

**Н.Н. ТКАЧУК**, к. т. н., доц. каф. ТММиСАПР НТУ «ХПИ»; Стэнфордский ун-т, США;

**Н.Б. СКРИПЧЕНКО**, асп. каф. ТММиСАПР НТУ «ХПИ»;

**А.В. ТКАЧУК**, к.т.н., с.н.с., с.н.с. каф. ТММиСАПР НТУ «ХПИ»;

**В.И. ГОЛОВЧЕНКО**, к.т.н., вед. инж-констр. НТК ЧАО «АзовЭлектро-Сталь», Мариуполь

### МОДЕЛИ И РАЗРЕШАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ И ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье предложены подходы к решению задачи о контактном взаимодействии гладких и шероховатых тел. Задача сводится к граничному интегральному уравнению. Дискретизация искомого контактного давления осуществлена при помощи метода граничных элементов. Влияние шероховатости моделируется при помощи упругого основания Винклера. Получены асимптотические оценки для определения влияния податливости слоя на контактное давление.

**Ключевые слова:** контактное взаимодействие, контактное давление, интегральное уравнение, метод граничных элементов, шероховатость, напряженно-деформированное состояние

**Введение.** Одним из направлений обеспечения контактной прочности взаимодействующих деталей машиностроительных конструкций является обеспечение как можно большей площадки, по которой происходит их контактирование при приложении нагрузки. Для этого отдается предпочтение вариантам первоначального (без нагрузки, т.е. геометрического) контакта по участку поверхности или по линии перед точечным контактом. В то же время проблемы, возникающие в первых двух случаях (концентрация напряжений в зоне кромок даже при контакте идеально совпадающих (конгруэнтных) поверхностей или линий, а также при учете отклонения от плоскости, цилиндричности и т.п., дополненных неточностями вследствие упругого деформирования остальной части деталей, пребывающих вне контакта), вынуждают привлекать для их устранения различные виды модификаций (например, бочкование зубьев передач или роликоподшипников, продольная модификация рабочих поверхностей зубчатых колес и т.п.). Вместе с этим существует множество деталей, которые по своей природе предполагают точечную локализацию контакта (зубчатые колеса двухпараметрических передач, тела качения шарикоподшипников, пространственные кулачки и т.п.). Это обусловлено способом передачи с их помощью сложных видов движения. Поскольку и в этом случае присутствует стремление уменьшить контактные давления, то объяснима тенденция уменьшения приведенной кривизны, а с ним – и величины зазора, по крайней мере, в одном из двух главных направлений в точке первоначального геометрического контакта. В результате и в первом, и во втором случае возникает ситуа-

ция, когда известные и широко применяемые условия модели Герца [1] не выполняются. Более того, при соизмеримости величины начального зазора и упругих перемещений поверхностей контактирующих тел с шероховатостью их нельзя считать гладкими.

Соответственно, возникает задача анализа распределения контактных давлений в сопряжении упругих деформируемых тел [1] в постановке, существенно расширенной по сравнению с классической. Для решения этой задачи привлекаются самые разнообразные методы: аналитические расчеты, основанные на усовершенствованной модели Герца [1-3], численный метод конечных элементов (МКЭ) [4-8]; экспериментальные технологии с использованием чувствительных к давлению пленок [9]. В то же время все применяемые подходы, методы и модели имеют свои рамки применения, характеризуются различной степенью точности и требовательностью к затрачиваемым ресурсам, что, в свою очередь, не дает возможности выделить тот или иной метод как доминирующий или универсальный. Таким образом, в ходе исследований рационально применять различные методы анализа контактного взаимодействия из некоторого доступного их множества (или их сочетание). При этом актуальной задачей является пополнение этого множества методов, поскольку расширение арсенала инструментов для определения контактных площадок и давлений повышает достоверность и точность результатов, получаемых на разных этапах проектных разработок. Особенно это важно для сложнопрофильных тел (СПТ), аналитическое или численное моделирование контактирующих поверхностей которых зачастую не удовлетворяет требованиям оперативности, точности и адекватности описания контактного взаимодействия.

В связи с отмеченными обстоятельствами актуальной и важной научно-практической задачей является совершенствование численных методов определения напряженно-деформированного состояния элементов машиностроительных конструкций с учетом их контактного взаимодействия как гладких или шероховатых тел, решению которой посвящена данная работа.

**Постановка задачи.** При исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел [9-12] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. Конкурирующими требованиями при этом выступают оперативность и точность решения единичной задачи анализа, которые в значительной мере определяются методом, выбранным для ее решения.

В частности, рассмотрим из всего их разнообразия метод Герца и МКЭ. Первый значительно сужает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако позволяет проводить достаточно оперативную оценку контактных давлений и контактных площадок. Вторым применим и обеспечивает высокую точность моделирования для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта СПТ. Таким образом, по критериям «точность – оперативность» данные методы как бы разнесены по противоположным краям воображаемого интервала показателей «применимость – ресурсозатратность», условно обозначая крайности возможностей по каждому из критериев. Компромиссным с этой точки зрения представляется метод граничных интегральных уравнений: он свободен от требований теории Герца о первоначальном точечном контакте тел и о представлении локального зазора в сопряжении тел в виде положительно определенной квад-

ратичной формы от координат, задающих точки общей касательной плоскости. Этим существенно расширяется множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия. С другой стороны, в отличие от МКЭ, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия СПТ метод граничных интегральных уравнений является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимущества первого и второго и будучи лишен (в значительной мере) их недостатков, и поэтому представляет интерес при решении контактных задач.

*Целью* проведенных и описываемых в статье разработок является модификация метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных тел, ограниченных поверхностями произвольной формы. Решение задачи осуществляется в такой последовательности: вначале формируются разрешающие уравнения для случая контакта гладких тел, а затем они обобщаются на случай шероховатых тел.

*Кинематическая модель контакта гладких тел.* При исследовании контакта гладких тел несогласованной (т.е. несовпадающей) формы [1-9] в отсутствие трения в первом приближении рассматриваются перемещения точек поверхностей и зазор между ними только в нормальном (по отношению к поверхностям возможного контакта) направлении. На этой основе выводятся кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта базируется на пренебрежении изменением направления векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [1, 9-15]. Примером является теория Герца, в рамках которой нормальный зазор между поверхностями приближенно представляется квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой первоначального касания тел и расположенной в касательной к ним плоскости.

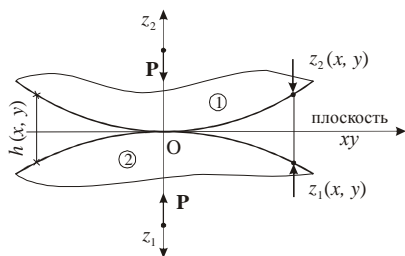


Рисунок 1 – Представление локального зазора между контактирующими телами

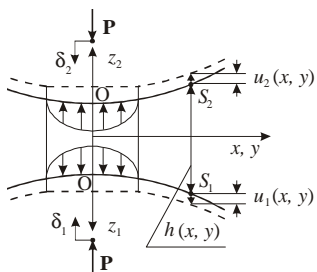


Рисунок 2 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

В более общем случае приходится учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку O) традиционно располагают на линии действия прижимающей силы  $\mathbf{P}$  (рис. 1, 2). На рис. 2 приняты следующие обозначения:  $\delta_1, \delta_2$  – смещение бесконечно удаленных точек тел 1 и 2;  $u_1, u_2$  – упругие перемещения точек тел 1 и 2 под действием контактного давления  $\mathbf{P}$ ;  $h(x, y)$  – распределение начального зазора между точками тел 1 и 2;  $z_1, z_2$  – координаты точек поверхностей тел 1

и 2. Тогда приходим к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (1)$$

*Модель деформирования упругого полупространства.* Принимая для перемещений  $u_1, u_2$  соотношения как для упругих полупространств (рис. 3) [16], получаем:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

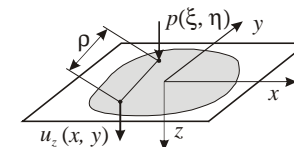


Рисунок 3 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

Поскольку распределения контактных давлений, действующих на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, то в соотношениях (1) неизвестные перемещения  $u_{z_1}(x, y)$  и  $u_{z_2}(x, y)$  выражены исключительно через единственную функцию распределения давления  $p$ , которая в дальнейшем будет искомой:

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Здесь  $\nu_i, E_i, i = 1, 2$  – коэффициент Пуассона и модули упругости материала каждого из контактирующих тел. Контактная площадка  $S$  и распределение давлений  $p(\xi, \eta)$ , присутствующие в правой части равенства, являются неизвестными и искомыми.

*Дискретизация.* Для определения контактной площадки и распределения давлений в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекаются различные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений усилий набором элементов. Они различаются между собой типом аппроксимации неизвестных контактных давлений и способом учета граничных условий. Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие поверхностные смещения, характерные для контакта сложнопрофильных тел. Искомая функция контактных давлений приближается суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которых расположены в узлах регу-

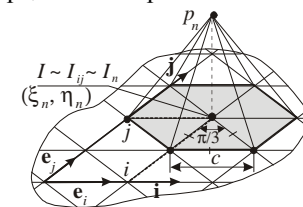


Рисунок 4 – Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

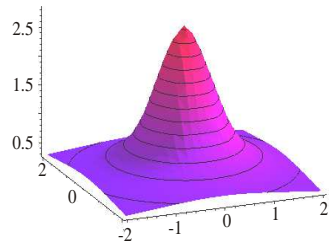


Рисунок 5 – Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 4)

онный метод (принцип Калькера), в рамках которого за действительные принимаются узловые значения контактных давлений, минимизирующие функционал энергии [19]. Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (3) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений  $u_z$ , отвечающих каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (см. рис. 4) в силу их однородности достаточно вычислить значения поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} c \sum_m w(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m), \quad (4)$$

где  $S = \bigcup_m S_m$ ;  $S_m$  – шестиугольная область пирамидального элемента с вершиной в узле  $(\xi_m, \eta_m)$ ;  $S^{(1)}$  – шестиугольная область с единичными сторонами;  $\hat{p}^{(1)}$  – единичное пирамидальное распределение на ней, а

$$w(x, y) = \sum_m \iint_{S^{(1)}} [\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta \quad (5)$$

является „шаблоном” формы распределения перемещений для единичного пирамидального элемента (см. рис. 4). Простой алгоритм вычисления значений этой функции как в отдельных точках [1], так и во всей плоскости [18], изложен в диссертации [9].

Следует отметить, что все приведенные выше соотношения являются точными, а поэтому получаемые описанным выше способом значения „шаблона”  $w(x, y)$  также будут точными. Однако при численной реализации данного алгоритма область его применимости ограничена. При определении формы перемещений (5) в точках, расположенных далеко от единичного элемента, его вычисление связано с выполнением большого числа операций сложения величин разного знака с близкими абсолютными значениями, что приводит к возникновению численной погрешности. В этом случае, начиная с некоторой величины удаления, пирамидальную нагрузку можно заменить сосредоточенной и принять соответствующее

лярной сетки шага  $c$ , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4, 5), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давлений  $p_n$ :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n.$$

Для нахождения величин усилий в узлах сетки, наилучшим способом удовлетворяющих граничным условиям, применимы два следующих подхода: прямой метод (или метод коллокаций), в котором система разрешающих соотношений получается путем записи условий (5) для заданного набора точек коллокации [17, 18]; вариационный метод (принцип Калькера), в рамках которого за действительные принимаются узловые значения контактных давлений, минимизирующие функционал энергии [19]. Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (3) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений  $u_z$ , отвечающих каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (см. рис. 4) в силу их однородности достаточно вычислить значения поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

ей значение интеграла (5) за окончательный результат.

Любой подход к непосредственному решению контактной задачи предполагает вычисление перемещений под действием представленной узловыми значениями нагрузки в заданном конечном числе точек. Если это множество имеет некоторый регулярный порядок, как, к примеру, множество узлов сетки элементов давления, изображенной на рис. 4, то процедуру вычисления узловых значений перемещений можно упростить, снизив вычислительные затраты.

Продemonстрируем эту возможность в случае, когда для перемещений и контактных давлений используется общая регулярная треугольная сетка. Для обозначения ее узлов будем применять как сплошную индексацию  $\{I_n\}_{n=1}^N$ , так и специальную систему отсчета. За ее начало возьмем точку  $O$ , которая обычно является узлом сетки. Оси этой системы направлены вдоль двух ортов  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$ , угол между которыми составляет  $\pi/3$  (см. рис. 4). В этом случае любому узлу сетки можно поставить в соответствие целочисленные координаты-индексы  $(i, j)$  так, что его радиус-вектор будет вычисляться как  $\mathbf{r}_j = c(\mathbf{e}_i \cdot i + \mathbf{e}_j \cdot j) \Leftrightarrow J \sim J_{ij}$ . Используя эту индексацию, можем переписать равенство (4) для узловых точек:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) = u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w\left(\frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c}\right) \cdot p_{kl} = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i-k, j-l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m, \end{aligned} \quad (6)$$

отражающее то, как вычисляется матрица коэффициентов влияния  $C$ , связывающая узловые значения перемещений с узловыми значениями контактных давлений. Из этой записи также видно, как по узловым значениям „шаблона” (5) на единичной сетке (для которой  $c = 1$ ) определяются коэффициенты влияния для сеток с другими размерами ячейки  $c$ . Значение коэффициента  $w((x_{ij} - \xi_{kl})/c, (y_{ij} - \eta_{kl})/c)$  для двух узлов  $J_{ij}$  и  $J_{kl}$  определяется только их относительным расположением, и, соответственно, разницей индексов  $i, k$  и  $j, l$ . Таким образом, достаточно вычислить значение „шаблона” (5) для одного единичного пирамидального элемента в узлах отмасштабированной сетки  $J_{i'j'} : \mathbf{r}_{J_{i'j'}} = c(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j') \rightarrow w_{i'j'} = w(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j')$ , а по ним уже определяются коэффициенты влияния  $C_{nm}$  для действительной сетки

$$C_{nm} = c(\pi E^*)^{-1} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)). \quad (7)$$

К достоинствам вычисления коэффициента влияния по „шаблону”, предложенному в работе, относится то, что достаточно один раз для всех приложений вычислить и сохранить матрицу  $w$  достаточных размеров, а в дальнейшем для используемых сеток различных размеров и густоты необходимо будет только сформировать матрицу коэффициентов влияния без проведения сложных вычислительных операций.

*Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих*

гладких тел состоит в том, что условия контакта записываются для конечного числа точек. В результате формируется система соотношений, позволяющая найти узловые значения контактных давлений, которые им удовлетворяют [17]. Выбор точек локализации и способ приближенной записи различных условий при этом являются довольно субъективными. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов коллокации позволяет применить для записи соотношений метода выражения (1), согласно которым условия контакта в узлах сетки принимают вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (8)$$

где  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – суммарное сближение;  $h_n = h(x_n, y_n)$  – узловые значения первоначального зазора.

Другим условием является неотрицательность давлений, что накладывает на искомые узловые значения ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (9)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (10)$$

В условия (1) и их дискретную запись (8) входит сближение тел  $\delta$ , которое в большинстве задач является неизвестным. Возникающую в связи с этим неопределенность можно исключить, добавив в систему разрешающих соотношений уравнение, в котором присутствует величина действующего прижимающего усилия  $P$ . Чаще всего бывает заданным именно оно. Это уравнение получаем интегрированием по элементам кусочно-линейно представленного давления:

$$\sum_m \sqrt{3}c^2 p_m / 2 = P. \quad (11)$$

Система соотношений (8)-(11) на практике всегда разрешается единственным образом относительно неизвестных  $\{p_m\}_{m=1}^N$  и  $\delta$ . При их определении наибольшей трудностью является то, что форма и размеры области контакта обычно неизвестны. Поэтому для начала необходимо сделать предположения относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и делают начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают истинную область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значения контактных давлений. На каждом ее шаге имеется множество  $N_c$ , состоящее из индексов  $n_c$  узлов, предположительно входящих в контакт. Для них должны выполняться уравнения из системы (8), а также равенство (11):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3}c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \quad (12)$$

Последнее равенство в системе (12) записано с учетом условия (10):  $p_m = 0, m \notin N_c$ . Соотношения (12) образуют систему из  $(N_c + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния  $C_{nm}$  и весовых множителей из равенства (11). Система (12) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения  $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$  могут оказаться нарушающими условие (9), что будет означать, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества  $N_c$ , и производится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на некотором шаге не будет получено множество индексов  $N_c$ , для которого решение системы (12) даст неотрицательное давление в зоне контакта, а также выполняется проверка на выполнение еще одного типа условий, представленного в (8) в дополнение к (9) и (10). Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой. Точность результата при этом определяется размером ячейки  $s$ .

*Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта.* В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (1) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера [20], а также Дюво и Лионса [21-23] устанавливают общий принцип, определяющий существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, приводимых в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы  $U$  в пространстве возможных перемещений, удовлетворяющих условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой имеется соотношение (2), выражающее перемещение точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется более удобным принять в качестве варьируемой функции распределение контактных давлений. В этом случае необходимо воспользоваться отличным от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером [9]. Согласно ему для истинных области контакта и давления, действующего в сопряжении тел, достигается минимум полной дополнительной работы  $\Phi$  среди всех возможных неотрицательных распределений  $p$ . Вид функционала для рассматриваемой задачи и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлены ниже:

$$\left\{ \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \right. \quad (13)$$

Здесь  $S$  – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактных давлений должны иметь ограниченные

носители). С учетом соотношения (3) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, зависящим от одной лишь неизвестной функции давления  $p$ . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (13) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значение минимизируемого функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями  $p$  на регулярной треугольной сетке. В этом случае  $S$  либо точно, либо приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом принимает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления  $p_n$ . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную формулу с узлами, совпадающими с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \left[ (\sqrt{3}c^2)/2 \right] \sum_i f_i g_i, \quad (14)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, являющейся приближением (13), (14):

$$\left\{ \Phi_n \left( \{p_n\}_{n=1}^N \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; p_m \geq 0, m = 1, N. \right. \quad (15)$$

Примечательно, что узловые значения  $\{p_n\}_{n=1}^N$ , получаемые как решение (15), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (8)-(10). В этом случае имеется эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это справедливо лишь при использовании формулы (14) для вычисления интегралов в (13), что не является обязательным.

Преимуществами вариационного подхода являются наличие условий, единственным образом определяющих форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального оправдания применения метода коллокаций.

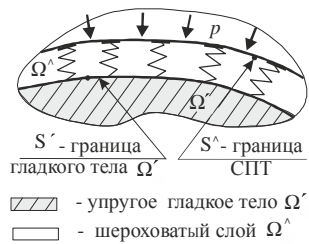


Рисунок 6 – Модель шероховатого сложнопрофильного упругого тела

*Модель контакта шероховатых тел.* Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие сложнопрофильных тел применима в первом приближении модель упругого слоя, жесткостные свойства которого эквивалентны в некотором смысле свойствам шероховатого поверхностного слоя. Тогда исследуемое тело  $\Omega$  состоит из двух частей:  $\Omega^z$  – гладкое упругое тело и  $\Omega^w$  – покрывающий его шероховатый слой (рис. 6).

При этом между перемещениями точек  $u_z^z$  поверхности  $S^z$ , участвующих в описании условий контактного взаимодействия, перемещения

ми гладкого тела  $u_z^z$  и шероховатого слоя  $u_z^w$  существует зависимость

$$u_z^w = u_z^z + u_z^{\wedge}. \quad (16)$$

Здесь  $u_z^z$  выражается через интегральное соотношение (2). Перемещение же  $u_z^w$  описывается соответствующей моделью для шероховатого слоя. Различные аналитические модели контактного слоя рассмотрены в [1, 27]. Из простых моделей можно выделить основание Винклера [24, 25]:

$$u_z^{\wedge} = \lambda p, \quad (17)$$

где  $\lambda$  – податливость слоя (или слоев), зависящая от свойств материала и качества обработки материала поверхностного слоя исследуемого тела. Модель (17) является достаточно упрощенным вариантом более адекватных и точных зависимостей (например, степенных) между перемещениями и давлениями в шероховатом слое. В то же время даже в таком упрощенном виде она вносит качественное изменение в систему взаимодействующих тел, вводя дополнительные элементы в нее. Соответственно, этим данная упрощенная модель и ценна, в связи с чем использована в дальнейших исследованиях.

Учитывая малую толщину слоя  $\Omega^w$ , в дальнейших соотношениях координаты  $x, y$  (см. рис. 1) точек поверхностей  $S^z, S^w$  отождествляются. В то же время в кинематических соотношениях контакта происходит замена  $u_z^z$  на  $u_z^w$ . В силу этого все приведенные выше соотношения для описания контакта гладких тел остаются по форме такими же, за исключением внесения в матрицу коэффициентов влияния  $C^{\Sigma}$  дополнительных слагаемых, расположенных на главной ее диагонали:

$$\begin{aligned} \sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta &= 0, \text{ узел } J_n \text{ – в контакте;} \\ \sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta &> 0, \text{ узел } J_n \text{ – вне зоны контакта,} \end{aligned} \quad (18)$$

где коэффициенты матрицы влияния

$$C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}. \quad (19)$$

Здесь  $C_{nm}$  – коэффициенты матрицы податливости, определяемые ранее приведенными соотношениями (7);  $\lambda$  – суммарная податливость шероховатых слоев в сопряжении шероховатых тел;  $\delta_{nm} = \{1, \text{ если } n = m; 0, \text{ если } m \neq n\}$  – символ Кронекера. Добавление к диагональным элементам исходной матрицы податливости положительных слагаемых сохраняет ее положительную определенность.

Тогда результирующие разрешающие соотношения по структуре аналогичны соотношениям для гладких тел, однако привнесены дополнительные компоненты от специально введенного упругого основания Винклера. Эффект от введения этого слоя зависит от соотношения податливости этого слоя, моделирующего шероховатость, и гладкого упругого тела, которое этот слой покрывает. Если

$$\lambda \ll \|C\|, \quad (20)$$

где  $\|C\|$  – норма матрицы  $C$ , то результирующая матрица  $C^\Sigma$  состоит из матрицы  $C$ , возмущенной прибавлением малой диагональной матрицы. Следует ожидать, что при этом и распределение контактных давлений, и перемещений будет слабо отличаться от решения для гладких тел. Если отвлечься от влияния изменения области актуального контакта при изменении  $\lambda$ , то, учитывая, что матрица  $C$ , которая участвует в формировании разрешающих соотношений, может быть представлена в виде:

$$C^\Sigma = C + \lambda E, \quad (21)$$

где  $E$  – единичная матрица, это обстоятельство можно использовать для оценки возмущенного по малому параметру  $\lambda$  решения. При формировании искомого решения участвует обратная к (21) матрица

$$K(\lambda) \approx C^{-1} \left( E - \lambda C^{-1} \right). \quad (22)$$

Таким образом, решение (то есть узловые значения контактных давлений  $p$ ) ожидаемо примерно линейно зависят от податливости  $\lambda$ .

В другом крайнем случае, когда  $\lambda \gg \|C\|$ , можно аналогично оценить решение, возмущенное теперь уже по малому параметру  $1/\lambda$

$$K(\lambda) \approx \frac{1}{\lambda} E \left( E - \frac{1}{\lambda} C \right). \quad (23)$$

Таким образом, решение в данном случае содержит в качестве малого линейного слагаемого компоненту, пропорциональную распределению перемещений в гладком теле под действием распределения контактного давления, возникающего между жесткими телами.

В случаях, когда величина перемещений вследствие деформирования слоя Винклера, моделирующего шероховатость  $\Omega^\wedge$ , соизмерима с перемещениями гладкого упругого тела  $\Omega'$  (см. рис. 6), характер поведения решения в зависимости от  $\lambda$  можно выявить только путем численного решения полной системы разрешающих уравнений при варьировании  $\lambda$ .

Что касается остальных разрешающих соотношений (т. е. условия неотрицательных узловых контактных давлений и равенство их суммы интегральному усилию, прикладываемому к взаимодействующим телам), то они остаются такими же, как и для случая контакта гладких тел.

Общая система уравнений для точек в зоне контакта из уравнения (12):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c}^\Sigma p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{array} \right. \quad (24)$$

Для точек внутри области контакта, как отмечалось, остаются справедливыми соотношения (24), а для точек вне области контакта – (10) и второе из соотношений (18). Аналогичной случаю контакта гладких тел остается и процедура итерационного уточнения области контакта и распределения контактных давлений [26-29].

**Заключение.** В работе содержится новая постановка задачи анализа контакт-

ного взаимодействия сложнопрофильных тел. Во многих практически важных случаях эта задача сводится к моделированию контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел по поверхностям несогласованной формы с первоначально точечным контактом. Для решения задачи могут быть привлечены различные методы, в частности модель Герца и метод конечных элементов. Для преодоления их недостатков в работе предложена модификация метода граничных элементов к моделированию контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Основными элементами новизны является удобный, легко алгоритмизируемый способ аналитического определения коэффициентов разрешающей системы уравнений, экономный способ их вычисления и хранения за счет использования свойств симметрии и регулярности.

Анализ полученных результатов дает основание для следующих выводов.

1. В работе описан новый вариант метода граничных интегральных уравнений, модифицированный для моделирования контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Он отличается от традиционных формулировок точным вычислением матрицы и правых частей разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, ускоренными способами вычисления и экономным хранением коэффициентов матрицы влияния за счет использования свойств симметрии и регулярности сетки дискретизации.

2. Для поиска области контактного взаимодействия предложена итерационная процедура ее уточнения путем пошагового удовлетворения искомыми контактными давлениями системы разрешающих уравнений и неравенств.

3. Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие упругих тел предлагается вводить на поверхности тела упругое основание Винклера с характеристиками податливости, соответствующими свойствам поверхностного слоя реальных шероховатых тел.

4. Разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия шероховатых тел аналогичны таковым для случая контакта гладких тел, за исключением введения в матрицу влияния дополнительных диагональных членов, пропорциональных податливости винклера слоя, моделирующего шероховатость.

5. Для случаев малых и больших податливостей винклера слоя приведена оценка для возмущения матрицы, обратной матрице податливости.

6. Предложенный в работе подход дает возможность для случая контакта шероховатых тел объединять характеристики "глобальной" (т.е. описывающей перемещения точек поверхности гладкого упругого полупространства как суперпозицию его реакции на действие контактного давления, распределенного по всей контактной площадке) и "локальной" (т.е. определяющей зависимость перемещений поверхности контакта только лишь от контактного давления в той же точке контактной площадки) податливостей. Это соответствует суперпозиции ядер соответствующих граничных интегральных уравнений [1]. При этом в общем случае решение этого уравнения нельзя представить в виде суммы решений, соответствующих каждому из ядер – его нужно решать совместно.

7. Из физических соображений можно заключить, что решение контактной задачи для шероховатых тел имеет в некотором смысле смешанный характер, сочетающая в картине распределения контактных давлений свойства, присущие случаям контакта гладких тел, с одной стороны, и жестких штампов с упругой прослойкой, – с другой. Для случаев, близких к названным крайним, получены асимптотические оценки поведения решения (см. п.5). При этом остается открытым вопрос о транс-

формации распределения контактных давлений при варьировании податливости слоя, имитирующего шероховатость, от нуля до бесконечности.

В комплексе предложенные подходы и соотношения составляют теоретическую основу для решения задач исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных упругих тел. В дальнейшем планируется провести численную реализацию построенной математической модели и применить описанные разработки для решения ряда прикладных задач.

**Список литературы.** 1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 2. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 3. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах / Под общей ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. 4. Стренг Э., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с. 5. Francavilla A. A note on numerical computation of elastic contact problems / A. Francavilla, O.C. Zienkiewicz // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1975. – Vol. 9. – P.913-924. 6. Simo J.C. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems // J.C. Simo, P. Wriggers, R.L. Taylor // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – Vol. 50. – P.163-180. 7. McDevitt T.W. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems / T.W. McDevitt, T.A. Laursen // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Vol. 48. – P.1525-1547. 8. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier / B.I. Wohlmuth // SIAM, Journal of Numerical Analysis. – 2000. – Vol. 38. – P. 989-1012. 9. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дисс... канд. техн. наук: спец. 05.02.09. – Харьков, 2011. – 203 с. 10. Ткачук А.Н., Мовшиович И.Я., Ткачук Н.А. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2009. – № 12. – С. 25-32. 11. Ткачук А.Н., Мовшиович И.Я., Ткачук Н.А. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм (продолжение) // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2010. – № 1. – С. 19-28. 12. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством // КШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт“, 2012. – №10. – С. 11–17. 13. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с. 14. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – М.: Физматлит, 2004. – 304 с. 15. Бабеико В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах // Докл. АН СССР, 1981. – Т. 257, № 2. – С. 289-294. 16. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с. 17. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с. 18. Li J. A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction / J. Li, E.J. Berger // Computational Mechanics. – 2003. – Vol. 30. – P. 310-322. 19. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – 199-219 p. 20. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. – М.: Мир, 1974. – 159 с. 21. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с. 22. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256 с. 23. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с. 24. Решетов Д.Н., Портман В.Г. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с. 25. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 228 с. 26. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза // Механика и машиностроение. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2011. – №2. – С. 75-86. 27. Ciavarella M. On the elastic contact of rough surfaces: Numerical experiments and comparisons with recent theories / M. Ciavarella, C. Murolo, G. Demelio // Wear. – 2006. Vol. 261. – 1102-1113 p. 28. Vollebregt E.A.H. 100-Fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT". // In W. Zhang, editor, Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Chengdu, P.R. China – 2012. 29. Galin L.A., Gladwell G.M.L. Contact Problems: The legacy of L.A. Galin // Springer – Solid mechanics and its applications – 2008. v. 155. – 318 pp.

Поступила в редколлегию 26.05.14

УДК 539.3

Модели и разрешающие соотношения для анализа контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов / Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, А.В. Ткачук, В.И. Головченко / Вісник НТУ "ХПИ". Серія: Машинознавство та САПР. – Х.: НТУ "ХПИ". – 2014. – № 29 (1072). С.158-171. – Бібліогр.: 29 назв. ISSN 2079-0075.

У статті запропоновано підходи до розв'язання задачі про контактну взаємодію гладких і шерстких тіл. Задача зводиться до граничного інтегрального рівняння. Дискретизація шуканого контактного тиску здійснена за допомогою методу граничних елементів. Вплив шерсткості моделюється за допомогою пружної основи Вінклера. Отримані асимптотичні оцінки для визначення впливу податливості шару на контактний тиск.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, контактний тиск, інтегральне рівняння, метод граничних елементів, шерсткість, напружено-деформований стан, податливість

The paper suggests approaches to task solving of contact interaction of smooth and rough bodies. The problem is reduced to a boundary integral equation. Discretization of desired contact pressure performed using boundary element method. The effect of roughness is modeled by Winkler elastic foundation. Asymptotic estimates are received to determine an effect of layer's ductility on contact pressure.

**Keywords:** contact interaction, contact pressure, integral equation, boundary element method, roughness, stress-strain state, ductility