Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

В.М. Адашевский, Г.О. Анищенко, Ю.Л. Тарсис

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

Утверждено
редакционно-
издательским
советом университета,
протокол № 3 от
21.12.2007 г.

Харьков НТУ «ХПИ» 2008

ББК 22.21

А-28

УДК 531.3 (075)

Рецензенты: *Ермаков С.С.*, д-р пед. наук, профессор, Харьковская государственная академия дизайна и искусств;

Лавинский В.И., д-р техн. наук, профессор, Национальный технический университет «ХПИ»

Подано матеріали з теоретичної механіки за розділом «Динаміка». Розглянуто загальні положення динаміки, наведено стислі теоретичні відомості, розібрано приклади, надано завдання для виконання контрольних робіт.

Адашевский В.М. и др.

А-28 Теоретическая механика. Динамика: Учеб.-метод. пособие / В.М. Адашевский, Г.О. Анищенко, Ю.Л. Тарсис.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2008.– 88 с. – На рус. яз.

ISBN

Представлены материалы по теоретической механике из раздела «Динамика». Рассмотрены общие положения динамики, приведены краткие теоретические сведения, разобраны примеры, даны задания для выполнения контрольных работ.

Іл. 33. Табл. 9. Библиогр.: 13 назв.

ББК 22.21

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

АДАШЕВСЬКИЙ Володимир Михайлович
АНІЩЕНКО Галина Оттівна
ТАРСІС Юрій Львович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
ДИНАМІКА

Навчально-методичний посібник
для студентів
спеціальностей

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував *С.К. Шелковий*

В авторській редакції

Комп'ютерна верстка та графічне оформлення – *І.Р. Грабовська*

План 2008 р., п. 20/

Підп. до друку . .08 р. Формат 60х84 1/16. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум.-друк. арк. 4,4. Обл. вид.-арк. 5,5.
Наклад 100 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр «НТУ ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня «НТУ ХПІ». 61002,

ВВЕДЕНИЕ

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучают механическое движение материальной точки, абсолютно твердого материального тела и системы материальных точек под действием приложенных к ним сил.

Материальной точкой называют тело, имеющее массу, размерами которого в конкретных практических задачах можно пренебречь. ***Абсолютно твердым материальным телом*** называют совокупность материальных точек, заполняющих определенный объем в пространстве, причем расстояние между двумя любыми точками считают неизменным. ***Системой материальных точек*** называют совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны. ***Масса*** – это физическая константа объекта (материальной точки или тела), которая является мерой его инертных и гравитационных свойств, причем инертная и гравитационная массы с достаточной для практики точностью совпадают. Векторную меру механического взаимодействия тел называют ***силой***. Массу измеряют в килограммах [кг], а силу – в Ньютонах [Н], при этом сила в 1 Н сообщает материальной точке массой в 1 кг ускорение, равное 1 м/с^2.

Основу теоретической механики составляют *законы динамики, сформулированные для материальной точки*. Системы отсчета, в которой справедливы эти законы, называют ***инерциальными***. Для большинства практических задач инерциальной системой отсчета является, например, гелиоцентрическая система, центр которой находится в центре Солнца, а оси координат направлены на удаленные «неподвижные» звезды. На основе принципа относительности классической механики все системы отсчета, которые движутся поступательно, равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, также являются инерциальными. При решении ряда практических задач, когда можно пренебречь вращением Земли, с достаточной точностью в качестве инерциальной системы координат можно принять геоцентрическую систему, связанную с Землей.

Сформулируем основные законы динамики.

Первый закон Ньютона (***закон инерции***) – В инерциальной системе отсчета изолированная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Под изолированной понимают точку, на которую не действуют никакие силы со стороны других материальных объектов.

Второй закон Ньютона (***основной закон динамики***) – В инерциальной системе отсчета связь между массой точки m, силой $\vec{P}$, действующей на точку, и ускорением $\vec{a}$, сообщаемым точке этой силой, определяется зависимостью $m\vec{a} = \vec{P}$.

Третий закон Ньютона (***закон равенства действия и противодействия***) – Силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки или два материальных тела равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия.

Четвертый закон (***принцип независимости действия сил***) – Ускорение, приобретаемое материальной точкой при действии на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых точке каждой силой в отдельности. Иными словами, ускорение точки будет таким, как если бы его вызвала равнодействующая этой системы сил.

В разделах 1-2 настоящего пособия приведены основные теоретические положения динамики материальной точки и механической системы. В 3-м разделе даны разобранные примеры решения типовых задач по основным темам динамики. В 4-м разделе по трем темам приведены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы с соответствующими рисунками и таблицами исходных данных.

Для лучшего усвоения каждой темы студенту необходимо:

– изучить теоретический материал, дополнительно воспользовавшись списком рекомендуемой литературы, и ответить на контрольные вопросы;

– разобрать примеры решения типовых задач;

– выполнить согласно предложенным преподавателем вариантам самостоятельные расчетные работы и оформить их в виде задания.

Освоенный теоретический и практический материал, изложенный в пособии, поможет будущим инженерам решать разнообразные технические задачи, связанные с их профессиональной деятельностью.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободной называют точку, на которую не наложены связи. В противном случае точка является **несвободной** и тогда, согласно принципу освобождаемости от связей к точке прикладывают реакции отброшенных связей, кроме активных сил.

Если на свободную точку действует система активных сил, равнодействующая которой $\vec{P}^a$, то согласно 2-му закону Ньютона следует, что

$$m\vec{a} = \vec{P}^a. \tag{1.1}$$

Полученное выражение называют ***основным уравнением динамики свободной*** материальной точки в векторной форме.

Если движение точки задано в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то, как известно из раздела кинематики,

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.2}$$

и формулу (1.1) можно записать следующим образом

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{P}^a. \tag{1.3}$$

Нужно отметить, что в общем случае сила $\vec{P}^a$ может быть функцией времени, положения и скорости точки

$$\vec{P}^a = \vec{P}^a(t, \vec{r}, \vec{v}). \tag{1.4}$$

Равенство (1.3) представляет собой векторное дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки. В проекциях на оси инерциальной декартовой системы координат оно примет вид:

$$m\ddot{x} = P_x^a; \quad m\ddot{y} = P_y^a; \quad m\ddot{z} = P_z^a. \tag{1.5}$$

При движении точки в плоскости xOy, так как $\ddot{z} = a_z = 0$, систему уравнений можно записать так:

$$m\ddot{x} = P_x^a; \quad m\ddot{y} = P_y^a. \tag{1.6}$$

Если точка движется прямолинейно вдоль какой-либо оси, например Ox, так как $P_y^a = P_z^a = 0; \quad \ddot{y} = a_y = 0; \quad \ddot{z} = a_z = 0$, получим

$$m\ddot{x} = P_x^a \,. \tag{1.7}$$

В проекциях на оси (касательную, нормаль и бинормаль к траектории точки) естественной системы координат равенство (1.3) запишем следующим образом

$$ma_\tau = P_\tau^a; \quad ma_n = P_n^a; \quad ma_b = P_b^a \,. \tag{1.8}$$

Из кинематики известно, что

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 S}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{S}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0 \,. \tag{1.9}$$

Поэтому рассматриваемые выражения примут вид:

$$m\dot{v} = m\ddot{S} = P_\tau^a; \quad m\frac{v^2}{\rho} = P_n^a; \quad P_b^a = 0 \,, \tag{1.10}$$

где $S = f\left(t\right)$ – уравнение движения точки по соответствующей траектории; ρ – радиус кривизны траектории; P_τ^a, P_n^a, P_b^a – проекции равнодействующей сил, приложенных к точке на оси естественной системы координат.

Если точка несвободна то на нее, кроме равнодействующей активных сил $\vec{P}^a$, будет действовать равнодействующая реакций связей $\vec{N}$. Тогда уравнение (1.1) запишем так:

$$m\vec{a} = \vec{P}^a + \vec{N} \,. \tag{1.11}$$

Полученное выражение называют ***основным уравнением динамики несвободной*** материальной точки в векторной форме. Оно принимает такой вид:

– в проекциях на оси декартовой системы координат

$$m\ddot{x} = P_x^a + N_x; \quad m\ddot{y} = P_y^a + N_y; \quad m\ddot{z} = P_z^a + N_z \,; \tag{1.12}$$

– в проекциях на оси естественной системы координат

$$ma_\tau = P_\tau^a + N_\tau; \quad ma_n = P_n^a + N_n; \quad ma_b = P_b^a + N_b \tag{1.13}$$

или

$$m\dot{v} = m\ddot{s} = P_\tau^a + N_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho} = P_n^a + N_n; \quad P_b^a + N_b = 0 \,. \tag{1.14}$$

1.2. Две основные задачи динамики материальной точки

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки (1.5), (1.10), (1.12) и (1.14), можно решить две основные задачи динамики точки, которые формулируют следующим образом.

<u>Первая задача</u>. Определить силы, действующие на точку, если известны масса точки и закон ее движения.

Решение этой задачи заключается, в основном, в определении ускорения точки по заданным уравнениям ее движения, т.е. в их дифференцировании.

Можно предложить такую последовательность решения задачи:

1) выбрать систему координат, в которой удобно решать данную задачу (декартовую или естественную);

2) изобразить в выбранной системе координат материальную точку в текущем положении;

3) приложить к точке активные силы и реакции связей;

4) записать основное уравнение динамики в проекциях на оси выбранной системы координат;

5) найти проекции ускорения точки на оси выбранной системы координат путем дифференцирования уравнений ее движения;

6) определить искомые параметры с помощью системы составленных уравнений.

<u>Вторая задача</u>. Определить закон движения точки, если заданы масса точки и действующие на нее силы.

Решение этой задачи требует интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Методика решения второй задачи на примере декартовой системы координат состоит в следующем. Чтобы определить уравнения движения точки $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, необходимо дважды проинтегрировать систему трех дифференциальных уравнений 2-го порядка. В результате получим уравнения движения точки, содержащие, кроме времени, шесть произвольных постоянных. Уравнения движения точки и проекции ее скорости на оси координат имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&x = x\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);\\
&y = y\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);\\
&z = z\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right),\\
&\dot{x} = \dot{x}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);\\
&\dot{y} = \dot{y}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);\\
&\dot{z} = \dot{z}\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right);
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

где $C_1, ..., C_6$ – это так называемые постоянные интегрирования, которые находят из начальных условий. *Начальные условия* – значение скорости (проекций скорости) и положения (координат) точки в момент времени, обычно принимаемый равным нулю, которые должны быть предварительно заданы:

$$
\begin{aligned}
t = 0; \quad &x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0;\\
&\dot{x} = \dot{x}_0;\ \dot{y} = \dot{y}_0;\ \dot{z} = \dot{z}_0.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

После определения постоянных интегрирования уравнения действительного движения точки окончательно получим в виде:

$$
\begin{aligned}
&x = f_1 = \left(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0\right);\\
&y = f_2 = \left(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0\right);\\
&z = f_3 = \left(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0\right).
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Решение второй задачи динамики можно выполнить в такой последовательности:

1) выбрать систему координат (декартовую или естественную), в которой удобно решать данную задачу;

2) изобразить в выбранной системе координат материальную точку в текущем положении;

3) приложить к точке активные силы и реакции отброшенных связей (если точка несвободна);

4) записать основное уравнение динамики в проекциях на оси выбранной системы координат;

5) проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений и найти их общие решения;

6) определить, используя заданные начальные условия, постоянные интегрирования;

7) подставить постоянные интегрирования в общие решения и получить действительные уравнения движения точки.

Вопросы для самоконтроля

1. Как выглядит основное уравнение динамики материальной точки в векторной форме?

2. Как выглядит основное уравнение динамики материальной точки в проекциях на оси декартовой и естественной систем координат?

3. В чем суть принципа независимости действия сил на материальную точку?

4. Какая разница между дифференциальными уравнениями движения свободной и несвободной материальных точек?

5. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовой системы координат?

6. Как определяют произвольные постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения материальной точки?

7. Что называют начальными условиями движения точки?

8. Какова последовательность решения второй задачи динамики?

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Классификация связей и сил. Свойства внутренних сил

Механической системой называют совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны. Существуют *свободные* и *несвободные* механические системы. ***Свободная*** – это система, на положения и движения точек которой не наложены ограничения. В противном случае система является ***несвободной***.

Ограничения, наложенные на положения и движения точек, называют ***связями***. Их подразделяют на следующие виды:

– *геометрические*, которые накладывают ограничения на координаты точек;

– *кинематические*, которые накладывают ограничения на скорости точек;

– *голономные*, к которым относятся все геометрические связи и те кинематические, которые путем интегрирования можно свести к геометрическим;

– *неголономные* – кинематические связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы;

– *стационарные* – связи, в уравнения которых время явно не входит;

– *нестационарные* – связи, в уравнения которых время явно входит;

– *удерживающие*, которые записывают в виде равенства, т.е. ограничивают движение во всех направлениях;

– *неудерживающие*, которые записывают в виде неравенства, т.е. ограничивают движение в одних направлениях и не ограничивают их в других;

Силы, действующие на точки механической системы, классифицируют следующим образом:

– *внешние* $\vec{P}^e$, которые действуют со стороны материальных объектов, не входящих в систему;

– *внутренние* $\vec{P}^i$, силы, с которыми точки системы взаимодействуют между собой;

– *активные* $\vec{P}^a$, задаваемые и независящие от связей и характеристик движения точек системы;

– силы, действующие со стороны связей на точки системы – *реакции связей* $\vec{N}$.

Отметим важные свойства системы внутренних сил – *главный вектор этих сил и их главный момент относительно любой точки и оси равны нулю*, т.е.

$$\vec{P}^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^i = 0; \quad \vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{P}_k^i\right) = 0; \quad M_x^i = \sum_{k=1}^{n} M_x(P_k^i) = 0. \qquad (2.1)$$

2.2. Геометрия масс – масс-геометрические характеристики системы

Параметры движения механической системы зависят не только ее массы, но и от распределения масс точек системы в пространстве, занимаемом системой. Это распределение определяется масс-геометрическими характеристиками, к которым относят центр масс системы и моменты инерции.

2.2.1. Масса и центр масс механической системы

Сумму масс точек механической системы, состоящей из *n* материальных точек, называют ***массой системы***

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \ . \qquad (2.2)$$

Центром масс системы называют геометрическую точку, радиус-вектор и координаты которой в выбранной системе отсчета определяют по формулам:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}; \quad x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}, \qquad (2.3)$$

где m_k – масса *k*-й точки системы; $\vec{r}_k$ – радиус-вектор этой точки; x_k, y_k, z_k – ее координаты.

Понятие центра масс значительно шире, чем понятие центра тяжести, так как центр тяжести имеет смысл только при наличии гравитационного поля, тогда как центр масс характеризует распределение масс точек в системе в данный момент времени и имеет смысл при наличии материальных объектов. Из определения центра масс следуют некоторые важные зависимости:

$$M\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \,;$$

$$M\dot{\vec{r}}_C = M\vec{v}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \,; \qquad (2.4)$$

$$M\ddot{\vec{r}}_C = M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k \,.$$

Аналогичные формулы могут быть записаны в проекциях на оси координат.

2.2.2. Моменты инерции механической системы

При рассмотрении вращательных движений в динамике механической системы большое значение имеют моменты инерции, характеризующие распределение масс точек этой системы относительно точки и осей выбранной системы координат. Моменты инерции системы разделяют на осевые (относительно оси) – I_x, I_y, I_z; полярные (относительно точки или полюса) – I_O ; центробежные (произведения инерции) – I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}.

Осевой момент инерции – это сумма произведений массы каждой точки системы на квадрат расстояния от данной точки до соответствующей оси (рис. 2.1)

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{kx}^2 = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2 \right);$$

$$I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{ky}^2 = \sum m_k \left(z_k^2 + x_k^2 \right); \qquad (2.5)$$

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{kz}^2 = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2 \right).$$

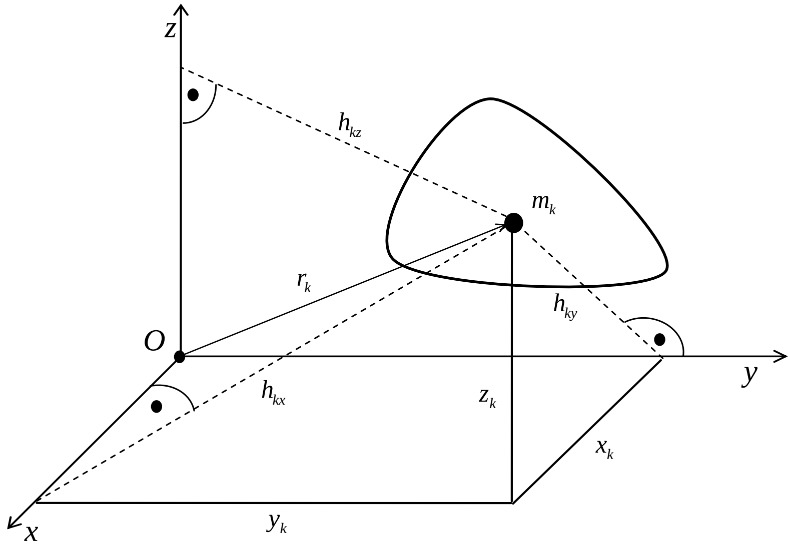

Рисунок 2.1

Полярный момент инерции – это сумма произведений массы каждой точки на квадрат расстояния от данной точки до полюса (точки), в нашем случае до начала координат (см. рис.2.1)

$$I_O = \sum m_k r_k = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \right). \tag{2.6}$$

Центробежный момент инерции – это алгебраическая сумма произведений массы каждой точки на соответствующие ее координаты

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad I_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \quad I_{xz} = \sum m_k x_k z_k \,. \tag{2.7}$$

Если в выбранной системе координат (x, y, z с началом в точке *O*) центробежные моменты инерции равны нулю, то оси этой системы называют ***главными осями инерции*** для точки *O*.

Доказано, что если тело имеет плоскость материальной симметрии, то для любой точки, лежащей в этой плоскости, одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие – расположены в этой плоскости. Если тело имеет ось материальной симметрии, то она является главной осью инерции для любой точки на этой оси. Ось инерции, проходящую через центр масс, называют ***централь-***

ной осью инерции, а главная ось инерции, проходящая через центр масс – ***главной центральной осью инерции***.

Иногда осевой момент инерции для ряда систем или тел сложной геометрической формы выражают в виде произведения массы системы или тела на квадрат линейной величины, которую называют ***радиусом инерции*** относительно этой оси, например, оси Oz

$$I_z = M\rho_z^2 \quad \text{или} \quad I_z = Mi_z^2. \tag{2.8}$$

Здесь M – масса тела; ρ_z или i_z – радиус инерции относительно оси Oz,

$$\rho_z = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}}, \tag{2.9}$$

т.е. радиус инерции определяет расстояние от оси до материальной точки, масса которой равна массе тела, а момент инерции данной точки относительно этой оси был равен моменту инерции тела.

В системе СИ единица измерения момента инерции – $1\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Существует зависимость между моментами инерции тела относительно параллельных осей, например, z_C и z_1 (рис. 2.2), где ось z_C проходит через центр масс этого тела

$$I_{z_1} = I_{z_C} + Ma^2, \tag{2.10}$$

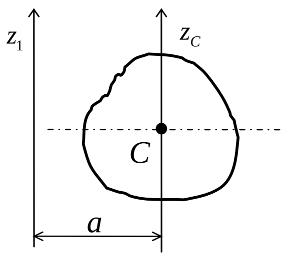

Рисунок 2.2

где M – масса тела; a – расстояние между параллельными осями. Уравнение (2.10) выражает теорему Гюйгенса: «***Момент инерции системы материальных точек (тела) относительно какой-либо оси равен ее моменту инерции относительно оси, параллельной данной, и проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы системы (тела) на квадрат расстояния между осями***». Следовательно, наименьший момент инерции – это момент относительно оси, проходящей через центр масс системы (тела).

Приведем формулы для расчета осевых моментов инерции однородных тел, наиболее часто встречающихся при решении задач:

– тонкого прямолинейного стержня (рис. 2.3) относительно осей, перпендикулярных его продольной оси проходящих через крайние точки стержня и через его центр масс

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}; \quad (2.11)$$

$$I_{z_C} = \frac{Ml^2}{12}, \quad (2.12)$$

где M и l – соответственно масса и длина стержня;

– тонкого обруча (полого цилиндра) относительно его продольной центральной оси (рис. 2.4)

$$I_z = Mr^2, \quad (2.13)$$

где M и r – соответственно масса и радиус обруча (цилиндра);

– сплошного кругового диска (цилиндра) относительно его центральной продольной оси (рис. 2.5)

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}, \quad (2.14)$$

где m, r – соответственно масса диска (цилиндра) и радиус его внешней окружности.

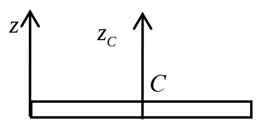

Рисунок 2.3

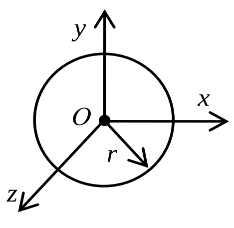

Рисунок 2.4

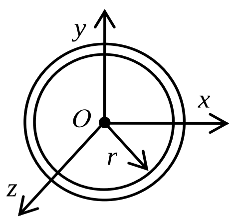

Рисунок 2.5

2.3. Меры движения точки и механической системы

К мерам движения относят следующие характеристики их инертности и движения: количество движения (импульс) точки и системы, кинетический момент (момент количества движения) точки и системы относительно точки и оси, кинетическую энергию точки и системы.

2.3.1. Количество движения точки и механической системы

Количеством движением точки называют векторную величину, равную произведению массы точки на ее скорость

$$\vec{k}_k = m_k \vec{v}_k \,. \tag{2.15}$$

Количеством движением механической системы называют сумму количеств движений всех ее точек

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} \vec{k}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \,. \tag{2.16}$$

Эту величину можно выразить и через скорость центра масс (2.4)

$$\vec{K} = M \cdot \vec{v}_c \,. \tag{2.17}$$

Размерность количества движения – кг·м/с.

2.3.2. Кинетический момент точки и механической системы

Кинетическим моментом или моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра O (рис. 2.6) называют векторную величину $\vec{l}_O$, равную векторному произведению радиус-вектора точки m_k, проведенного к ней из центра *O*, на вектор количества движения $\vec{K}_k = m_k \vec{v}_k$ этой точки

$$\vec{l}_{kO} = \vec{r}_k \times \vec{k}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \,. \tag{2.18}$$

Модуль кинетического момента точки

$$\left|\vec{l}_{kO}\right| = l_{kO} = r_k m_k v_k \sin\left(\vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k\right). \tag{2.19}$$

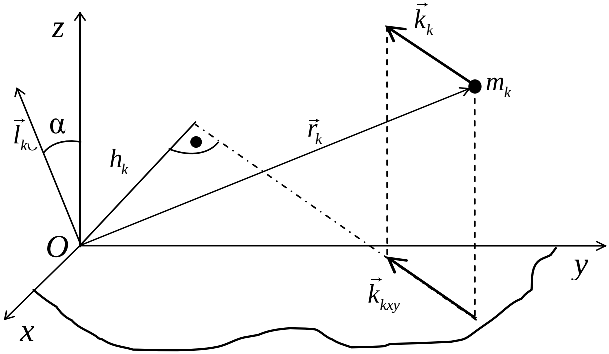

Рисунок 2.6

Кинетическим моментом материальной точки относительно оси называют проекцию на эту ось, например, Oz, кинетического момента относительно любой точки на этой же оси

$$l_{kx} = l_{kO} \cos\alpha = \pm k_{kxy} h_k . \tag{2.20}$$

Значение кинетического момента положительное, если вращение перпендикуляра h_k вектором $\vec{k}_{kxy}$ наблюдается с положительного направления, например, оси Oz, против хода часовой стрелки; отрицательное – если наоборот. Значение, равное нулю, будет иметь место, когда вектор $\vec{k}_k$ лежит в одной плоскости с соответствующей осью.

Кинетическим моментом механической системы относительно точки или оси называют сумму кинетических моментов всех точек системы относительно точки

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_{kO} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k \tag{2.21}$$

или оси, например, оси Ox

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} l_{kx} \, . \quad (2.22)$$

Кинетический момент тела вращения относительно его неподвижной оси, например, оси Oz, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на его угловую скорость

$$L_z = I_z \cdot \omega \, . \quad (2.23)$$

2.3.3. Кинетическая энергия точки и механической системы

Кинетической энергией материальной точки называют скалярную величину, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T_k = \frac{m_k v_k^2}{2} \, . \quad (2.24)$$

Кинетической энергией механической системы материальных точек называют сумму кинетических энергий всех точек этой системы

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} \, . \quad (2.25)$$

Она равна нулю, если все точки системы в какой-то момент времени неподвижны.

Запишем выражения для кинетической энергии тела, совершающего

– поступательное движение

$$T = \frac{M v^2}{2} \, , \quad (2.26)$$

где M – масса тела, v – его скорость;

– вращательное движение

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2} \, , \quad (2.27)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – его угловая скорость;

– плоскопараллельное движение

$$T = \frac{I_{zC}\omega^2}{2} + \frac{Mv_C^2}{2}, \tag{2.28}$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения тела; ω – его угловая скорость; M – его масса; v_C – скорость центра масс.

Размерность кинетической энергии – Джоуль, 1 Дж = 1 Н·м.

2.4. Меры сил

В динамике в качестве мер сил, используют такие понятия как элементарный и полный импульс силы, элементарная и полная работа силы, кроме известных понятий силы, момента силы относительно точки и оси, главного вектора системы сил и главного момента системы сил относительно точки и оси, известных из статики.

Элементарным импульсом силы называют векторную величину, равную произведению вектора силы на элементарный промежуток времени,

$$d\vec{S} = \vec{P} \cdot dt. \tag{2.29}$$

Полным импульсом силы (импульсом силы за конечный промежуток времени) называют векторную величину

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{P} \cdot dt. \tag{2.30}$$

Элементарной работой силы называют скалярную величину dA, равную произведению силы на элементарное перемещение точки ее приложения или произведению проекции силы на направление движения точки на ее элементарное перемещение, т.е.

$$dA = \vec{P} \cdot d\vec{r}, \quad dA = P_\tau \cdot ds \quad \text{или} \quad dA = P \cdot ds \cdot \cos\alpha, \tag{2.31}$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения. Косинус угла α определяет знаки работ различных сил.

Полной работой силы называют криволинейный интеграл от ее элементарной работы, взятый по траектории движения точки ее приложения от начального положения точки до конечного положения**.**

Приведем формулы для вычисления полной работы некоторых, часто встречающихся сил:

– силы тяжести

$$A = \pm P \cdot h\,, \tag{2.32}$$

где h – вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести P. Знак «плюс» ставится, если точка приложения силы тяжести опускается, знак «минус» – в противном случае;

– силы упругости

$$A = \frac{C}{2}\left(\Delta_{\text{нач}}^2 - \Delta_{\text{кон}}^2\right), \tag{2.33}$$

где $\Delta_{\text{нач}}$ и $\Delta_{\text{кон}}$ – начальная и конечная деформации пружины; C – коэффициент ее жесткости;

– постоянной силы трения, которая всегда отрицательная,

$$A = -P_{\text{тр}} \cdot s\,, \tag{2.34}$$

где s – длина пути, проходимого точкой приложения этой силы;

– постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу вокруг неподвижной оси

$$A = \pm M_z(\vec{P}) \cdot \varphi\,, \tag{2.35}$$

где $M_z(\vec{P})$ – момент силы относительно оси вращения тела; φ – конечный угол поворота тела.

Работу, как и кинетическую энергию, измеряют в Джоулях.

2.5. Общие теоремы динамики

2.5.1. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс

Если на k-ю материальную точку, принадлежащую механической системе, действуют внешние и внутренние силы, то, суммируя по всем точкам системы и учитывая свойства внутренних сил

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^i, \tag{2.36}$$

получим выражение для теоремы о движении центра масс

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e. \tag{2.37}$$

Сформулируем теорему о движении центра масс: «***Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему***».

В проекциях на оси декартовой системы координат выражение (2.37) запишем следующим образом

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kx}^e\ ; \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{ky}^e\ ; \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kz}^e. \tag{2.38}$$

Из приведенной теоремы следует закон сохранения движения центра масс: «***Если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю*** $\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e = 0$***, то*** $\vec{v}_C$ ***– скорость центра масс есть величина постоянная по модулю и направлению***».

Если при тех же условиях в начальный момент времени $\vec{v}_C = 0$, то положение центра масс будет величиной постоянной, т.е. $\vec{r}_C = \vec{C}$.

Когда алгебраическая сумма проекций на какую-либо из координатных осей (например, ось *Ox*) внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то проекция скорости центра масс на соответствующую ось – величина постоянная

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{kx}^{e} = 0\,; \;\; \dot{x}_C = \text{const}\,.$$

Если при тех же условиях проекция начальной скорости на какую-либо из координатных осей (например, ось *Ox*) $\dot{x}_C = 0$, то соответствующая координата центра масс системы $x_C = \text{const}$.

2.5.2. Теорема об изменении количества движения системы. Закон сохранения количества движения

Теорему об изменении количества движения системы можно сформулировать следующим образом: «***Производная по времени от вектора количества движения системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему***».

Выражение для этой теоремы в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_{k}^{e}. \tag{2.39}$$

В проекциях на оси декартовой системы координат оно выглядит так

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}^{e}\,; \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}^{e}\,; \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{kz}^{e}. \tag{2.40}$$

Из приведенной теоремы следует закон сохранения количества движения: «***Если геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению***»

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e = 0; \quad \vec{K} = \vec{C}.$$

Если алгебраическая сумма проекций внешних сил, действующих на систему, на какую-либо из координатных осей (например, ось Ox) равна нулю, то проекция количества движения системы на соответствующую ось – величина постоянная

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx}^e = 0; \quad K_x = \text{const}.$$

Выражение для рассматриваемой теоремы в интегральной форме имеет вид:

$$\vec{K}_0 - \vec{K}_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \vec{P}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e, \qquad (2.41)$$

откуда следует формулировка: «***Приращение количества движения системы за конечный промежуток времени равно векторной сумме действующих на систему за это время полных импульсов внешних сил***».

В проекциях на координатные оси (например, ось Ox) выражение (2.41) запишем следующим образом

$$K_{0x} - K_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e. \qquad (2.42)$$

2.5.3. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Сформулируем теорему об изменении кинетического момента системы: «***Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого неподвижного центра равна гео-***

метрической сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра», т.е.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_k^e\right). \qquad (2.43)$$

В проекциях на оси декартовой системы координат выражение (2.43) для рассматриваемой теоремы примет вид:

$$\frac{d\vec{L}_{Ox}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{P}_k^e\right); \quad \frac{d\vec{L}_{Oy}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{P}_k^e\right); \quad \frac{d\vec{L}_{Oz}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right). \qquad (2.44)$$

Из приведенной теоремы следует закон сохранения кинетического момента: «***Если сумма моментов внешних сил относительно некоторой точки равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой точки сохраняет постоянное по величине и направлению значение***», т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(\vec{P}_k^e\right) = 0, \quad \vec{L}_O = \vec{C}. \qquad (2.45)$$

В проекциях на оси декартовой системы координат (например, ось Oz) выражение (2.45) для рассматриваемой теоремы примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right) = 0; \quad L_{Oz} = \text{const}.$$

Если тело вращается вокруг оси Oz, то, используя выражения (2.23) и (2.44), получим дифференциальное уравнение вращательного движения тела

$$J_{Oz} \cdot \dot{\omega} = J_{Oz} \cdot \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{P}_k^e\right). \qquad (2.46)$$

2.5.4. Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

Теорему об изменении кинетической энергии системы формулируем так: «***Изменение кинетической энергии системы при некотором ее конечном перемещении равно сумме работ всех приложенных к системе внешних и внутренних сил на этом перемещении***», т.е.

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \, . \qquad (2.47)$$

Это математическая запись теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной (конечной) форме. Для неизменяемой системы, где сумма работ внутренних сил равна нулю, выражение (2.47) имеет вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e \left(\vec{P}_k \right). \qquad (2.48)$$

В неизменяемой механической системе, состоящей из абсолютно твердых тел и имеющей идеальные связи, когда расстояния между точками системы остаются постоянными, сумма работ внутренних сил равна нулю. Если твердые тела соединены шарнирами без трения, то работа нормальных реакций от этих шарниров равна нулю. Если тела соединены между собой гибкими нерастяжимыми нитями, то внутренние реакции нитей равны по модулям и противоположны по направлениям, а перемещения точек нитей одинаковы и сумма работ этих реакций равна нулю. Если связь возникает за счет качения тел без проскальзывания, то точки контакта имеют одинаковые скорости и, следовательно, работы сил действия и противодействия одинаковы по значению и противоположны по знаку, а их сумма равна нулю.

Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме с целью изучения движения механической системы рекомендуют решать в такой последовательности:

1) изобразить схематически механическую систему в начальном и конечном положениях;

2) записать выражение для теоремы об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме;

3) определить, какие виды движений совершают тела, входящие в систему;

4) записать выражение для кинетической энергии системы в конечном положении для соответствующих видов движений ее звеньев, выразив все скорости через скорость звена, которую нужно определить;

5) показать на схеме только внешние силы, приложенные к системе, считая, что она состоит из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными нитями;

6) вычислить сумму работ внешних сил на заданных перемещениях соответствующих точек системы, выразив их через перемещения точек звена, скорость которого нужно определить, и учитывая, что зависимость между перемещениями такая же, как и между соответствующими скоростями;

7) подставить полученные значения кинетической энергии и работ в выражение для теоремы об изменении кинетической энергии всей системы и получить искомое значение скорости.

2.6. Уравнения Лагранжа 2-го рода

2.6.1. Краткие теоретические сведения

Уравнения Лагранжа 2-го рода обычно применяют для исследования движения механических систем с несколькими степенями свободы, но такие исследования выходят за рамки изучаемого курса теоретической механики. Поэтому с целью приобретения некоторых навыков в составлении уравнений Лагранжа для механических систем с n степенями свободы ограничимся применением этих уравнений при определении основных кинематических и динамических параметров систем с одной степенью свободы.

Уравнения Лагранжа 2-го рода для механических систем с идеальными, стационарными, голономными и удерживающими связями, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{dT}{\partial q}\right)=Q_q, \qquad (2.49)$$

где q – обобщенная координата системы, однозначно определяющая ее положение (число независимых обобщенных координат соответствует числу степеней свободы системы); $\dot{q}$ – обобщенная скорость, первая производная по времени от обобщенной координаты; Q_q – обобщенная сила, соответствующая выбранной обобщенной координате. Ее можно найти по формуле

$$Q_q = \frac{\left(\sum \delta A\right)q}{\delta q}, \tag{2.50}$$

где $\left(\sum \delta A\right)q$ – сумма работ всех активных сил, в том числе и сил трения, на элементарном приращении δq обобщенной координаты q.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Если обобщенная координата имеет размерность длины (м), то обобщенную силу измеряют в Ньютонах (Н); если обобщенная координата имеет размерность угла (рад), то сила имеет размерность момента (Н·м).

В предлагаемых в 4-м разделе настоящего пособия заданиях кинетическая энергия системы не зависит от обобщенной координаты q, поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = Q_q .$$

2.6.2. Последовательность решения задач на уравнения Лагранжа 2-го рода

Задачи, посвященные исследованию движения механических систем с одной степенью свободы с применением уравнений Лагранжа 2-го рода, рекомендуют решать в такой последовательности:

1) выбрать обобщенные координаты, линейные или угловые перемещения в зависимости оттого, что нужно определить по условию задачи – линейное или угловое ускорение; записать уравнение Лагранжа 2-го рода с учетом выбранной обобщенной координаты и обобщенной скорости;

2) изобразить механическую систему и показать на схеме все активные силы и силы трения, действующие на эту систему;

3) дать элементарное приращение соответствующей обобщенной координате системы;

4) вычислить сумму работ всех активных сил и сил трения на соответствующих элементарных перемещениях и определить обобщенную силу с учетом того, что зависимость между элементарными перемещениями такая же, как и между соответствующими скоростями;

5) вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через соответствующую обобщенную скорость;

6) найти частную производную от кинетической энергии по обобщенной скорости, а затем производную по времени от полученного выражения;

7) подставить найденные значения в уравнение Лагранжа и определить линейное или угловое ускорение.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют механической системой?
2. Какие существуют виды связей?
3. Как классифицируют силы, действующие на механическую систему?
4. Какие свойства имеют внутренние силы?
5. Что называют центром масс механической системы?
6. Какой вид имеет выражение для теоремы о движении центра масс механической системы в векторной форме?
7. Какой вид имеет выражение для теоремы о движении центра масс механической системы в проекциях на оси декартовой системы координат?
8. Какие существуют виды моментов инерции и в чем их отличие?
9. По каким формулам определяют осевые моменты инерции некоторых простейших тел?
10. Что называют кинетическим моментом механической системы?
11. Какой вид имеет выражение для теоремы об изменении кинетического момента механической системы в векторной форме?
12. Какой вид имеет выражение для теоремы об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме?
13. По какой формуле определяют кинетическую энергию тела, совершающего поступательное движение?
14. По какой формуле определяют кинетическую энергию тела, совершающего вращательное движение?

15. По какой формуле определяют кинетическую энергию тела, совершающего плоскопараллельное движение?

16. Как определяют работу силы тяжести?

17. Как определяют работу силы на прямолинейном конечном перемещении?

18. Как определяют работу силы трения скольжения?

19. Как определяют работу пары сил сопротивлению качения?

20. В каком случае работа силы на прямолинейном перемещении равна нулю?

21. В каком случае работа силы тяжести равна нулю?

22. Что называют обобщенной координатой механической системы?

23. Что называют обобщенной скоростью механической системы?

24. Что называют числом степеней свободы механической системы?

25. Как выразить сумму элементарных работ системы через обобщенные силы?

26. Как определить обобщенную силу?

27. Какую размерность имеет обобщенная сила, если обобщенной координатой является линейное перемещение?

28. Какую размерность имеет обобщенная сила, если обобщенной координатой является угловое перемещение?

29. Какой вид имеет уравнение Лагранжа 2-го рода для системы с одной степенью свободы?

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

3.1. Первая задача динамики материальной точки. Определение сил по заданному движению

Пример 1. Груз A массой 600 кг поднимают посредством ворота по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 60^0. Коэффициент трения скольжения груза о поверхность наклонной плоскости $f = 0{,}2$. Ворот радиусом $r = 20$ см вращается по закону $\varphi = 0{,}4t^3$ рад.

Найти силу натяжения троса как функцию времени и значение этой силы через время $t = 2$ с после начала подъема.

Решение

Изобразим груз A в текущем положении, считая его материальной точкой (рис. 3.1). Основное уравнение динамики в векторной форме имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{P},$$

где

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_k^a + \sum \vec{N}_k .$$

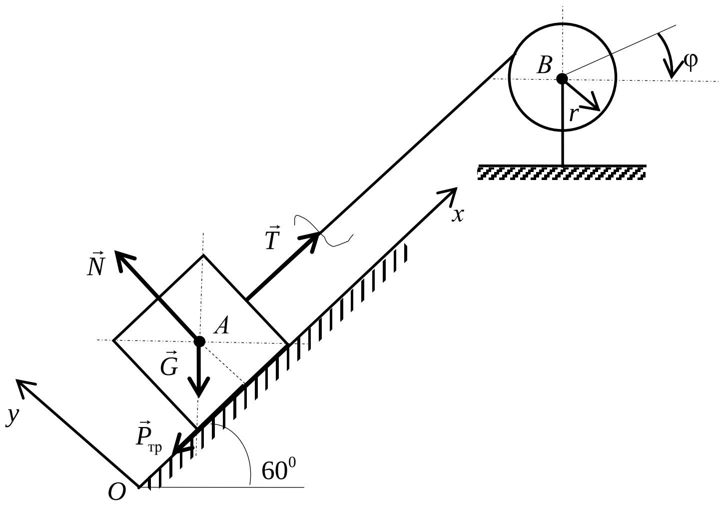

Рисунок 3.1

Изобразим также все силы, действующие на точку *A*, условно разрывая трос (см. рис. 3.1). Выберем систему декартовых координат и запишем основное уравнение динамики в проекциях на оси этой системы

$$m\ddot{x} = P_x; \quad m\ddot{y} = P_y .$$

Воспользовавшись заданными величинами, получим

$$m\ddot{x} = -G\sin 60^0 + T - P_{\text{тр}}; \quad m\ddot{y} = -G\cos 60^0 + N , \qquad (3.1)$$

где $P_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения груза *A*. Так как груз движется вдоль оси *x*, то $\ddot{y} = 0$ и, следовательно,

$$N = G\cos 60^0 = mg\cos 60^0; \quad P_{\text{тр}} = fN = fmg\cos 60^0 .$$

Подставляя полученные выражения в 1-е уравнение системы (3.1), найдем

$$m\ddot{x} = -mg\sin 60^0 + T - fmg\cos 60^0 .$$

Теперь определим ускорение груза *A* через характеристики вращательного движения ворота:

$$\ddot{x} = a_\tau; \quad a_\tau = \varepsilon r; \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 2,4t \ 1/\text{с}^2 ,$$

откуда

$$a_\tau = 2,4t \cdot 0,2 = 0,48t \ \text{м}/\text{с}^2 .$$

Последнее выражение позволяет вычислить силу натяжения троса для заданного момента времени $t = 2$ с

$$T = 600\left(0,48 \cdot 2 + 9,8 \cdot 0,866 + 0,2 \cdot 9,8 \cdot 0,5\right) = 6256\,\text{Н} = 6,256\,\text{кН} .$$

Пример 2. Материальная точка *M* массой 2 кг движется по окружности радиусом 1 м, расположенной в горизонтальной плоскости (рис. 3.2). Закон движения точки задан в виде: $S = OM = \sin \pi t$, м.

Определить силу, которая действует на точку M в момент времени $t = 1/4$ с.

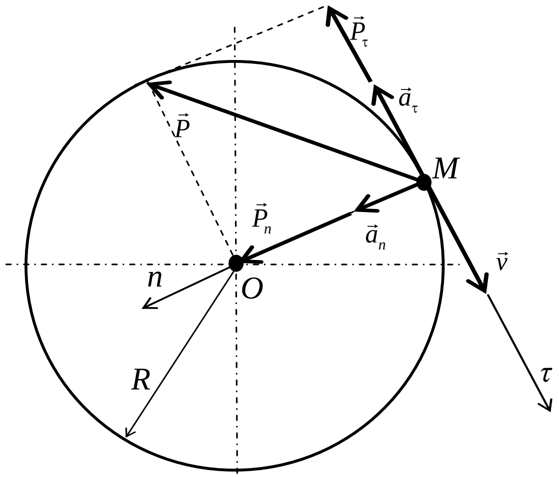

Рисунок 3.2

Решение

Изобразим все силы, действующие на точку M в текущем положении, выбрав естественную систему координат (см. рис. 3.2), и запишем основное уравнение динамики в векторной форме

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

и в проекциях на естественные оси координат

$$ma_\tau = P_\tau; \quad ma_n = P_n .$$

По известным из кинематики равенствам определим величины a_τ и a_n в момент времени $t = 1/4$ с

$$a_\tau = \ddot{S} = -\pi^2 \sin \pi t = -6.97\,\text{м/с}^2; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{S}^2}{R} = \frac{\pi^2 \cos^2 \pi t}{R} = 4,93\,\text{м/с}^2 .$$

Для того чтобы установить направления искомых сил, необходимо проанализировать знаки проекций скорости и составляющих ускорения. В заданный момент времени t скорость $v_\tau = \dot{S} > 0$. Отрицательное значение a_τ указывает на то, что это ускорение направлено в сторону, противоположную вектору скорости, а сила P_τ совпадает по направлению с ускорением a_τ. Направления силы P_n и ускорения a_n одинаковы.

Определив величины проекций силы P

$$P_\tau = ma_\tau = 2 \cdot (-6,97) = -13,94\text{Н}, \quad |P_\tau| = 13,94\,\text{Н};$$

$$P_n = ma_n = 2 \cdot 4,93 = 9,86\,\text{Н},$$

найдем ее значение

$$P = \sqrt{P_\tau^2 + P_n^2} = \sqrt{13,94^2 + 9,86^2} = 17,07\,\text{Н}.$$

3.2. Вторая задача динамики материальной точки. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, находящейся под действием постоянных сил

Пример 3. Тело движется из точки *A* вверх по участку *AB* наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, под действием силы *Q*, равной 0,5 веса груза (рис. 3.3). Коэффициент трения скольжения тела по плоскости *f* = 0,1. В начальный момент скорость тела $v_0 = 10\,\text{м/с}$.

Определить путь *S*, пройденный телом, и его скорость *v* через время *t* = 5 с.

Решение

Рассмотрим движение тела, принимая его за материальную точку, в текущем положении на участке *AB*. Выберем систему координат с центром *A*, совпадающим с начальным положением точки, а одну из осей направим параллельно вектору скорости. Изобразим активные силы, приложенные к материальной точке, и реакции связей (см. рис. 3.3).

Запишем основное уравнение динамики в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{P}\ .$$

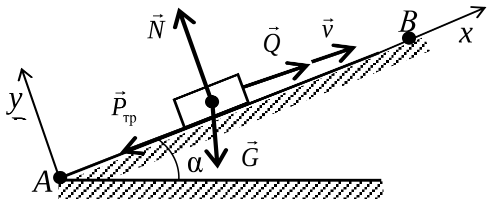

Рисунок 3.3

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m\ddot{x} = Q - P_{\text{тр}} - G\sin\alpha; \quad m\ddot{y} = N - G\cos\alpha; \quad \ddot{y} = 0;$$

$$P_{\text{тр}} = fN; \quad N = G\cos\alpha; \quad G = mg; \quad Q = 0,5mg.$$

Теперь вычислим

$$m\ddot{x} = 0,5mg - 0,1mg\cos\alpha - mg\sin\alpha\ ,$$

откуда

$$\ddot{x} = 9,8\left(0,5 - 0,1\cdot 0,866 - 0,1\cdot 0,5\right) = 3,56\,\text{м/с}^2\ .$$

Проинтегрируем дважды дифференциальное уравнение движения

$$\dot{x} = 3,56t + c_1; \quad x = 1,78t^2 + c_1 t + c_2\ .$$

Используя начальные условия движения тела, определим при t = 0 постоянные интегрирования:

$$c_1 = \dot{x}_0 = v_0 = 10 \quad \text{и} \quad c_2 = x_0 = s_0 = 0\ .$$

Для момента времени t = 5 с конечные параметры следующие: $\dot{x} = v$ и $x = s$. Теперь определим значения этих величин

$$v = 3,56t + 10 \quad \text{и} \quad s = 1,78t^2 + 10t\ ,$$

откуда окончательно получим

$$v = 27,8\,\text{м/с} \quad \text{и} \quad s = 94,5\,\text{м}.$$

<u>Пример 4.</u> Снаряд вылетает из орудия, находящегося на высоте h = 10 м под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, с начальной скоростью v_0 = 600 м/с (рис. 3.4).

Составить уравнения движения снаряда и уравнение его траектории, определить дальность полета, максимальную высоту полета, время полета, скорость снаряда в момент его падения, пренебрегая сопротивлением воздуха.

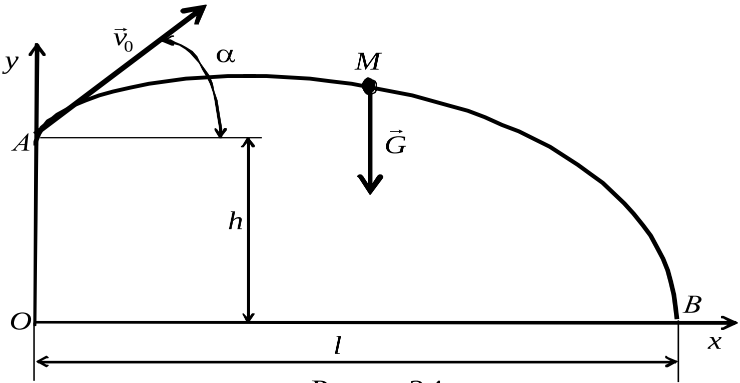

Рисунок 3.4

<u>Решение</u>

Выберем систему координат и изобразим (снаряд) точку M в произвольном положении. На точку действует только постоянная сила тяжести G. Запишем дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}.$$

В данном случае $m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -G = -mg$. Сократив в этих уравнениях величину массы m, отличную от нуля, получим

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = h; \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha; \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha.$$

Дважды проинтегрируем дифференциальные уравнения движения точки:

$$v_x = \dot{x} = C_1;$$

$$x = C_1 \cdot t + C_2;$$

$$\ddot{y} = -g; \quad v_y = \dot{y} = -gt + C_3;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4.$$

Вычислив постоянные интегрирования C_1 - C_4 из начальных условий при t = 0

$$C_1 = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\ C_2 = x_0 = 0,\ \ C_3 = \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha,\ C_4 = y_0 = h,$$

запишем уравнения движения снаряда:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t\ ;\ \ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + h\ . \qquad (3.2)$$

Исключая из 1-го уравнения (3.2) время $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, получим уравнение траектории движения точки в декартовой системе координат

$$y = x \cdot tg\,\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + h\,. \qquad (3.3)$$

Соответствующая этому уравнению траектория представляет собой параболу.

Определим дальность полета снаряда. В момент падения его координаты y = 0, x = l. Из уравнения траектории (3.3) следует, что

$$l \cdot tg\,\alpha - \frac{gl^2}{2v_O^2 \cos^2\alpha} + h = 0\,,$$

откуда с учетом исходных данных получим

$$l\frac{0,5}{0,866}-\frac{9,8l^2}{2\cdot 600^2\cdot 0,866^2}+10=0\,.$$

Решая квадратное уравнение, найдем $l_1=-17,32$ м; $l_2=31896$ м. Так как траекторией движения снаряда является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то дальность полета $l=31896$ м.

При максимальной ординате полета снаряда $y_{\max}$ проекция скорости $v_y=\dot{y}=0$. Из уравнения

$$-gt_1+v_O\sin\alpha=0$$

найдем время полета до достижения максимальной высоты снаряда

$$t_1=\frac{v_O\sin\alpha}{g}=30,6 \text{ с.}$$

Подставляя полученное значение времени во 2-е уравнение (3.2)

$$y_{\max}=h_{\max}=-\frac{9,8\cdot 30,6^2}{2}+600\cdot 0,5\cdot 30,6=4592 \text{ м}$$

и используя 1-е уравнение (3.2), определим при значении координаты $x=l$ время полета снаряда

$$t_2=\frac{l}{v_O\cos\alpha}=\frac{31896}{600\cdot 0,866}=61,4 \text{ с.}$$

Скорость снаряда в момент его падения найдем с помощью формул для проекций скоростей на оси координат

$$v_B=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{v_O^2\cos^2\alpha+\left(gt_2+v_O\sin\alpha\right)^2}=$$

$$=\sqrt{600^2\cdot 0,866^2+\left(9,8\cdot 61,4+600\cdot 0,5\right)^2}=1040,7 \text{ м/с.}$$

3.3. Применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения механической системы

Пример 5. Электродвигатель 1 весом G_1 установлен вертикально на идеально гладкой плоскости фундамента и закреплен на ней болтами. На его валу под прямым углом одним концом прикреплен невесомый стержень с грузом 2 весом G_2, расположенным на другом конце (рис. 3.5). Длина стержня $C_1C_2 = l$, угловая скорость ω вращения вала постоянна, уравнение вращения вала относительно проходящей через точку C_1 горизонтальной оси $\varphi = \omega t$.

Определить наибольшие усилия: горизонтальное, действующее на болты, вертикальное, действующее со стороны двигателя на плоскость. Записать также уравнение движения электродвигателя по горизонтальной плоскости при отсутствии крепления болтами с учетом того, что механическая система в начальный момент времени была неподвижной (рис. 3.6).

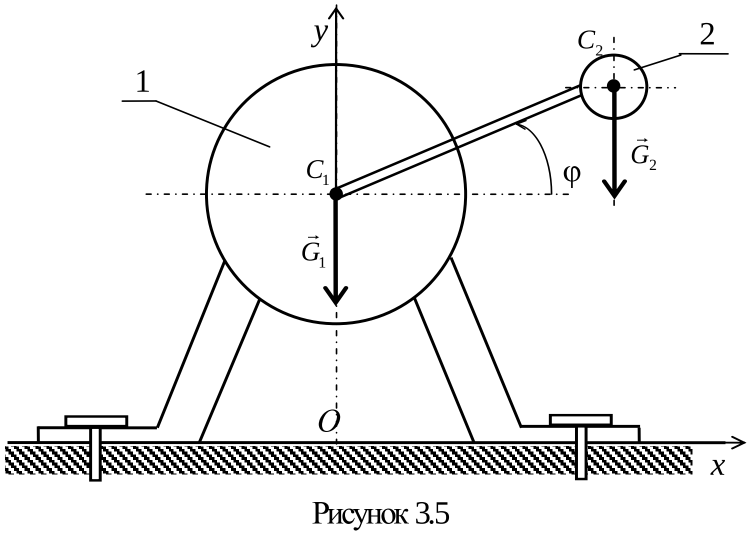

Рисунок 3.5

Решение

Выделим механическую систему (см. рис. 3.5), которая состоит из двух тел: электродвигателя 1 и груза 2. Внешними силами, действующими на систему (см. рис. 3.6), являются: вес электродвигателя $\vec{G}_1$, вес груза $\vec{G}_2$, суммарные горизонтальные реакции болтов $\vec{R}_x$ и вертикальные реакции $\vec{R}_y$ горизонтальной плоскости.

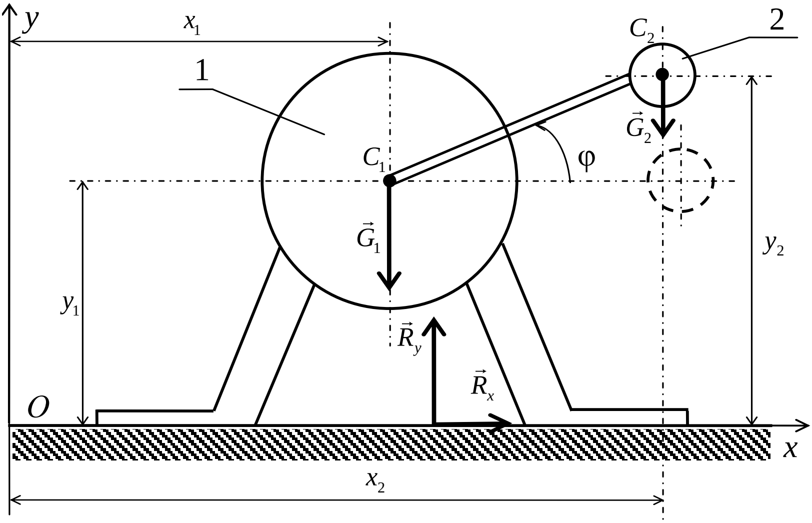

Рисунок 3.6

Запишем выражение для теоремы о движении центра масс системы в векторной форме

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{P}_k^e$$

и в проекциях на оси координат

$$M\ddot{x}_C = \sum P_{kx}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum P_{ky}^e .$$

Определим проекции внешних действующих сил и запишем дифференциальные уравнения движения центра масс системы в выбранной системе координат

$$M\ddot{x}_C = R_x; \quad M\ddot{y}_C = R_y - G_1 - G_2 .$$

В этих уравнениях

$$M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2; \quad M\ddot{y}_C = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2,$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 – координаты центра масс электродвигателя 1 и груза 2 соответственно. Для случая, когда электродвигатель закреплен, эти координаты вычисляют следующим образом

$$x_1 = 0; \quad y_1 = h = \mathrm{const}; \quad x_2 = x_1 + l\cos\varphi = l\cos\omega t;$$

$$y_2 = h + l\sin\varphi = h + l\sin\omega t.$$

Теперь найдем значения вторых производных

$$\ddot{x}_1 = 0; \quad \ddot{y} = 0; \quad \ddot{x}_2 = -l\omega^2\cos\omega t; \quad \ddot{y}_2 = -l\omega^2\sin\omega t,$$

с учетом которых получим выражения

$$M\ddot{x}_C = -m_2 l\omega^2\cos\omega t; \quad M\ddot{y}_C = -m_2 l\omega^2\sin\omega t,$$

откуда

$$R_x = -\frac{G_2}{g}l\omega^2\cos\omega t; \quad R_y = G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g}l\omega^2\sin\omega t.$$

Далее определим силу давления на горизонтальную плоскость:

– максимальную

$$G_{y_{\text{мах}}} = R_{y_{\text{мах}}} = G_1 + G_2 + \frac{G_2}{g}l\omega^2$$

при $\sin\omega t = -1; \quad \omega t = \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$;

– минимальную

$$G_{y_{\text{мин}}} = R_{y_{\text{мин}}} = G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g}l\omega^2$$

при $\sin\omega t = 1; \quad \omega t = \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Следует отметить, что при отсутствии крепления в вертикальном направлении корпус электродвигателя оторвется от плоскости при давлении $G_{y_{\text{мин}}} = R_{y_{\text{мин}}}$ < 0. Угловая скорость вала электродвигателя при этом составит

$$G_1 + G_2 - \frac{G_2}{g} l\omega^2 < 0; \qquad \omega > \sqrt{\frac{g\left(G_1 + G_2\right)}{G_2 \cdot l}}\ .$$

Максимальную горизонтальную силу давления на болты найдем по формуле

$$Q_x = R_{x_{\text{мах}}} = \frac{G_2}{g} l\omega^2$$

при условии, что $\cos\omega t = \pm 1; \quad \omega t = \varphi = 0, \pi$.

Теперь получим искомое уравнение движения электродвигателя по горизонтальной плоскости при отсутствии крепления болтами. С учетом того, что выбранная механическая система в начальный момент времени была неподвижна, запишем

$$M\ddot{x}_C = \sum P_{kx}^e; \quad M\ddot{x}_C = 0; \quad \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0; \quad \dot{x}_C = 0\ .$$

В этом случае выполняется закон сохранения движения центра масс в проекции на ось Ox. Так как по условию для $t = 0$ $\dot{x}_C = 0$, то $x_C = \text{const}$, т.е. системы координаты центра масс в процессе движения неизменны.

Определим координаты центра масс системы и приравняем их:

– в начальном положении при значениях $t = 0; \quad \omega t = 0; \quad \varphi = 0$

$$x_{C_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 \cdot l}{G_1 + G_2}\ ;$$

– в текущем положении при значениях $t = t_{\text{т}}; \quad \varphi \neq 0$

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2\left(x_1 + l\cos\omega t\right)}{m_1 + m_2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)x_1 + m_2 \cdot l\cos\omega t}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{\left(G_1 + G_2\right)x_1 + G_2 \cdot l\cos\omega t}{G_1 + G_2}.$$

Поскольку $x_{C_0} = 0$, то

$$\frac{G_2 l}{G_1 + G_2} = \frac{\left(G_1 + G_2\right) x_1 + G_2 \cdot l \cos \omega t}{G_1 + G_2},$$

откуда окончательно получим

$$x_1 = \frac{G_2 l \left(1 - \cos \omega t\right)}{G_1 + G_2}.$$

Следовательно, корпус электродвигателя в случае отсутствия креплений болтами совершает гармонические колебания с амплитудой $\frac{G_2 l}{G_1 + G_2}$ и циклической частотой, равной угловой скорости ω вращения вала.

Теперь для получения уравнения движения электродвигателя по горизонтальной плоскости при отсутствии крепления болтами воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы.

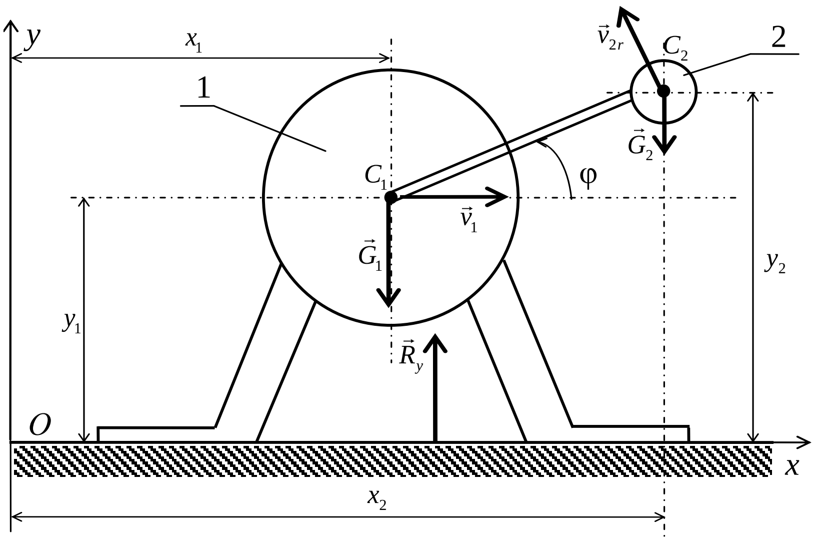

Рисунок 3.7

Запишем выражение для теоремы об изменении количества движения системы в векторной форме:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e .$$

В проекции на ось Ox декартовой системы координат оно выглядит следующим образом

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}^e \ ;$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{n} P_{kx}^e = 0$, то выполняется закон сохранения количества движения в проекции на ось Ox. Так как по условию при
$t = 0 \quad x_C = 0,$ то

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_k v_{kx} = M v_{cx} = M\dot{x}_c = 0 . \qquad (3.4)$$

Проекция скорости корпуса электродвигателя на ось Ox $v_{1x} = \dot{x}_1$ (см. рис. 3.7). В соответствии с теоремой сложения скоростей точки при сложном движении абсолютная скорость ее равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. Поэтому проекцию абсолютной скорости груза 2 на ось Ox найдем по формуле

$$v_{2x} = \dot{x}_1 - v_{2r} \sin\varphi = \dot{x}_1 - \omega \cdot l \cdot \sin\omega t ,$$

где v_{2r} – численное значение относительной скорости груза по отношению к корпусу электродвигателя, $v_{2r} = \omega \cdot l$. Подставляя полученное выражение в уравнение (3.4), найдем

$$m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 - \omega \cdot l \cdot \sin\omega t) = 0 ,$$

откуда

$$\dot{x}_1 = \frac{m_2\omega \cdot l \cdot \sin\omega t}{m_1 + m_2}. \tag{3.5}$$

Для нахождения уравнения движения электродвигателя по горизонтальной плоскости необходимо проинтегрировать уравнение (3.5)

$$x_1 = -\frac{m_2 \cdot l \cdot \cos\omega t}{m_1 + m_2} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий, при $t = 0$ $x_1 = 0$. В нашем случае $C = \dfrac{m_2 \cdot l}{m_1 + m_2}$ и окончательно искомое уравнение движения примет вид

$$x_1 = \frac{m_2 \cdot l \cdot (1 - \cos\omega t)}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 l\left(1 - \cos\omega t\right)}{G_1 + G_2},$$

что совпадает с решением, полученным с помощью теоремы о движении центра масс.

3.4. Применение теоремы об изменении кинетического момента механической системы

Пример 6. Ступенчатый барабан 2 массой m_2 вращается под действием приложенных к нему постоянных моментов $M_{\text{вр}}$ = 800 Н·м и $M_{\text{с}}$ = 110 Н·м (момент сопротивления в подшипниках), показанных на рис. 3.8. Радиусы окружностей ступеней барабана соответственно $R_2 = 0,2\,\text{м}$ и $r_2 = 0,1\,\text{м}$, его момент инерции относительно оси вращения, перпендикулярной к плоскости, $I_2 = 2\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. Через окружности ступеней барабана перекинут нерастяжимый трос, на концах которого закреплены грузы 1 и 3, их массы $m_1 = 100\,\text{кг}$ и $m_3 = 900\,\text{кг}$ соответственно. Груз 1 опускается вертикально, а груз 3 поднимается по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения груза 3 о наклонную плоскость $f_3 = 0,2$.

Определить угловое ускорение барабана, ускорения грузов и реакции троса в местах крепления грузов.

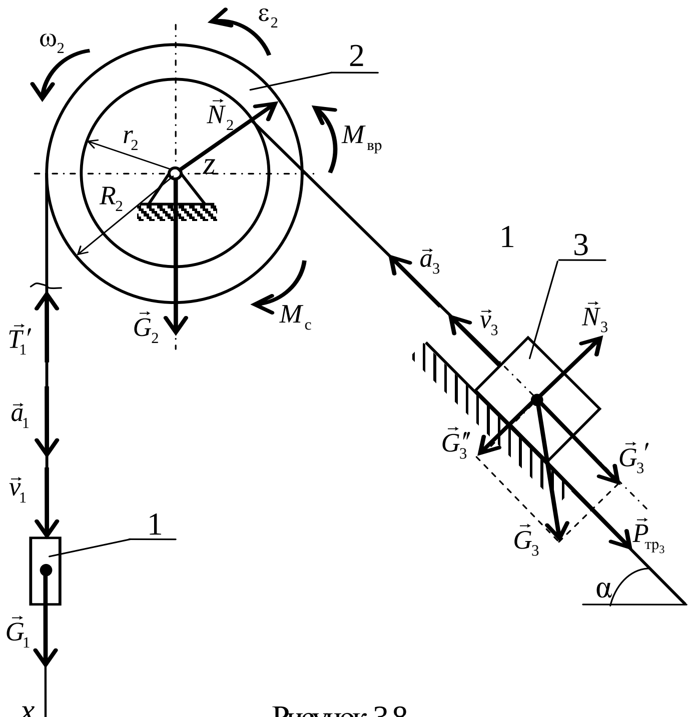

Рисунок 3.8

Решение

Механическая система, состоящая из барабана и двух грузов, показана в текущем положении (см. рис. 3.8) со всеми внешними силовыми факторами $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{N}_2, \vec{N}_3, \vec{P}_{тр_3}, M_{вр}, M_{с}$, действующими на нее. Ось координат Oz совпадает с осью вращения барабана. Запишем выражения для теоремы об изменении кинетического момента системы в векторной форме и в проекции на эту ось:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e; \quad \vec{M}_O^e = \sum \vec{M}_O\left(P_k^e\right); \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right).$$

Теперь вычислим проекцию кинетического момента системы на ось Oz по формуле

$$L_z = L_{z1} + L_{z2} + L_{z3},$$

где

$$L_{z1} = m_1 v_1 R_2 = m_1 \omega_2 R_2^2; \quad L_{z2} = I_2 \omega_2^2; \quad L_{z3} = m_3 v_3 r_2 = m_3 \omega_2 r_2^2,$$

откуда найдем

$$L_z = \omega_2\left(m_1 R_2^2 + I_2 + m_3 r_2^2\right).$$

Далее определим алгебраическую сумму моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно оси Oz

$$\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = M_z\left(\vec{G}_1\right) + M_z\left(\vec{G}_2\right) + M_z\left(\vec{N}_2\right) + M_{\text{вр}} + M_{\text{с}} + M_z\left(\vec{G}_3'\right) + M_z\left(\vec{P}_{\text{тр}_3}\right),$$

где

$$M_z\left(\vec{G}_1\right) = m_1 g R_2;$$

$$M_z\left(\vec{G}_2\right) = M_z\left(\vec{N}_2\right) = 0;$$

$$M_z\left(\vec{G}_3'\right) = -G_3 \sin\alpha \cdot r_2 = -m_3 \sin\alpha \cdot r_2,$$

так как силу $\vec{G}_3$ разложили на две составляющие $\vec{G}_3'$ и $\vec{G}_3''$;

$$M_z\left(\vec{P}_{\text{òð}_3}\right) = -\vec{P}_{\text{òð}_3} \cdot r_2 = -m_3 g \cos\alpha \cdot f_3 \cdot r_2.$$

В данном случае сила трения перенесена в точку приложения силы тяжести, а компенсирующая этот перенос пара сил уравновешена реакциями опор груза 3. Подставляя в алгебраическую сумму в полученные выражения, определим

$$\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = m_1 g R_2 + M_{\text{âð}} - M_{\text{с}} - m_3 g \sin\alpha \cdot r_2 - m_3 g \cos\alpha \cdot f_3 \cdot r_2.$$

Теперь найдем первую производную от проекции кинетического момента на ось Oz:

$$\frac{dL_z}{dt} = \varepsilon_2\left(m_1R_2^2 + I_2 + m_3r_2^2\right).$$

Подставляя полученные результаты в выражение для теоремы об изменении кинетического момента системы, окончательно запишем

$$\varepsilon_2\left(m_1R_2^2 + I_2 + m_3r_2^2\right) = m_1gR_2 + M_{\text{вр}} - M_{\text{c}} - m_3g\sin\alpha\cdot r_2 - m_3g\cos\alpha\cdot f_3\cdot r_2 .$$

Из этого уравнения определим угловое ускорение барабана 2 и ускорения грузов 1, 3

$$\varepsilon_2 = \frac{m_1gR_2 - m_3g\sin\alpha r_2 - m_3g\cos\alpha f_3 r_2 + M_{\text{вр}} - M_{\text{c}}}{m_1R_2^2 + I_2 + m_3r_2^2} =$$

$$= \frac{100\cdot 9,8\cdot 0,2 - 900\cdot 9,8\cdot 0,71\cdot 0,1 - 900\cdot 9,8\cdot 0,71\cdot 0,2\cdot 0,1 + 700 - 100}{100\cdot 0,04 + 2 + 300\cdot 0,01} =$$

$$= 17,5\ 1/\text{c}^2;$$

$$a_1 = \varepsilon_2\cdot R_2 = 17,5\cdot 0,2 = 35\ \text{м/с}^2;$$

$$a_3 = \varepsilon_2\cdot r_2 = 17,5\cdot 0,1 = 1,75\ \text{м/с}^2.$$

Найдем реакции двух ветвей троса (см. рис. 3.8 и 3.9)

$$m_1\ddot{x}_1 = G_1 - T_1';$$

$$T_1' = m_1g - m_1a_1 = m_1\left(g - a_1\right) = 100\cdot 6,3 = 630\,\text{Н};$$

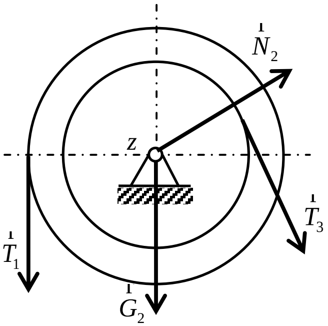

Рисунок 3.9

$$T_1' = T;$$

$$I_{2z}\cdot\varepsilon_2 = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right);$$

$$I_{2z}\cdot\varepsilon_2 = T_1\cdot R_2 - T_3\cdot r_2;$$

$$T_3 = \frac{T_1 \cdot R_2 - I_{2z} \cdot \varepsilon_2}{r_2} =$$

$$= \frac{630 \cdot 0,2 - 2 \cdot 17,5}{0,1} = 910\,\text{Н}.$$

<u>Пример 7.</u> Два невесомых стержня с точечными грузами на концах массой m и длиной l каждый закреплены шарнирами на вертикальном валу (рис. 3.10). Вал при горизонтальном расположении стержней вращается с угловой скоростью ω_0, его момент инерции относительно оси вращения I. В некоторый момент времени стержни начинают отклоняться от горизонтального положения, составляя с горизонталью угол α.

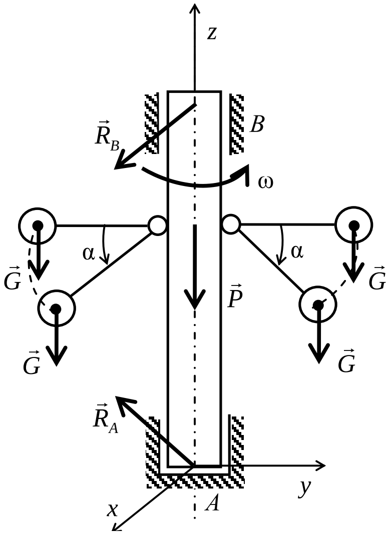

Рисунок 3.10

Определить угловую скорость вала в зависимости от угла α. Сопротивление воздушной среды, подшипника и подпятника, в которых установлен вал, не учитывать.

Решение

Приложим к рассматриваемой механической системе, состоящей из вала и стержней с грузами, все внешние силы $\vec{G}, \vec{P}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$, действующие на эту систему. Ось Az совпадает с осью вращения вала. Запишем выражение для теоремы об изменении кинетического момента системы в векторной форме и в проекциях на ось Az:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^e;$$

$$\vec{M}_O^e = \sum \vec{M}\left(\vec{P}_k^e\right);$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right).$$

Так как линии действия сил тяжести $\vec{G}, \vec{P}$ параллельны оси Az, а реакции подпятника $\vec{R}_A$ и подшипника $\vec{R}_B$ пересекают ее, то $\sum M_z\left(\vec{P}_k^e\right) = 0$ и, следовательно, имеет место закон сохранения кинетического момента системы относительно оси Az, т.е. $L_{z0} = L_z = \text{const}$.

Кинетический момент системы при горизонтальном расположении стержней определим суммой

$$L_{z0} = L_{z0_{\text{вала}}} + L_{z0_{\text{грузов}}}.$$

Абсолютная скорость каждого из грузов

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Так как линия действия вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ пересекает ось Az, то составляющие кинетического момента относительно оси вращения от относительного движения грузов равны нулю, поэтому

$$L_{z0_{\text{грузов}}} = 2m \cdot v_{\text{пер}_0} l = 2m \cdot \omega_0 l^2; \qquad L_{z0_{\text{вала}}} = I \cdot \omega_0.$$

Кинетический момент системы при отклонении стержней на угол α определим суммой

$$L_z = L_{z_{\text{вала}}} + L_{z_{\text{грузов}}},$$

где

$$L_{z_{\text{грузов}}} = 2m \cdot v_{\text{пер}} l \cos\alpha = 2m \cdot \omega l^2 \cos\alpha; \qquad L_{z_{\text{вала}}} = I \cdot \omega.$$

Приравнивая выражения для проекций кинетических моментов L_z и L_{z0}, окончательно получим

$$2m \cdot \omega_0 l^2 \cos\alpha + I\omega_0 = 2m \cdot \omega l^2 \cos\alpha + I\omega_0,$$

откуда найдем угловую скорость вала

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(2m \cdot l^2 + I\right)}{2m \cdot l^2 \cos\alpha + I}.$$

3.5. Применение теоремы об изменении кинетической энергии для изучения движения механической системы

Пример 8. Механическая система, показанная на рис. 3.11, состоит из груза 1, цилиндрического катка 2, неподвижного ступенчатого блока 3 и подвижного ступенчатого блока 4. Груз 1 массой m_1 = 10m опускается по шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^0$, коэффициент трения скольжения груза 1 о плоскость $f_1 = 0{,}3$. Груз 1 соединен нерастяжим тросом с центром масс катка 2, представляющего собой однородный диск радиусом r_2 = 0,2 м и массой m_2 = 4 m. Коэффициент трения качения катка 2 по плоскости δ = 0,002 м. Каток 2 соединен с неподвижным 3 и подвижным 4 ступенчатыми блоками также с помощью нерастяжимого троса, конец которого неподвижно закреплен в верхней опоре A. Радиусы ступеней блоков 3 и 4: R_3 = 0,4 м; r_3 = 0,2 м; R_4 = 0,3 м; r_4 = 0,15 м; радиусы инерции этих блоков: i_{C_3} = 0,3 м; i_{C_4} = 0,2 м; их массы: m_3 = 5 m; m_4 = 2 m соответственно.

Найти скорость v_1 груза 1 после того, как перемещение его по наклонной плоскости достигнет величины S_1 = 2 м.

Решение

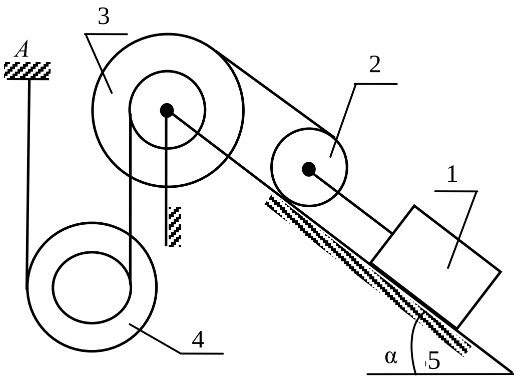

Рисунок 3.11

В рассматриваемой механической системе груз 1 совершает поступательное движение, цилиндрический каток 2 и подвижный ступенчатый блок 4 – плоскопараллельное, неподвижный ступенчатый блок 3

– вращательное. Воспользуемся выражением для теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \ .$$

В этом выражении T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно; $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе; $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ – сумма работ ее внутренних сил. Так как в начальном положении система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Система состоит из абсолютно твердых тел, которые соединены нерастяжимыми тросами, поэтому $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$ и, следовательно, кинетическая энергия $T = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$. В конечном положении она складывается из суммы кинетических энергий тел 1-4, входящих в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Теперь изобразим рассматриваемую механическую систему в начальном и конечном положениях, а также все силовые факторы, действующие на эту систему (рис. 3.12). Определим кинетические энергии входящих в систему тел, выразив их через скорость v_1 груза 1.

Кинетическая энергия груза 1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Кинетическая энергия катка 2

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\,\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{C_2}^2}{2} ,$$

где I_{C_2} – момент инерции катка (однородного цилиндра) относительно его продольной центральной оси, $I_{C_2} = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$, ω_2 – угловая скорость катка, который катится без скольжения по наклонной плоскости. Его мгновенный центр скоростей находится в точке P_2, поэтому $\omega_2 = \dfrac{v_{C_2}}{P_2C_2}$, где $v_{C_2} = v_1$; $P_2C_2 = r_2$, откуда $\omega_2 = \dfrac{v_1}{r_2}$. Подставляя это отношение в формулу для кинетической энергии, получим

$$T_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{v_1^2}{2^2} + \frac{m_2 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_1^2}{4} + \frac{m_2 v_1^2}{2}.$$

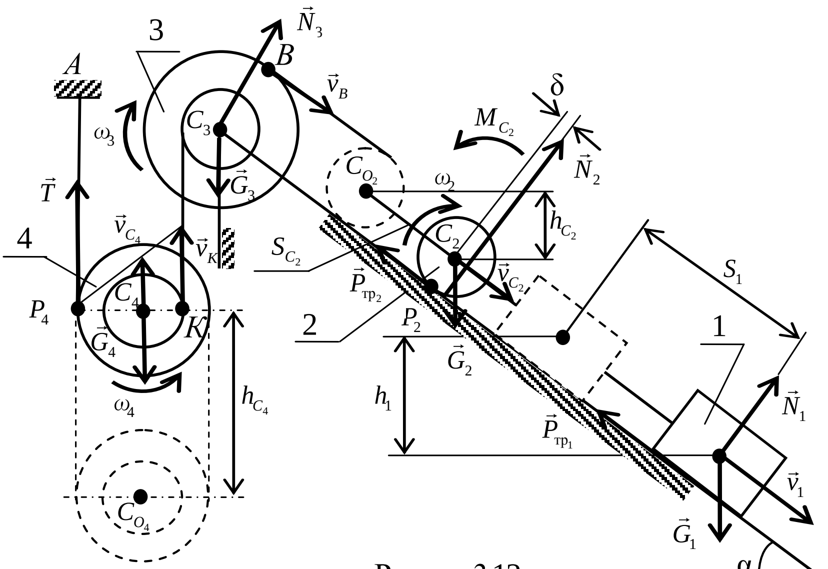

Рисунок 3.12

Кинетическая энергия неподвижного ступенчатого блока 3

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\,\omega_3^2}{2},$$

где I_{C_3} – момент инерции блока относительно его продольной центральной оси, $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$; ω_3 – его угловая скорость, $\omega_3 = \dfrac{v_B}{r_3}$. Так как $v_B = \omega_2 2r_2 = \dfrac{v_1 2r_2}{r_2} = 2v_1$, то $\omega_3 = \dfrac{2v_1}{R_3}$. Подставляя это отношение в формулу для кинетической энергии, окончательно получим

$$T_3 = \frac{m_3 i_{C_3}^2}{2} \cdot \frac{4v_1^2}{R_3^2}.$$

Кинетическая энергия подвижного ступенчатого блока 4

$$T_4 = \frac{I_{C_4}\omega_4^2}{2} + \frac{m_4 v_{C_4}^2}{2},$$

где I_{C_4} – момент инерции блока относительно его продольной центральной оси, $I_{C_4} = m_4 i_{C_4}^2$; ω_4 – угловая скорость блока, $\omega_4 = \dfrac{v_K}{P_4 K}$. Так как трос не скользит по блоку 4, его мгновенный центр скоростей находится в точке P_4 и $v_K = \omega_3 r_3 = \dfrac{v_1 2r_3}{R_3}$, то $\omega_4 = \dfrac{2v_1 r_3}{R_3(R_4 + r_4)}$ и $v_{C_4} = \omega_4 P_4 C_4 = \dfrac{2v_1 2rR_4}{R_3(R_4 + r_4)}$. Подставляя эти выражения в формулу для кинетической энергии, получим

$$T_4 = \frac{m_4 i_{C_4}^2}{2} \cdot \frac{4v_1^2 r_3^2}{R_3^2 (R_4 + r_4)^2} + \frac{m_4 4v_1^2 r_3^2 R_4^2}{2R_3^2 (R_4 + r_4)^2}.$$

Теперь определим кинетическую энергию всей механической системы, используя исходные данные,

$$T = \frac{10mv_1^2}{2} + \frac{4mv_1^2}{4} + \frac{4mv_1^2}{2} + \frac{5m}{2} \cdot \frac{0,3^2 \cdot 4v_1^2}{0,4^2} +$$

$$+\frac{2m\cdot 0,2^2\cdot 4v_1^2\cdot 0,2^2}{2\cdot 0,4^2\left(0,3+0,15\right)^2}+\frac{2m\cdot 4v_1^2\cdot 0,2^2\cdot 0,3^2}{2\cdot 0,4^2\left(0,3+0,15\right)^2}=1,24mv_1^2 .$$

Работу в рассматриваемой системе совершают только внешние силы, изображенные в ее конечном положении (см. рис. 3.12). Определим работу внешних сил на заданных перемещениях точек системы при перемещении груза 1 на расстояние S_1. Работы сил $\vec{G}_3$ и $\vec{N}_3$ равны нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Работы сил $\vec{P}_{\text{тр}_2}$ и $\vec{T}$ равны нулю, так как эти силы приложены в точках, которые являются мгновенными центрами скоростей. Реакция $\vec{N}_1$ перпендикулярна перемещению груза 1 и ее работа также равна нулю. Запишем формулу для нахождения суммы работ оставшихся внешних сил

$$\sum A_k^e = A_{\vec{G}_1} + A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} + A_{\vec{G}_2} + A_{M_{C2}} + A_{\vec{G}_4}$$

и определим составляющие, входящие в эту сумму:

– работу силы тяжести $\vec{G}_1$

$$A_{\vec{G}_1} = G_1 h_1 = m_1 g S_1 \sin\alpha ;$$

– работу силы трения скольжения

$$A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} = -P_{\text{тр}1}\cdot S_1 ,$$

где $P_{\text{тр}1} = f_1 N_1 = f_1 m_1 g\cos\alpha$, а значит

$$A_{\vec{P}_{\text{тр}1}} = -f_1 m_1 g S_1 \cos\alpha ;$$

– работу силы тяжести $\vec{G}_2$ с учетом того, что $S_{C_2} = S_1$,

$$A_{\vec{G}_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g S_1 \sin\alpha ;$$

– работу пары сил сопротивления качению катка 2, момент которой M_{C_2},

$$A_{M_{C2}} = -M_{C_2} \cdot \varphi_2 ,$$

где $M_{C_2} = \delta N_2 = \delta G_2 \cos\alpha = \delta m_2 g \cos\alpha$, а угол поворота катка 2, катящегося без скольжения, $\varphi_2 = \dfrac{S_{C_2}}{|P_2C_2|} = \dfrac{S_1}{r_2}$, откуда следует, что

$$A_{M_{C2}} = -\delta m_2 g \cos\alpha \frac{S_1}{r_2} ;$$

– работу силы тяжести $\vec{G}_4$

$$A_{\vec{G}_4} = -G_4 h_{C_4} = -m_4 g \frac{2S_1 r_3 R_4}{R_3 \left(R_4 + r_4\right)} .$$

При нахождении слагаемых $A_{M_{C2}}$ и $A_{\vec{G}_4}$ следовало учесть, что зависимость между линейными и угловыми скоростями такая же, как между соответствующими линейными и угловыми перемещениями.

Теперь определим сумму работ внешних сил, пользуя исходные данные:

$$\sum A_k^e = 10m \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 0{,}3 \cdot 10m \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}86 + 4m \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}5 -$$

$$-0{,}002 \cdot 4m \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}86 \cdot \frac{2}{0{,}2} - 2m \cdot 9{,}8 \cdot \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}4\left(0{,}3 + 0{,}15\right)} = 59{,}5m .$$

Согласно выражению для теоремы об изменении кинетической энергии, приравнивая значения T и $\sum A_k^e$, сократив на m обе части этого равенства, получим значение скорости груза 1 из формулы $1{,}24 m v_1^2 = 59{,}5m$, откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{59{,}5}{1{,}24}} = 6{,}93 \text{ м/с.}$$

<u>**Пример 9.**</u> Механическая система, показанная на рис. 3.13, состоит из грузов 1, 4, блока 2 с неподвижной осью вращения и ступенчатого цилиндрического катка 3. Груз 1 массой $m_1 = 8\ m$ опускается вертикально и с помощью нерастяжимого троса, переброшенного через блок 2 (однородный цилиндр), приводит в движение каток 3. Он, в свою оче-

редь, связан с помощью того же троса, прикрепленного в центре масс, с грузом 4, поднимающимся, как и каток 2, по шероховатой наклонной плоскости, которая составляет с горизонтом угол $\beta = 60^0$. Коэффициент трения груза 4 о плоскость $f_4 = 0,2$, его масса $m_4 = m$; масса блока 2 $m_2 = 5\ m$; масса катка 3 $m_3 = 2\ m$; радиусы ступеней катка 3: $R_3 = 0,3$ м, $r_3 = 0,1$ м, его радиус инерции $i_{C_3} = 0,2$ м.

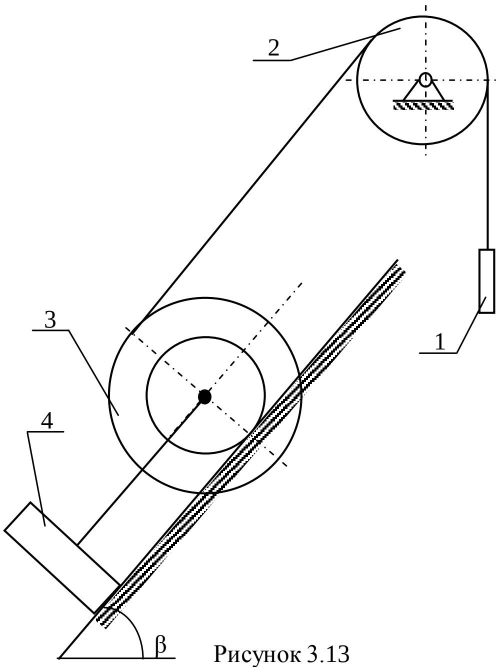

Рисунок 3.13

Определить скорость центра масс v_{C_3} и угловую скорость ω_3 катка 3 после того, как груз 1 опустится на расстояние $S_1 = 1$ м при условии, что трением качения катка 3 по наклонной плоскости можно пренебречь.

Решение

В рассматриваемой механической системе грузы 1, 4 совершают поступательные движения, блок 2 – вращательное, каток 3 – плоскопараллельное. Воспользуемся выражением для теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \ .$$

В него входят слагаемые, аналогичные тем, которые рассмотрены в примере 8. В конечном положении системы кинетическая энергия складывается из суммы кинетических энергий абсолютно твердых тел 1-4, входящих в систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Определим кинетические энергии входящих в систему тел:

– груза 1

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} ,$$

где v_1 – скорость груза 1;

– блока 2

$$T_2 = \frac{I_{C_2} \cdot \omega_2^2}{2} ,$$

где I_{C_2} – момент инерции блока 2 (однородного цилиндра) относительно его продольной центральной оси, $I_{C_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$; ω_2 – угловая скорость блока;

– катка 3

$$T_3 = \frac{I_{C_3} \omega_3^2}{2} + \frac{m_3 v_{C_3}^2}{2} ,$$

где I_{C_3} – момент инерции ступенчатого катка 3 относительно его продольной центральной оси, $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$; ω_3 и v_{C_3} – угловая скорость и скорость центра масс катка соответственно;

– груза 4

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2}$$

где v_4 – скорость груза 4.

Теперь изобразим рассматриваемую механическую систему в начальном и конечном положениях, а также все силовые факторы, действующие на эту систему (рис. 3.14). Выразим скорости тел 1-4 через угловую скорость катка ω_3. Для этого найдем кинематические зависимости:

$$v_1 = v_K ; \quad \omega_2 = \frac{v_K}{r_2} .$$

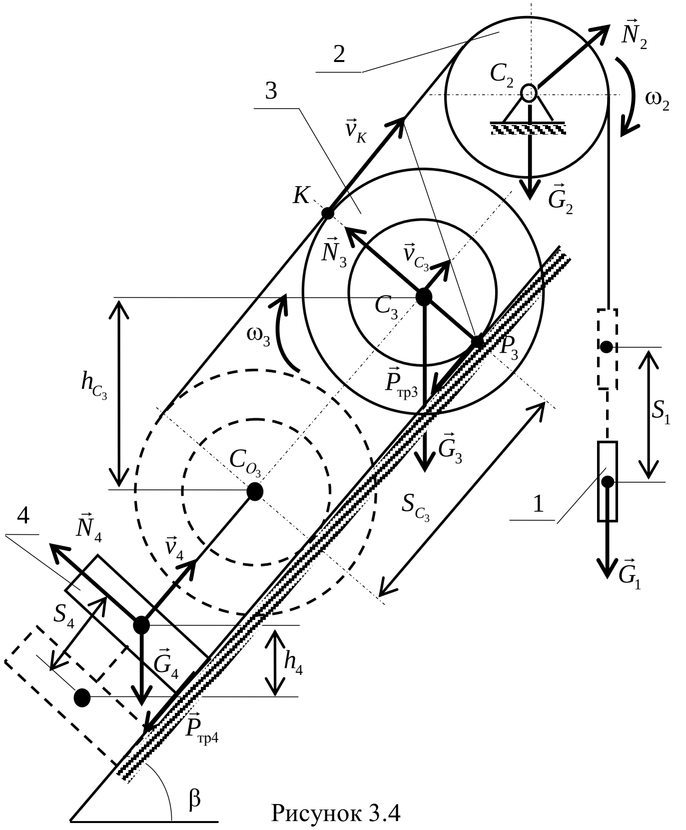

Рисунок 3.4

Так как каток 3 катится по наклонной плоскости без скольжения, его мгновенный центр скоростей находится в точке P_3, и

$$\omega_3 = \frac{v_K}{P_K} = \frac{v_1}{R_3 + r_3} ,$$

откуда следует, что

$$v_1 = \omega_3 \left(R_3 + r_3\right); \quad \omega_2 = \frac{\omega_3 \left(R_3 + r_3\right)}{r_2};$$

$$v_{C_3} = \omega_3 PC_3 = \omega_3 r_3$$

или

$$v_{C_3} = v_4 = \omega_3 r_3 .$$

Определим кинетическую энергию всей системы, используя кинематические зависимости, выражения для моментов инерции I_{C_2} и I_{C_3} , а также исходные данные,

$$T = \frac{8m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}16}{2} + \frac{5m\cdot r_2^2\omega_3^2\cdot 0{,}16\cdot 25}{2\cdot 2\cdot r_2^2} + \frac{2m\cdot 0{,}04\cdot\omega_3^2}{2} +$$

$$+ \frac{2m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}01}{2} + \frac{m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}01}{2} = m\cdot\omega_3^2\cdot 0{,}895 .$$

В рассматриваемой механической системе работу совершают только внешние силы, которые изображены для системы, находящейся в конечном положении (см. рис. 3.14). Найдем сумму работ внешних сил на заданных перемещениях точек системы с учетом того, что груз 1 переместился по вертикали на расстояние S_1. Работы сил $\vec{G}_2$ и $\vec{N}_2$ равны нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Работы сил $\vec{P}_{\text{тр}_3}$ и $\vec{N}_3$ равны нулю, так как эти силы приложены в точках, которые являются мгновенными центрами скоростей. Работа силы $\vec{N}_4$ равна нулю, так как реакция наклонной плоскости перпендикулярна перемещению груза 4. Таким образом, полная работа системы складывается из суммы работ

$$\sum A_k^e = A_{\vec{G}_1} + A_{\vec{G}_3} + A_{\vec{G}_4} + A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} ,$$

где

$A_{\vec{G}_1}$, $A_{\vec{G}_3}$, $A_{\vec{G}_4}$ – работы сил тяжести $\vec{G}_1$, $\vec{G}_3$, $\vec{G}_4$ соответственно,

$$A_{\vec{G}_1} = G_1 \cdot h_1 = m_1 g S_1 ;$$

$$A_{\vec{G}_3} = -G_3 \cdot h_{C_3} = -m_3 g S_{C_3} \sin\beta\,;$$

$$A_{\vec{G}_4} = -G_4 \cdot h_4 = -m_4 g S_4 \sin\beta\,;$$

$A_{\vec{P}_{\text{ТР}4}}$ – работа силы трения $\vec{P}_{\text{тр}_4}$ ($\vec{P}_{\text{тр}_4} = -f_4 \cdot N_4 = -f_4 m_4 g \cos\beta$),

$$A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} = -\vec{P}_{\text{тр}_4} \cdot S_4 = -f_4 m_4 g \cos\beta \cdot S_4\,.$$

Учитывая, что зависимость между перемещениями точек такая же, как и между соответствующими скоростями

$$S_{C_3} = \frac{S_1 \cdot r_3}{(R_3 + r_3)}; \quad S_4 = S_{C_3} = \frac{S_1 \cdot r_3}{(R_3 + r_3)}\,,$$

окончательно выразим сумму полной работы сил системы

$$\sum A_k^e = m_1 g S_1 - m_3 g S_{C_3} \frac{S_1 \cdot r_3}{(R_3 + r_3)} - \frac{m_4 g S_1 \cdot r_3 \sin\beta}{(R_3 + r_3)} - f_4 m_4 g \cos\beta \frac{S_1 \cdot r_3}{(R_3 + r_3)}\,.$$

Подставляя в это выражение исходные данные, получим

$$\sum A_k^e = 8m \cdot 9{,}8 \cdot 1 - 2m \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}1}{0{,}4} - \frac{m \cdot 9{,}8 \cdot 1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}86}{0{,}4} -$$

$$- \frac{m \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 71{,}2m.$$

Далее приравнивая $m\omega_3^2 \cdot 0{,}895 = 71{,}2m$, найдем угловую скорость катка 3

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{71{,}2}{0{,}895}} = 8{,}9 \text{ рад/с}$$

и скорость его центра масс

$$v_{C_3} = \omega_3 \cdot P_3 C_3 = \omega_3 \cdot r_3 = 8{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}89 \text{ м/с}.$$

3.6. Исследование движения механической системы с одной степенью свободы при помощи уравнения Лагранжа 2-го рода

Пример 10. Механическая система состоит из грузов 1, 4 и ступенчатых шкивов 2, 3 с неподвижными осями (рис. 3.15). К шкиву 2 приложена пара сил, момент которой $M_2 = 2G$ Н·м, а к шкиву 3 – пара сил сопротивления, момент которой $M_3 = G$ Н·м. Груз 1 весом $G_1 = 3G$ Н опускается по шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 60^0$. Груз 4 весом $G_4 = G$ Н поднимается вертикально. Коэффициент трения скольжения груза 1 о плоскость $f_1 = 0{,}1$. Веса шкивов 2, 3 одинаковы ($G_2 = G_3 = 2G$). Радиусы ступеней шкивов: $R_2 = 0{,}4$м; $r_2 = 0{,}3$м; $R_3 = 0{,}2$м; $r_3 = 0{,}1$м. Радиусы инерции шкивов относительно осей вращения $i_{C_2} = 0{,}35$м; $i_{C_3} = 0{,}15$м. Все указанные элементы механической системы являются абсолютно твердыми телами и соединены между собой нерастяжимыми тросами (идеальными нитями).

Определить ускорение груза 1 и силу натяжения троса, соединяющего груз 1 со шкивом 2 в зависимости от параметра G.

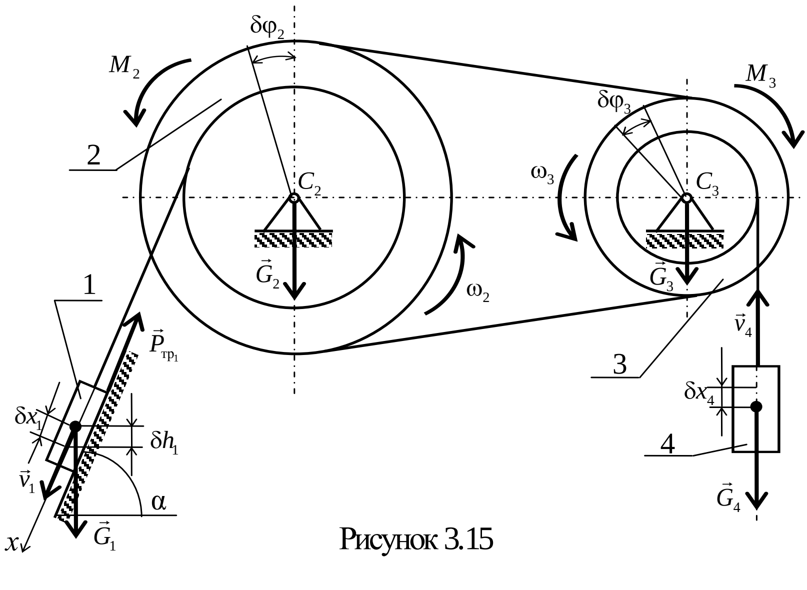

Рисунок 3.15

Решение

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Для определения ускорения a_1 груза 1 выберем в качестве обобщенной координаты его линейное перемещение. Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода для выбранной обобщенной координаты x и соответственно для обобщенной скорости $\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x .$$

Механическая система изображена в смещенном положении с учетом положительного направления обобщенной координаты x (см. рис. 3.15). Положительное элементарное приращение обобщенной координаты $\delta x=\delta x_1$, поэтому величины $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta x_4$ будут элементарными приращениями соответствующих координат. На схеме показаны активные силы тяжести $\vec{G}_1, \vec{G}_4$ грузов 1, 4 и $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ шкивов 2, 3, сила трения $\vec{P}_{\text{тр}_1}$ груза 1 о наклонную плоскость, а также моменты M_2, M_3, приложенные к шкивам 2, 3. Вычислим сумму работ всех перечисленных сил и моментов, кроме сил $\vec{G}_2, \vec{G}_3$, на элементарных приращениях соответствующих координат с учетом того, что связь между этими приращениями такая же, как и между соответствующими скоростями

$$\left(\sum \delta A\right)_x=\delta A_{\vec{G}_1}+\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}1}}+\delta A_{M_2}+\delta A_{M_3}+\delta A_{\vec{G}_4} ,$$

где

$$\delta A_{\vec{G}_1}=G_1\delta h_1=G_1\delta x\sin\alpha;$$

$$\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}1}}=-P_{\text{тр}1}\cdot\delta x=-G_1\cos\alpha f_1\delta x,\quad \text{так как } P_{\text{тр}1}=N_1 f_1=G_1\cos\alpha f_1;$$

$$\delta A_{M_2}=M_2\delta\varphi_2=M_2\frac{\delta x}{r_2};$$

$$\delta A_{M_3}=-M_3\delta\varphi_3=-M_3\frac{\delta x\cdot R_2}{r_2\cdot R_3};$$

$$\delta A_{\vec{G}_4}=-G_4\frac{\delta x\cdot R_2 r_3}{r_2\cdot R_3}.$$

Поскольку $\delta h_{C_2} = 0, \delta h_{C_3} = 0$, то работы сил $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ также равны нулю, т.е. $$\delta A_{\vec{G}_2} = 0; \quad \delta A_{\vec{G}_3} = 0.$$

Подставляя исходные данные, вычислим сумму работ

$$\left(\sum \delta A\right)_x = \delta x\left(3G \cdot 0,86 - 3G \cdot 0,5 \cdot 0,1 + \frac{2G}{0,3} - G\frac{0,4}{0,3 \cdot 0,2} - G\frac{0,4 \cdot 0,1}{0,3 \cdot 0,2}\right) =$$
$$= \delta x \cdot 2,06G,$$

откуда найдем обобщенную силу, соответствующую выбранной обобщенной координате *x*,

$$Q_x = \frac{\left(\sum \delta A\right)_x}{\delta x} = 2,06G.$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий тел 1-4, входящих в эту систему,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Для ее нахождения нужно выразить линейные и угловые скорости точек и тел системы через обобщенную скорость $\dot{x}$, а затем определить все составляющие:

– груза 1, совершающего поступательное движение,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2};$$

– шкива 2, совершающего вращательное движение,

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2} = \frac{m_2 i_{C_2}^2 \dot{x}^2}{2r_2^2},$$

где I_{C_2} – момент инерции шкива относительно его продольной центральной оси, $I_{C_2} = m_2 i_{C_2}^2$; ω_2 – его угловая скорость, $\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{\dot{x}}{r_2}$;

– шкива 3, совершающего вращательное движение,

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2} = \frac{m_3 i_{C_3}^2 \dot{x}^2 R_2^2}{2r_2^2 R_3^2},$$

где I_{C_3} – момент инерции шкива относительно его продольной центральной оси, $I_{C_3} = m_3 i_{C_3}^2$; ω_3 – его угловая скорость, $\omega_3 = \dfrac{v_1 R_2}{r_2 R_3} = \dfrac{\dot{x} R_2}{r_2 R_3}$;

– груза 4, совершающего поступательное движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{m_4 \dot{x}^2 R_2^2 r_3^2}{2r_2^2 R_3^2},$$

где v_4 – скорость груза, $v_4 = \omega_3 r_3 = \dfrac{v_1 R_2 r_3}{r_2 R_3} = \dfrac{\dot{x} R_2 r_3}{r_2 R_3}$.

Теперь подставим все полученные выражения для кинетических энергий тел 1-4 и исходные данные в формулу для полной кинетической энергии системы

$$T = \frac{G_1 \dot{x}^2}{2g} + \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{x}^2}{2g r_2^2} + \frac{G_3 i_{C_3}^2 \dot{x}^2 R_2^2}{2g r_2^2 R_3^2} + \frac{G_4 \dot{x}^2 R_2^2 r_3^2}{2g r_2^2 R_3^2} =$$

$$= \frac{3G\dot{x}^2}{2g} + \frac{2G \cdot 0,35^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2} + \frac{2G \cdot 0,15^2 \dot{x}^2 \cdot 0,4^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2} + \frac{G\dot{x}^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,1^2 \dot{x}^2}{2g \cdot 0,3^2 \cdot 0,2^2} =$$

$$= \frac{G\dot{x}^2 \cdot 0,68}{2},$$

откуда найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{2\dot{x}G \cdot 0,68}{2}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}G \cdot 0,68; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

так как обобщенная координата x в формулу для кинетической энергии не входит.

Подставляя полученные значения в уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\ddot{x}G \cdot 0,68 = 2,06G ,$$

далее определим линейное ускорение груза 1

$$\ddot{x} = a_{1x} = \frac{2,06}{0,68} = 3,03\,\text{м/с}^2 .$$

Найдем силу натяжения троса, равную по величине реакции R_{1-2}, мысленно разрезав его и изобразив все силы, действующие на груз 1, считая груз материальной точкой (рис. 3.16).

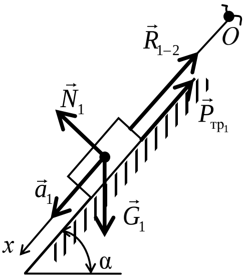

Рисунок 3.16

Запишем основное уравнение динамики материальной точки в векторной форме

$$m\vec{a} = \sum \vec{P}_k ,$$

и в проекции на ось Ox

$$m\ddot{x} = Px; \quad m\ddot{x} = G_1 \sin\alpha - P_{\text{тр}_1} - R_{1-2} .$$

С учетом того, что $P_{\text{тр}_1} = N_1 f_1 = G_1 f_1 \cos\alpha$, получим

$$\frac{G_1}{g} a_1 = G_1 \sin\alpha - G_1 f_1 \cos\alpha - R_{1-2} ,$$

откуда, подставляя исходные данные, найдем

$$R_{1-2} = 3G \sin\alpha - 3Gf_1 \cos\alpha - \frac{3G}{g} a_1 = 3G\left(0,86 - 0,5 \cdot 0,1 - \frac{3,03}{9,8}\right) = 1,35G\,\text{Н} .$$

<u>Пример 11.</u> Механическая система состоит из грузов 1, 4 и барабанов 2, 3, связанных между собой (рис. 3.17). К барабану 2 весом $G_2 = 2G$ Н, радиусами $R_2 = 0,4\,\text{м}$, $r_2 = 0,3\,\text{м}$ и радиусом инерции $i_{C_2} = 0,35\,\text{м}$ приложена пара сил, момент которой $M_2 = G\,\text{Н} \cdot \text{м}$. Этот момент приводит систему в движение. К барабану 3 весом $G_3 = 3G$ Н радиусом $r_3 = 0,1$ м приложена пара сил сопротивления, момент которой $M_3 = 2G$ Н·м. Груз 1 весом $G_1 = 4G$ Н опускается вертикально вниз. Груз 4 весом $G_4 = G$ Н поднимается по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Коэффициент трения груза 4 о наклонную плоскость $f_4 = 0,2$. Все тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми, а тросы (идеальные нити), которыми они соединены между собой, нерастяжимыми и невесомыми. Барабан 3 – сплошной однородный цилиндр.

Определить угловое ускорение барабана 2 ε_2 и силу натяжения троса, соединяющего тела 1-2 в зависимости от параметра G.

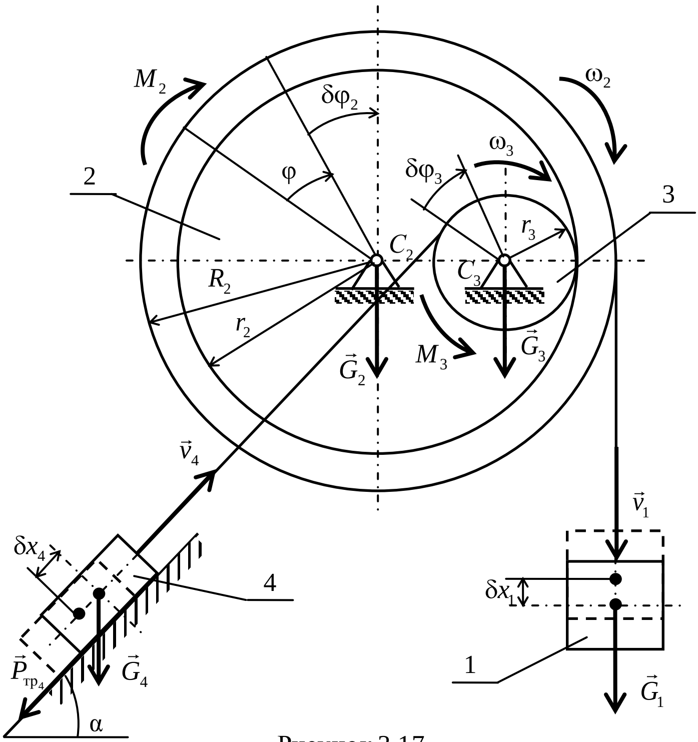

Рисунок 3.17

<u>Решение</u>

Для определения углового ускорения ε_2 барабана 2 выберем в качестве обобщенной координаты его угловое перемещение φ. Тогда уравнение Лагранжа 2-го рода для координаты φ и соответственно обобщенной скорости $\dot{\varphi}$ запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} .$$

Механическая система изображена в смещенном положении с учетом положительного направления координаты φ (см. рис. 3.17), показаны все активные силы, действующие на нее: силы тяжести $\vec{G}_1, \vec{G}_4$ грузов 1, 4 и $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ барабанов 2, 3, а также сила трения $\vec{P}_{\text{тр}_4}$ груза 4 о наклонную плоскость. Если положительное элементарное приращение обобщенной координаты системы $\delta\varphi = \delta\varphi_2$, то величины $\delta\varphi_3, \delta x_1, \delta x_4$ будут элементарными приращениями соответствующих координат.

Найдем сумму работ всех перечисленных сил на этих элементарных приращениях

$$\left(\sum \delta A\right)_{\varphi} = \delta A_{\vec{G}_1} + \delta A_{M_2} + \delta A_{M_3} + \delta A_{\vec{G}_4} + \delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} ,$$

где

$$\delta A_{\vec{G}_1} = G_1 \cdot \delta x_1;$$

$$\delta A_{M_2} = M_2 \delta\varphi_2;$$

$$\delta A_{M_3} = -M_3 \delta\varphi_3;$$

$$\delta A_{\vec{G}_4} = -G_4 \cdot \delta h_4 = -G_4 \cdot \delta x_4 \sin\alpha;$$

$$\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} = -P_{\text{тр}_4} \cdot \delta x_4 \quad .$$

Так как в последней формуле сила трения груза 4 $P_{\text{тр}_4} = G_4 \cos\alpha \cdot f_4$, то

$$\delta A_{\vec{P}_{\text{тр}4}} = -G_4 \cos\alpha \cdot f_4 \cdot \delta x_4 .$$

Поскольку $\delta h_{C_2} = 0, \delta h_{C_3} = 0$, то работы сил $\vec{G}_2, \vec{G}_3$ также равны нулю, т.е.
$$\delta A_{\vec{G}_2} = 0; \quad \delta A_{\vec{G}_3} = 0 .$$

Запишем кинематические соотношения, учитывая, что зависимость между элементарными приращениями координат такая же, как и между соответствующими скоростями
$$\delta x_1 = \delta\varphi \cdot R_2; \quad \delta x_4 = \delta\varphi \cdot r_2; \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_3} = \frac{r_3}{r_2}, \quad \text{откуда} \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta\varphi_2 r_2}{r_3} .$$

Теперь, подставляя исходные данные, посчитаем сумму элементарных работ всех сил
$$\left(\sum \delta A\right)_{\varphi} = \delta\varphi\left(4G \cdot 0,4 + G - 2G \cdot \frac{0,3}{0,1} - G \cdot 0,3 \cdot 0,5 - G \cdot 0,86 \cdot 0,2\right) =$$
$$= \delta\varphi \cdot 0,275G ,$$

откуда найдем обобщенную силу, соответствующую выбранной обобщенной координате φ,
$$Q_{\varphi} = \frac{\left(\sum \delta A\right)_{\varphi}}{\delta\varphi} = 0,275G .$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий тел 1-4, входящих в эту систему,
$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Для ее вычисления нужно выразить линейные и угловые скорости точек и тел системы через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$, а затем определить все составляющие:

– груза 1, совершающего поступательное движение,
$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{G_1 \dot{\varphi}^2 R_2^2}{g2}, \quad \text{òàê êàê} \quad v_1^2 = \dot{\varphi}^2 \cdot R_2^2 ;$$

– барабана 2, совершающего вращательное движение,

$$T_2 = \frac{I_{C_2}\omega_2^2}{2} = \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{\varphi}^2}{g2},$$

где I_{C_2} – момент инерции барабана относительно его продольной центральной оси, $I_{C_2} = m_2 i_{C_2}^2 = \frac{G_2}{g} i_{C_2}^2$; ω_2 – его угловая скорость, $\omega_2 = \dot{\varphi}$;

– барабана 3, совершающего вращательное движение,

$$T_3 = \frac{I_{C_3}\omega_3^2}{2} = \frac{G_3 \cdot r_3^2 \cdot r_2^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g2 \cdot 2r_3^2},$$

где I_{C_3} – момент инерции барабана (сплошного однородного цилиндра) относительно его продольной центральной оси, $I_{C_3} = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{G_3 r_3^2}{g2}$; ω_3 – его угловая скорость, $\omega_3 = \frac{\dot{\varphi} r_2}{r_3}$;

– груза 4, совершающего поступательное движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2} = \frac{G_4 \dot{\varphi}^2 r_3^2}{g2},,$$

где v_4 – скорость груза, $v_4 = \dot{\varphi} r_3$.

Теперь подставим все полученные выражения для кинетических энергий тел 1-4 и исходные данные в формулу для полной кинетической энергии системы

$$T = \frac{G_1 \dot{\varphi}^2 R_2^2}{g \cdot 2} + \frac{G_2 i_{C_2}^2 \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{G_3 r_2^2 \dot{\varphi}^2}{g \cdot 4} + \frac{G_4 \dot{\varphi}^2 r_3^2}{g \cdot 2} =$$

$$= \frac{4G \cdot 0,4^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{2G \cdot 0,35^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} + \frac{3G \cdot 0,3^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 4} + \frac{G \cdot 0,1^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{g \cdot 2} = \frac{G \cdot 0,06 \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$$

и найдем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2\dot{\varphi} G \cdot 0,06}{2}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi} G \cdot 0,06; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

так как обобщенная координата φ в выражение для кинетической энергии не входит.

Далее определим угловое ускорение барабана 2, подставляя полученные значения в уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\ddot{\varphi} G \cdot 0,06 = 0,275G\ ,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 = \frac{4,275}{0,06} = 4,58\,\text{рад/с}^2\ .$$

Найдем силу натяжения троса, равную по величине реакции R_{1-2}, мысленно разрезав его и изобразив все силы, действующие на груз 1, считая груз материальной точкой (рис. 3.18).

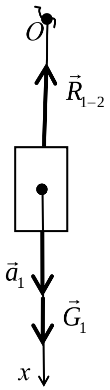

Рисунок 3.18

Запишем основное уравнение динамики материальной точки в векторной форме

$$m_1 \vec{a}_1 = \sum \vec{P}_k\ ,$$

и в проекции на ось Ox

$$m_1 \ddot{x} = G_1 - R_{1-2}; \quad m_1 = \frac{G_1}{g}; \quad \ddot{x} = a_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2\ .$$

Подставляя исходные данные, вычислим

$$R_{1-2} = G_1 - \frac{G_1 \varepsilon_2 R_2}{g} = 4 \cdot G - \frac{4 \cdot G \cdot 4,58 \cdot 0,4}{9,8} =$$

$$= 4 \cdot G \cdot (1 - 0,187) = 3,252 \cdot G \text{ Н.}$$

4. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание № 1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Перед выполнением задания № 1 рекомендуется рассмотреть решения типовых задач, приведенных в подразделе 3.2 данного пособия.

Тело движется вниз из точки *A*, находящейся на высоте *h*, по участку *AB* длиной *l* наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, как показано на рис. 4.1. Коэффициент трения скольжения тела на этом участке равен *f*. Время движения по участку – *t*, начальная скорость тела – v_A, скорость в конце участка – v_B. Исходные данные приведены в табл. 4.1.

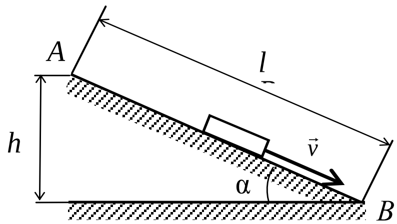

Рисунок 4.1

Таблица 4.1

Вариант	Исходные данные	Определить
1	$v_A = 0; \alpha = 30^0; t = 5с; f = 0$	$v_B; l$
2	$v_B = 15м/с; l = 10м; \alpha = 60^0; f = 0$	$v_A; t$
3	$v_A = 5м/с; v_B = 10м/с; l = 20м; f = 0$	$\alpha; t$
4	$v_A = 0; \alpha = 30^0; t = 2с; f = 0{,}1$	$v_B; h$
5	$v_B = 10м/с; \alpha = 30^0; l = 10м; f = 0{,}2$	$v_A; t$
6	$v_A = 5м/с; v_B = 40м/с; \alpha = 60^0; t = 5с$	$l; f$
7	$v_A = 2м/с; v_B = 6м/с; \alpha = 30^0; l = 5м$	$t; f$
8	$v_B = 10м/с; \alpha = 30^0; t = 3c; l = 20м$	$v_A; f$
9	$v_A = 0; \alpha = 45^0; l = 10м; f = 0{,}2$	$v_B; t$
10	$v_B = 20м/с; v_A = 0; \alpha = 30^0; f = 0{,}1$	$t; h$

Тело движется вверх из точки A по участку AB длиной l гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту под действием силы Q, постоянной на всем участке, как показано на рис. 4.2. Время движения по участку – t, скорость в конце участка – v_B. Точка B находится на высоте h. Исходные данные приведены в табл. 4.2.

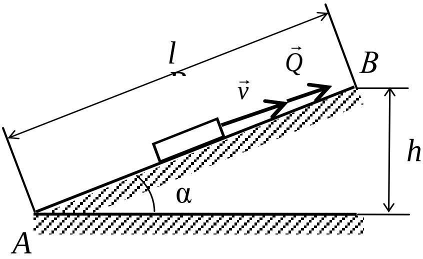

Рисунок 4.2

Таблица 4.2

Вариант	Исходные данные	Определить
11	$v_A = 25$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t = 5$ с; $Q = 0$	v_B; l
12	$v_B = 10$ м/с; $\alpha = 45^0$; $l = 10$ м; $Q = 0$	v_A; t
13	$v_A = 15$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t = 2$ с; $Q = 0{,}1$G	v_B; h
14	$v_B = 15$ м/с; $\alpha = 45^0$; $l = 3$ м; $Q =$ G	v_A; t
15	$v_A = 1$ м/с; $v_B = 5$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t = 5$ с; $m = 10$ кг	l; Q
16	$v_A = 6$ м/с; $v_B = 2$ м/с; $l = 10$ м; $Q = 0$	α; t
17	$v_A = 6$ м/с; $v_B = 2$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 20$ м; $m = 5$ кг	t; Q
18	$v_B = 10$ м/с; $\alpha = 45^0$; $t = 5$ с; $l = 40$ м; $m = 2$ кг	v_A; Q
19	$v_A = 60$ м/с; $\alpha = 60^0$; $l = 20$ м; $Q = 2$G	v_B; t
20	$v_B = 18$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 5$ м; $Q = 3G$	t; h

Снаряд вылетает из орудия, находящегося в точке A на высоте h, с начальной скоростью v_A под углом α к горизонту, как показано на рис. 4.3. Уравнение траектории полета снаряда $y = f(x)$, уравнения движения снаряда $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, время полета – t, дальность полета $AB = l$, скорость падения – v_B. Исходные данные приведены в табл. 4.3.

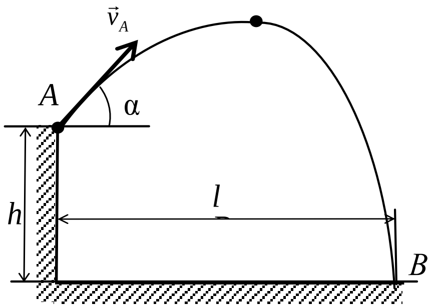

Рисунок 4.3

Таблица 4.3

Вариант	Исходные данные	Определить
21	$\alpha = 45^0$; $l = 1000$ м; $h = 1$ м	v_A; t
22	$\alpha = 30^0$; $h = 3$ м; $t = 2$ с	v_A; v_B
23	$v_A = 100$ м/с; $\alpha = 30^0$; $h = 5$ м	l; t
24	$v_A = 50$ м/с; $\alpha = 45^0$; $h = 10$ м	$y = f(x)$; t
25	$v_A = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 100$ м	t; h
26	$v_A = 30$ м/с; $l = 100$ м; $t = 5$ с	α; h
27	$v_A = 100$ м/с; $\alpha = 45^0$; $h = 0$	l; $x = f(t)$; $y = f(t)$
28	$v_A = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t = 1$ с	l; h
29	$\alpha = 45^0$; $l = 1000$ м; $h = 0$	v_A; $y = f(x)$
30	$v_A = 5$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 10$ м	h; v_B

<u>**Задание № 2**</u>

Теорема об изменении кинетической энергии

Перед выполнением задания № 2 рекомендуется рассмотреть решения типовых задач, приведенных в подразделе 3.5 данного пособия.

Механическая система состоит из грузов 1 и 4, двух блоков с неподвижной 2 и подвижной 3 осями (рис. 4.4). Радиусы ступеней блоков соответственно r_2, R_2 и r_3, R_3, радиусы инерции относительно осей вращения i_{C2} и i_{C3}. Массы тел, входящих в систему, – m_1, m_2, m_3, m_4; коэффициент трения скольжения груза 1 о наклонную плоскость – f_1; угол наклона плоскости к горизонту – α. Тела системы соединены друг с другом тросами (идеальными нитями). Участки тросов параллельны соответствующим плоскостям. В начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Определить согласно данным табл. 4.4 значение искомой величины скорости, когда перемещение груза 1 станет равным S_1.

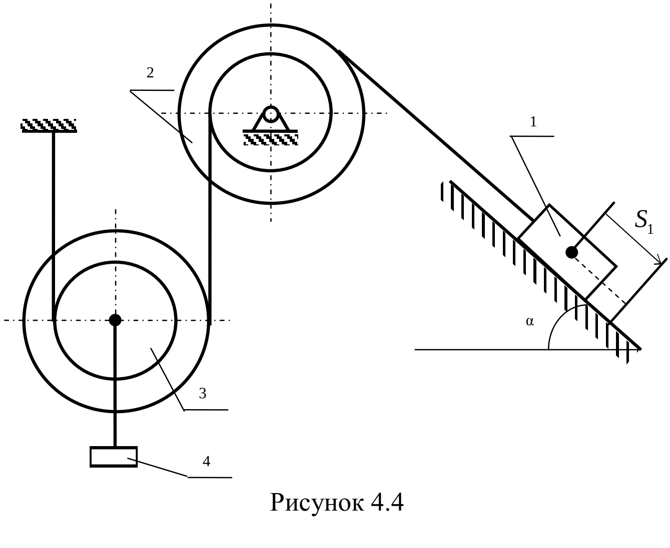

Рисунок 4.4

Таблица 4.4

Вариант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_2, м	R_2, м	r_3, м
1	15m	0,5m	m	0,5m	0,1	0,3	0,2
2	8m	2m	2m	0,8m	0,1	0,2	0,15
3	10m	5m	m	2m	0,25	0,5	0,3
4	12m	3m	0,5m	3m	0,15	0,2	0,1
5	10m	0,3m	3m	m	0,04	0,1	0,2
6	15m	m	4m	4m	0,2	0,3	0,04
7	16m	3m	3m	2m	0,1	0,2	0,15
8	11m	0,4m	2m	3m	0,15	0,3	0,2
9	17m	6m	m	4m	0,1	0,15	0,1
10	9m	8m	2m	0,6m	0,2	0,4	0,1

Продолжение табл. 4.4

Вариант	R_3, м	i_{C2}, м	i_{C3}, м	f_1	α, град	S_1, м	Определить
1	0,4	0,25	0,3	0,1	30	1	v_1
2	0,3	0,18	0,2	0,05	45	0,5	ω_2
3	0,5	0,4	0,4	0,15	60	2	v_{C3}
4	0,2	0,18	0,15	0,025	45	0,8	v_4
5	0,3	0,18	0,25	0,03	30	1,5	ω_3
6	0,1	0,25	0,08	0,1	30	1,8	ω_2
7	0,2	0,15	0,17	0,04	60	0,5	ω_3
8	0,25	0,2	0,22	0,02	45	2	v_1
9	0,1	0,12	0,07	0,1	60	1	v_4
10	0,3	0,3	0,2	0,03	30	0,5	ω_3

Механическая система состоит из грузов 1 и 4, блока 2 с неподвижной осью и ступенчатого цилиндрического катка 3, радиусы ступеней которого r_3, R_3 и радиус инерции относительно оси вращения i_{C3} (рис. 4.5). Массы тел, входящих в систему, – m_1, m_2, m_3, m_4; коэффициенты трения скольжения грузов 1 и 4 о наклонные плоскости – f_1, f_4; углы наклона плоскостей к горизонту – α и β. Тела системы соединены друг с другом тросами (идеальными нитями). Участки тросов параллельны соответствующим плоскостям. В начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Определить согласно данным табл. 4.5 значение искомой величины скорости, когда перемещение груза 1 станет равным S_1.

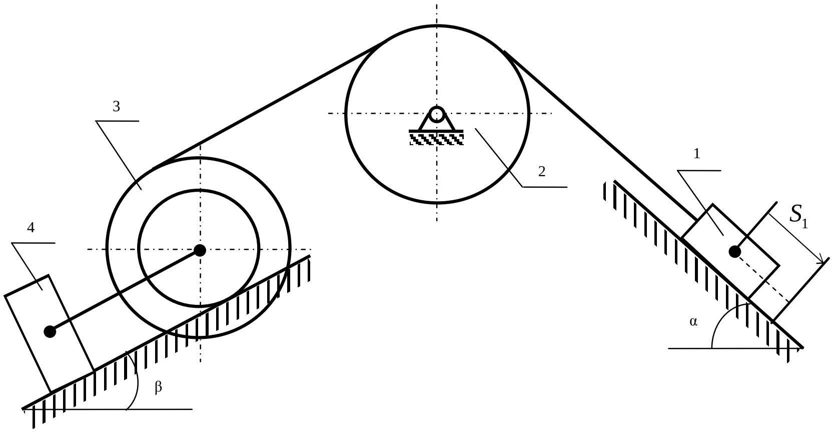

Рисунок 4.5

Таблица 4.5

Вариант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_3, м	R_3, м	i_{C3}, м
11	16m	3m	2m	m	0,25	0,4	0,3
12	11m	5m	m	2m	0,1	0,15	0,12
13	17m	2m	3m	3m	0,15	0,3	0,2
14	9m	0,5m	2m	2m	0,3	0,4	0,45
15	15m	4m	3m	2m	0,2	0,3	0,25
16	10m	3m	4m	m	0,04	0,1	0,08
17	12m	0,5m	0,5m	2m	0,15	0,3	0,25
18	10m	6m	m	0,5m	0,2	0,25	0,15
19	8m	2m	2m	m	0,05	0,1	0,08
20	15m	4m	3m	2m	0,15	0,3	0,25

Продолжение табл. 4.5

Вариант	f_1	f_4	α, град	β, град	S_1, м	Определить
11	0,1	0,1	30	45	0,5	ω_3
12	0	0,1	60	30	1	v_4
13	0,02	0,2	30	45	2	v_1
14	0,04	0	45	30	0,5	ω_3
15	0,1	0,3	60	30	1,8	v_{C3}
16	0,03	0,1	45	30	1,5	ω_3
17	0	0,2	30	60	0,8	v_4
18	0,1	0,1	60	30	2	v_{C3}
19	0,02	0,3	45	60	1	v_4
20	0,1	0	30	45	2	v_1

Механическая система состоит из грузов 1 и 4, ступенчатого блока 2 с неподвижной осью, радиусы ступеней которого r_2, R_2 и радиус инерции относительно оси вращения i_{C2}, и цилиндрического катка 3, радиус которого r_3 (рис. 4.6). Массы тел, входящих в систему, – m_1, m_2, m_3, m_4; коэффициент трения качения катка 3 по плоскости – δ_3; коэффициент трения скольжения груза 4 о горизонтальную плоскость – f_4;. Тела системы соединены друг с другом тросами (идеальными нитями). Участки тросов параллельны соответствующим плоскостям. В начальный момент времени система находилась в состоянии покоя.

Определить согласно данным табл. 4.6 значение искомой величины скорости, когда груз 1 опустится на величину S_1.

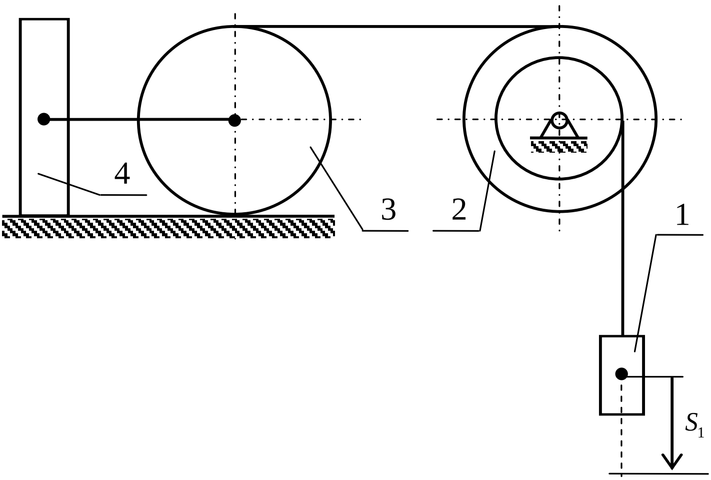

Рисунок 4.6

Таблица 4.6

Вариант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	r_2, м	R_2, м	r_3, м
21	$10m$	$4m$	$3m$	$2m$	0,2	0,4	0,1
22	$12m$	$2m$	$2m$	m	0,1	0,15	0,2
23	$11m$	$6m$	m	$0,5m$	0,15	0,3	0,2
24	$8m$	$0,5m$	$0,5m$	$2m$	0,1	0,2	0,4
25	$9m$	$3m$	$4m$	$3m$	0,2	0,3	0,3
26	$12m$	$4m$	$2m$	$4m$	0,04	0,1	0,5
27	$16m$	m	m	m	0,15	0,2	0,4
28	$14m$	$5m$	$3m$	$0,5m$	0,2	0,25	0,2
29	$13m$	$2m$	$2m$	$2m$	0,05	0,1	0,3
30	$7m$	$6m$	$0,5m$	m	0,1	0,3	0,2

Продолжение табл. 4.6

Вариант	i_{C2}, м	f_4	δ_3, м	S_1, м	Определить
21	0,3	0,02	0,001	1,5	v_{C3}
22	0,12	0,03	0,003	1	v_4
23	0,2	0,1	0,002	0,5	ω_3
24	0,15	0,05	0,004	0,5	ω_2
25	0,25	0,1	0,001	2	v_1
26	0,08	0,02	0,003	1	ω_3
27	0,17	0,1	0,002	1,5	v_4
28	0,22	0,03	0,001	0,5	v_{C3}
29	0,08	0,04	0,003	1	v_1
30	0,2	0,03	0,002	2	ω_2

Задание № 3

Исследование движения механической системы с одной степенью свободы при помощи уравнения Лагранжа 2-го рода

Перед выполнением задания № 3 рекомендуется рассмотреть решения типовых задач, приведенных в подразделе 3.6 данного пособия.

Механическая система состоит из двух грузов 1, 4 и двух ступенчатых барабанов 2 весом G_2, 3 весом G_3, связанных между собой зубчатым зацеплением (рис. 4.7). К барабану 2, приводящему в движение систему, приложена пара сил, постоянный момент которой M_2. К барабану 3 приложена пара сил, постоянный момент сопротивления которой M_3. Груз 1 весом G_1 движется по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, при этом груз 4 весом G_4 перемещается по вертикали. Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость – f_1; радиусы ступеней барабанов 2, 3 соответственно – R_2, r_2, R_3, r_3; радиусы инерции относительно осей вращения – i_{C2}, i_{C3}. Все тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми, а тросы (идеальные нити), которыми они соединены между собой, – нерастяжимыми и невесомыми.

Определить согласно данным табл. 4.7 ускорение указанного тела и силу натяжения указанного троса.

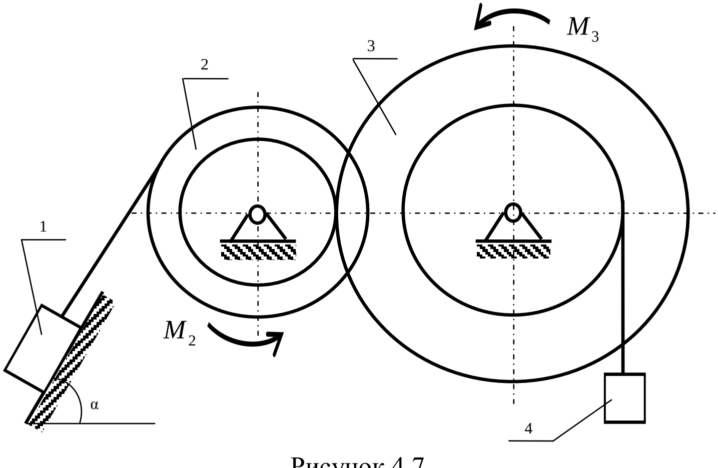

Рисунок 4.7

Таблица 4.7

Вариант	G_1, Н	G_2, Н	G_3, Н	G_4, Н	r_2, м	R_2, м	r_3, м	R_3, м
1	15G	14G	13G	2G	0,2	0,3	0,2	0,4
2	18G	12G	12G	G	0,05	0,1	0,2	0,4
3	10G	16G	10G	0,5G	0,2	0,25	0,15	0,3
4	12G	12G	12G	0,5G	0,15	0,2	0,1	0,4
5	10G	13G	14G	G	0,04	0,1	0,2	0,4
6	16G	14G	13G	2G	0,2	0,3	0,4	0,6
7	9G	12G	12G	0,5G	0,1	0,2	0,2	0,4
8	14G	12G	13G	2G	0,15	0,3	0,1	0,2
9	11G	15G	12G	G	0,1	0,15	0,2	0,4
10	16G	13G	12G	2G	0,2	0,4	0,1	0,4

Продолжение табл. 4.7

Вариант	i_{C2}, м	i_{C3}, м	f_1	α, град	M_2, Н·м	M_3, Н·м	Определить	
1	0,25	0,3	0,4	45	0,2G	0,25G	a_1	R_{3-4}
2	0,08	0,3	0,2	30	0,1G	0,15G	ε_2	R_{1-2}
3	0,22	0,2	0,1	60	0,1G	0,13G	ε_3	R_{3-4}
4	0,18	0,3	0,2	45	0,2G	0,25G	a_4	R_{1-2}
5	0,08	0,3	0,1	30	0,1G	0,15G	ε_3	R_{3-4}
6	0,25	0,5	0,3	60	0,3G	0,35G	a_1	R_{3-4}
7	0,15	0,3	0,1	60	0,2G	0,25G	ε_2	R_{1-2}
8	0,2	0,15	0,2	30	0,1G	0,15G	a_4	R_{3-4}
9	0,12	0,3	0,1	45	0,3G	0,35G	ε_3	R_{1-2}
10	0,3	0,4	0,3	30	0,2G	0,25G	a_1	R_{1-2}

Механическая система состоит из грузов 1, 4, ступенчатого барабана 2 весом G_2 и вала 3 весом G_3, связанных между собой (рис. 4.8). К барабану 2, приводящему в движение систему, приложена пара сил, постоянный момент которой M_2. К валу 3 приложена пара сил, постоянный момент сопротивления которой M_3. Груз 1 весом G_1 движется по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, при этом груз 4 весом G_4 перемещается по вертикали. Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость – f_1; радиусы ступеней барабана 2 – R_2, r_2; радиус инерции его относительно оси вращения – i_{C2}. Вал 3 следует считать сплошным однородным цилиндром. Все тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми, а тросы (идеальные нити), которыми они соединены между собой, – нерастяжимыми и невесомыми.

Определить согласно данным табл. 4.8 ускорение указанного тела и силу натяжения указанного троса.

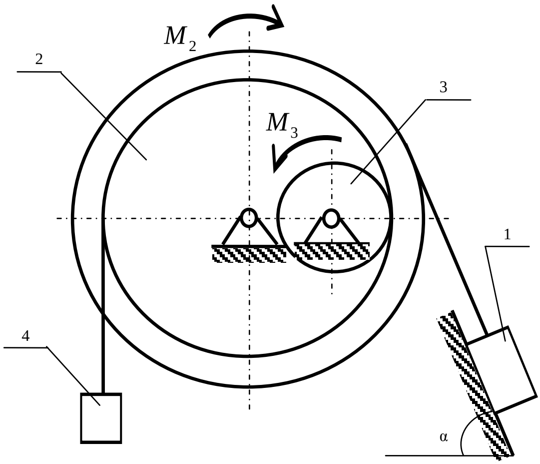

Рисунок 4.8

Таблица 4.8

Вариант	G_1, Н	G_2, Н	G_3, Н	G_4, Н	r_2, м	R_2, м	r_3, м
11	$16G$	$13G$	$12G$	G	0,25	0,4	0,1
12	$11G$	$14G$	$10G$	$2G$	0,1	0,15	0,05
13	$17G$	$12G$	$13G$	$3G$	0,15	0,3	0,05
14	$9G$	$5G$	$12G$	$2G$	0,3	0,4	0,1
15	$10G$	$14G$	$13G$	$2G$	0,2	0,3	0,05
16	$12G$	$13G$	$14G$	G	0,04	0,1	0,02
17	$10G$	$5G$	$5G$	$2G$	0,15	0,3	0,05
18	$8G$	$16G$	$10G$	$0{,}5G$	0,2	0,25	0,1
19	$15G$	$12G$	$10G$	G	0,05	0,1	0,025
20	$10G$	$14G$	$13G$	$2G$	0,15	0,3	0,05

Продолжение табл. 4.8

Вариант	i_{C2}, м	f_1	α, град	M_2, Н·м	M_3, Н·м	Определить	
11	0,3	0,2	30	$0{,}7G$	$0{,}35G$	ε_2	R_{1-2}
12	0,12	0,1	60	$0{,}5G$	$0{,}25G$	a_1	R_{2-4}
13	0,2	0,1	45	$0{,}7G$	$0{,}35G$	ε_3	R_{2-4}
14	0,35	0,2	60	G	$0{,}45G$	a_4	R_{1-2}
15	0,25	0,1	45	$0{,}5G$	$0{,}25G$	ε_2	R_{2-4}
16	0,08	0,2	30	$0{,}2G$	$0{,}15G$	a_4	R_{1-2}
17	0,25	0,1	60	$0{,}3G$	$0{,}25G$	a_1	R_{2-4}
18	0,22	0,1	45	$0{,}7G$	$0{,}35G$	ε_2	R_{1-2}
19	0,08	0,3	60	$0{,}5G$	$0{,}25G$	ε_3	R_{2-4}
20	0,3	0,15	60	$0{,}5G$	$0{,}2G$	a_4	R_{2-4}

Механическая система состоит из двух грузов 1, 4 и двух ступенчатых шкивов 2, 3. (рис. 4.9). К шкиву 2 весом G_2, приводящему в движение систему, приложена пара сил, постоянный момент которой M_2. К шкиву 3 весом G_3 приложена пара сил, постоянный момент сопротивления которой M_3. Груз 1 весом G_1 движется по вертикали, а груз 4 весом G_4 при этом перемещается по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Коэффициент трения груза 4 о наклонную плоскость – f_4; радиусы ступеней шкивов 2, 3 – $R_2, r_2; R_3, r_3$; радиусы инерции их относительно осей вращения – i_{C2}, i_{C3}. Все тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми, а тросы (идеальные нити), которыми они соединены между собой, – нерастяжимыми и невесомыми.

Определить согласно данным табл. 4.9 ускорение указанного тела и силу натяжения указанного троса.

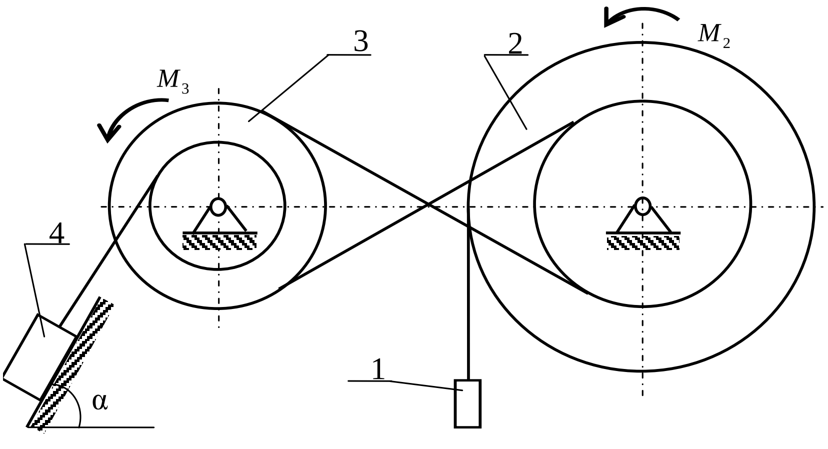

Рисунок 4.9

Таблица 4.9

Вариант	G_1, Н	G_2, Н	G_3, Н	G_4, Н	r_2, м	R_2, м	r_3, м	R_3, м
21	$10G$	$13G$	$18G$	$0{,}5G$	0,1	0,6	0,2	0,4
22	$8G$	$15G$	$14G$	G	0,2	0,4	0,1	0,15
23	$12G$	$12G$	$12G$	$2G$	0,1	0,2	0,15	0,3
24	$14G$	$13G$	$12G$	$2G$	0,2	0,4	0,1	0,2
25	$10G$	$14G$	$10G$	G	0,4	0,6	0,2	0,3
26	$16G$	$12G$	$13G$	$3G$	0,2	0,4	0,04	0,1
27	$10G$	$10G$	$14G$	$2G$	0,1	0,4	0,15	0,2
28	$8G$	$13G$	$15G$	G	0,15	0,3	0,2	0,25
29	$12G$	$10G$	$16G$	$2G$	0,2	0,4	0,05	0,1
30	$15G$	$13G$	$12G$	$3G$	0,2	0,4	0,2	0,3

Продолжение табл. 4.9

Вариант	i_{C2}, м	i_{C3}, м	f_4	α, град	M_2, Н·м	M_3, Н·м	Определить	
21	0,4	0,3	0,2	60	$0{,}3G$	$3{,}5G$	a_4	R_{3-4}
22	0,3	0,12	0,1	45	$0{,}2G$	$1{,}5G$	ε_3	R_{1-2}
23	0,15	0,2	0,2	30	$0{,}4G$	$4{,}5G$	ε_2	R_{1-2}
24	0,3	0,15	0,3	45	$0{,}2G$	$2{,}5G$	a_1	R_{3-4}
25	0,5	0,25	0,1	45	$0{,}1G$	$1{,}5G$	a_4	R_{1-2}
26	0,3	0,08	0,2	60	$0{,}3G$	$3{,}5G$	ε_2	R_{3-4}
27	0,3	0,18	0,1	30	$0{,}4G$	$4{,}5G$	a_4	R_{1-2}
28	0,2	0,22	0,1	60	$0{,}2G$	$2{,}5G$	ε_3	R_{3-4}
29	0,3	0,03	0,2	45	$0{,}1G$	$1{,}5G$	ε_2	R_{1-2}
30	0,3	0,25	0,3	60	$0{,}2G$	$2{,}5G$	a_1	R_{3-4}

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка.– К.: Техніка, 2002.– 512с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики / В 2-х т.– М.: Наука, т. 1, 1979.– 272 с.; т. 2, 1979.– 332 с.
3. Попов М.В. Теоретическая механика. Краткий курс.– М.: Наука, 1986.– 335 с.
4. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика.– М.: Наука, 1989.– 351 с.
5. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика.– К.: Вища школа, 1990.– 480 с.
6. Мещерский В.И. Сборник задач по теоретической механике.– М.: Наука, 1986.– 448 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.– М.: Высшая школа, 1998.– 416 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах / в 3-х т.– М.: Наука,1990.– 672 с.
9. Беломытцев А.С. Краткий курс теоретической механики. Статика и кинематика / Тексты лекций для студентов заочной формы обучения всех специальностей.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2004.– 76 с.
10. Беломытцев А.С. Краткий курс теоретической механики. Динамика / Тексты лекций для студентов заочной формы обучения всех специальностей.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.– 128 с.
11. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Общий курс теоретической механики / Учебное пособие.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2005.– 112 с.
12. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Статика / Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2006.– 64 с.
13. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Кинематика / Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2007.– 72 с.
14. Адашевский В.М., Анищенко Г.О., Тарсис Ю.Л. Теоретическая механика. Динаміка / Учебно-методическое пособие для студентов всех специальностей.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2008.– 88 с.