencial es*

$$\frac{*c * u(*x + \iota) - *c * u(*x)}{\iota} = *c \left[\frac{*u(*x + \iota) - *u(*x)}{\iota} \right].$$

Por las propiedades de la sombra,

$$som(*c) \cdot som \left(\frac{*u(*x + \iota) - *u(*x)}{\iota} \right) = c \cdot u'(x).$$

Con más generalidad, si $u(x), v(x)$ son diferenciables y $f(x) = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$, entonces $f'(x) = a \cdot u'(x) + b \cdot v'(x)$.

Ejemplo 5.19. *Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, para ciertas funciones diferenciables $u(x), v(x)$, entonces $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Ciertamente,*

$$\begin{aligned}\frac{*f(*x+\iota) - *f(*x)}{\iota} &= \frac{*u(*x+\iota) * v(*x+\iota) - *u(*x) * v(*x)}{\iota} \\ &= \frac{[*u(*x+\iota) - *u(*x)] * v(*x)}{\iota} + \frac{*u(*x+\iota)[*v(*x+\iota) - *v(*x)]}{\iota}.\end{aligned}$$

Y el resultado se sigue de las propiedades de la sombra y de la continuidad. De manera análoga, si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ *y* $v(x) \neq 0$, *entonces*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Ejemplo 5.20. *Si* f *es diferenciable en* $x \in \mathbb{R}$ *y* g *es diferenciable en* $f(x)$, *entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es diferenciable en* x, *con derivada en* $g'(f(x))f'(x)$. *Para ello, basta calcular*

$$\begin{aligned}\frac{*g(*f(x+\iota))-*g(*f(x))}{\iota} &= \frac{*g(*f(x+\iota))-*g(*f(x))}{\iota}\cdot\frac{*f(x+\iota)-*f(x)}{*f(x+\iota)-*f(x)}\\ &= \frac{*g(*f(x+\iota))-*g(*f(x))}{*f(x+\iota)-*f(x)}\cdot\frac{*f(x+\iota)-*f(x)}{\iota},\end{aligned}$$

En este punto notamos que $*f(x+\iota) = *f(x) + \kappa$, *con* $\kappa \in \mathbb{I}$. *Las propiedades de la sombra producen el resultado buscado. Este procedimiento no se puede usar cuando* f *es constante en una vecindad de* x. *Sin embargo, la aplicación directa de la definición produce* $(g \circ f)'(x) = 0$. *En consecuencia, si* f *es biyectiva en su dominio y diferenciable en* x, *se tiene que*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ejemplo 5.21. *Para la función exponencial* $\exp(x) = e^x$, *aplicamos la fórmula de adición para obtener*

$$\frac{\exp(x+\iota)-\exp(x)}{\iota} = \frac{\exp(x)[\exp(\iota)-1]}{\iota} = \frac{\exp(x)[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\iota^n}{n!}-1]}{\iota}.$$

Al sacar la sombra, $\exp'(x) = \exp(x)$. *Con esto, por el ejemplo anterior, la derivada de la función logaritmica* $\log(x)$ *es* $1/x$.

Ejemplo 5.22. *La fórmula de adición también ofrece un método para calcular la derivada de* $\operatorname{sen}(x)$. *Tengamos presente el Ejemplo 5.9. En efecto,*

$$\begin{aligned}\frac{*\operatorname{sen}(x+\iota)-*\operatorname{sen}(x)}{\iota} &= \frac{*\operatorname{sen}(x)*\cos(\iota)+*\cos(x)*\operatorname{sen}(\iota)-*\operatorname{sen}(x)}{\iota}\\ &= \frac{*\operatorname{sen}(x)[*\cos(\iota)-1]+*\cos(x)*\operatorname{sen}(\iota)}{\iota}\\ &= \frac{*\operatorname{sen}(x)[1-\frac{\iota^2}{2!}+\frac{\iota^4}{4!}-\cdots-1]+*\cos(x)[\iota-\frac{\iota^3}{3!}+\frac{\iota^5}{5!}-\cdots]}{\iota}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, luego de sacar la sombra, $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$. *De forma análoga,* $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

5.4. Sucesiones

Hay más arriba algunos puntos que no hemos explicado totalmente. Nos referimos a los ejemplos 5.9, 5.10, 5.21 y 5.22, donde se usaron series infinitas. Como la convergencia de una serie es la convergencia de su sucesión de sumas parciales, debemos estudiar las sucesiones. También sería bueno profundizar en la naturaleza de $*\mathbb{N}$ con el fin de entender algunas cuestiones importantes sobre $*\mathbb{Q}$ que pasaron desapercibidas en el Ejemplo 5.11.

Ahora bien, cada sucesión (de números reales) es una aplicación $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ produce por extensión una hipersucesión (de hiperreales), es decir, una aplicación $*s : *\mathbb{N} \to *\mathbb{R}$. En las hipersucesiones, los términos $*s(*n) = *s_{*n}$ están definidos incluso para los $*n \in *\mathbb{N} - \bullet\mathbb{N}$, los cuales no son acotados. Volvamos un momento a la construcción del ultrafiltro para recordar el teorema Fundamental 2.2, donde se probó que, en particular, los elementos no-estándar en $*\mathbb{N}$ son precisamente las clases de los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ (sucesiones, si se quiere) cuyos elementos (términos) son todos distintos.

Nos interesa una caracterización de la convergencia para las sucesiones.

Teorema 5.23. *Sea* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *una sucesión con términos* $(s(n) = s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. *Sean* $*s$ *y* $*s_{*n}$ *como más arriba. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $L \in \mathbb{R}$ *en el sentido usual. O sea, para todo intervalo abierto* $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *existe una cola de la sucesión* $s_N, s_{N+1}, s_{N+2}, \ldots$ *contenida en dicho intervalo abierto. Formalmente,*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ \left[n > N \to |s_n - L| < \varepsilon \right].$$

2. $*s_{*n} \simeq *L$, *para todo elemento no acotado* $*n \in *\mathbb{N} - \bullet\mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L y que $*m \in *\mathbb{N} - \bullet\mathbb{N} \subset \infty^+$. Para $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [n > N \to |s_n - L| < \varepsilon]\,.$$

Por transferencia (universal) obtenemos

$$\forall * n \in *\mathbb{N}\ [*n > *N \to | * s_{*n} - *L| < *\varepsilon]\,.$$

Como $*m > *N$, por no estar acotado, $s_{*m} \simeq *L$.

Para el recíproco, fijemos un $*m \in *\mathbb{N}$ no acotado. Todo $*n \in *\mathbb{N}$ con $n* > *m$ tampoco es acotado y $s_{*n} \simeq *L$. Por tanto, $| * s_{*n} - *L| < *\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Esto prueba que

$$\forall * n \in *\mathbb{N}\,[*n > *m \to | * s_{*n} - *L| < *\varepsilon]\,.$$

Así, se verifica la sentencia

$$\exists * N \in *\mathbb{N}\forall * n \in *\mathbb{N}\,[*n > *N \to | * s_{*n} - *L| < *\varepsilon]\,.$$

Como ésta es la transformada $*$ de

$$\exists N \in \mathbb{N}\forall n \in \mathbb{N}\,[n > N \to |s_n - L| < \varepsilon]\,,$$

obtenemos el resultado por transferencia existencial. $\square$

*

Conclusiones

- En la Introducción dijimos que los hiperreales permitían realizar muchas construcciones naturales al Análisis. Sin embargo, dicha "naturalidad" es mucho más profunda. Los hiperreales resultan de estudiar propiedades menos evidentes de los naturales, en cuanto conjunto infinito. En el Análisis clásico bastaba considerar las "colas" de las sucesiones porque el asunto central era la convergencia. El estudio de los ultrafiltros permite detectar detalles más finos en las sucesiones, a saber: los hiperreales. Por eso, contrariamente a lo que muchos piensan, estamos convencidos de que los hiperreales constituyen una teoría que profundiza naturalmente y va más allá de los resultados clásicos del Análisis.

- Quedan pendientes muchas tareas: la construcción explícita de un ultrafiltro para $\mathbb{N}$, la integral de Riemann, todos los demás temas del Análisis clásico; profundizar en el estudio de la Lógica, la Teoría de Conjuntos, etc. De particular interés para el Análisis serían las Ecuaciones Diferenciales, el Cálculo de Variaciones y, en fin, el Análisis Funcional.

- También queda pendiente la reconstrucción histórica de la emergencia de los hiperreales. Hay todavía algunos episodios (que han llamado nuestra atención) por aclarar: las ideas, heterodoxas para su época, de du Bois-Reymond y Hadamard; los trabajos de los matemáticos que precedieron inmediatamente a Robinson; los de aquellos que lo sucedieron; entre otros.

- En relación con la enseñanza de estos temas, creemos que todo depende del nivel que se quiera alcanzar. Si se acepta la existencia de los infinitesimales, se puede tratar el tema *à la Leibniz* para enseñarlo en los primeros semestres. Si se quiere abordar la existencia de los hiperreales, habría que esperar, por lo menos, hasta el final del pregrado. Y así, para estudiar todo el Análisis con la ayuda de los hiperreales, se tendría que esperar otro poco. Claro, tampoco tiene que ser así, pues todo depende del interés y la disciplina de cada quien.

Bibliografía

[1] Goldblatt, R. *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis.* 1998. Springer Verlag, New York.

[2] Hairer, E. *Analysis by Its History.* 2008. Springer Verlag, New York.

[3] Henson, C. W. *Foundations of Nonstandard Analysis: a Gentle Introduction to Nonstardard Extensions.* 1997. Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL, USA. `http://www.math.uiuc.edu/~henson/papers/basics.pdf` Originally appeared in Nonstandard analysis (Edinburgh,1996), pages 1-49, Kluwer Acad. Publ., Dordreht.

[4] Keisler, H. J. *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach.*, Secon Edition, 2000. University of Wisconsin.

[5] Keisler, H. J. *The Ultraproduct Construction*, June 1, 2010. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (Universidad Adam Mickiewicz de Poznan), Posnania, Polonia. `http://www.logic.amu.edu.pl/images/1/14/Keislerultraproduct.pdf`

[6] Leibniz, G. W. *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* 1684. Acta Eruditorum, Vol. III, Leipzig.

[7] Newton, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Editio tertia aucta & emendate. 1726. Guil. & joh. Innys, Londoni.

[8] Oostra, A. A. *Sistemas grandes de números o sistemas de números grandes.* Fecha desconocida. Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

[9] Robinson, A. *Non-standard Analysis.* Revised edition. 1996. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[10] Takeuchi, Y. *Métodos analíticos del análisis no stándar.* 1988. Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.