МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
Частина ІІ.
Магнетизм"

з курсу "Загальна фізика"

Харків 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.
Частина II.
Магнетизм"

з курсу "Загальна фізика"

для студентів усіх спеціальностей
та усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 28.12.2009

Харків НТУ "ХПІ" 2010

Методичні вказівки до розв'язання задач за темою "Електромагнетизм. Частина II. Магнетизм" з курсу "Загальна фізика" для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання / Уклад.: Бурлакова М.В., Ветчинкіна З.К., Дзюбенко Н.І., Лєдєньов В.В., Любченко О.А., Тавріна Т.В. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – 76 с.

Укладачі: М.В. Бурлакова,
З.К. Ветчинкіна,
Н.І. Дзюбенко,
В.В. Лєдєньов,
О.А. Любченко,
Т.В. Тавріна

Рецензент Н.Б. Фат'янова

Кафедра теоретичної та експериментальної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки мають на меті допомогти студентам засвоїти теоретичний матеріал та знайти підходи до розв’язання типових задач та завдань підвищеної складності з тем "Магнетизм" та "Електромагнітні коливання та хвилі".

Широкий за рівнем та тематикою спектр задач дозволяє використовувати їх студентами усіх спеціальностей та усіх форм навчання.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. МАГНЕТИЗМ

Закон Біо – Савара – Лапласа: вектор магнітної індукції $d\vec{B}$ магнітного поля, створеного елементом провідника $d\vec{l}$, по якому тече струм *I*, в точці, положення якої визначає радіус-вектор $\vec{r}$, дорівнює

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{r^3}\left[d\vec{l},\vec{r}\right], \tag{2.1}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала.

$\left[B\right]$ = Тесла = Тл.

Модуль магнітної індукції

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl\sin\left(d\vec{l}\,\hat{}\,\vec{r}\right)}{r^2}. \tag{2.2}$$

Вектор $d\vec{B}$ завжди нормальний до площини, в якій лежать вектори $d\vec{l}$ та $\vec{r}$, а його напрям можна визначити за правилом правого гвинта (або правилом свердлика).

Правило правого гвинта(свердлика)

- для *прямого* струму: якщо свердлик повертати так, щоб його поступальний рух збігався з напрямом струму *I*, то обертальний рух рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції.

• для колового струму: якщо свердлик повертати так, щоб обертальний рух рукоятки збігався з напрямом струму *I*, то поступальний рух вістря свердлика покаже напрям ліній магнітної індукції.

Величина магнітної індукції B магнітного поля, створеного током *I*:

• в *центрі колового струму* радіусом *R* (рис. 2.1, *а*):

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R}; \tag{2.3}$$

• в *центрі дуги кола* радіусом *R* та завдовжки *L* (рис. 2.1, *б*):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} L; \tag{2.4}$$

• на *осі колового струму* на відстані *z* від площини контуру радіусом *R* (рис. 2.1, *в*):

$$B = \mu_0 \frac{IR^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}; \tag{2.5}$$

• в точці на відстані *b* від *нескінченно довгого прямолінійного провідника* (рис. 2.1, *г*):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{b} = \mu_0 \frac{I}{2\pi b}; \tag{2.6}$$

• в точці на відстані *b* від *прямолінійного провідника обмеженої довжини* в залежності від кутів, що розглядаються (рис. 2.1, *д*) або (рис. 2.1, *е*):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right);$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right); \tag{2.7}$$

• на осі *довгого соленоїда* завдовжки *l*, що складається з *N* витків (рис. 2.1, *ж*):

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l} = \mu_0 nI, \tag{2.8}$$

де $n = N/l$ – число витків на одиниці довжини соленоїда; IN – кількість ампер-витків;

- на осі *соленоїда обмеженої довжини* (рис. 2.1, *з*):

$$B=\mu_0\frac{nI}{2}\left(\cos\beta_1-\cos\beta_2\right), \tag{2.9}$$

де n – число витків на одиниці довжини соленоїда; β_1 та β_2 – кути між віссю соленоїда та радіусами-векторами, проведеними з даної точки на осі до кінців соленоїда.

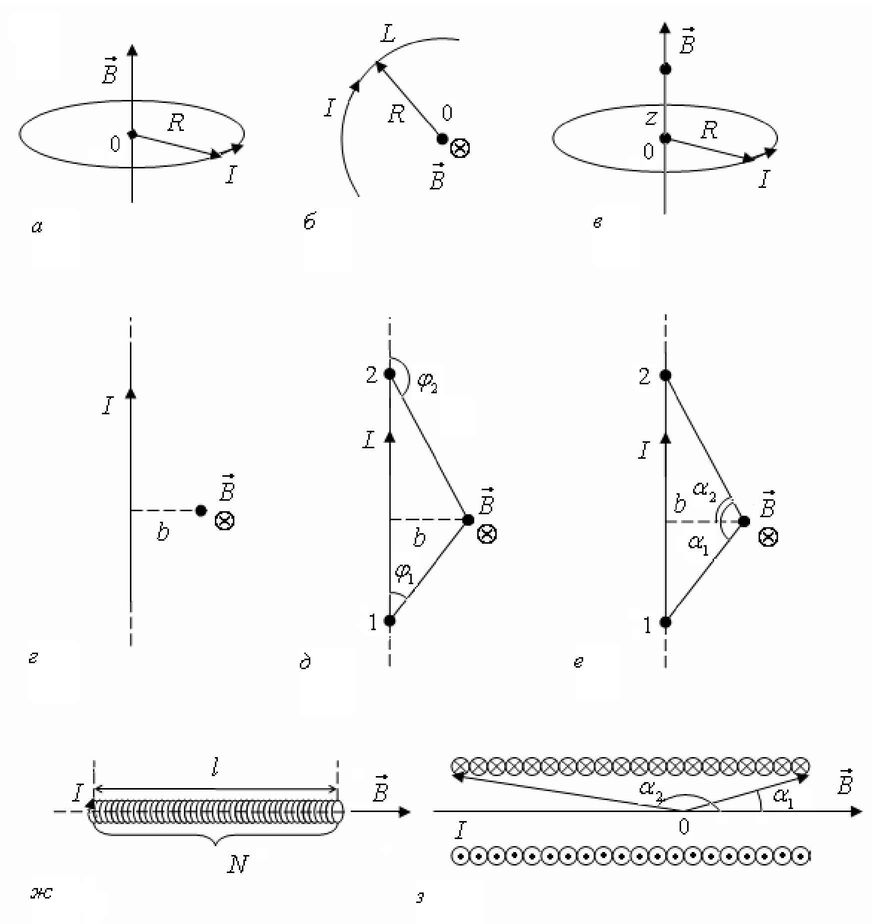

Рис. 2.1

Якщо магнітне поле створене декількома провідниками із струмами, то вектор $\vec{B}$ у будь-якій точці цього поля згідно із *принципом суперпозиції* дорівнює векторній сумі магнітних індукцій полів, створених в цій точці кожним струмом окремо:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \,, \tag{2.10}$$

де n – число провідників із струмом.

Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції $\vec{B}$:

$$\oint \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = B \cdot dl \cdot \cos\left(\vec{B} \wedge d\vec{l}\right) = \mu_0 \sum I \,. \tag{2.11}$$

При цьому важливо, аби через точку, в якій потрібно визначити магнітну індукцію, можна було провести замкнутий контур *L*, співпадаючий із лінією індукції поля, для всіх точок якого виконувалося би відношення $\vec{B} = \text{const}$. В цьому випадку для всіх елементів контуру $\cos\left(\vec{B} \wedge d\vec{l}\right) = 1$, а рівняння (2.11) набуває простого вигляду:

$$BL = \mu_0 \sum I \,. \tag{2.12}$$

Закон Ампера: на елемент $d\vec{l}$ провідника із струмом *I,* що знаходиться у магнітному полі $\vec{B}$, діє *сила Ампера*

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{2.13}$$

модуль якої

$$dF = IBdl \sin\alpha \,, \tag{2.14}$$

де α – кут між напрямком провідника та напрямком магнітного поля.

Напрямок сили Ампера визначається за *правилом лівої руки* (рис. 2.2): якщо розташувати ліву долоню так, щоб витягнуті пальці збігалися з напрямком струму, а силові лінії магнітного поля входили в долоню, то відставлений великий палець вкаже напрямок сили, що діє на провідник.

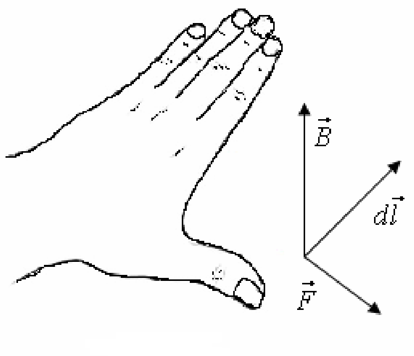

Рис. 2.2

Сила взаємодії між двома паралельними нескінченно довгими прямолінійними провідниками із струмами I_1 та I_2, що припадає на одиницю їх довжини, якщо вони знаходяться на відстані d один від одного в середовищі з магнітною проникністю μ:

$$F_l = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d}. \tag{2.15}$$

Магнітним моментом $\vec{p}_m$ замкнутого плоского контуру зі струмом називається векторна фізична величина в напрямі додатної нормалі $\vec{n}$, яка вимірюється добутком величини струму I в контурі на площу S, яку охоплює цей контур,

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}. \tag{2.16}$$

Механічний момент $\vec{M}$, що діє на замкнутий контур зі струмом в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, та його модуль:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right], \quad M = p_m B \sin\alpha, \tag{2.17}$$

де α – кут між напрямами магнітної індукції та нормаллю до контуру із струмом.

Магнітна індукція – силова (векторна) характеристика магнітного поля. Напрямок вектора магнітної індукції збігається з напрямком нормалі до рамки зі струмом у її положення стійкої рівноваги в магнітному полі, а модуль визначається відношенням максимального моменту сил, що діють на рамку (контур) з боку магнітного поля, до величини магнітного моменту цього контуру:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}. \tag{2.18}$$

Елементарний потік вектора магнітної індукції через елементарну площинку $d\vec{S}$:

$$d\Phi = \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = B \cdot dS \cdot \cos\alpha. \tag{2.19}$$

Потік вектора магнітної індукції через поверхню площею S

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \, . \qquad (2.20)$$

$[\Phi]$ = Вебер = Вб.

Елементарна робота переміщення провідника зі струмом I в магнітному полі

$$dA = I \cdot d\Phi \, , \qquad (2.21)$$

де $d\Phi$ – приріст магнітного потоку, що перетинається провідником під час руху.

Сила Лоренца діє на частинку с зарядом q, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ у магнітному полі:

$$\vec{F}_{\text{л}} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]. \qquad (2.22)$$

Модуль сили Лоренца

$$F_{л} = qvB\sin\alpha \, . \qquad (2.23)$$

Треба зазначити, що силою Лоренца взагалі називають силу $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, що діє на заряджену частинку в *електромагнітному* полі і складається з двох складових: електричної ($\vec{F}_e = q\vec{E}$) та магнітної ($\vec{F}_m$). В цьому розділі ми будемо називати силою Лоренца саме магнітну складову $\vec{F}_m = \vec{F}_{\text{л}}$.

Сила Лоренца спрямована перпендикулярно площині, в якій лежать вектори $\vec{v}$ та $\vec{B}$. Якщо заряд q позитивний, напрямок сили збігається із напрямком вектора, що є результатом векторного добутку, а якщо заряд q негативний, то сила спрямована у протилежний бік. До того ж, оскільки сила Лоренца перпендикулярна швидкості, то вона не здійснює роботи по зміні швидкості зарядженої частинки.

Вектор $\vec{H}$, який часто називають *напруженістю магнітного поля*, зв'язаний з магнітною індукцією та намагніченістю речовини (магнітним моментом одиниці об'єму речовини) $\vec{J} = \sum \vec{p}_m \Big/ \Delta V$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\,. \qquad (2.24)$$

$\left[H\right]$ = Ампер/метр = А/м.

Для однорідного та ізотропного магнетика зв'язок між магнітною індукцією та напруженістю магнітного поля є лінійним:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}\ , \qquad (2.25)$$

де μ – безрозмірна величина – *магнітна проникність магнетика*.

Явище електромагнітної індукції: у замкнутому провідному контурі при зміні магнітного потоку, що охоплюється даним контуром, виникає електричний струм, який називають *індукційним*.

Правило Ленца: індукційний струм завжди направлений так, щоб протидіяти причині, що його викликає (тобто індукційний струм створює магнітний потік, що перешкоджає зміні магнітного потоку, який викликає *електрорушійну силу (ЕРС) індукції*).

Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}\,, \qquad (2.26)$$

де ε_i – ЕРС індукції (у Вольтах); $\frac{d\Phi}{dt}$ – швидкість зміни магнітного потоку (знак "мінус" у формулі пов'язаний із правилом Ленца).

Потокозчеплення або *повний магнітний потік*

$$\Psi = N \cdot \Phi\,, \qquad (2.27)$$

де N – число витків контуру (котушки), Φ – магнітний потік через один виток.

Самоіндукція – явище виникнення ЕРС індукції в *тому ж* самому контурі, у якому відбувається зміна струму.

ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}, \tag{2.28}$$

де L – *індуктивність.*
[L] = Генрі = Гн.

Індуктивність залежить від форми та розмірів контуру, а також від магнітних властивостей довкілля. Якщо контур жорсткий та поблизу немає феромагнетиків, індуктивність є сталою величиною, що не залежить від сили струму I.

Індуктивність довгого соленоїда

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2S}{l} = \mu\mu_0 n^2 V, \tag{2.29}$$

де $n = N/l$ – число витків на одиниці довжини соленоїда; N – кількість витків; l, S та V – довжина, площа поперечного перерізу та об'єм соленоїду, відповідно (рис. 2.1, *ж*).

Магнітний потік Φ через контур та сила струму I в ньому зв'язані відношенням:

$$\Phi = LI. \tag{2.30}$$

За відсутності феромагнетиків контур з індуктивністю L має енергію

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{2.31}$$

Енергія магнітного поля всередині соленоїду

$$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2 V}{2} = \frac{B^2 V}{2\mu\mu_0}. \tag{2.32}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

На рисунках 2.3 – 2.8 зображені перерізи двох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмами. Відстань між провідниками d = AB = 10 см, струми I_1 *= 20 А,* I_2 *=30 А Визначити магнітну індукцію поля в точках:*

1) M_1 *(рис. 2.3), якщо* M_1A *= 2 см;*

2) M_2 *(рис. 2.4), якщо* AM_2 *= 4 см;*

3) M_3 *(рис. 2.5), якщо* BM_3 *= 3 см;*

4) M_4 *(рис. 2.6), якщо* AM_4*= 6 см та* BM_4 *= 8 см;*

5) M_5 *(рис. 2.7), якщо* $AM_5 = BM_5$ *= 10 см;*

6) Знайти точку M_6 *(рис. 2.8) на прямій АВ, в якій магнітна індукція дорівнює нулю.*

Розв'язання

1) Магнітне поле у точці M_1 згідно з принципом суперпозиції полів (2.10) дорівнює векторній сумі магнітних індукцій тих полів, що створює кожен із струмів незалежно від іншого, тобто

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Індукцію магнітного поля кожного зі струмів будемо шукати, використовуючи закон Біо – Савара – Лапласа (2.1).

Струм I_1 в точці M_1 створює поле, вектор магнітної індукції якого перпендикулярний площині, в якій лежать вектор $d\vec{l}$, що збігається із напрямком дроту, по якому тече струм I_1 , та радіус-вектор $\vec{r}$, що визначає положення точки M_1 відносно елемента $d\vec{l}$.

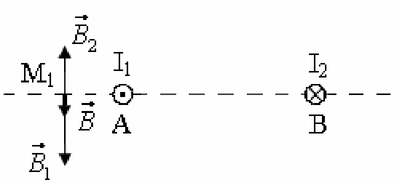

Рис. 2.3

Таким чином, вектор $\vec{B}_1$ є перпендикулярним прямій АВ, а, згідно з правилом правого гвинта, $\vec{B}_1$ спрямований донизу (рис. 2.3).

Модуль вектора магнітної індукції B_1 нескінченно довгого прямого струму I_1 на відстані AM_1 від провідника згідно з (2.6) дорівнює $B_1 = \mu_0 \dfrac{I_1}{2\pi \cdot AM_1}$.

Аналогічно, вектор $\vec{B}_2$ є спрямованим перпендикулярно лінії AB вгору, а його модуль дорівнює $B_2 = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi \cdot BM_1} = \mu_0 \dfrac{I_2}{2\pi \cdot (AM_1 + AB)}$.

Виходячи з того, що вектори $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ спрямовані протилежно, модуль вектора, що є їх векторною сумою, дорівнює

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_1} - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{(AM_1 + AB)} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{20}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{30}{12 \cdot 10^{-2}} \right) = 10^{-7} \cdot 2 \cdot (1000 - 250) = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

2) Подібний розгляд дає змогу розрахувати магнітну індукцію поля $\vec{B}$ в точці M_2. Слід зазначити, що оскільки обидва вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ спрямовані перпендикулярно лінії AB догори (рис. 2.4), то модуль вектора, що є їх векторною сумою, дорівнює сумі модулів B_1 та B_2, а саме:

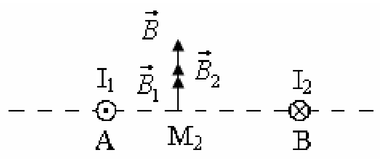

Рис. 2.4

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{(AB - AM_2)} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{20}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{30}{6 \cdot 10^{-2}} \right) = 10^{-7} \cdot 2 \cdot (500 + 500) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

3) В точці M_3 (рис. 2.5) вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ є перпендикулярними лінії AB, причому вектор $\vec{B}_1$ спрямований догори, а $\vec{B}_2$ – донизу, тому модуль їх векторної суми є

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_2}{BM_3} - \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{\left(AB + BM_3\right)} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\cdot\left(\frac{30}{3\cdot 10^{-2}} - \frac{20}{13\cdot 10^{-2}}\right) = 10^{-7}\cdot 2\cdot\left(1000 + 154\right) = 2{,}3\cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

4) Точок, які віддалені на відстань 6 см від точки A і на 8 см від точки B, дві: вони є точками перетину двох кіл, кожне з яких є геометричним місцем точок, рівновіддалених від центрів A і B. Ці точки перетину – вершини трикутників, основою яких є відрізок AB.

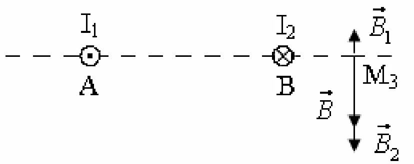

Рис. 2.5

Розглянемо одну з таких точок – M_4, що лежить нижче AB (рис. 2.6). Слід зазначити, що в відповідності до відношення сторін $AB: BM_4: AM_4 = 10:8:6 = 5:4:3$, трикутник ABM_4 є так званим «єгипетським» трикутником, тобто таким, у якого один кут – прямий. Вектор $\vec{B}_1$ спрямований перпендикулярно відрізку AM_4, а $\vec{B}_2$ – відрізку BM_4.

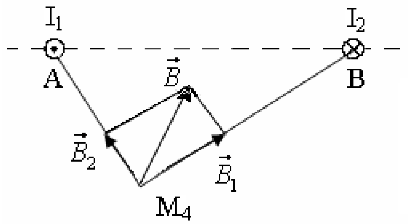

Рис. 2.6

Отже ці вектори утворюють кут 90°, тому модуль вислідного вектора $\vec{B}$ можна знайти за теоремою Піфагора, врахувавши, що $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{AM_4}$ та $B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_2}{BM_4}$:

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{AM_4}\right)^2+\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_2}{BM_4}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\mu_0}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{AM_4}\right)^2+\left(\frac{I_2}{BM_4}\right)^2}=$$

$$=2\cdot 10^{-7}\sqrt{\left(\frac{20}{6\cdot 10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{30}{8\cdot 10^{-2}}\right)^2}=1\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

5) Якщо точка M_5, в якій треба знайти індукцію магнітного поля, віддалена від точки А так само, як і від точки В, причому АВ = AM_5 = BM_5 = 10 см, то ця точка є вершиною рівнобічного трикутника. Взагалі таких точок дві: вище та нижче лінії АВ. Розглянемо одну з них – M_5 (рис. 2.7).

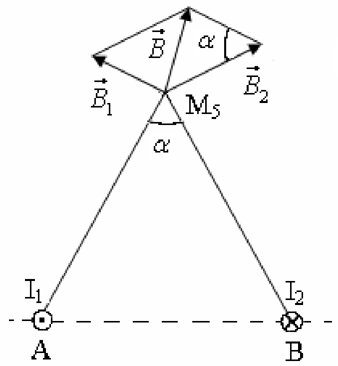

Рис. 2.7

Оскільки вектор $\vec{B}_1$ спрямований перпендикулярно відрізку AM_5, а $\vec{B}_2$ – відрізку BM_5, то гострий кут α у трикутнику індукцій дорівнює куту α при вершині трикутника ABM_5, а саме, $\alpha=60^\circ$.

Модуль вислідного вектору можна знайти за допомогою теореми косинусів:

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2-2B_1B_2\cos\alpha}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{AM_4}\right)^2+\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_2}{BM_4}\right)^2-2\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1}{AM_4}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_2}{BM_4}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\mu_0}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{AM_4}\right)^2+\left(\frac{I_2}{BM_4}\right)^2-2\frac{I_1}{AM_4}\frac{I_2}{BM_4}\cos\alpha}=$$

$$=2\cdot 10^{-7}\sqrt{\left(\frac{20}{10\cdot 10^{-2}}\right)^2+\left(\frac{30}{10\cdot 10^{-2}}\right)^2-2\frac{20}{10\cdot 10^{-2}}\frac{30}{10\cdot 10^{-2}}\cdot\frac{1}{2}}=5,3\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

6) Базуючись на аналізі перших трьох варіантів даної задачі, можна дійти висновку, що точка, в якій індукція магнітного поля дорівнює нулю, лежить зовні відрізку АВ, а саме, з урахуванням величин струмів, лівіше точки А (рис. 2.8). Позначимо $AM_6 = x$. Оскільки $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$, то $B_1 = B_2$. Тоді

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{AM_6} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{BM_6} \text{ та } \frac{I_1}{x} = \frac{I_2}{d+x}.$$

Звідки

$$x = \frac{I_1 d}{I_2 - I_1} = \frac{20 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{30 - 20} = 0,2 \text{ м.}$$

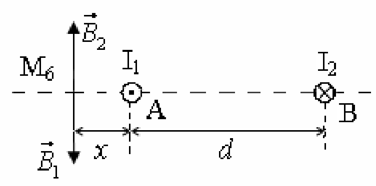

Рис. 2.8

Наприкінці слід зазначити, що у всіх шістьох розглянутих випадках, вислідний вектор $\vec{B}$ згідно із принципом суперпозиції є векторна сума векторів магнітних індукцій тих полів, що створюються кожним із струмом окремо, тобто $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Але в залежності від розташування точки, в якій треба визначити магнітну індукцію, модуль вислідного вектора може бути знайдений як сума, різниця, по теоремі Піфагора, по теоремі косинусів, а також він може дорівнювати нулю.

Задача 2

По плоскому контуру (рис. 2.9) тече струм I = 20 А (R = 0,2 м). Знайти магнітну індукцію в центрі контуру (в точці О).

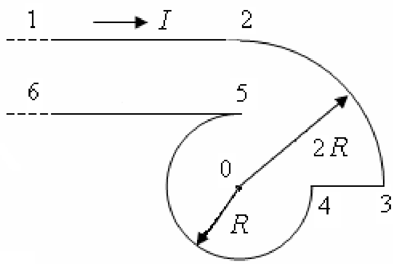

Рис. 2.9

Розв’язання

Поле в точці О згідно із принципом суперпозиції (2.10) є результатом складання полів, створених всіма елементами даного контуру. Тому магнітна індукція в точці О є векторною сумою:

$$\vec{B} = \vec{B}_{12} + \vec{B}_{23} + \vec{B}_{34} + \vec{B}_{45} + \vec{B}_{56}.$$

Визначимо модулі магнітних індукцій для усіх ділянок даного контуру.

Ділянка 12 є напівнескінченим струмом, індукцію від якого можна знайти згідно з (2.7):

$$B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{2R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 2R}\left(\sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 2R}.$$

Ділянка 23 – чверть колового струму, тому згідно з формулою (2.3), та беручі до уваги той факт, що радіус дуги кола дорівнює $2R$, одержуємо

$$B_{23} = \frac{1}{4}\mu_0 \frac{I}{2(2R)} = \mu_0 \frac{I}{16R}.$$

Ділянка 34 – відрізок прямолінійного провідника, продовження якого проходить через точку О, в якій ми шукаємо індукцію, тому

$$\vec{B}_{34} = 0.$$

Ділянка 45 – три чверті колового струму, тому згідно із формулою (2.3):

$$B_{45} = \frac{3}{4} \cdot \mu_0 \frac{I}{2R} = \mu_0 \frac{3I}{8R}.$$

Ділянка 56 є напівнескінченим струмом, індукцію від якого можна знайти по (2.7):

$$B_{56} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R}\left(\sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R}.$$

Напрямки векторів магнітної індукції від усіх ділянок контуру за законом Біо – Савара – Лапласа (як результатів векторних добутків) є перпендикулярними площині аркуша, а за правилом правої руки вектори $\vec{B}_{12}$, $\vec{B}_{23}$ і $\vec{B}_{45}$ спрямовані від нас, а $\vec{B}_{56}$ – на нас. Ці напрями вказані у векторній сумі умовними позначками, а $\vec{B}_{34} = 0$:

$$\vec{B} = \overset{\otimes}{\vec{B}_{12}} + \overset{\otimes}{\vec{B}_{23}} + \cancel{\vec{B}_{34}} + \overset{\otimes}{\vec{B}_{45}} + \overset{\odot}{\vec{B}_{56}}.$$

Виходячи з цього, магнітна індукція в точці О є

$$B=\mu_0\frac{I}{4\pi\cdot 2R}+\mu_0\frac{I}{16R}+\mu_0\frac{3I}{8R}-\mu_0\frac{I}{4\pi\cdot R}=$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}\right)\approx 5\cdot 10^{-5}\text{ Тл.}$$

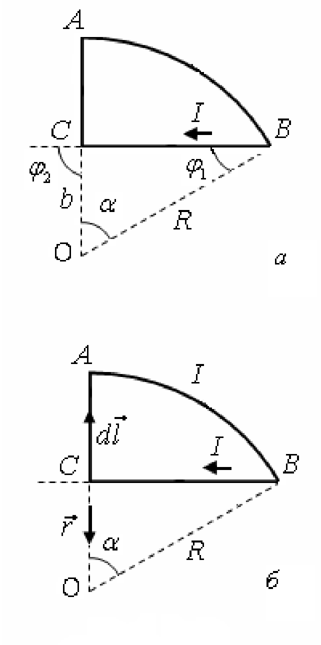

Рис. 2.10

Задача 3

По контуру, зображеному на рис. 2.10, тече струм силою 10 А. Визначить магнітну індукцію в точці О, якщо радіус дуги R = 10 см, α *= 60°.*

Розв'язання

Згідно із принципом суперпозиції (2.10):

$$\vec{B}=\vec{B}_{AB}+\vec{B}_{BC}+\vec{B}_{CA}\,.$$

Знайдемо модулі векторів магнітної індукції усіх трьох доданків.

Ділянка *AB*: кут α = 60°, отже, дуга *AB* складає 1/6 частину кола. Це означає, що індукція поля, створеного дугою *AB*, буде в шість разів менше, ніж для колового струму (2.3):

$$B_{AB}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\mu_0\cdot I}{2R}=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10}{12\cdot 10\cdot 10^{-2}}=1{,}05\cdot 10^{-5}\text{ Тл.}$$

Ділянка *BC* є провідником скінченої довжини, отже, для визначення магнітної індукції треба застосовувати формулу (2.7):

$$B_{BC}=\frac{\mu_0\cdot I}{4\pi\cdot b}\left(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right).$$

З рис. 2.10, *а*: φ_1 = 30°, φ_2 = 90°, $b=\mathrm{OC}=R\cos 30°=R/2$.

$$B_{BC}=\frac{\mu_0 2I}{4\pi\cdot R}\cdot\cos 30°=\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10\cdot\sqrt{3}}{4\pi\cdot 10^{-1}}=1{,}73\cdot 10^{-5}\text{ Тл.}$$

Ділянка CA (рис. 2.10, *б*): згідно із законом Біо – Савара – Лапласа $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\left(d\vec{l}\,^\wedge\vec{r}\right)}{r^2}$ кожен елемент провідника $d\vec{l}$ ділянки CA в точці O, що лежить на продовженні CA, не створює магнітного поля, оскільки $\sin\left(d\vec{l}\cdot\vec{r}\right) = 0$ або 180°. Таким чином, B_{CA} = 0.

Остаточно,

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}.$$

Згідно із правилом правого гвинта вектор $\vec{B}_{AB}$ буде спрямованим перпендикулярно площині креслення від спостерігача, а вектор $\vec{B}_{BC}$ – до спостерігача.

Модуль вислідного вектора магнітної індукції магнітного поля від контуру $ABCA$ становить

$$B = B_{BC} - B_{AB} = 1,73\cdot10^{5} - 1,05\cdot10^{-5} = 6,8\cdot10^{-6} \text{ Тл.}$$

Таким чином, вектор магнітної індукції, модуль якого дорівнює $B = 6,8\cdot10^{-6}$ Тл, в точці O спрямований до спостерігача.

Задача 4

По плоскому провіднику (рис. 2.11) тече струм. Знайти напрям магнітного поля в довільній точці лінії AB, що є віссю симетрії провідника.

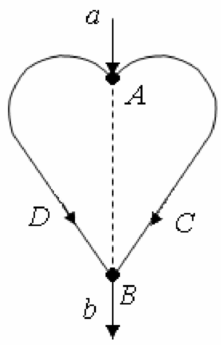

Рис. 2.11

Розв'язання

В довільній точці лінії AB (рис. 2.11) будь-який нескінченно малий елемент провідника ACB створює магнітне поле, магнітна індукція якого $d\vec{B}_{ACB}$ є перпендикулярною площині рисунку і спрямована на нас. Симетричний йому елемент провідника ADB створює поле, магнітна індукція $d\vec{B}_{ADB}$

якого за модулем дорівнює модулю $d\vec{B}_{ACB}$, але спрямована у протилежний бік.

Тому поле у будь-якій точці лінії *AB*, створене усім провідником, дорівнює нулю, оскільки прямолінійні ділянки *a* та *b* провідника також не створюють поля на осі *AB* (дивись пояснення до задачі 3).

Задача 5

Алюмінієвий стрижень завдовжки l=20 см та площею поперечного перерізу S_0 = 70 мм^2 підвішений горизонтально в однорідному магнітному полі, індукція якого B = 5 мТл.

1) Якщо вектор індукції магнітного поля направлений горизонтально та перпендикулярно провіднику, то яку різницю потенціалів U треба прикласти, щоб одна з ниток розірвалася? Нитка рветься при навантаженні T= 0,4 Н.

2) Якщо вектор індукції магнітного поля направлений вертикально та перпендикулярно провіднику, то на який максимальний кут відхиляться нитки зі стрижнем?

Розв'язання

1) У стані рівноваги (рис. 2.12, *а*), коли до провідника не прикладена різниця потенціалів, на нього діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та сили натягу ниток T_{01} та T_{02}:

$$m\vec{g} + \vec{T}_{01} + \vec{T}_{02} = 0 .$$

Коли по провіднику потече струм *I*, як наслідок підключеної напруги *U*, до цих сил додається ще сила Ампера (2.13) (рис. 2.12, *б*), напрямок якої залежить від напрямків магнітного поля та струму:

$$m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_A = 0 .$$

Використавши правило лівої руки, можна визначити напрямок протікання струму, при якому сила тяжіння та сила Ампера направлені донизу. У цьому випадку:

$$mg + F_A = T_1 + T_2 .$$

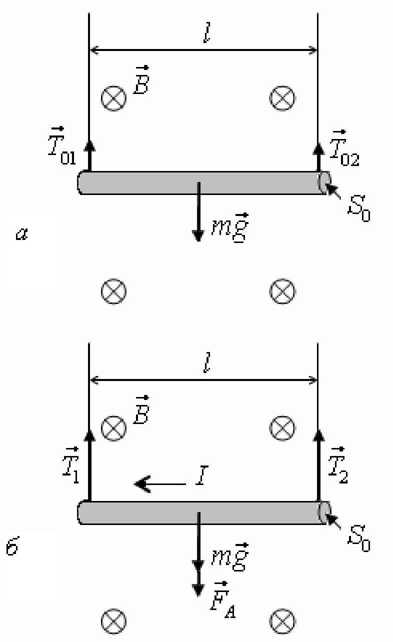

Рис. 2.12

Враховуючи, що маса стрижня $m = \rho_{\text{ал}} V = \rho_{\text{ал}} S_0 l$, сила тяжіння становить $mg = \rho_{ал} Vg = \rho_{ал} S_0 lg$, де $\rho_{\text{ал}} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3 – густина алюмінію, l та S_0 – довжина та площа поперечного перерізу стрижня, відповідно.

Модуль сили Ампера (2.14) дорівнює $F_A = IlB \sin\alpha = IlB$, враховуючи, що за умов задачі $\sin\alpha = \sin 90° = 1$.

Сили натягу ниток однакові $T_1 = T_2$, а їх сума в момент розриву $T_1 + T_2 = 2T$.

Тоді

$$\rho_{\text{ал}} S_0 lg + IlB = 2T ,$$

звідки

$$I = \frac{2T + \rho_{\text{ал}} S_0 lg}{lB} = \frac{2 \cdot 0,4 + 2,7 \cdot 10^3 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 \cdot 9,8}{0,2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 11,7 \text{ А}.$$

Для того, що знайти різницю потенціалів, використаємо закон Ома, взявши до уваги, що питомий опір алюмінію $\rho_{Al} = 2,5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м:

$$U = IR = I \rho_{Al} \frac{l}{S_0} = \frac{11,7 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2}{70 \cdot 10^{-6}} = 8,36 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

2) Якщо магнітне поле спрямоване вертикально догори, а струм по провіднику тече «від нас», то сила Ампера змушує стрижень відхилятися вправо на кут α (рис. 2.13). Згідно з другим законом Ньютона:

$$m\vec{g} + 2\vec{T} + \vec{F}_A = 0 .$$

Спроектуємо сили на обрані осі *x* та *y*:

$$\begin{cases} -2T\sin\alpha + F_A = 0, \\ 2T\cos\alpha - mg = 0. \end{cases}$$

Сила Ампера $F_A = IlB\sin\alpha = IlB$

(оскільки $\sin\alpha = \sin 90^\circ = 1$), маса стрижня

$$m = \rho_{\text{ал}}V = \rho_{\text{ал}}S_0 l \ .$$

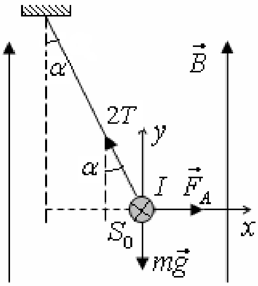

Рис. 2.13

Якщо поділити перше рівняння системи на друге, отримаємо:

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_A}{mg} = \frac{IlB}{\rho_{\text{ал}}S_0 lg} = \frac{IB}{\rho_{\text{ал}}S_0 g} = \frac{11{,}7\cdot 5\cdot 10^{-3}}{2{,}7\cdot 10^3\cdot 70\cdot 10^{-6}\cdot 9{,}8} = 0{,}032;$$

$$\alpha = \text{arctg } 0{,}032 = 1{,}8^\circ \ .$$

Задача 6

Два прямолінійних довгих паралельних провідника відстоять на r_1 = 10 см один від одного. По них течуть струми I_1 = 20 А та I_2 = 30 А. в однакових напрямках.

1) З якою силою (на одиницю довжини провідників) взаємодіють ці провідники?

2) Яку роботу (на одиницю довжини провідників) треба здійснити для того, щоб розсунути ці провідники на відстань r_2 = 20 см?

Розв’язання

1) Згідно із законом Біо – Савара – Лапласа (2.1) прямий нескінченно довгий струм I_1 в місці розташування струму I_2 створює магнітне поле, індукція якого дорівнює (2.6)

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r_1}.$$

У свою чергу, на кожний елемент струму I_2 у магнітному полі $\vec{B}_1$ діє сила Ампера $\vec{F}_2$ (2.13). Напрям її дії, визначений за правилом лівої руки, показаний на рисунку 2.14.

Визначимо силу Ампера, що діє на одиницю довжини струму I_2, прийнявши до уваги те, що кут α між напрямком дроту, вздовж якого тече струм, та напрямком магнітного поля $\vec{B}_1$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тобто, $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$:

$$F_l = \frac{F_A}{l} = \frac{I_2 \cdot l \cdot B_1 \cdot \sin\alpha}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{r_1} = \frac{10^{-7} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 30}{0{,}1} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Аналогічні міркування, що можуть бути проведені для струму I_2, дозволяють дійти висновків, що сили, з якими взаємодіють струми I_1 та I_2, однакові за модулем, але спрямовані назустріч одна одній. Як результат, провідники, по яких течуть струми однакових напрямків, притягуються.

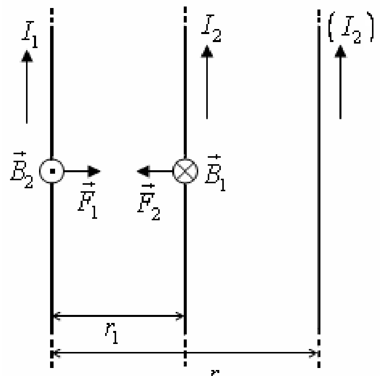

Рис. 2.14

2) Оскільки провідники зі струмами I_1 та I_2 притягуються, то роботу по їх розсуванню повинна здійснити зовнішня сила, яка за модулем дорівнює силі Ампера, з якою взаємодіють струми, але спрямована в протилежній бік. Будемо вважати, що при нескінченно малому переміщенні $d\vec{r}$, яке є протилежним напряму вектора $\vec{F}_l$, можна знехтувати зміною сили взаємодії між токами, тому елементарна робота зовнішніх сил, що припадає на одиницю довжини провідника, з урахуванням того, що $\cos\alpha = -1$, становить

$$dA_l = \left(\vec{F}_l, d\vec{r}\right) = F_l \cdot dr \cdot \cos\alpha = -F_l \cdot dr = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{r} dr\ .$$

Тоді

$$A_l = \int_{r_1}^{r_2} dA_l = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2I_1 \cdot I_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I_1 \cdot I_2 \cdot \ln r \Bigg|_{r_2}^{r_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I_1 \cdot I_2 \ln \frac{r_1}{r_2}\ .$$

Розрахунки дають

$$A_l = 10^{-7} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \ln \frac{0,1}{0,2} = 10^{-7} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \ln 0,5 = -8,31 \cdot 10^{-5}\ \text{Дж.}$$

Знак "мінус" вказує на те, що робота здійснюється проти сил магнітного поля.

Задача 7

Поряд із довгим прямим дротом MN, по якому тече струм силою I, розташована квадратна рамка зі стороною завдовжки l, по якій тече струм I_1. Рамка лежить в одній площині із дротом MN так, що її сторона, найближча до дроту, відстоїть від нього на a (рис. 2.15). Визначити максимальну силу, що діє на рамку, а також роботу цієї сили при усуненні рамки із магнітного поля. Вважати, що під час руху рамки струми I і I_1 підтримуються постійними.

Розв'язання

Рамка знаходиться у неоднорідному магнітному полі, що убуває при віддаленні від провідника *MN*. На рамку діє сила, яка притягуватиме або відштовхуватиме рамку залежно від напряму струмів у провіднику та в рамці. Переміщаючи контур, ця сила здійснює роботу.

На кожен елемент довжини контуру *ABCD*, розташованого у магнітному полі струму *I*, діє сила Ампера (2.13). Напрямок цієї сили залежить, зокрема, від напрямку вектора $\vec{B}$ в місці розташування даного елементу контуру. На рис. 2.15 вказаний напрямок ліній магнітної індукції ("до спостерігача", перпендикулярно площині аркуша), визначений за правилом правого гвинта. Результуюча сила, що діє на рамку зі струмом в магнітному полі:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 .$$

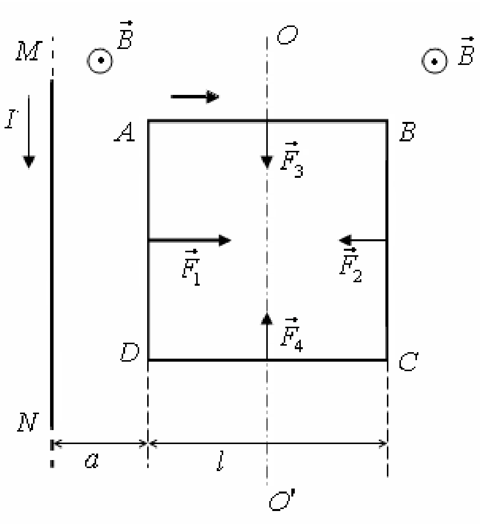

Рис. 2.15

Напрямок сил, що діють на сторони рамки, визначається напрямком вектора – результату векторного добутку $\left[\vec{l}, \vec{B}\right]$ або правилом лівої руки. Оскільки сторони рамки *AB* та *CD* розташовані відносно дроту *MN* симетрично, сили $\vec{F}_3$ та $\vec{F}_4$, що діють на них, чисельно дорівнюють одна одній, але спрямовані протилежно. Їх векторна сума дорівнює нулю (тому переміщення в просторі вони не викликають). Тоді рівнодійна сил, прикладених до рамки, становить

$$F = F_1 - F_2 .$$

та спрямована перпендикулярно дроту *MN*.

Для визначення сил F_1 та F_2 використовуємо формулу (2.14), враховуючи, що $\sin\alpha = \sin\left(d\vec{l} \wedge \vec{B}\right)$:

$$dF = I_1 B dl \sin\alpha .$$

Сила, що діє на сторону рамки, дорівнює векторній сумі всіх елементарних сил $\vec{F} = \int\limits_l d\vec{F}$. Оскільки всі елементарні сили спрямовані однаково та для усіх елементів $d\vec{l}$ однієї й тієї ж сторони рамки $\sin\alpha = 1$, а величина індукції *B* однакова, сила

$$F = \int_0^l I_1 B dl = I_1 B \int_0^l dl = I_1 B l \ .$$

Магнітна індукція поля, створеного нескінченно довгим провідником, визначається згідно з (2.6):

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi x},$$

де *x* = *a* для сторони AD та *x* = *a* + *l* для сторони *BC*.

Тоді сила

$$F = \frac{\mu_0 I\, I_1 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right).$$

При усуненні рамки від дроту за межі магнітного поля сили F_1 та F_2, які тепер розглядатимемо як змінні величини, здійснюють роботу: сила F_1 – додатну роботу A_1, а сила F_2 – від’ємну роботу A_2. Робота, що здійснюється при цьому магнітними силами:

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^{\infty} F_1 dx - \int_{a+l}^{\infty} F_2 dx \ .$$

Для знаходження різниці інтегралів скористаємося тим, що сила F_1, змістивши провідник *AD* на відстань *l*, надалі зробить таку саму за абсолютною величиною роботу, що й сила F_2. Тому шукана робота *A* дорівнюватиме роботі сили F_1 при зміщенні провідника *AD* з його початкового положення на відстань *l*:

$$A = \int_a^{a+l} F_1 dx = \frac{\mu_0 I\, I_1 l}{2\pi} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I\, I_1 l}{2\pi} \ln\frac{a+l}{a} \ .$$

Задача 8

Круговий контур (R = 2 см) розташований у однорідному магнітному полі напруженістю H = 150 кА/м так, що площина контуру перпендикулярна напряму магнітного поля (рис. 2.16). По контуру тече струм I = 2 А. Яку роботу треба здійснити для того, щоб повернути контур на кут α = 90^0 навколо осі, що збігається із діаметром контуру? Вважати, що сила струму підтримується постійною під час повороту.

Розв'язання

На контур зі струмом в магнітному полі діє момент сил (2.17)

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right],$$

де $\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}$ – магнітний момент контуру (2.16), що охоплює площу S и по якому тече струм I, $\vec{n}$ – одинична нормаль до площини контуру; $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ – індукція магнітного поля (2.25).

Модуль механічного моменту дорівнює $M = p_m B \sin\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{p}_m$ та $\vec{B}$.

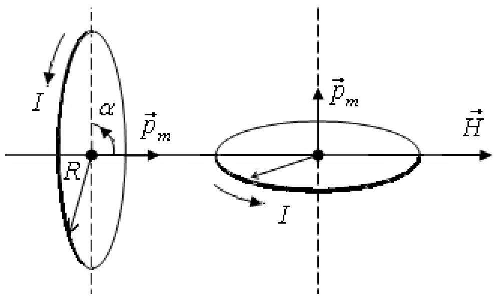

Рис. 2.16

У початковому положенні, коли вектори $\vec{p}_m$ та $\vec{B}$ спрямовані однаково, контур знаходиться у положенні рівноваги тому, що механічний момент $M = 0$. Для того, щоб повернути контур зовнішні сили повинні здійснити роботу. Елементарна робота зовнішніх сил

$$dA = M\,d\alpha = p_m B \sin\alpha\, d\alpha = ISB\sin\alpha\, d\alpha = I\pi R^2 B \sin\alpha\, d\alpha \,.$$

Робота при повороті на скінченний кут α

$$A = \int_0^{90^\circ} I\pi R^2 B \sin\alpha d\alpha = I\pi R^2 B \int_0^{90^\circ} \sin\alpha d\alpha = I\pi R^2 B\left(-\cos\alpha\right)\Bigg|_0^{90^\circ} =$$

$$= I\pi R^2 B == I\pi R^2 \mu_0 H = 2\pi \cdot 4\cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 150\cdot 10^3 = 3{,}16\cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Роботу можна визначити іншим способом, скориставшись формулою для знаходження роботи (2.21) магнітного поля $dA = Id\Phi$, де $\Phi = BS\cos\alpha$ – магнітний потік (2.19), α – кут між вектором $\vec{B}$ або $\vec{H}$ та нормаллю до площини контуру. В початковому положенні потік максимальний $\Phi_1 = BS$, а в кінцевому положенні потік $\Phi_2 = 0$. Тоді

$$dA = Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\left(0 - BS\right) = -IBS =$$
$$= -I\pi R^2 \mu_0 H = -3{,}16\cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Природно, що ми одержали ту ж саму відповідь. Що до знаку "мінус", то це завдяки тому, що робота здійснюється проти сил магнітного поля зовнішніми силами.

Задача 9

Електрон, прискорений різницею потенціалів $U_0 = 1$ *кВ, потрапляє в однорідне магнітне поле, напрямок якого перпендикулярний до напрямку його руху. Індукція магнітного поля B = 1,2 мТл. Знайти радіус R кола (рис. 2.17), вздовж якого рухається електрон, період обертання T та момент імпульсу L електрона відносно центру кола.*

Розв'язання

Заряджена частинка, що влітає зі швидкістю $\vec{v}_0$ в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям магнітної індукції $\vec{B}$, під дією сили Лоренца (точніше, магнітної складової сили Лоренца), завжди спрямованої перпендикулярно вектору швидкості частинки, набуває нормального прискорення та починає рухатися вздовж криволінійній траєкторії в площині, перпендикулярній напрямку поля (рис. 2.17).

Швидкість частинки, що пройшла прискорюючу різницю потенціалів до потрапляння в магнітне поле, знайдемо із (1.25):

$$\frac{mv_0^2}{2} = qU_0 = eU_0,$$

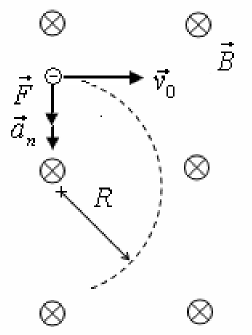

Рис. 2.17

оскільки свою кінетичну енергію частинка набуває за рахунок роботи електричного поля. Звідси швидкість електрона

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}},$$

де $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл та $m = 9\cdot10^{-31}$ кг – величини заряду та маси електрона, відповідно.

Якщо в магнітне поле, що спрямоване перпендикулярно площині рисунку ("від нас" на рис. 2.17), влітає електрон ($q = e$) із швидкістю $\vec{v}_0$, то на нього діятиме сила Лоренца (2.22). Напрям сили буде протилежним напряму вектора, що є результатом векторного добутку $\left[\vec{v}_0, \vec{B}\right]$, оскільки електрон має негативний заряд:

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}_0, \vec{B}\right] = -e\left[\vec{v}_0, \vec{B}\right].$$

Якщо нехтувати дією сили тяжіння, то при $\vec{B} = \text{const}$ величина сили Лоренца буде незмінною, а електрон стане описувати коло радіуса R, для визначення якого використаємо другий закон Ньютона:

$$ma_n = m\frac{v_0^2}{R} = ev_0B\sin 90^\circ .$$

Звідки

$$R = \frac{mv_0}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{1}{B}\cdot\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо $R = 8{,}9\cdot10^{-2}$ м.

Період обертання:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m v_0}{v_0 eB} = \frac{2\pi m}{eB},$$

Підстановка числових значень дає

$$T = \frac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} 1{,}2 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Слід звернути увагу на той факт, що період обертання зарядженої частинки не залежить від швидкості, з якою частинка потрапляє в магнітне поле.

Момент імпульсу дорівнює

$$L = m v_0 R = \frac{(m v_0)^2}{eB} = \frac{m^2}{eB} \cdot \frac{2eU_0}{m} = \frac{2mU_0}{B}.$$

Підставляючи числові значення, маємо:

$$L = \frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{3}}{1{,}2 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \cdot 10^{-24} \text{ кг·м·с}^{-1}.$$

Задача 10

Протон зі швидкістю $v_0 = 10^4$ *м/с влітає в однорідне магнітне поле з індукцією* B *= 0,01 Тл. Вектор швидкості протона спрямований під кутом* α *= 60° до ліній індукції (рис. 2.18). Визначити траєкторію руху протона та її характеристики.*

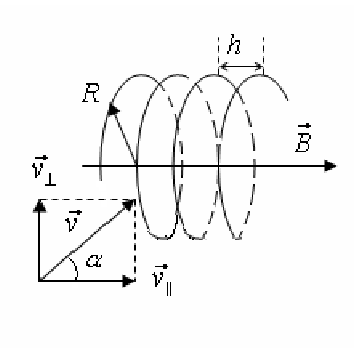

Рис. 2.18

Розв'язання

На протон, що рухається в магнітному полі, діє магнітна складова сили Лоренца (2.22). Вектор швидкості створює кут α з лініями магнітної індукції $\vec{B}$. Розкладемо вектор швидкості на дві складові (рис. 2.18), одна з яких $\vec{v}_{\parallel}$ направлена уздовж ліній магнітної індукції, а друга $\vec{v}_{\perp}$ – перпендикулярна їм:

$$\begin{cases} v_{\perp} = v\sin\alpha, \\ v_{\parallel} = v\cos\alpha. \end{cases}$$

Складова швидкості $v_{\parallel}$ залишається незмінною в процесі руху частинки, оскільки збігається за напрямком з вектором магнітної індукції, тому на неї не діє сила Лоренца.

Складова швидкості $v_{\perp}$ під дією сили Лоренца безперервно змінює напрям, оскільки ця сила надає протону нормальне прискорення (див. задачу 9).

Таким чином, протон бере участь одночасно у двох рухах: рівномірному та прямолінійному зі швидкістю $v_{\parallel}$ паралельно лініям магнітної індукції та криволінійному зі швидкістю $v_{\perp}$, яка залишається незмінною за модулем, у площині, перпендикулярній вектору $\vec{B}$. Вислідна траєкторія – гвинтова лінія з радіусом кривини *R* і кроком *h*. Скориставшись результатами попередньої задачі, запишемо радіус кривини траєкторії:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv\sin\alpha}{eB}.$$

Підставивши в нього числові значення, отримаємо:

$$R = \frac{1,66\cdot 10^{-27}\cdot 10^{4}\cdot \sin 60^{0}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-2}} = 9\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

За час одного оберту протон, рухаючись зі швидкістю $v_{\parallel}$, зміщується на відстань *h* (крок гвинтової лінії):

$$h = v_{\parallel}T = v\cos\alpha\cdot\frac{2\pi m}{eB},$$

$$h = \frac{10^{4}\cdot\cos 60^{\circ}\cdot 2\pi\cdot 1,66\cdot 10^{-27}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-2}} = 3,26\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Задача 11

Електрон влетів в однорідне магнітне поле, індукція якого B = 0,2 Тл, та почав рухатися по колу радіусом R = 5 см. Визначити магнітний момент p_m *еквівалентного колового струму.*

Розв'язання

Електрон буде рухатися по колу (рис. 2.19), якщо він влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям магнітної індукції (див. задачу 9). Рух електрона по колу можна вважати еквівалентним коловим струмом, який у даному випадку визначається як

$$I_e = \frac{e}{T} = \frac{e \cdot v}{2\pi R} \ ,$$

де e – модуль заряду електрона (елементарний заряд), $T = \dfrac{2\pi R}{v}$ – період його обертання, яке відбувається зі швидкістю v.

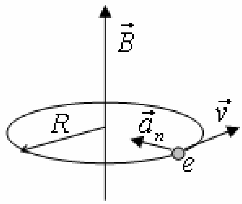

Рис. 2.19

Магнітний момент еквівалентного струму

$$p_m = I_e S = \frac{e \cdot v}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{e \cdot vR}{2} .$$

Для визначення швидкості v скористаємося тим, що електрон рухається в магнітному полі під дією магнітної складової сили Лоренца (2.23) вздовж криволінійної траєкторії, отже, в нього є нормальне (доцентрове) прискорення. Тоді за другим законом Ньютона для електрона

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = F_л = qvB\sin\alpha \ ,$$

та з врахуванням того, що

$$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \ m = m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \ \alpha = 90°, \ \sin\alpha = 1,$$

одержимо
$$v = \frac{eBR}{m_e} .$$

Тоді магнітний момент еквівалентного колового струму

$$p_m = \frac{evR}{2} = \frac{e^2BR^2}{2m_e} = \frac{\left(1{,}6\cdot10^{-19}\right)^2\cdot0{,}2\cdot\left(0{,}05\right)^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}} = 7{,}03\cdot10^{-12}\ \text{А·м}^2.$$

Задача 12

Магнітне поле, індукція якого B = 10^{-3} Тл, спрямоване перпендикулярно електричному полю, напруженість якого E = 3000 В/м. Пучок електронів, що пройшли прискорюючу різницю потенціалів U_0, влітають у простір, де знаходяться ці поля, причому швидкість електронів перпендикулярна площині, в якій лежать вектори $\vec{B}$ та $\vec{E}$. Знайти:

1) швидкість електронів $\vec{v}$, якщо при одночасній дії обох полів пучок електронів не відхиляється;

2) прискорюючу різницю потенціалів U_0;

3) радіус кривини R траєкторії електронів за умов включення одного магнітного поля.

Розв'язання

1) Неможливо вибирати напрями $\vec{E}$ та $\vec{B}$ довільно, інакше сили, що діють на електрони в обох полях, можуть бути одного напряму, а згідно з умовами задачі вони компенсують одна одну, тобто вони повинні бути протилежно спрямовані. Тому оберемо спочатку напрям електричного поля, наприклад, зліва направо (рис. 2.20).

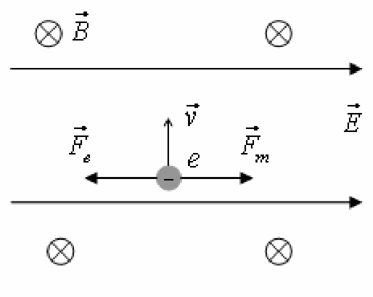

Рис. 2.20

Перпендикулярно вектору $\vec{E}$ влітають електрони, при цьому на кожен з них буде діяти сила (електрична складова сили Лоренца) (1.15). З урахуванням того, що заряд електрона за модулем дорівнює елементарному заряду, а саме, $q = |q_e| = e$, величина електричної сили

$$\vec{F}_e = e\vec{E}\ .$$

Оскільки заряд електрону негативний, напрямок електричної сили, що на нього діє, буде протилежним вектору напруженості електричного поля. Під дією цієї сили електрон повинен відхилятися вліво. Для того, щоб це не трапилося, треба включити магнітне поле, що діє на електрон з силою Лоренца (а точніше, з магнітною складовою (2.22) сили Лоренца), яка спрямована протилежно електричній силі:

$$\vec{F}_m = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right].$$

Для цього вектор індукції магнітного поля повинен бути спрямованим перпендикулярно площині рисунку "від спостерігача". Тоді рівні за величинами електрична та магнітна сили забезпечать прямолінійний рух електрона.

$$F_e = F_m. \qquad \Rightarrow \qquad E = vB\sin\alpha\ .$$

З урахуванням того, що $\sin\alpha = \sin 90° = 1$, оскільки швидкість електрона $\vec{v}$ перпендикулярна магнітному полю $\vec{B}$, одержимо:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 3 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2) Визначену швидкість v електрон набуває в результаті проходження прискорюючої різниці потенціалів U_0 в електричному полі, яке передувало області, в якій знаходилися розглянуті вище електричне та магнітне поля. При цьому робота, що здійснюється цим попереднім електричним полем, згідно із законом збереження енергії перетворюється в кінетичну енергію електрона:

$$A = \Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = E_k - 0 = E_k\ .$$

$$eU_0 = E_k = \frac{mv^2}{2}\ .$$

Тоді

$$U_0 = \frac{mv^2}{2e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 25{,}6 \text{ В.}$$

3) Якщо електрони будуть рухатися лише у магнітному полі (рис. 2.21), то на кожен з них буде діяти магнітна складова сили Лоренца $\vec{F}_m = -e\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, модуль якої $F_m = evB\sin\alpha$. Оскільки ця сила, як видно з формули, перпендикулярна швидкості, то вона забезпечує нормальне прискорення, тому електрони будуть змінювати напрямок руху. У цьому випадку радіус кривини траєкторії (кола) можна знайти, враховуючи, що $\vec{v} \perp \vec{B}$ та $\sin\alpha = 1$,

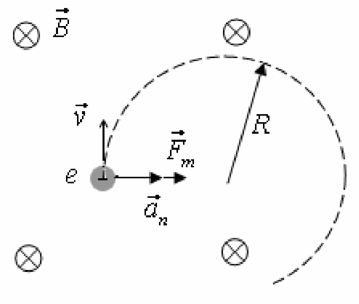

Рис. 2.21

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = evB,$$

$$R = \frac{mv^2}{evB} = \frac{mv}{eB} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^6}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-3}} = 1{,}7\cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Задача 13

Знайти нормальне, тангенціальне та повне прискорення α-частинки, що влітає зі швидкістю v=10^6 м/с в однорідні однаково спрямовані електричне E = 8 кВ/м та магнітне поля B = 0,1 мТл . Задачу розв'язати для двох випадків, коли швидкість α-частинки спрямована:

1) паралельно;

2) перпендикулярно силовим лініям полів.

Розв'язання

Альфа-частинка (α - частинка) – ядро атома гелія – має позитивний заряд $q_\alpha = 2e = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл та масу $m_\alpha \approx 4m_p = 6{,}64\cdot 10^{-27}$ кг.

На α - частинку в електричному та магнітному полях діє сила Лоренца $\vec{F}_{\text{л}} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$, яка складається з двох складових – електричної (1.15) та магнітної (2.22). Розглянемо вплив електричного та магнітного полів окремо для кожного з випадків.

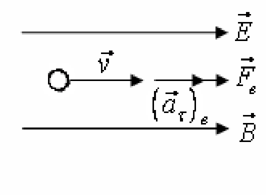

Рис. 2.22

1) В електричному полі (рис. 2.22) на позитивно заряджену частинку діє сила, модуль якої $F_e = q_\alpha E$, а напрямок співпадає з напрямком напруженості електричного поля $\vec{E}$. Оскільки $\vec{v} \parallel \vec{E}$, то прискорення, що викликане електричною силою, співпадає за напрямком зі швидкістю, а значить, це – тангенціальне прискорення. За другим законом Ньютона $m\vec{a}_\tau = \vec{F}_e = q_\alpha \vec{E}$, тому

$$a_\tau = \frac{q_\alpha E}{m} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^3}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

Модуль магнітної складової сили Лоренца $F_m = q_\alpha v B \sin\alpha$. Оскільки $\vec{v} \parallel \vec{B}$, то кут α між векторами $\vec{v}$ та $\vec{B}$ рівний нулю, отже, $\sin\alpha = 0$. Це означає, що магнітна сила на частинку не діє.

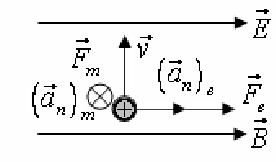

Рис. 2.23

Таким чином, повне прискорення α - частинки дорівнює a_τ , і обумовлене воно дією виключно електричного поля:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau, \; a = a_\tau = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

2) Якщо $\vec{v} \perp \vec{E}$, то сила електричного поля, забезпечує прискорення, яке є нормальним, оскільки воно перпендикулярне швидкості (рис. 2.23). Тоді, згідно з другим законом Ньютона, $m\vec{a}_n = \vec{F}_e = q_\alpha \vec{E}$, звідки

$$\left(a_n\right)_e = a_n = \frac{q_\alpha E}{m} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 8 \cdot 10^3}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 4 \cdot 10^{11} \text{ м/с}^2.$$

В магнітному полі діє сила $F_m = q_\alpha vB\sin\alpha$. Оскільки $\vec{v} \perp \vec{B}$, то $\sin\alpha = \sin 90° = 1$ та $F_m = q_\alpha vB$. Ця сила та прискорення, завдане нею, спрямовані перпендикулярно швидкості, тому це прискорення є нормальним (на рисунку воно спрямоване "від спостерігача"). Тоді за другим законом Ньютона

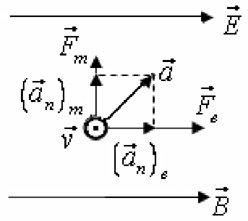

Рис. 2.24

$$ma_n = F_m = q_\alpha vB,$$

звідки

$$\left(a_n\right)_m = a_n = \frac{q_\alpha vB}{m} = \frac{3,2\cdot 10^{-19}\cdot 10^{6}\cdot 10^{-2}}{6,64\cdot 10^{-27}} = 4,82\cdot 10^{11}\ \text{м/с}^2.$$

Прискорення, що пов’язані з дією електричного $\left(a_n\right)_e$ та магнітного $\left(a_n\right)_e$ полів, перпендикулярні одне одному (це добре видно на рис. 2.24, що є іншою проекцією рисунка 2.23), а повне прискорення є їх векторною сумою $\vec{a} = \left(\vec{a}_n\right)_e + \left(\vec{a}_n\right)_m$. Модуль повного прискорення можна знайти за допомогою теореми Піфагора:

$$a = \sqrt{\left(a_n\right)_e^2 + \left(a_n\right)_m^2} = \sqrt{\left(4\cdot 10^{11}\right)^2 + \left(4,82\cdot 10^{11}\right)^2} = 6,26\cdot 10^{11}\ \text{м/с}^2.$$

Задача 14

В однорідному магнітному полі, індукція якого 0,5 Тл, рівномірно з частотою n = 10 Гц обертається котушка, що складається з 200 витків (рис. 2.25). Вісь обертання котушки (О – О) перпендикулярна її осі та напряму магнітного поля. Площа поперечного перерізу котушки S = 100 см^2. Знайти:

1) максимальну ЕРС індукції в котушці, що обертається;

2) миттєве значення ЕРС індукції, відповідне куту повороту котушки на 30°;

3) середнє значення ЕРС, що виникає при повороті котушки на 90° з положення, коли площина котушки перпендикулярна лініям індукції магнітного поля;

4) максимальне, миттєве та середнє значення індукційного струму, якщо опір котушки R = 1 Ом;

5) значення заряду q, який протече через котушку при повороті її на 90° з положення, коли площина котушки перпендикулярна лініям індукції магнітного поля;

6) корисну потужність, яка виділяється в навантаженні – зовнішньому опорі $R_н$ = 20 Ом.

Розв'язання

Під час обертання котушки у магнітному полі магнітний потік через кожен з її витків $\Phi = BS\cos\alpha$ буде змінюватися внаслідок зміни кута α. При рівномірному обертанні кут α змінюється прямо пропорційно часу обертання $\alpha = \omega t$, а повний магнітний потік (потокозчеплення) – за гармонічним законом:

$\Psi = N\Phi = NBS\cos\alpha = NBS\cos\omega t$,

де N – кількість витків котушки.

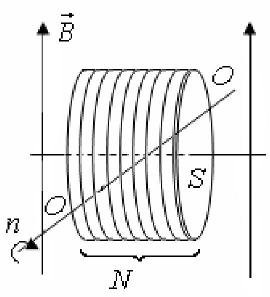

Рис. 2.25

Згідно з законом електромагнітної індукції в котушці виникає ЕРС індукції, миттєве значення якої змінюється також згідно з гармонічним законом:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\left(NBS\cos\omega t\right)}{dt} = NBS\omega \cdot \sin\omega t .$$

З урахуванням того, що кутова швидкість зв'язана із частотою обертання $\omega = 2\pi n$, одержуємо

$$\varepsilon_i = 2\pi nNBS\sin\omega t = \left(\varepsilon_i\right)_{\max}\sin\omega t .$$

1) Максимальне значення ЕРС індукції буде тоді, коли $\sin\omega t = 1$. Тоді $\varepsilon_i = \varepsilon_{i\max} = 2\pi nNBS$, і підставляючи числові значення, маємо:

$$\varepsilon_{i\max} = 2\pi nNBS = 2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 31{,}4 \text{ В.}$$

2) Для визначення миттєвого значення ЕРС індукції, що відповідає куту повороту котушки 30°, беремо $\alpha = \omega t = 30°$, і в результаті одержуємо:

$$\varepsilon_i = 2\pi nNBS \sin \omega t = \varepsilon_{\max} \sin 30° = 31{,}4 \cdot 0{,}5 = 15{,}7 \text{ В.}$$

3) Середнє значення ЕРС

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\Delta t},$$

де $\Psi_1 = NBS\cos\alpha_1$ та $\Psi_2 = NBS\cos\alpha_2$ – значення повного магнітного потоку (потокозчеплення) у початковому та кінцевому положеннях котушки, Δt – час, за який трапилось обертання.

Обертання на 90° котушка здійснює за чверть періоду $\Delta t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{1}{4n}$.

Якщо врахувати, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90°$, то середнє значення ЕРС, що виникає в котушці, дорівнює

$$\langle \varepsilon_i \rangle = 4BSNn = 4 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 20 \text{ В.}$$

4) Якщо при зміни магнітного потоку через котушку в ній виникає ЕРС (2.26), то через неї потече індукційний струм, який згідно із законом Ома:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{NBS2\pi n}{R} \cdot \sin 2\pi n t.$$

Як видно, значення індукційного струму залежать від часу згідно із гармонічним законом.

Шукані значення індукційного струму :

- максимальне $I_{i\max} = \dfrac{\varepsilon_{i\max}}{R} = \dfrac{NBS2\pi n}{R} = \dfrac{31{,}4}{1} = 31{,}4$ А,
- миттєве $I_i = \dfrac{\varepsilon_i}{R} = -\dfrac{NBS2\pi n}{R} \cdot \sin 2\pi n t = -\dfrac{15{,}7}{1} = -15{,}7$ А.

- середнє $\langle I_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{R} = \frac{4BSNn}{R} = \frac{20}{1} = 20$ А.

5) Сила струму за визначенням дорівнює $I = \frac{dq}{dt}$, тому елементарний заряд, що протікає через провідник за елементарний інтервал часу $dq = Idt = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{d\Psi}{R}$.

Таким чином, елементарна зміна потокозчеплення $\Psi = N\Phi$, оскільки ми маємо котушку, що складається з N витків, викликає протікання по ланцюгу елементарного заряду dq. Для того, щоб знайти повний заряд, треба зінтегрувати $q = -\frac{1}{R}\int d\Psi$.

Коли площина котушки перпендикулярна лініям магнітного поля, потік через її витки максимальний, а після повороту на 90° стає рівним нулю, тобто $\Psi_1 = \Psi_{\max}$ та $\Psi_2 = 0$. Тому

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{R} = -\frac{0 - NBS}{R} =$$

$$= \frac{NBS}{R} = \frac{200 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{1} = 1 \text{ Кл.}$$

6) Корисна потужність струму, що виділяється в навантаженні $R_н$:

$$P_a = I_i^2 R_2.$$

Максимальна корисна потужність

$$P_{a\,max} = I_{i\max}^2 R_н = \left(\frac{\varepsilon_{i\max}}{R + R_н}\right)^2 \cdot R_н = \left(\frac{NBS\,2\pi n}{R + R_н}\right)^2 \cdot R_н =$$

$$= \frac{(31,4)^2 \cdot 20}{20 + 1} = 939 \text{ Вт.}$$

Треба відзначити, що магнітний потік та ЕРС індукції (індукційний струм) зміщені на $\frac{\pi}{2}$ відносно один одного (рис. 2.26).

Коли потік максимальний, ЕРС індукції та індукційний струм дорівнюють нулю, і навпаки, коли потік нульовий, то ЕРС та струм максимальні.

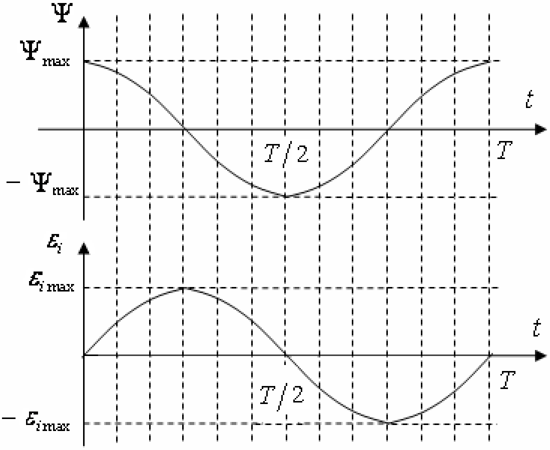

Рис. 2.26

Задача 15

У магнітному полі з напруженістю H= 8 кА/м обертається стрижень завдовжки 0,2 м з постійною кутовою швидкістю ω = 100 с$^{-1}$ (рис. 2.27). Знайти ЕРС індукції, що виникає на кінцях стрижня, якщо вісь обертання проходить через кінець стрижня паралельно силовим лініям магнітного поля.

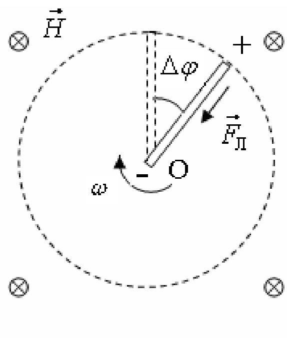

Рис. 2.27

Розв'язання

Виникнення різниці потенціалів на кінцях стрижня, що перетинає магнітні силові лінії, викликано дією сили Лоренца на заряди, що знаходяться у провіднику. Якщо стрижень обертається в однорідному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω та перетинає лінії індукції під прямим кутом, то під дією сили Лоренца електрони почнуть зміщуватися уздовж стрижня до одного з його кінців.

При такому розташуванні поля та напрямку обертання, яке показане на рис. 2.27, сила Лоренца буде спрямована до осі обертання, і до неї ж зміщуватимуться електрони. Зсув електронів відбуватиметься, доки створюване ними усередині провідника електричне поле не досягне тієї величини, коли сили електричного відштовхування врівноважать силу Лоренца. Як результат, на одному кінці стрижня виявляється надлишок електронів, а на іншому – їх брак. Між кінцями стрижня виникає постійна різниця потенціалів $\Delta\varphi$, яка по модулю дорівнює $\varepsilon_i = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де $\Delta\Phi$ – величина магнітного потоку, що перетинається стрижнем за час обертання Δt .

При переміщенні стрижня у вакуумі під прямим кутом до силових ліній магнітного поля з напруженістю $\vec{H}$ зміна магнітного потоку

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \mu_0 H \Delta S ,$$

де ΔS – площа сектора, що описується стрижнем за час Δt .

У даній задачі за час Δt стрижень завдовжки l повертається на кут $\Delta\varphi$ і площа сектора складає $\Delta S = \dfrac{\Delta\varphi \cdot l^2}{2}$.

Враховуючи це, зміна магнітного потоку

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 H l^2 \Delta\varphi}{2} .$$

Підставляючи цей вираз у формулу для ЕРС індукції і зважаючи на те, що $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, отримаємо:

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 H l^2 \Delta\varphi}{2\Delta t} = \frac{\mu_0 H l^2 \omega}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Задача 16

Мідний обруч масою $m = 5$ *кг розташований в площині магнітного меридіана. Який заряд пройде по обручу, якщо його обернути довкола вертикальної осі на 90°? Горизонтальна складова магнітного поля Землі* $B_Г$ *= 32 мТл.*

Розв'язання

При повороті обруча в магнітному полі Землі (рис. 2.28) змінюється магнітний потік, що перетинає площину обруча, отже, в обручі виникне індукційний струм I_i. За законом Ома індукційний струм

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Елементарний заряд, що пройшов через обруч за час *dt*:

$$dq = I_i dt = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}dt = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Заряд, що пройшов через обруч за час повороту, дорівнює

$$q = \int_1^2 I_i dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

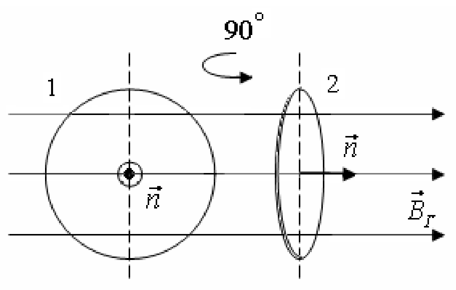

Рис. 2.28

Таким чином, заряд, що протікає через обруч, не залежить від швидкості повороту обруча, а визначається зміною магнітного потоку та опором обруча. За визначенням магнітний потік дорівнює $\Phi = B_Г S \cos\alpha$. Оскільки в положенні 1 (рис. 2.28) кут $\alpha_1 = 90°$, а в положенні 2 – $\alpha_2 = 0°$, то

$$\Phi_1 = B_Г S\cos 90° = 0\,, \qquad \Phi_2 = B_Г S\cos 0° = B_Г S\,,$$

отже

$$\Delta\Phi = B_Г S\,.$$

Якщо радіус обруча *r*, тоді площа круга, що охоплюється обручем

$$S = \pi r^2\,.$$

Опір обруча $$R = \rho_{Cu}\,\frac{l}{S_0}\,,$$

де $l = 2\pi r$ – довжина середньої лінії обруча; $S_0 = \frac{V}{l}$ – площа перерізу мідного дроту; ρ_{Cu} – питомий опір міді; $V = \frac{m}{\rho_м}$ – об'єм обруча; $\rho_м$ – густина міді.

З врахуванням цих співвідношень

$$S_0 = \frac{m}{2\pi r\rho_м}\,,$$

$$R = \rho_{Cu}\,\frac{2\pi r\cdot 2\pi r\cdot\rho_м}{m} = \frac{4\pi^2 r^2\rho_м}{m}\,.$$

Тоді заряд, що пройде по дроту в результаті обертання обруча:

$$q = \frac{B\pi r^2 m}{\rho_{Cu}4\pi^2 r^2\rho_м} = \frac{Bm}{4\pi\rho_{Cu}\rho_м}\,.$$

Підставимо числові значення, врахувавши, що для міді густина $\rho_м$ = 8,6·10^3 кг/м^3, а питомий опір ρ_{Cu} = 1,7·10^{-8} Ом·м, та отримаємо

$$q = \frac{Bm}{4\pi\rho_{Cu}\rho_м} = \frac{32\cdot 10^{-3}\cdot 5}{4\pi\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 8{,}6\cdot 10^{3}} = 0{,}053\ \text{Кл.}$$

Задача 17

В однорідному та постійному за часом магнітному полі з індукцією B = 0,2 Тл у площині, перпендикулярній лініям індукції, *розміщується замкнутий залізний провідник у формі рівнобічного трикутника. Периметр трикутника l = 12 см. Визначити:*

1) середню ЕРС індукції, що виникає в провіднику, якщо він деформується в квадрат протягом 1 мс;

2) напрям індукційного струму;

3) заряд, який протече по провіднику за умов зміни форми, якщо площа поперечного перерізу провідника S_0 *= 1 мм*^{2}*.*

Розв'язання

1) В результаті деформації провідника при його незмінній довжині площа, що охоплюється провідником, змінюється. Бік трикутника $a_1 = l/3$, отже, площа трикутника (рис. 2.29, *а*)

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1 h = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{9\cdot 4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{36}\ .$$

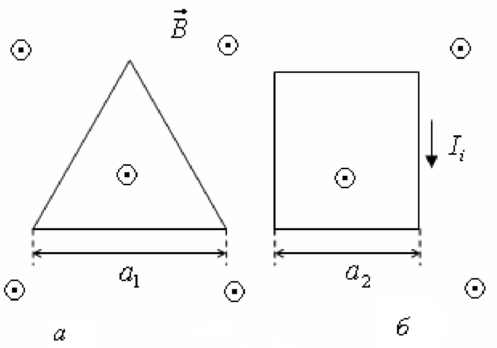

Рис. 2.29

Після деформації сторона отриманого квадрата та його площа (рис. 2.29, *б*) дорівнюють, відповідно, $a_2 = l/4$, $S_2 = a_2^2 = \dfrac{l^2}{16}$. Видно, що площа, яка охоплюється контуром, збільшується, отже, і магнітний потік через контур зростає, в результаті чого в контурі виникає ЕДС індукції.

Середня ЕДС індукції

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{B \cdot S_1 - B \cdot S_2}{t} = \frac{B \cdot (S_1 - S_2)}{t} = \frac{B \cdot l^2}{t}\left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{36}\right),$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{0,2 \cdot 0,12^2}{10^{-3}}\left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{36}\right) = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

2) Правило Ленца стверджує, що індукційний струм направлений так, щоб протидіяти причині, що викликає цей струм. Тобто індукційний струм створює магнітне поле, що перешкоджає зміні магнітного потоку через контур.

У даній задачі зростає, зважаючи на збільшення площі контуру, магнітний потік зовнішнього поля. Його магнітна індукція спрямована "до спостерігача" (рис. 2.29). Тоді, згідно з правилом Ленца, магнітне поле індукційного струму направлене "від спостерігача". Отже, індукційний струм, оскільки він пов'язаний із напрямком цього поля правилом правого гвинта, буде направлений за годинниковою стрілкою.

3) За законом електромагнітної індукції (2.26)

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(BS\cos\alpha\right)}{dt}.$$

За умов задачі площина контуру перпендикулярна лініям індукції, отже, кут α між вектором $\vec{B}$ та нормаллю до контуру дорівнює нулю, тому $\cos\alpha = 1$.

ЕРС індукції викликає виникнення індукційного струму I_i, причому ці величини пов'язані законом Ома:

$$\varepsilon_i = I_i R = \frac{dq}{dt} R.$$

Тоді
$$\varepsilon_i = \frac{dq}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(BS\right)}{dt}.$$

Елементарний заряд, що пройде через провідник за час *dt*, дорівнює:

$$dq = -\frac{1}{R}\frac{d\left(BS\right)}{dt}dt = -\frac{d\left(BS\right)}{R}.$$

Заряд буде проходити по провіднику при зміні його форми, тому

$$q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{B}{R}\int_{S_1}^{S_2} dS = -\frac{B\left(S_2 - S_1\right)}{R} =$$

$$= -\frac{B\left(\frac{l^2}{16} - \frac{l^2\sqrt{3}}{36}\right)}{R} = -\frac{Bl^2\left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{3}}{36}\right)}{R}.$$

Якщо опір провідника $R = \rho\frac{l}{S_0}$, де ρ = 0,087·10^{-6} Ом·м – питомий опір заліза, l та S_0 – довжина та площа поперечного перетину провідника, відповідно, то

$$q = -\frac{Bl^2 S_0 (0,0625 - 0,05)}{\rho l} =$$

$$= -\frac{0,2 \cdot 12 \cdot 10^{-2} 10^{-6} \cdot 0,0125}{0,087 \cdot 10^{-6}} = -3,45 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$

Знак "мінус" пов'язаний з напрямом протікання заряду.

Задача 18

На соленоїд завдовжки 20 см з площею перерізу 100 см^2 та кількістю витків N_1 = 320 щільно надіта коротка котушка (рис. 2.30), що складається із N_2 = 5 витків. По соленоїду тече струм I_1 = 5 А. Яка середня ЕРС виникає в одягненій котушці, коли струм у соленоїді зменшується до I_2 = 3 А протягом t = 0,001 с?

Розв'язання

Струм, що тече по соленоїду, створює в ньому однорідне магнітне поле, магнітна індукція якого $B_1 = \mu_0 n I_1 = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{l}$, а силові лінії паралельні твірній циліндра (соленоїда). Ці силові лінії пронизують витки котушки, надітої на соленоїд. Магнітний потік через один виток котушки дорівнює $\Phi_1 = B_1 S = \mu_0 \dfrac{N_1 I_1 S}{l}$.

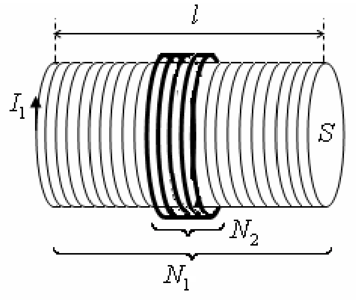

Рис. 2.30

Згідно умов задачі котушка щільно приникає до соленоїда, отже, можна вважати, що площі витків котушки та соленоїду однакові. У цьому випадку потокозчеплення

$$\Psi_1 = N_2 \Phi_1 = N_2 B_1 S = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I_1 S}{l}.$$

Потокозчеплення тоді, коли сила струму змінюється, дорівнює

$$\Psi_2 = N_2 \Phi_2 = N_2 B_2 S = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I_2 S}{l}.$$

За законом електромагнітної індукції середнє значення ЕРС, що виникає у котушці, $\langle \varepsilon_i \rangle = -\dfrac{\Delta\Psi}{\Delta t}$, де $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ – зміна потокозчеплення за час *t*.

$$\Psi_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 S}{l} \quad \text{та} \quad \Psi_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 S}{l},$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{t} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 (I_1 - I_2) S}{l \cdot t}.$$

Підставимо числові значення та остаточно одержимо середнє значення ЕРС індукції:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 320 \cdot 5 \cdot (5-3) \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{0{,}2 \cdot 10^{-3}} = 0{,}2 \text{ В.}$$

Треба зазначити, що за умов зменшення струму в соленоїді, магнітний потік через витки котушки також зменшується, тому, згідно із правилом Ленца, магнітне поле індукційного току спрямоване у той же бік, що і магнітне поле соленоїду. Таким чином, напрями струмів у соленоїді та індукційного струму у котушці повинні співпадати за напрямом.

Задача 19

Довгий соленоїд з немагнітним сердечником, площа перерізу якого дорівнює S = 5 см², а кількість витків N = 1200 (витки щільно прилягають один до одного) тече струм силою I = 2 А. Індукція магнітного поля в центрі соленоїда B = 10 мТл. Визначити: 1) індуктивність та 2) енергію магнітного поля соленоїда.

Розв'язання

1) З формули (2.8) $B = \mu_0 \dfrac{NI}{l}$, що визначає індукцію магнітного поля всередині соленоїда, виразимо довжину соленоїда

$$l = \mu_0 \frac{NI}{B}$$

і підставимо це значення в вираз (2.28) для індуктивності довгого соленоїда:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 SB}{\mu_0 NI} = \frac{NBS}{I} = \frac{1200 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Цю задачу можна розв'язати іншим способом, зважаючи на те, що індуктивність є коефіцієнтом пропорційності між струмом у контурі та магнітним потоком через нього. При цьому треба мати на увазі, що у випадку соленоїда замість потока у формулі (2.28) використовується потокозчеплення (повний магнітний потік) $\Psi = N\Phi_0$, що дорівнює добутку кількості витків соленоїда *N* на потік через кожний з витків Φ_0.

Тоді
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{NBS}{I}.$$

2) Енергія магнітного поля соленоїда (2.31) визначається як

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{2} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

2.2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ЗМІННИЙ СТРУМ

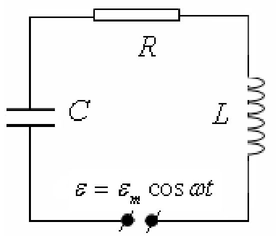

Рис. 2.31

Електричні коливання відбуваються в електричному колі, що називається *коливальним контуром* і в загальному випадку складається з котушки індуктивності *L*, конденсатора ємності *C*, активного опору *R* та джерела змінної напруги $\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega t$.

Рівняння коливального контуру в випадку *вільних незгасаючих коливань* ($R = 0$, $\varepsilon = 0$):

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0\,. \qquad (2.33)$$

Заряд конденсатора змінюється з часом (рис. 2.32):

$$q = q_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha\right), \qquad (2.34)$$

де q_m – максимальне (амплітудне) значення заряду.

Напруга на конденсаторі ємності *C*:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right) = U_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha\right), \qquad (2.35)$$

де $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ – максимальне (амплітудне) значення напруги.

Струм через котушку індуктивності *L*:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(q_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha\right)\right) = \\ = -q_m\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right) = -I_m \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right), \qquad (2.36)$$

де $I_m = q_m\omega_0$ – максимальне (амплітудне) значення струму.

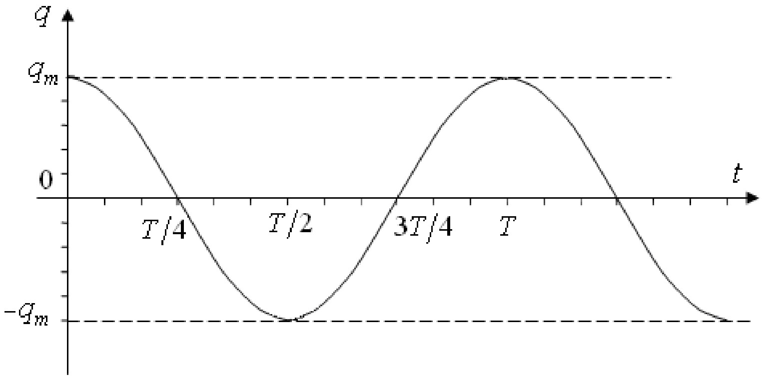

Рис. 2.32

Частота (циклічна) властивих незгасаючих коливань (властива циклічна частота):

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \qquad (2.37)$$

Частота властивих незгасаючих коливань (властива частота):

$$\upsilon_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} . \qquad (2.38)$$

Період властивих незгасаючих коливань зв'язаний з частотою:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} . \qquad (2.39)$$

Формула Томсона:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} . \qquad (2.40)$$

Максимальні значення заряду, напруги та струму зв'язані між собою

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m\sqrt{\frac{L}{C}} . \qquad (2.41)$$

Енергія електричного поля конденсатора

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} . \qquad (2.42)$$

Енергія магнітного поля котушки

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}. \tag{2.43}$$

Рівняння коливального контуру в випадку *вільних згасаючих електричних коливань* ($R \neq 0$, ε =0):

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{або} \qquad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{2.44}$$

Заряд конденсатора змінюється в часі:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \alpha\right), \tag{2.45}$$

де q_0 – початкова амплітуда заряду.

Амплітуда згасаючих коливань

$$q_m = q_0 e^{-\beta t}. \tag{2.46}$$

Напруга на конденсаторі ємності *C:*

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha). \tag{2.47}$$

Струм у контурі

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= q_0 e^{-\beta t}\left[-\beta\cos(\omega t + \alpha) - \omega\sin(\omega t + \alpha)\right] = \\ &= \omega q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha + \delta) = I_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha + \delta), \end{aligned} \tag{2.48}$$

де $\cos\delta = -\beta/\omega_0$, $\quad \sin\delta = \omega/\omega_0$.

Частота згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{2.49}$$

Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}, \tag{2.50}$$

де T_0, ω_0 – період та частота вільних незгасаючих коливань.

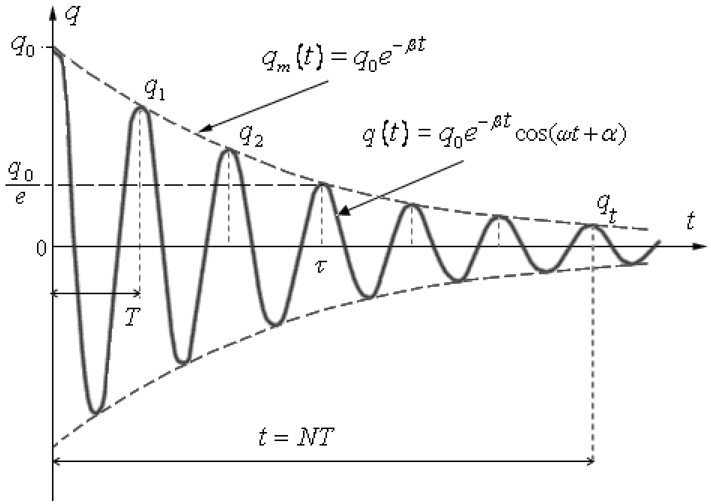

Рис. 2.33

Коефіцієнт згасання

$$\beta = \frac{R}{2L}. \tag{2.51}$$

Декремент згасання коливань – відношення амплітуд заряду (напруги, струму) згасаючих коливань, узятих через період:

$$D = \frac{q_0}{q_T} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{U_0 e^{-\beta t}}{U_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{I_0 e^{-\beta t}}{I_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \tag{2.52}$$

Логарифмічний декремент згасання

$$\delta = \ln D = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \tag{2.53}$$

Добротність контуру

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \tag{2.54}$$

Час релаксації τ – час, за який амплітуда згасаючих коливань зменшується в e = 2,7 разів:

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \qquad (2.55)$$

Кількість коливань N_e за час релаксації

$$N_e = \frac{1}{\delta} = \frac{Q}{\pi}. \qquad (2.56)$$

У випадку дуже слабкого згасання коливань ($\beta^2 \ll \omega_0^2$)

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (2.57)$$

Якщо $\beta^2 \gg \omega_0^2$, замість коливань в буде мати місце аперіодичний розряд конденсатора. Активний опір контуру в цьому випадку називають *критичним*:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{LC}. \qquad (2.58)$$

Рівняння коливального контуру в випадку *вимушених електричних коливань* ($R \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$):

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos\omega t \quad \text{або} \quad \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = (E_m/L)\cos\omega t. \qquad (2.59)$$

Заряд конденсатора змінюється згідно з залежністю:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \qquad (2.60)$$

де $\psi = \varphi + \pi/2$ – різниця фаз між коливаннями заряду та зовнішньої електрорушійної сили (ЕРС):

$$tg\psi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \qquad (2.61)$$

Амплітудне (максимальне) значення заряду на конденсаторі

$$q_m = \frac{\varepsilon_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \qquad (2.62)$$

Струм через котушку індуктивності

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \\ &= \omega q_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \qquad (2.63)$$

де $\phi = \psi - \dfrac{\pi}{2}$ – різниця фаз між током та зовнішньою ЕРС .

Амплітудне (максимальне) значення струму

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} . \qquad (2.64)$$

Напруга на опорі R

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t + \phi) . \qquad (2.65)$$

Напруга на ємності C

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.66)$$

Напруга на котушці L

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \phi) = \omega L I_m \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.67)$$

З рівнянь (2.65) – (2.67) видно, що U_R знаходиться в одній фазі із струмом I, U_C відстає по фазі від I на $\dfrac{\pi}{2}$, а U_L випереджає I на $\dfrac{\pi}{2}$. Це можна наочно представити за допомогою векторної діаграми (рис. 2.34).

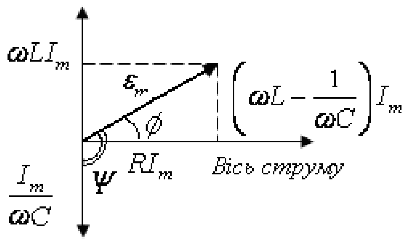

Рис. 2.34

Резонансна частота для сили струму збігається з властивою частотою контуру

$$\omega_{I\,\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} , \qquad (2.68)$$

для заряду:

$$\omega_{q\,\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/2L^2} \le \omega_0 , \qquad (2.69)$$

для напруги:

$$\omega_{R\,\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} , \qquad (2.70)$$

$$\omega_{C\,\text{рез}} = \omega_{L\,\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2} . \qquad (2.71)$$

Сталі вимушені електричні коливання можна розглядати як протікання в ланцюзі змінного синусоїдального струму:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z}, \tag{2.72}$$

де величину

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \tag{2.73}$$

називають *повним опором*.

Повний опір (імпеданс) складається з активного опору *R* та реактивного опору:

$$X = \omega L - 1/\omega C, \tag{2.74}$$

який, в свою чергу, складається з індуктивного X_L та ємнісного X_C опорів:

$$X_L = \omega L,\ X_C = 1/\omega C,\ X = X_L - X_C,\ Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \tag{2.75}$$

Миттєве значення потужності

$$P(t) = UI = U_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t - \phi). \tag{2.76}$$

Середнє значення потужності

$$\langle P \rangle = \frac{U_m I_m}{2}\cos\phi = \frac{R I_m^2}{2}. \tag{2.77}$$

Діючі (ефективні) значення струму та напруги пов’язані з їх амплітудними значеннями:

$$I_Д = I_m / \sqrt{2}, \quad U_Д = U_m / \sqrt{2}. \tag{2.78}$$

Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}, \tag{2.79}$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м та $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – електрична та магнітна сталі; ε та μ – діелектрична та магнітна проникності речовини.

Швидкість електромагнітних хвиль (швидкість світла) у вакуумі (повітрі):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \tag{2.80}$$

Довжина електромагнітної хвилі:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\upsilon} = \frac{2\pi c}{\omega}. \qquad (2.81)$$

Вектори напруженості електричного поля $\vec{E}$, магнітної індукції $\vec{B}$ та швидкості електромагнітної хвилі $\vec{v}$ взаємно перпендикулярні та створюють "праву трійку" векторів незалежно від вибору системи координат (рис. 2.35). А між їх миттєвими значеннями з урахуванням $H = B/\mu\mu_0$, де H – напруженість магнітного поля, у будь-який точці поля існує зв'язок:

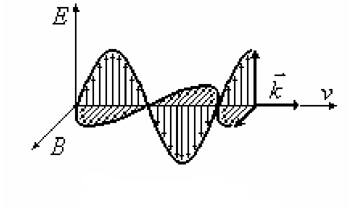

Рис. 2.35

$$E = vB, \qquad \text{або} \qquad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H. \qquad (2.82)$$

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі, що розповсюджується вздовж осі *x*:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \sin(\omega t - kx), \qquad \vec{H} = \vec{H}_m \sin(\omega t - kx). \qquad (2.83)$$

Густина енергії електромагнітних хвиль складається із густини енергії електричного та густини енергії магнітного полів:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{EH}{v}, \qquad (2.84)$$

оскільки

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{EH}{2}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = \frac{EH}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{c}} = \frac{EH}{2v}. \qquad (2.85)$$

Вектор густини потоку енергії (вектор Пойнтінга) та його модуль:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right], \qquad (2.86)$$

$$S = wv = EH. \qquad (2.87)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Коливальний контур складається з котушки індуктивності L = 400 мкГн і конденсатора ємністю С = 0,5 мкФ. Конденсатор спочатку зарядили до напруги 65 В. Записати закони зміни заряду і напруги конденсатора та струму через котушку індуктивності. Яка сила струму в контурі буде у момент часу, коли напруга на конденсаторі зменшилася до 56,3 В? Коливання вважати незгасаючими.

Розв'язання

Для того, щоб у коливальному контурі здійснювались електричні коливання, треба, щоб в цей контур була підведена енергія, тобто треба зарядити конденсатор. Тому та напруга, до якої був заряджений конденсатор спочатку, є максимальним значенням напруги конденсатора U_m = 65 В. До того ж, рівняння залежності $U(t)$ повинно бути записаним в вигляді $U = U_m \cos\omega_0 t$ (2.35), бо саме воно задовольняє умові: в момент часу t = 0 миттєве значення напруги буде $U = U_m$.

Властива частота (2.37) коливань контуру

$$\omega_0 = 1\big/\sqrt{LC} = 1\big/\sqrt{400\cdot 10^{-6}\cdot 0,5\cdot 10^{-6}} = 7,07\cdot 10^{4}\ \text{с}^{-1}.$$

Тоді закон зміни напруги на конденсаторі $U(t)$:

$$U = U_m \cos\omega_0 t = 65\cos 7,07\cdot 10^{4} t\ \text{В}.$$

Тепер з урахуванням того, що $q = CU$, маємо:

$$q_m = CU_m = 0,5\cdot 10^{-6}\cdot 65 = 3,25\cdot 10^{-5}\ \text{Кл},$$

а закон зміни заряду (2.34) конденсатора (оскільки він співпадає по фазі із напругою на конденсаторі) запишемо у вигляді

$$q = q_m \cos\omega_0 t = 3,25\cdot 10^{-5}\cos 7,07\cdot 10^{4} t\ \text{Кл}.$$

Миттєве значення сили току (2.36) через котушку визначимо із залежності

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(q_m \cos\omega_0 t\right) = -q_m\omega_0 \sin\omega_0 t\,.$$

Оскільки в задачі не стоїть питання про визначення моменту часу, коли напруга на конденсаторі стає рівною 56,3 В, тому ми обмежимося знаходженням значення $\sin\omega_0 t$, який відповідає зазначеному моменту часу. Для цього використаємо основне тригонометричне відношення: $\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t = 1$.

З закону зміни напруги $U = U_m \cos\omega_0 t$

$$\cos\omega_0 t = \frac{U}{U_m} = \frac{56,3}{65} = 0,866 .$$

Тоді значення

$$\sin\omega_0 t = \sqrt{1-\cos^2\omega_0 t} = 0,5.$$

Сила струму в шуканий момент часу

$$I = -q_m\omega_0 \sin\omega_0 t = -3,25\cdot 10^{-5}\cdot 7,07\cdot 10^4\cdot 0,5 = -2,3\cdot 0,5 = -1,15 \text{ А.}$$

Задача 2

Коливальний контур, що складається з конденсатора ємністю C = 7 мкФ, котушки індуктивності L = 0,23 Гн та активного опору R = 40 Ом, заряджений до заряду q_0 = 0,56 м Кл. Знайти:

1) період коливань у контурі;

2) логарифмічний декремент згасання коливань;

3) записати рівняння залежності різниці потенціалів на обкладках конденсатору від часу.

Розв’язання

В коливальному контурі, що складається з ємності, індуктивності та активного опору, здійснюються вільні згасаючі коливання, період яких згідно з (2.50)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/\left(0,23\cdot 7\cdot 10^{-6}\right) - \left(40/2\cdot 0,23\right)^2}} = 8\cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Для визначення логарифмічного декремента згасання коливань (2.53), треба знайти коефіцієнт згасання:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \cdot 0,23} = 87 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді

$$\delta = \beta T = 87 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 0,7 .$$

Рівняння залежності різниці потенціалів на конденсаторі (2.47) від часу має вигляд:

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де максимальне значення напруги на конденсаторі

$$U_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{0,56 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ В};$$

а частота (2.49) згасаючих коливань

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}} = 250\pi = 785 \text{ с}^{-1}.$$

Заряд та напруга конденсатора знаходяться в одній фазі. Якщо в початковий момент часу конденсатор був заряджений, то в цей момент і напруга на конденсаторі була максимальною. Отже початкова фаза $\alpha = 0$. Тоді рівняння залежності різниці потенціалів на обкладках конденсатору від часу має вигляд

$$U = 80 e^{-0,7t} \cos(250\pi t).$$

Задача 3

Знайти кількість коливань, що потрібна для того, щоб амплітуда заряду у контурі з логарифмічним декрементом згасання 0,0004 зменшилася вп'ятеро. Записати закони зміни заряду, напруги та струму у залежності від часу, якщо спочатку конденсатор був заряджений до напруги 100 В. Частота згасаючих коливань дорівнює $2 \cdot 10^3$ $с^{-1}$, індуктивність котушки 0,5 мГн.

Розв'язання

Якщо за певний час амплітуда заряду зменшилась вп'ятеро, тоді

$$5 = \frac{q_0}{q_t} = \frac{q_0}{q_0 \cdot e^{-\beta t}} = e^{\beta t},$$

$$\beta t = \ln 5 .$$

Зважаючи на те, що час зменшення амплітуди складається з N періодів коливань (рис. 2.33), тобто $t = NT$, запишемо:

$$\ln 5 = \beta t = \beta NT = N\delta .$$

Звідси

$$N = \frac{\ln 5}{\delta} = \frac{1,609}{0,0004} = 4020 .$$

Ця кількість коливань здійснюється за час

$$t = NT = \frac{2\pi N}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 4020}{2 \cdot 10^3} = 12,6 \text{ с.}$$

З огляду на це, коефіцієнт згасання коливань

$$\beta = \frac{\ln 5}{t} = \frac{1,609}{12,6} = 0,128 .$$

Закон зміни в часі напруги на конденсаторі має вигляд

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) .$$

Для того, щоб записати цю функціональну залежність для процесу коливань, що розглядається в цій задачі, треба визначитися з максимальним значенням напруги U_0 та початковою фазою α. Виходячи з даних задачі, конденсатор спочатку був заряджений до напруги 100 В, а це означає, що U_0 =100 В. Тоді в момент часу $t = 0$ миттєве значення напруги $U = U_0$, а це є можливим за умов, що початкова фаза $\alpha = 0$.

Циклічна частота

$$\omega = 2\pi\upsilon = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 = 4\pi \cdot 10^3 \text{ рад/с.}$$

Остаточно, залежність напруги на конденсаторі від часу:

$$U = 100 \cdot e^{-0,126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t .$$

Закон зміни в часі заряду конденсатора має вигляд:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \alpha\right).$$

Зважаючи на те, що $C = \dfrac{q}{U}$, максимальний заряд конденсатора $q_0 = CU_0$. Для визначення ємності конденсатору використаємо те, що $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$. Звідки

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$$

Тоді максимальне значення заряду конденсатора

$$q_0 = CU_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ Кл},$$

а залежність заряду на конденсаторі від часу виглядає так:

$$q = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-0{,}126t} \cdot \cos 4\pi \cdot 10^3 t \text{ Кл}.$$

Для отримання залежності від часу струму через котушку треба здиференціювати функцію $q(t)$:

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta),$$

де $I_0 = \omega q_0$, $\cos\delta = -\beta/\omega_0$, $\sin\delta = \omega/\omega_0$.

$$I_0 = q_0 \omega = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2{,}6 \text{ А},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\frac{\sin\delta}{\cos\delta} = tg\delta = -\frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0 \cdot \beta} = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{4\pi \cdot 10^3}{0{,}128} = -9{,}8 \cdot 10^4,$$

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(-9{,}8 \cdot 10^4\right) \approx -\frac{\pi}{2},$$

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta) = I_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_0 e^{-\beta t} \sin\omega t.$$

Остаточно, залежність струму через котушку від часу має вигляд

$$I = -2{,}6 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin 4\pi \cdot 10^3 t.$$

Задача 4

Властива частота коливань контуру υ_0 *= 8 кГц, добротність* Q *= 72. У контурі збуджують згасаючи коливання. Визначити:*

1) закон убування запасеної енергії з часом $W(t)$

2) яка частина початкової енергії залишиться в контурі по закінченні часу τ_1 *=1 мс.*

Розв'язання

1) Будемо вважати, що коливання в контурі починаються із зарядки конденсатора максимальним зарядом q_0. При цьому енергія зарядженого конденсатора дорівнюватиме $W_{0C} = \frac{q_0^2}{2C}$. При $t = 0$ струму в контурі ще немає, отже немає і магнітного поля котушки, тобто, $W_{0L} = \frac{LI^2}{2} = 0$, а повна енергія контуру дорівнює енергії зарядженого конденсатора $W_0 = W_{0C} = \frac{q_0^2}{2C}$. З часом максимальний заряд конденсатора буде зменшуватися згідно із законом $q(t) = q_0 e^{-\beta \cdot t}$. Таким чином, повна енергія зменшуватиметься згідно з виразом

$$W_t = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{\left(q_0 e^{-\beta t}\right)}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cdot e^{-2\beta t} = W_0 \cdot e^{-2\beta t}.$$

2) Енергія, що залишиться в контурі по закінченні часу τ_1 = 1 мс, дорівнює

$$W_\tau = W_0 \cdot e^{-2\beta\tau}.$$

Ця енергія складає деяку частку початкової енергії, для знаходження якої визначимо відношення

$$\frac{W_\tau}{W_0} = \frac{W_0 \cdot e^{-2\beta\tau}}{W_0} = e^{-2\beta\tau}.$$

Для розрахунків нам потрібно визначити коефіцієнт згасання β. Для цього спочатку знайдемо логарифмічний декремент згасання коливань із (2.53):

$$\delta = \frac{\pi}{Q} = \frac{\pi}{72} = 0,0436 .$$

З іншого боку: $\delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$. Виразимо звідси β, для чого піднесемо цей вираз до квадрату:

$$\delta^2 = \frac{\left(2\pi\beta\right)^2}{\omega_0^2 - \beta^2} ,$$

$$\delta^2\omega_0^2 - \delta^2\beta^2 = 4\pi^2\beta^2 ,$$

$$\delta^2\omega_0^2 = \beta^2\left(4\pi^2 + \delta^2\right),$$

$$\beta = \frac{\delta\omega_0}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} .$$

Оскільки $\delta^2 \ll 4\pi^2$, то

$$\beta = \frac{\delta\omega_0}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \approx \frac{\delta\omega_0}{2\pi} .$$

Тоді

$$\beta = \frac{\delta\omega_0}{2\pi} = \frac{\delta 2\pi\upsilon_0}{2\pi} = \delta\upsilon_0 = 0,0436 \cdot 8 \cdot 10^3 = 349 \text{ с}^{-1}.$$

Остаточно,

$$\frac{W_\tau}{W_0} = e^{-2\beta\,\tau_1} = e^{-2\cdot 349\cdot 0,001} = 0,5 .$$

Таким чином, після скінчення інтервалу часу τ_1 = 1 мс у контурі залишиться половина початкової енергії.

Задача 5

Коливальний контур має ємність C = 10 мкФ, індуктивність L = 25 мГн та активний опір R = 0,1 Ом. Знайти, який проміжок часу знадобиться для того, щоб енергія, що була запасена в цьому контурі, зменшилася в e^2 *разів, і через скільки коливань це станеться. Визначити логарифмічний коефіцієнт згасання коливань.*

Розв'язання

Запасена у контурі енергія $W = \dfrac{q^2}{2C}$ пропорційна q^2, тому миттєве значення енергії

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(q_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \alpha\right)\right)^2}{2C} =$$

$$= \frac{q_0^2}{2C} e^{-2\beta t}\cos^2\left(\omega t + \alpha\right) = W_0 e^{-2\beta t}\cos^2\left(\omega t + \alpha\right),$$

причому амплітуда енергії залежить від часу згідно з $W_t = W_0 e^{-2\beta t}$. Тоді

$$\frac{W_0}{W_t} = \frac{W_0}{W_0 e^{-2\beta t}} = e^{2\beta t}.$$

Згідно з умовами задачі

$$\frac{W_0}{W_t} = e^{2\beta t} = e^2,$$

звідки

$$\beta t = 1.$$

Коефіцієнт згасання (2.51)

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{0{,}1}{2\cdot 25\cdot 10^{-3}} = 2 \ \text{с}^{-1}.$$

Тоді проміжок часу, протягом якого енергія, що була запасена у контурі, зменшиться в e^2 разів, становитиме

$$t = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \ \text{с}.$$

До речі, зауважимо, що цей проміжок часу називається часом релаксації τ .

Для визначення числа коливань, що здійснюються за цей час, знайдемо частоту згасаючих електричних коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,01}{4 \cdot 625 \cdot 10^{-6}}} = 2000 \text{ с}^{-1}.$$

Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2000} = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Тоді з $\beta t = \beta NT = 1$, шукана кількість коливань

$$N = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3}} = 159 .$$

Логарифмічний коефіцієнт згасання коливань

$$\delta = \beta T = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-3} = 6,28 \cdot 10^{-3} .$$

Задача 6

Індуктивність L коливального контуру дорівнює 0,5 мГн. Якою повинна бути електроємність C контуру для того, щоб він резонував на довжину хвилі λ *= 300 м?*

Розв'язання

Умова резонансу: частота хвилі повинна збігатися з власною частотою коливань коливального контуру $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Довжина електромагнітної хвилі при швидкості c = $3 \cdot 10^8$ м/с становить

$$\lambda = cT = c\frac{2\pi}{\omega} = c\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi c\sqrt{LC}\ ,$$

Звідки

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{9\cdot 10^4}{4\cdot\pi^2\cdot 9\cdot 10^{16}\cdot 0,5\cdot 10^{-3}} = 5\cdot 10^{-11}\ \text{Ф} = 50\ \text{пФ}.$$

Задача 7

Знайти ємність конденсатора, якщо довжина хвилі електромагнітного випромінювання коливального контуру 300 м, швидкість зміни сили струму у котушці 4 А/с, а електрорушійна сила, що виникає у контурі, дорівнює 0,04 В.

Розв'язання

У коливальному контурі виникає електрорушійна сила самоіндукції згідно із законом Фарадея (2.28)

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}\ ,$$

звідки можна знайти індуктивність контуру

$$L = \frac{\varepsilon_s}{\Delta I/\Delta t} = \frac{0,04}{4} = 0,01\ \text{Гн}.$$

Якщо період електромагнітних коливань (2.40) $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, а швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в вакуумі (повітрі) $c = 3\cdot 10^8$ м/с, то довжина хвилі, що випромінює коливальний контур, $\lambda = cT = c2\pi\sqrt{LC}$.

Звідси ємність конденсатора

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{300^2}{4\pi^2\cdot\left(3\cdot 10^8\right)^2\cdot 0,01} = 2,53\cdot 10^{-12}\ \text{Ф} = 2,53\ \text{пФ}.$$

Задача 8

У ланцюг змінного струму з напругою U = 220 В та частотою υ = 50 ц підключені послідовно ємність С = 35,4 мкФ, активний опір R = 100 Ом та індуктивність L = 0,7 Гн. Знайти силу струму в ланцюзі та падіння напруги на ємності, омічному опорі та індуктивності.

Розв'язання

За умовою задачі в електричному ланцюзі діє змінна напруга

$$U = U_m \cos\omega t = U_m \cos 2\pi\upsilon t ,$$

під впливом якої в ланцюзі протікає струм (2.63) $I = I_m \cos\left(\omega t + \phi\right)$. Для знаходження амплітудних (максимальних) значень напруги побудуємо векторну діаграму (рис. 2.34).

Оскільки сила струму однакова по всьому ланцюзі, направимо вісь струму вздовж позитивного напрямку осі *x*. Від сили струму відкладемо амплітуди напруги на опорі $U_{R\mathrm{m}} = I_m R$, на індуктивності $U_{L\mathrm{m}} = I_m \omega L$ та на ємності $U_{C\mathrm{m}} = \dfrac{I_m}{\omega C}$, враховуючи те, що на активному опорі напруга співпадає по фазі з силою струму, напруга на індуктивності випереджує струм по фазі на $\dfrac{\pi}{2}$, а напруга на ємності відстає від струму по фазі на $\dfrac{\pi}{2}$. Вислідний вектор U_m дорівнює амплітуді зовнішньої напруги. З векторної діаграми випливає зв'язок між максимальними значеннями напруг $U_m^2 = U_{Rm}^2 + \left(U_{Lm}^2 - U_{Cm}^2\right)$, звідки, з врахуванням значень для відповідних напруг, одержуємо амплітудне значення сили струму:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{U_m}{Z} .$$

Індуктивний опір

$$X_L = \omega L = 2\pi\upsilon L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,7 = 220 \text{ Ом},$$

ємнісний опір

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \upsilon C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 35,4 \cdot 10^{-6}} = 90 \text{ Ом},$$

імпеданс (2.73)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} =$$

$$= \sqrt{10^4 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0,7 - 1/2\pi \cdot 50 \cdot 35,4 \cdot 10^{-6}\right)^2} = 164 \text{ Ом}.$$

Дієве значення сили струму

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{164} = 1,34 \text{ А}.$$

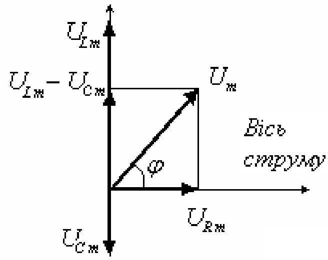

Рис. 2.36

Падіння напруги на ємності

$$U_C = I \cdot X_C = 1,34 \cdot 90 = 120,6 \text{ В}.$$

Падіння напруги на індуктивності

$$U_L = I \cdot X_L = 1,34 \cdot 220 = 295 \text{ В}.$$

Падіння напруги на активному омічному опорі

$$U_R = I \cdot R = 1,34 \cdot 100 = 134 \text{ В}.$$

Видно, що сума дієвих значень напруг (як і амплітудних значень напруг) при послідовному з’єднанні елементів ланцюгу не дорівнює дієвому значенню напруги, що прикладається:

$$U \neq U_R + U_C + U_L \,.$$

Зв'язок між ними заданий векторною діаграмою (рис. 2.36)

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \,.$$

Задача 9

Котушка завдовжки l = 50 см з площею поперечного перерізу S = 10 см^2 включена в ланцюг змінного струму частотою υ = 50 Гц. Число витків котушки N = 13000. Визначити опір котушки, якщо зсув фаз між напругою та опором становить ϕ =60°.

Розв’язання

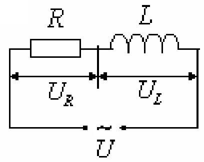

Рис. 2.37

Котушку із активним опором та індуктивністю можна розглядати як послідовно включені *R* та *L* в ланцюг змінного струму (рис. 2.37). Для розв’язання задачі скористаємося векторною діаграмою (рис. 2.38).

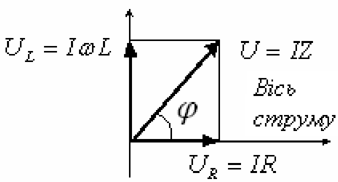

Рис. 2.38

При послідовному з’єднанні *R* та *L* фаза сили струму однакові в активному та індуктивному опорах, тому спрямуємо вісь струму (рис. 2.38) вздовж позитивного напряму осі *x*. Спад напруги на активному опорі $U_R = IR$ співпадає по фазі з фазою струму, а спад напруги на індуктивності $U_L = I\ \omega L$ випереджає силу струму по фазі на $\frac{\pi}{2}$. Вислідний вектор *U* визначає зовнішню напругу. Зсув фаз між напругою та струмом ϕ дорівнює куту між віссю струму та вислідним вектором напруги.

Визначимо кут ϕ з векторної діаграми:

$$tg\phi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{I \cdot \omega L}{I \cdot R} = \frac{\omega L}{R}.$$

Тоді

$$R = \frac{\omega L}{tg\phi} = \frac{2\pi \upsilon L}{tg\phi}.$$

Індуктивність соленоїда

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \ .$$

Остаточно

$$R = \frac{\omega L}{tg\phi} = \frac{2\pi\upsilon\mu_0 N^2 S}{l \cdot tg 60^0} \ .$$

Підставляючи числові значення, одержимо

$$R = \frac{2\pi\upsilon\mu_0 N^2 S}{l \cdot tg 60^0} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(1,3 \cdot 10^5\right)^2 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 1,73} = 4,1 \text{ Ом.}$$

Задача 10

Два конденсатори з ємностями C_1 *= 0,52 мкФ та* C_2 *= 0,1 мкФ включені послідовно в ланцюг змінного струму напругою 220 В та частотою 50 Гц. Визначить струм в ланцюзі та спад потенціалу на кожному з конденсаторів.*

Розв'язання

Повний опір Z системи двох конденсаторів складається з двох ємнісних опорів X_{C1}, X_{C2}, з'єднаних послідовно:

$$Z = X_{C1} + X_{C2} \, ,$$

де

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi\nu C_1} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Ом,}$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\pi\nu C_2} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Ом.}$$

Тоді повний опір

$$Z = X_{C1} + X_{C2} = 1,6 \cdot 10^4 + 3,2 \cdot 10^4 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Ом.}$$

Діюче значення сили струму

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{4{,}8 \cdot 10^4 \cdot} = 4{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Діючі напруги на першому та другому конденсаторах:

$$U_{C1} = IX_{C1} = 4{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^4 = 73{,}6 \text{ В,}$$
$$U_{C2} = IX_{C2} = 4{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}2 \cdot 10^4 = 147{,}2 \text{ В.}$$

Задача 11

Реостат з активним опором R = 150 Ом включений в ланцюг змінного струму частотою 50 Гц. Визначте повний опір ланцюга змінного струму, якщо до реостату паралельно підключили:

1) ємність C = 10 мкФ;

2) індуктивність L = 3·10^{—2} Гн.

Розв'язання

Повний опір ланцюга визначимо за допомогою векторних діаграм.

1) При паралельному підключенні опору та ємності в ланцюзі змінного струму (рис. 2.39) зовнішня напруга однакова для усіх елементів ланцюга. Для миттєвих значень струму справедливим є вираз:

$$I_м = I_{Rм} + I_{Cм}.$$

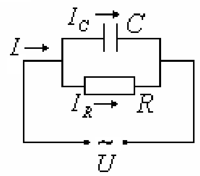

Рис. 2.39

Для визначення максимальних та діючих значень побудуємо векторну діаграму. Вздовж осі *x* направимо вісь напруги. Сила струму в активному опорі та прикладена до нього напруга збігаються по фазі. На ємності напруга відстає від сили струму на $\frac{\pi}{2}$, отже, струм випереджає напругу по фазі на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.40). Вислідний

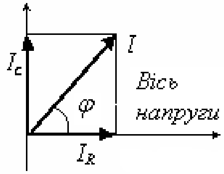

Рис. 2.40

вектор визначає максимальне (та діюче) значення струму. З векторної діаграми видно, що ці значення зв'язані:

$$I^2 = I_R^2 + I_C^2$$

Врахуємо, що

$$I = \frac{U}{Z}, \qquad I_R = \frac{U}{R}, \qquad I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C,$$

та одержимо:

$$\left(\frac{U}{Z}\right)^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(U\omega C\right)^2,$$

$$\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C\right)^2,$$

звідки повний опір

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}.$$

Врахуємо, що $\omega = 2\pi\upsilon$, та остаточно одержимо опір ланцюгу змінного струму при паралельному з'єднанні активного опору та ємності:

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1+4\pi^2\nu^2 C^2 R^2}} = \frac{150}{\sqrt{1+4\pi^2 50^2 10^{-10} 150^2}} = 136 \text{ Ом}.$$

2) Як і в першому випадку, при паралельному з'єднанні активного опору та індуктивності у будь-який момент часу до них прикладена однакова напруга.

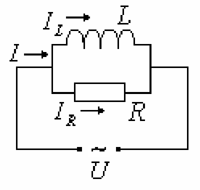

Рис. 2.41

Миттєві значення струмів у вітках зв'язані:

$$I_{\text{м}} = I_{R\text{м}} + I_{L\text{м}}.$$

Проте значення діючих струмів необхідно визначити з векторної діаграми. Вісь напруги направимо уздовж осі *x*. Напруга та сила струму в активному опорі збігаються по фазі. На індуктивності напруга

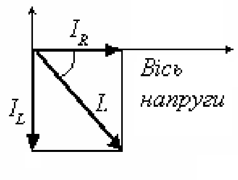

Рис. 2.42

випереджає по фазі силу струму на $\frac{\pi}{2}$, отже, струм відстає по фазі від напруги $\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.42). Вислідний вектор визначає максимальне (і діюче) значення загального струму. Зв'язок між максимальними (і діючими) значеннями струмів має наступний вигляд:

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2$$

Оскільки

$$I = \frac{U}{Z},$$

$$I_R = \frac{U}{R},$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L},$$

то

$$\left(\frac{U}{Z}\right)^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega L}\right)^2.$$

Тоді повний опір при паралельному з'єднанні опору та індуктивності в ланцюзі змінного струму

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{R 2\pi\nu L}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}} =$$

$$= \frac{150 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{150^2 + 4\pi^2 50^2 \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2}} = 9,4 \text{ Ом.}$$

Універсальні сталі		
Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль (світла) в вакуумі		$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
Електрична стала		$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала		$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Елементарний заряд (протон, електрон)		$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса електрона		$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса протона		$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
Властивості речовин		
Речовина	*Густина, кг/м^3*	*Питомий опір, нОм·м*
Алюміній	$2{,}6 \cdot 10^3$	25
Залізо	$7{,}9 \cdot 10^3$	87
Мідь	$8{,}6 \cdot 10^3$	17

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 464 с.

2. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / И.Е. Иродов. – М. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

3. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1990. – 400 с.

4. Чертов А.Г. Задачник по физике: учеб. пособ. / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.

6. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – М. : Высш. шк., 1978. – 351 с.

7. Мясников С.П. Пособие по физике / С.П. Мясников, Т.Н. Осанова. – М. : Высш. шк., 1988. – 399 с.

8. Російсько-український фізичний словник / В.В. Гейченко, О.З. Жмудський, П.П. Кузьменко, Є.Д. Майборода. – Харків : Основа, 1990 – 211 с.

9. Російсько-український словник наукової термінології: Математика. Фізика. Техніка. Науки про землю та космос / В.В. Гейченко, В.М. Завірюхіна, О.О. Зеленюк, В.Г. Коломієць, М.І. Кратко, В.В. Тельнюк-Адамчук, М.П. Хоменко. – К. : Наук. думка, 1998. – 892 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до розв’язання задач за темою "Електромагнетизм. Частина ІІ. Магнетизм" з курсу "Загальна фізика" українською мовою для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання

Укладачі: БУРЛАКОВА Маргарита Всеволодівна
ВЕТЧИНКІНА Зоя Костянтинівна
ДЗЮБЕНКО Наталя Іванівна
ЛЄДЄНЬОВ Володимир Васильович
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
ТАВРІНА Тетяна Володимирівна

Роботу до видання рекомендував проф. О.П. Сук
Відповідальний за випуск – проф. О.Г. Багмут

План 2010 р., поз. 24 / 58-10

Підп. до друку 22.03.2010. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 3,0.
Наклад 200 прим. Зам. №____ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21