УДК 539.3

С.М.ВЕРЕЩАКА, канд.техн.наук, Сумской государственный университет

ОДИН ВАРИАНТ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

На основі дискретно-сруктурної теорії тонких оболонок запропонований варіант рівнянь стійкості розрахункової моделі багатошарових тонкостінних елементів з декількох жорстких анізотропних шарів. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту дорівнюють один одному. Припускається пружне проковзування на поверхні контакту суміжних шарів. Остаточні рівняння стійкості отримані з урахуванням геометрично нелінійних деформацій та деформацій поперечного зсуву і обтиснення.

On the basis of the discrete-structural theory of thin shells the variant of the equations of stability of settlement model of multy-layer thin-walled elements with several rigid anisotropic layers is offered. It is considered, that the pressure of cross shift and pressure on border of contact are equal among themselves. It is supposed elastic slipping on a surface of contact of adjacent layers. The permitting equations of stability are received with the account of nonlinear deformations and deformations of cross shift and pressure.

В большинстве работ, посвященных исследованию устойчивости оболочек из композитов, предполагается, что между слоями выполняется условие идеального контакта [1-3]. Это предположение является одной из идеализаций расчетной модели слоистой оболочки. На практике на границах слоев, как правило, имеют место локальные участки непроклея и отслоений. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта может оказаться существенно нарушенным.

Расчетная модель оболочек с расслоениями, в которой наличие межслоевых дефектов учитывается путем модификации выражения для изгибной жесткости, представляется наиболее простой и предлагается в работах [4]. Очевидно, что эта модель не позволяет проанализировать множество механических явлений, которые сопутствуют процессу докритического деформирования и потере устойчивости слоистых конструкций.

Решение задачи устойчивости элементов конструкций с расслоениями с учетом локальных эффектов дано в [5, 6]. Благодаря такой постановке, проведено исследование влияния размеров и расположения межслоевых дефектов на устойчивость цилиндрических и сферических оболочек. Многослойные оболочки вращения с зазорами между слоями рассматривались в [7].

Вопрос о точности результатов расчета устойчивости оболочек с расслоениями, полученных при помощи различного рода допущений, был изучен в [8]. Отмечается, что двумерная теория в задачах устойчивости слоистых оболочек с неидеальным контактом слоев приводит к более существенным погрешностям, чем в случае оболочек неоднородной структуры без дефекта. Подробный анализ последних результатов и направлений развития теории устойчивости слоистых пластин и оболочек можно найти в обзоре [9].

В данной работе для моделирования участков ослабленного контакта на межфазных границах рассматривается один из вариантов модели контактной задачи сопряжения жестких анизотропных слоев. Для этого варианта модели характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. Если на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями [10].

Постановка задачи. В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из n тонких анизотропных слоев. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i (i = 1,2), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$; k – номер слоя. Индекс «z» при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке (α^1, α^2, $z^{(k)}$) эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек С.П.Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\vec{\psi}^{(k)}, \qquad (1)$$

где $\vec{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [11]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)},\alpha_2^{(k)})$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)}\gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i}\psi_i^{(k)}. \qquad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке (α^1, α^2, $z^{(k)}$) определяются как полу разности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \;\; 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \;\; 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1. \qquad (3)$$

С учетом введенных обозначений вариационное уравнение Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^{n}\delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n}\delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^{n}\iiint\limits_{V^{(K)}}\delta\left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}\right)dV = 0; \;\; (\alpha,\beta = 1,2,3)\,. \qquad (4)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n. При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации; $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям слоя выполняются условия идеального контакта:

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}, \qquad X^{\beta}_{(k,k-1)} = X^{\beta}_{(k-1,k)}, \tag{5}$$

вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\delta A_R = \sum_{k=1}^{n} \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_{(k)}} \left(\vec{X}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)} + M^{i}_{(k)}\vec{r}_i^{(k)}\delta\vec{\gamma}^{(k)} + B^{i}_{(k)}\vec{r}_i^{(k)}\delta\vec{\psi}^{(k)} + M^{3}_{(k)}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right)dS +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{l_1^{(k)}}\left(\vec{\Phi}^{S}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)} + \vec{G}^{S}_{(k)}\delta\vec{\gamma}^{(k)} + \vec{L}^{s}_{(k)}\delta\vec{\psi}^{(k)}\right)dl + \sum_{k=1}^{n}\int_{l_2^{(k)}}\left(\vec{\Phi}_{(k)}\delta\vec{u}^{(k)} + G_{(k)}\delta\vec{\gamma}^{(k)} + \vec{L}_{(k)}\delta\vec{\psi}^{(k)} + \left(\vec{u}^{(k)} - \vec{u}_S^{(k)}\right)\delta\vec{\Phi}_{(k)} +\right.$$

$$\left. + \left(\vec{\gamma}^{(k)} - \vec{\gamma}_S^{(k)}\right)\delta\vec{G}_{(k)} + \left(\vec{\psi}^{(k)} - \vec{\psi}_S^{(k)}\right)\delta\vec{L}_{(k)}\right)dl\,. \tag{6}$$

Здесь $S^{(k)}$ – срединная поверхность слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$; $\vec{X}_{(k)}$, $\vec{M}_{(k)}$, $\vec{B}_{(k)}$ – векторы внешних усилий, моментов и дополнительных моментов соответственно.

Элементарная работа (6) также включает векторы усилия $\vec{\Phi}^{S}_{(k)}$, момента $\vec{G}^{S}_{(k)}$, дополнительного момента $\vec{L}^{S}_{(k)}$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $l_1^{(k)}$. Векторы усилия $\vec{\Phi}_{(k)}$, момента $\vec{G}_{(k)}$, дополнительного момента $\vec{L}_{(k)}$, имеют место в точках контура $l_2^{(k)}$ при наличии заданного вектора перемещений точек контура $\vec{u}_S^{(k)}$.

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\iiint_{V^{(k)}}\sigma^{\alpha\beta}_{(k)}\delta\eta^{(k)}_{\alpha\beta}dV - \sum_{k=1}^{n}\iiint_{V^{(k)}}\left(\partial F^{(k)}/\partial\sigma^{\alpha\beta}_{(k)} - \eta^{(k)}_{\alpha\beta}\right)\delta\sigma^{\alpha\beta}_{(k)}dV\,, \tag{7}$$

где

$$\delta\Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}}\sigma^{\alpha\beta}_{(k)}\delta\eta^{(k)}_{\alpha\beta}dV = \iiint_{V^{(k)}}\left(\sigma^{ij}_{(k)}\delta\varepsilon_{ij}^{(k)z} + 2\sigma^{i3}_{(k)}\delta\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma^{33}_{(k)}\delta\varepsilon_{33}^{(k)z}\right)dV\,,$$

$$\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iiint_{V^{(k)}}\delta W^{f}_{(k)}dV = -\iiint_{V^{(k)}}\left\{\left(\partial F^{(k)}/\partial\sigma^{ij}_{(k)} - \varepsilon_{ij}^{(k)z}\right)\delta\sigma^{ij}_{(k)} + \left(\partial F^{(k)}/\partial\sigma^{i3}_{(k)} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)z}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\delta\sigma^{i3}_{(k)} + \left(\partial F^{(k)}/\partial\sigma^{33}_{(k)} - \varepsilon_{33}^{(k)z}\right)\delta\sigma^{33}_{(k)}\right\}dV;\quad (i,j=1,2)\,.$$

Подставив геометрические соотношения (1) – (3) в (4), на основе вариационного принципа Рейснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий. Переход к физическим компонентам, используемых в данной работе тензоров, вывод уравнений равновесия и граничных условий можно найти в работе [10].

Линеаризованные уравнения устойчивости. Для вывода линеаризованных уравнений устойчивости многослойных оболочек вращения используюся геометрически нелинейные уравнения дискретно-структурной теории [10] и статический критерий Эйлера, то есть допускаются смежные формы равновесия сжатого элемента конструкции, близкие к исходной, но отличные от нее. Критическая нагрузка определяется как наименьшая из нагрузок, при достижении которых наряду с исходной формой равновесия возможны смежные формы равновесия.

Пусть существование смежной равновесной конфигурации при действии внешней нагрузки определяется выражениями

$$u_i^{(k)0}+u_i^{(k)},\quad w^{(k)0}+w^{(k)},\quad \gamma_i^{(k)0}+\gamma_i^{(k)},\quad \psi_i^{(k)0}+\psi_i^{(k)},$$

$$\gamma^{(k)0}+\gamma^{(k)},\ T_{ii}^{(k)0}+T_{ii}^{(k)},\ T_{12}^{(k)0}+T_{12}^{(k)},\ R_{i3}^{(k)0}+R_{i3}^{(k)},\ M_{ii}^{(k)0}+M_{ii}^{(k)},$$

$$M_{12}^{(k)0}+M_{12}^{(k)},\ L_{ii}^{(k)0}+L_{ii}^{(k)},\ L_{12}^{(k)0}+L_{12}^{(k)},\ Q_i^{(k)0}+Q_i^{(k)},\ Q_3^{(k)0}+Q_3^{(k)};\ (i=1,2). \quad (8)$$

Здесь компоненты исходного докритического напряженно-деформированного состояния отмечены нулем на месте верхнего индекса, дополнительные компоненты перемещений и усилий возмущенного состояния указаны без индекса.

Подставляя (8) в уравнения равновесия работы [10] и вычитая из полученных соотношений уравнения равновесия исходного состояния, линеаризованные уравнения устойчивости k-го слоя многослойной оболочки, в которых позволяют учитывать деформации поперечного сдвига и обжатия, принимают вид

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}T_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}T_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+T_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-T_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}+$$

$$+A^{(k)}B^{(k)}k_1^{(k)}R_{13}^{(k)}=0;\qquad \left(1\leftrightarrow 2; A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}R_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}R_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}-A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}T_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}T_{22}^{(k)}\right)=0;$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+M_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-M_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}-$$

$$-A^{(k)}B^{(k)}\left(R_{13}^{(k)}-T_{11}^{(k)0}\omega_1^{(k)}-T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)}-\underline{T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)0}}-\underline{T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)0}}\right)=0;\ \left(1\leftrightarrow 2; A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}L_{11}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}L_{12}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}+L_{12}^{(k)}\frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}}-L_{22}^{(k)}\frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}}-$$

$$-A^{(k)}B^{(k)}L_{13}^{(k)}=0;\qquad \left(1\leftrightarrow 2; A^{(k)}\leftrightarrow B^{(k)}\right). \qquad 9)$$

При учете обжатия k–го слоя к системе (9) добавляется восьмое уравнение

$$\frac{\partial\left(B^{(k)}M_{13}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_1^{(k)}}+\frac{\partial\left(A^{(k)}M_{23}^{(k)}\right)}{\partial\alpha_2^{(k)}}-A^{(k)}B^{(k)}\left(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}M_{22}^{(k)}+k_1^{(k)}L_{11}^{(k)}+k_2^{(k)}L_{22}^{(k)}+Q_3^{(k)}\right)=0\,. \quad (10)$$

Аналогично уравнениям (9) – (10) линеаризуются и геометрические соотношения [10]:

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)}=e_{ij}^{(k)}+e_{ji}^{(k)}+\omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)0};\qquad 2\chi_{ij}^{(k)}=\nabla_i\gamma_j^{(k)}+\nabla_j\gamma_i^{(k)}-в_i^{(k)\gamma}e_{j\gamma}^{(k)}-в_j^{(k)\gamma}e_{i\gamma}^{(k)};$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(k)}=2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma}+\varphi^{(k)\prime}(z)\psi_i^{(k)};\qquad \varepsilon_{33}^{(k)z}=\gamma^{(k)}. \quad (11)$$

Уравнения (9) – (10) следует дополнить граничными условиями, которые определяются из условий закрепления границ рассматриваемой пластины или оболочки.

При выводе уравнений (9) – (10) дополнительные перемещения $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ считались малыми величинами, что послужило достаточным основанием не учитывать эти величины выше первой степени. Поэтому на основе полученной системы уравнений можно найти только «верхние» значения критических нагрузок. Подчеркнутые слагаемые в четвертом и пятом уравнениях (9) при допущении о безмоментном докритическом состоянии обращаются в нуль.

На основе линеаризованных уравнений устойчивости (9) – (10), геометрических соотношений (11), физических соотношений и заданных граничных условий имеет место разрешающая система из 14–ти однородных дифференциальных уравнений в частных производных для k –го слоя оболочки

$$\frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)}\partial \alpha_1^{(k)}} = F\left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \vec{Y}^{(k)}, \frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{B_{(k)}\partial \alpha_2^{(k)}}\right); \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

где

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{14}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}$$

– вектор решений.

Полагая, что физико-механические и геометрические характеристики оболочек вращения не изменяются в направлении координаты α_2, решение разрешающих уравнений (12) задачи устойчивости можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{1,n}^{(k)} \cos n\alpha_2; \qquad \vec{Y}_2^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{2,n}^{(k)} \sin n\alpha_2, \tag{13}$$

где

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \{T_{11}^{(k)},\ T_{22}^{(k)},\ R_{13}^{(k)},\ Q_1^{(k)},\ M_{11}^{(k)},\ M_{22}^{(k)},\ L_{21}^{(k)},\ L_{22}^{(k)},\ Q_3^{(k)},$$

$$u_1^{(k)},\ w^{(k)},\ \gamma_1^{(k)},\ \psi_1^{(k)},\ \varepsilon_{11}^{(k)},\ \varepsilon_{22}^{(k)},\ \varepsilon_{33}^{(k)z},\ \chi_{11}^{(k)},\ \chi_{22}^{(k)},\ \psi_{11}^{(k)},\ \psi_{22}^{(k)}\}^T,$$

$$\vec{Y}_2^{(k)} = \left\{T_{12}^{(k)}, R_{23}^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, L_{13}^{(k)}, L_{23}^{(k)}, u_2^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}, \psi_{12}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

После подстановки (13) – (14) в систему уравнений (12) получается система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}_n^{(k)}}{A_{(k)}d\alpha_1^{(k)}} = F_n^{(k)}\left(\alpha_1^{(k)},\ n,\ \vec{Y}_n^{(k)}\right); \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Здесь

$$\vec{Y}^{(k)} = \left\{Y_{1,n}^{(k)}, Y_{2,n}^{(k)}, \ldots, Y_{14,n}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}} = \{T_{11,n}^{(k)}, T_{12,n}^{(k)}, R_{13,n}^{(k)}, M_{11,n}^{(k)}, M_{12,n}^{(k)}, L_{11,n}^{(k)}, L_{12,n}^{(k)},$$

$$u_{1,n}^{(k)}, u_{2,n}^{(k)}, w_n^{(k)}, \gamma_{1,n}^{(k)}, \gamma_{2,n}^{(k)}, \psi_{1,n}^{(k)}, \psi_{2,n}^{(k)}\}^T -$$

вектор решений. Такая система для k-го слоя оболочки имеет четырнадцатый порядок.

Граничные условия, которые определяют условия закрепления торцов

k–го слоя оболочки можно представить в матричной форме

$$B_0^{(k)}\vec{Y}_{(k)}\left(\alpha_{10}^{(k)}\right)=0; \qquad B_n^{(k)}\vec{Y}_{(k)}\left(\alpha_{1n}^{(k)}\right)=0, \tag{16}$$

где $B_0^{(k)}, B_n^{(k)}$ прямоугольные матрицы размерности 7×14.

Устойчивый вычислительный процесс при численном решении краевой задачи (15) – (16) обеспечивает метод ортогональной протонки С.К.Годунова. В результате интегрирования представленных уравнений имеет место система семи алгебраических уравнений относительно компонент вектора произвольных постоянных $\vec{C}^{(k)}$:

$$B_n^{(k)}Z\left(\alpha_{1n}^{(k)},\ \lambda\right)\vec{C}^{(k)}=0\,.$$

Здесь $Z\left(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda\right)$ – матрица размера 7×7, коэффициенты которой получены в результате ортогонализации и нормирования системы векторов решения на каждом шаге численного интегрирования, λ – собственное значение.

Для существования нетривиального решения задачи устойчивости (15) – (16) должно выполняться условие

$$\left|B_n^{(k)}Z\left(\alpha_{1n}^{(k)},\ \lambda\right)\right|=0\,. \tag{17}$$

Равенство нулю определителя (17) дает величину собственного значения задачи λ. Величина λ представляет собой верхнюю критическую нагрузку и находится методом подбора, пока для двух последующих итераций λ определитель (17) не будет менять знак. Уточняется величина собственного значения λ методом хорд до выполнения условия

$$\left|\frac{\lambda_i-\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right|<\varepsilon\,,$$

где ε – заданное число, которое определяется с требуемой точностью решения, i – шаг итерации.

Если оболочка составлена из двух и более жестких слоев, то при составлении разрешающей системы уравнений устойчивости такой слоистой системы необходимо учесть статические и кинематические условия контакта по сопряженным поверхностям каждого слоя.

Кинематические и статические условия идеального контакта отдельных слоев тонкостенных элементов по лицевым сопряженным поверхностям запишутся:

$$2u_i^{(k)}=u_i^{(k+1)}+u_i^{(k-1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma_i^{(k+1)}+\frac{h^{(k-1)}}{2}\gamma_i^{(k-1)}-\varphi^{(k+1)}\left(\frac{h^{(k+1)}}{2}\right)\psi_i^{(k+1)}+\varphi^{(k-1)}\left(\frac{h^{(k-1)}}{2}\right)\psi_i^{(k-1)};\ (i=1,2);$$

$$2w^{(k)}=w^{(k+1)}+w^{(k-1)}-\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k+1)}+\frac{h^{(k+1)}}{2}\gamma^{(k-1)}; \tag{18}$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+}=\sigma_{i3}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{i3}^{(k)-}=\sigma_{i3}^{(k-1)+}; \qquad (i=1,2);$$

$$\sigma_{33}^{(k)+}=\sigma_{33}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{33}^{(k)-}=\sigma_{33}^{(k-1)+}. \tag{19}$$

Выполняя кинематические (18) и статические (19) условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций, нетрудно составить полную систему разрешающих уравнений (15) для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой (толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю), в предлагаемом варианте модели допускается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта (19).

Система уравнений (9) включает усилия $T_{11}^{(k)0}$, $T_{12}^{(k)0}$, $T_{22}^{(k)0}$, перемещения и деформации сдвига координатной поверхности k-го слоя $u_2^{(k)0}$, $w^0_{(k)}$, $\gamma_1^{(k)0}$, $2\varepsilon_{13}^{(k)0}$ которые определяют докритическое напряженно-деформированное состояние.

Проведенное сопоставление систем разрешающих уравнений равновесия и уравнений устойчивости указывает на их подобие, что позволяет построить единый вычислительный процесс определения напряжений и деформаций нелинейного моментного докритического состояния оболочек вращения и вычисления критических параметров внешней нагрузки.

Вывод. На основе геометрически нелинейной дискретно-структурной теории слоистых элементов конструкций дан вывод линеаризованных уравнений устойчивости анизотропных оболочек с дефектами структуры. Сопряжение жестких анизотропных слоев на межфазных границах моделируются с учетом их идеального и ослабленного контакта. Предлагается вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга.

Список литературы: 1. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение. – 1973. – 172 с. **2.** Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. / Под ред. *А.Н.Гузя*. – К.: Наукова думка, 1983. – Т.2. – 464 с. **3.** *Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с. **4.** *Бабич Д.В.* Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 52-56. **5.** *Андреев Л.В., Железко И.П., Ободан Н.И.* О бифуркации равновесия сферических оболочек с расслоениями // Проблемы прочности. – 1986. – № 2. – С. 49-53. **6.** *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 239-255. **7.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **8.** *Гузь А.Н.* Механика разрушения при сжатии композитных материалов. – К.: Наукова думка, 1990. – 630 с. **9**. *Бабич И.Ю, Семенюк Н.П.* Устойчивость и начальное закритическое поведение оболочек из композитов // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 3-38. **10.** *Верещака С.М.* К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематичный выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39-47. **11.** *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

Поступила в редколлегию 25.10.2006.