

УДК 621.24

**С.Д. КОСТОРНОЙ**, д-р техн. наук; проф. СумГУ, Сумы;  
**А.О. БОНДАРЕВ**, аспирант СумГУ, Сумы;  
**Л.К. МАРЧЕНКО**, аспирант СумГУ, Сумы

### АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА

Предлагается алгоритм первого этапа проектирования на ЭВМ проточной части (ПЧ) рабочего колеса (РК) центробежного насоса (ЦН), который основан на законах течения рабочей жидкости, определяемых уравнениями Эйлера – движения, передачи и сохранения энергии, уравнением неразрывности, а также на большом опыте их применения.

**Ключевые слова:** обратная задача, математическая модель, рабочее колесо, линия тока, потенциальное течение, вихревое течение.

#### Введение

Величина энергии жидкости, передаваемой рабочим колесом насоса и называемая теоретическим напором  $H_T$ , определяется основным уравнением Эйлера.

$$H_T = U_2 V_{u2} - U_1 V_{u1} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}, \quad (1)$$

в котором  $W$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $V_u$  – относительная, переносная, абсолютная скорости и проекция соответствующей скорости на переносную; индексы 1, 2 – вход и выход на лопасть РК.

Данное уравнение получено в предположении, что течение жидкости осесимметричное, жидкость невязкая, толщина лопасти бесконечно тонкая и оно физически возможно, когда количество лопастей бесконечно большое. Общепринятая модель РК обосновывается тем, что, например, при 1500 оборотов в минуту или 25 оборотов в секунду, реальная скорость в точке проточной части экспериментально определяется за более продолжительный срок и может быть адекватной только осредненной по времени и пространству. Поэтому при проектировании ПЧ вводят понятие осредненной скорости. Сечения ПЧ, в которых выполняется уравнение неразрывности, должны быть перпендикулярными к линиям тока. Их называют «живыми сечениями», а нестационарные и переменные параметры заменяют осредненными. Принятые условия в математической модели (ММ) рабочего колеса соответствуют модели осесимметричного течения рабочей жидкости.

Сложность этапа проектирования состоит в том, что он требует соединения математических моделей и специальных знаний. Но ММ никогда не является тождественной рассматриваемому объекту, так как она не передает всех его свойств и особенностей. Основанная на упрощении, идеализации, она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, всегда носят для объекта приближенный характер. Их точность определяется степенью соответствия, модели и объекта. Вопрос о точности, о достоверности результатов – это один из самых тонких вопросов прикладной математики. Наиболее просто он решается в случаях, когда хорошо известны законы, определяющие поведение и свойства объекта и имеется большой практический опыт их применения. Тогда можно априори, т.е. до начала решения математической задачи оценить точность результатов, которую

---

© С.Д. Косторной, А.О. Бондарев, Л.К. Марченко, 2013

обеспечивает рассматриваемая модель. Для их проверки необходимо сопоставить результаты исследований модели со всей имеющейся информацией об изучаемом объекте. Степень близости расчетных величин и экспериментальных позволяет судить о качестве гипотетической модели, о справедливости или ошибочности исходных предположений. Таким образом, вопрос применимости некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. Только критерий практики позволяет сравнивать различные гипотетические модели и выбрать из них ту, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого физического явления.

Многолетний опыт проектирования, изготовления и эксплуатации ЦН, обобщенный в виде рекомендаций, приведен в табл. 1. Как правило, он используется на первом этапе проектирования – «выбор основных геометрических размеров проточной части на заданные параметры».

Таблица 1  
Зависимость параметров проточной части насоса от коэффициента быстроходности

Наименование лопастных насосов	Центробежные		
	Тихоходные	Нормальные	Быстроходные
Коэффициент быстроходности $n_s$	$50 < n_s < 80$	$80 < n_s < 150$	$150 < n_s < 300$
Эскиз сечения рабочего колеса	рис. 1а	рис. 1б	рис. 1в
	$D_2/D_0 \approx 2,5$	$D_2/D_0 \approx 2$	$D_2/D_0 \approx 1,8-1,4$
Коэффициент диффузорности $v_{1M}/v_{2M}$	1,6–1,2	1,2–1,0	1,0–0,95
Углы охвата $\theta$ , град	140–120	120–110	110–80

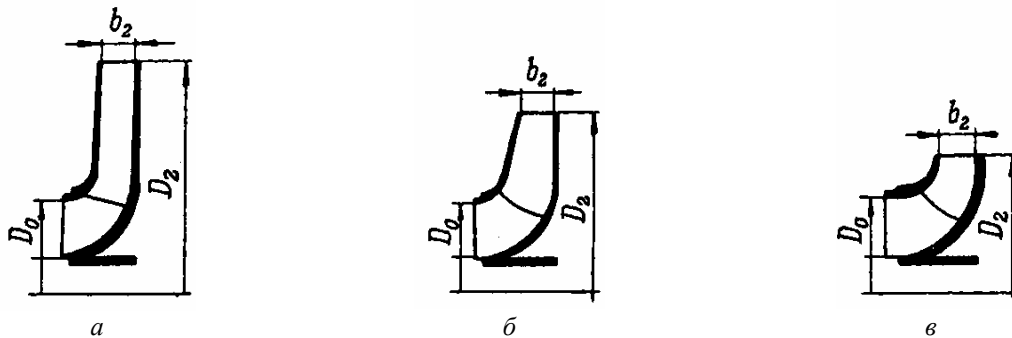


Рис. 1 – Эскиз меридианного сечения рабочего колеса

### 1 Кинематические условия течения жидкости в проточной части

Важным моментом успешного проектирования, является выбор математической модели жидкости и обоснования ее на основе законов сохранения энергии и неразрывности [1–3].

Для этого, учитывая особенности осесимметричного течения несжимаемой жидкости, будем характеризовать его тремя системами кривых линий: траекториями, линиями тока и вихревыми линиями, представляя вектор вихря в виде суммы двух векторов

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_\tau + \bar{\Omega}_n = \left( \frac{\bar{V} \cdot \bar{\Omega}}{\bar{V} \cdot \bar{V}} \right) \cdot \bar{V} + \frac{\bar{V} \times (\bar{\Omega} \times \bar{V})}{\bar{V} \cdot \bar{V}}, \quad (2)$$

где  $\bar{\Omega}_\tau$  и  $\bar{\Omega}_n$  – проекции вектора вихря на линию тока и нормаль к ней. Так как  $\text{div} \bar{\Omega} = 0$ ,  $\text{div} \bar{V} = 0$ ,  $\bar{V} \cdot \bar{V} = V^2$ , полученное выражение запишем в виде скорости развития винтового течения [3]

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\Omega_\tau}{V} \right) = -\frac{1}{V} \text{div} \left[ \frac{V \times (\Omega \times V)}{V^2} \right]. \quad (3)$$

Чтобы определить изменение величины  $\Omega_\tau/V$  вдоль линии тока с ее геометрическими параметрами, правую часть уравнения (3) преобразуем к виду [1]

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_\tau}{V} \right) = \frac{2\Omega_n}{V \cdot r} - \frac{\bar{\tau}}{V^2} \text{rot}(\bar{V} \times \bar{\Omega}), \quad (4)$$

где  $\bar{\tau}$  и  $\bar{n}$  – единичные векторы касательной и главной нормали к линии тока;  $r$  – радиус ее кривизны.

Уравнение (4) представляет собой кинематическое решение, выражающее изменение вихря по потоку в направлении течения при установившемся движении через компоненту вихря по главной нормали и величину вектора Громеки-Ламба по направлению течения. Оно показывает, что  $\Omega_\tau/V$  может развиваться не только вследствие неравномерного поля скоростей в живом сечении, которое выражено величиной  $\Omega_n$ , но и когда  $\bar{\tau} \cdot \text{rot}[\bar{V} \times \bar{\Omega}]$  не обращается в нуль, если линии тока прямолинейные.

Чтобы учесть влияние вязкости на развитие винтового течения, выразим вектор  $\text{rot}[\bar{V} \times \bar{\Omega}]$  из уравнения Навье-Стокса для стационарного течения.

$$\bar{V} \times \bar{\Omega} = \text{grad} \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + U \right) - \nu \nabla^2 \bar{V}. \quad (5)$$

Применив операцию ротора к уравнению (5), получим выражение

$$\text{rot}(\bar{V} \times \bar{\Omega}) = -\nu \nabla^2 \bar{\Omega}, \quad (6)$$

которое определяет, что течение реальной жидкости должно быть вихревым. Но так как при выводе уравнения Навье-Стокса не делалось каких-либо предположений о режиме движения, а другие физические свойства не изменяются, то можно предполагать, что обобщенная гипотеза Ньютона, а значит и опирающееся на нее уравнение Навье-Стокса справедливо как при ламинарном, так и при турбулентном движении жидкости. Однако в последнем случае использовать уравнения Навье-Стокса для получения каких-либо прикладных решений практически невозможно.

Подставив значение  $\text{rot}[\bar{V} \times \bar{\Omega}]$  из (6) в (5), получим выражение для изменения  $\Omega_\tau/V$  вдоль линии тока в вязкой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_\tau}{V} \right) = \frac{2\Omega_n}{V \cdot r} + \nu \frac{\nabla^2 \Omega_\tau}{V^2}. \quad (7)$$

Уравнение (7), справедливое в общем случае стационарного движения жидкости, может быть использовано для развития винтового течения, как в идеальной, так и в вязкой жидкости. Выражение  $\frac{2\Omega_n}{V \cdot r}$  характеризует взаимодействие кривизны линии тока и градиента неравномерной скорости. Его можно рассматривать как «источник» направленной по потоку завихренности  $\Omega_\tau$ , а влияние вязкости сводится к отводу или диссипации  $\Omega_\tau$ . Поэтому, вязкость, будучи диссипативной, не может сама по себе создавать дополнительную закрутку или противотоки, хотя и является причиной резкого градиента скорости. В общем случае течения жидкости величина

$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\Omega_\tau}{V} \right) = \frac{1}{V} \text{div} \left[ \frac{\bar{V} \times (V \times \bar{\Omega})}{V^2} \right]$  равняется нулю в случаях:

а) винтового потока

$$\bar{\Omega} \times \bar{V} = 0; \quad (8)$$

б) сложно слоистого (квазипотенциального) потока

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{V} = 0, \quad (9)$$

который характеризует отсутствие винтового течения.

## 2 Уравнения вихревого двухпараметрического потока в криволинейной ортогональной системе координат

Установившийся осесимметричный двухпараметрический вихревой поток невязкой жидкости в ортогональной криволинейной системе координат  $q_1, q_2, q_3$  (рис. 2) определяется следующей системой уравнений [4]:

$$\left. \begin{aligned} H_2 H_3 V_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, & H_3 H_1 V_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}; \\ H_3 V_3 &= \Phi(\psi); \\ E &= -F(\psi); \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot \Phi(\psi) \cdot \Phi'(\psi) + H_1 H_2 H_3 F'(\psi) = 0$$

где  $\psi$  – функция тока;  $H_1, H_2, H_3$  – коэффициенты Лямэ;  $\Phi, F$  – произвольные функции.

Полученные в [4] уравнения (10) при сделанных предположениях заменяют собою исходную систему уравнений движения жидкости Эйлера [5]

$$\frac{d\bar{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{V} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (11)$$

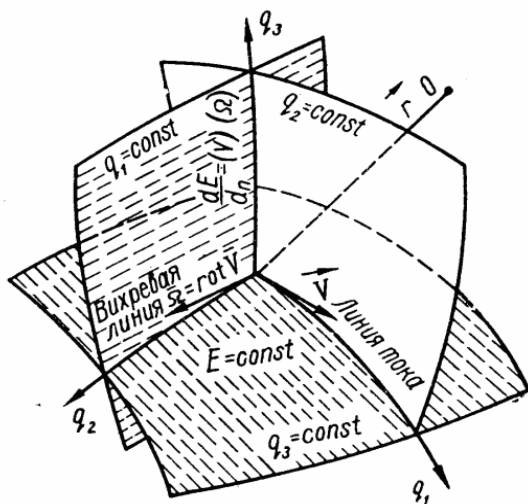


Рис. 2 – Криволинейная система координат

продольной –  $V_1$ .

Большой интерес уравнения (8), (9) представляют для исследования различных осесимметричных потоков с окружной скоростью  $V_u \neq 0$ , встречающихся в гидравлических машинах, так как уравнение (9) удовлетворяет необходимому и достаточному условиям существования криволинейной системы координат, живых сечений и выполнению основного уравнения Эйлера (1) передачи энергии жидкости рабочим колесом, то оно должно быть принято для проектирования РК.

Так как в выбранной системе координат ось  $q_1$  совпадает с линией тока меридианного потока, то  $V_1 = V_m$ ,  $V_3 = V_u$ ,  $H_3 = r$ ,  $V_2 = 0$  уравнение (11) будет иметь вид

$$H_1 V_m \frac{\partial(V_u r)}{\partial q_2} + V_u r \left( \frac{\partial(H_1 V_m)}{\partial q_2} \right) = 0, \quad (12)$$

решая которое относительно  $V_u r$ , получим выражение

$$V_u r = \psi(q_1) H_1 V_m, \quad (13)$$

где  $\psi(q_1)$  – произвольная постоянная функция от  $q_1$  уравнения (10).

Для определения функции  $\psi(q_1)$  примем, что на исходной линии тока меридианного потока (например, линии тока «С») закон изменения величины  $V_u r$  известен в соответствии с уравнением (1) и дополнительных условий, предъявляемых к гидродинамическим характеристикам проектируемой лопасти РК как граничное условие. Тогда из (13) получим закон изменения  $V_u r$  на соседней линии тока В–В и аналогично на всех остальных линиях тока.

$$(V_u r)_b = \frac{(V_u r)_c}{(H_1 V_m)_c} (H_1 V_m)_b, \quad (V_u r)_a = \frac{(V_u r)_c}{(H_1 V_m)_c} (H_1 V_m)_a, \text{ и т. д.}$$

где  $(V_u r)_c$  – заданное граничное условие.

Особенностью осесимметричных потоков, подчиняющихся приведенным уравнениям (10), является выполнение закона площадей для окружной скорости  $V_u r = \text{const}$  на каждой поверхности  $\psi = \text{const}$  и поэтому должно применяться для проектирования неподвижных элементов ПЧ.

Система уравнений (11), и вытекающие из них результаты представляют значительный интерес для исследования потоков в ПЧ РК, характерной чертой которых является существование поперечной циркуляции. Для ПЧ гидравлической машины поперечными скоростями будут  $V_2$  и  $V_3$ , а

По известным скоростям меридианного и циркуляционного потоков определяются линии тока в плане, которые с линиями тока меридианного потока представляют собой искомую поверхность бесконечно тонкой лопасти (рис. 4).

**Выводы**

Таким образом, решение обратной задачи, удовлетворяющей всем условиям ММ течения жидкости на основе законов сохранения энергии, массы и основного уравнения Эйлера, предлагается выполнять по следующей схеме:

- 1) на требуемые параметры выбрать геометрические размеры проточной части рабочего колеса (рис. 3), учитывая рекомендации, приведенные табл. 1;
- 2) задать меридианный поток необходимой диффузорности и рассчитать его (рис. 3);
- 3) принять в качестве граничных условий на одной из линий тока закон изменения зависимости циркуляционного потока от меридианного и определить его на остальных;
- 4) выполнить расчеты всех линий тока в плане и отобразить графически (рис. 4);
- 5) подготовить файл исходных данных для выполнения второго этапа проектирования – выбор толщины лопасти и решения прямой задачи.

Пример практического выполнения на ЭВМ первого этапа проектирования, который занимает до 10 минут, приведен на рис. 3, 4 и табл. 2.

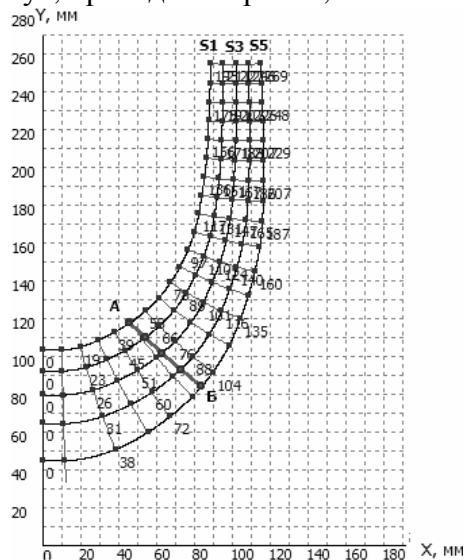


Рис. 3 – Меридианный поток в ПЧ РК (А-Б – положение входной кромки)

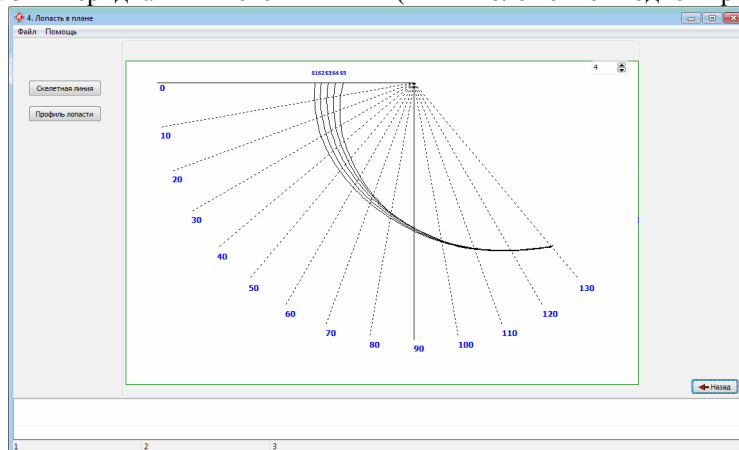


Рис. 4 – Проекция поверхности тока в плане

Поверхність лопасті

Координати от входной кромки (рис. 3)	X1	y1	x2	y2	--	x5	Y5
Сечение 1	45.18	112.93	53.48	105.50	--	82.76	79.93
Сечение 2	47.94	117.60	56.74	110.86	--	85.80	86.97
Сечение 3	52.30	121.00	60.68	114.28	--	89.48	92.08
Сечение 4	56.67	124.98	64.82	118.45	--	93.53	98.57
Сечение 5	60.52	129.11	68.91	123.35	--	97.44	105.98
Сечение 6	64.75	134.54	73.18	129.46	--	101.24	114.75
--	--	--	--	--	--	--	--
Сечение 13	86.13	225.97	93.08	226.04	--	113.79	226.16
Сечение 14	86.99	249.65	93.49	249.64	--	113.02	249.44

В дальнейшем будет предложен процесс проектирования реальной лопасти на основе решения прямой трехмерной задачи в нестационарной постановке с учетом взаимного влияния всех элементов ПЧ и сил вязкостного трения.

**Список литературы:** 1. Косторной, С.Д. Построение радиально-осевой турбины в осесимметричном потоке [Текст] / С.Д. Косторной // Гидравлические машины. – 1968. – № 2 – С. 116-122. 2. Косторной, С.Д. Выбор формы течения жидкости при проектировании решеток [Текст] / С.Д. Косторной // Гидравлические машины. – 1971. – № 5 – С. 8-12. 3. Косторной, С.Д. Выбор модели течения жидкости при проектировании лопастной гидравлической машины [Текст] / С.Д. Косторной, Н.С. Мартынова // Вісник Сумського державного університету. Серія технічні науки. – 2012. – № 2 – С. 18-28. 4. Васильев, О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков [Текст] / О.Ф. Васильев. – М.–Л.: ГЭИ, 1958. – 144 с. 5. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика [Текст]: в 2-х ч. / Н.Е. Кочин, Н. В. Кибель, Н.В. Розе. – [6-е изд., испр. и доп.]. – М.: ГИФМЛ, 1963. – Ч. 1. – 584 с.

*Поступила в редколлегию 11.01.13*

УДК 621.24

**Автоматизированное проектирование рабочего колеса центробежного насоса [Текст] / С.Д. Косторной, А.О. Бондарев, Л.К. Марченко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 14(988). – С. 89-95. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-774X.**

Пропонується алгоритм першого етапу проектування на ЕОМ проточної частини робочого колеса відцентрового насоса, який базується на законах течії робочої рідини, що визначаються рівняннями Ейлера – руху, передачі і збереження енергії, рівнянням нерозривності, а також великим досвідом їх застосування.

**Ключові слова:** зворотна задача, математична модель, робоче колесо, лінія току, потенціальний потік, вихровий потік.

It was proposed algorithm of the first stage computer-aided design flowing part of the impeller of a centrifugal pump, which based on fluid flow laws that are determined by the Euler equations, such us: equation of motion, energy-conservation equation, equation of energy transfer and continuity equation, and on the great experience of their application.

**Keywords:** inverse problem, mathematical model, impeller, streamline, potential flow, vortex flow.