



The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet

► **To cite this version:**

Romain Boulet. The centipede is determined by its Laplacian spectrum. Comptes Rendus Mathématique, Elsevier Masson, 2008, 346 (13-14), pp.711-716. <hal-00294747>

HAL Id: hal-00294747

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00294747>

Submitted on 10 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet

Institut de Mathématiques de Toulouse
Université de Toulouse et CNRS (UMR 5219)
boulet@univ-tlse2.fr

This paper was submitted on February 22nd, 2008 in *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences de Paris*, accepted after revision on May 24th, 2008, available online on June 20th, 2008.

Abstract

A centipede is a graph obtained by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path. In this paper we prove that the centipede is determined by its Laplacian spectrum. *To cite this article: R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

Résumé

Le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien.

Un mille-pattes est un graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne. Dans cet article nous montrons qu'un mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien. *Pour citer cet article : R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

Version française abrégée

Le Laplacien L d'un graphe est la matrice $L = D - A$ où D est la matrice diagonale des degrés et A est la matrice d'adjacence du graphe. Le spectre du Laplacien donne des informations sur la structure du graphe, comme la connexité (voir [2, 4] pour plus de détails), ces informations sont souvent insuffisantes pour reconstruire le graphe à partir du spectre et la question « Quels graphes sont déterminés par leur spectre ? » [2] demeure un problème difficile. En particulier il est connu [5] que presque aucun arbre n'est déterminé par le spectre du Laplacien et seules quelques familles d'arbres déterminés par leur spectre ont jusqu'alors été découvertes (citons par exemple [6] et [7]).

On appelle mille-pattes le graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne (voir figure 1). Nous montrons dans cet

article que le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien, enrichissant ainsi les familles connues d'arbres déterminés par le spectre du Laplacien.

On note P_k la chaîne à k sommets et T le triangle. Deux graphes sont dits A -cospectraux (resp. L -cospectraux) s'ils ont même spectre pour la matrice d'adjacence (resp. le Laplacien). Les valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe G d'ordre n sont notées $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ et celles du Laplacien $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G)$. Le graphe représentatif des arêtes $\mathcal{L}(G)$ de G a pour sommets les arêtes de G et deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G possèdent un sommet commun.

Les résultats suivants sont connus et permettent d'obtenir des informations sur la structure du graphe à partir du spectre du Laplacien :

Théorème 1. [4] Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $d(v)$ le degré d'un sommet v . Alors :

$$\max\{d(v), v \in V(G)\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v), uv \in E(G)\}$$

Théorème 2. [2] Le nombre de sommets, d'arêtes, de composantes connexes et d'arbres couvrants d'un graphe peuvent être déduits du spectre de son Laplacien.

Théorème 3. [3, 4] Soit G un arbre à n sommets, alors $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Le spectre de la matrice d'adjacence donne également des informations sur la structure du graphe ; il est en particulier connu que $\sum_i \lambda_i^k$ est égal au nombre de marches fermées de longueur k dans G .

Soit M un graphe, une marche fermée couvrante de longueur k sur M est une marche fermée de longueur k sur M parcourant toutes les arêtes de M au moins une fois. On note $w_k(M)$ le nombre de marches fermées couvrantes de longueur k sur M et on définit l'ensemble $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. Le nombre sous graphes (non nécessairement induits) de G isomorphes à M est noté $|M(G)|$.

Ainsi le nombre de marches fermées de longueur k de G est :

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M) |M(G)|$$

Une première étape dans la démonstration consiste à étudier l'ensemble \mathcal{T} des graphes définis ainsi : G est le graphe T ou G est obtenu en identifiant un sommet de degré 2 de $H \in \mathcal{T}$ et un sommet de T .

Le sous-ensemble \mathcal{T}_n de \mathcal{T} constitué des graphes de \mathcal{T} avec exactement n triangles est en bijection avec l'ensemble \mathcal{A}_n des arbres à n sommets de degré maximal inférieur ou égal à 3. Cette bijection est l'application $K : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ qui à un graphe G associe son graphe des cliques $K(G)$. Les sommets de $K(G)$ sont les sous-graphes complets maximaux de G et deux sommets de $K(G)$ sont adjacents si et seulement si l'intersection des sous graphes complets maximaux correspondants dans G est non vide.

Nous montrons ensuite qu'aucun graphe de \mathcal{T} ne peut être A -cospectral avec $K^{-1}(P_k)$. Pour cela nous dénombrons le nombre de marches fermées de longueur 7 pour $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ et nous obtenons

$$\sum_i \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

où t est le nombre de sommets de $K(G)$ et t_3 le nombre de sommets de degré 3 de $K(G)$. Il reste à remarquer que $K^{-1}(P_k)$ minimise cette quantité car $K(K^{-1}(P_k)) = P_k$ ne possède aucun sommet de degré 3.

La deuxième étape de la démonstration est de déterminer la distribution des degrés d'un graphe G L -cospectral avec un mille-pattes, on note n_i le nombre de sommets de G de degré i . Le théorème 1 implique que le degré maximal de G est inférieur ou égal à 5. Puis le théorème 2 et la proposition 1

Proposition 1. *i) Soit G un graphe, la somme des carrés des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*

ii) Soit G un graphe dont on connaît le nombre de triangles, alors la somme des cubes des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.

nous permettent d'obtenir le système suivant que l'on résoud.

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

On obtient alors que G est un arbre d'ordre n avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3. Il en découle que $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$. Or, comme G est L -cospectral avec un mille-pattes, le théorème 3 implique que $\mathcal{L}(G)$ est A -cospectral avec $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ et donc $\mathcal{L}(G)$ est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ (première étape de la démonstration). On conclut en remarquant qu'un arbre avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3 dont le graphe des lignes est isomorphe à $K^{-1}\left(P_{\frac{n-2}{2}}\right)$ est nécessairement un mille-pattes.

1 Introduction

The Laplacian of a graph is the matrix $L = D - A$ where A is the adjacency matrix and D is the diagonal matrix of degrees. Some structural properties of the graph such as connectivity can be determined from the Laplacian spectrum (see [2, 4] for more details). However the Laplacian spectrum does generally not determine the graph and the question "Which graphs are determined by their spectrum?" [2] remains a difficult problem. Moreover it is known [5] that almost no trees are determined by their Laplacian spectrum and the few trees proved to be determined by their Laplacian spectrum (see for instance [6] or [7]) may be viewed in this sense as exceptional graphs.

A centipede is a tree constructed by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path (see figure 1 for an example). We show in this article that a centipede is determined by its Laplacian spectrum, thus enlarging the known families of trees determined by their Laplacian spectrum.

To fix notations, the path with k vertices is denoted by P_k and the triangle by T . Two graphs are A -cospectral (resp. L -cospectral) if they have the same adjacency (resp. Laplacian) spectrum. For a graph G of order n , the eigenvalues of the

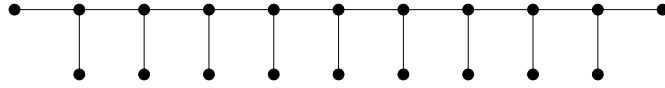


Figure 1: A centipede

adjacency matrix are denoted by $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ and the eigenvalues of the Laplacian by $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G)$ (when no confusion is possible we may omit to precise the graph).

We denote by $\text{Sp}(G)$ the spectrum of the adjacency matrix of G . The line graph $\mathcal{L}(G)$ of a graph G has the edges of G as its vertices and two vertices of $\mathcal{L}(G)$ are adjacent if and only if the corresponding edges in G have a common vertex. For a vertex v of a graph, $N(v)$ denotes the set of vertices adjacent to v and $d(v) = |N(v)|$ the degree of v .

Here are some known results about the Laplacian spectrum.

Theorem 1. [4] *Let $G = (V, E)$ be a graph where V (resp. E) is the set of vertices (resp. edges). Then:*

$$\max\{d(v), v \in V\} < \mu_1(G) \leq \max\{d(u) + d(v), uv \in E\}$$

Theorem 2. [2] *For the Laplacian matrix, the following can be deduced from the spectrum:*

- *The number of vertices.*
- *The number of edges.*
- *The number of connected components.*
- *The number of spanning trees.*

Theorem 3. [3, 4] *Let G be a tree with n vertices, then $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ for $1 \leq i \leq n - 1$.*

The spectrum of the adjacency matrix also gives some informations about structural properties of the graph, for instance it is a classical result that the number of closed walks of length $k \geq 2$ is $\sum_i \lambda_i^k$.

We describe here a method to count the number of closed walks of given length in a graph.

Let M be a graph, a *k-covering closed walk* in M is a closed walk of length k in M running through *all* the edges at least once. Let G be a graph, $M(G)$ denotes the set of all distinct subgraphs (not necessarily induced) of G isomorphic to M and $|M(G)|$ is the number of elements of $M(G)$. The number of *k-covering closed walks* in M is denoted by $w_k(M)$ and we define the set $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. As a consequence, the number of closed walks of length k in G is:

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^k = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M) |M(G)| \tag{1}$$

2 Preliminaries: definition and spectral properties of a set \mathcal{T} of graphs

Let \mathcal{T} be the set of graphs G defined as follow: G is the triangle T or G is formed by identifying a vertex of degree 2 of a graph $H \in \mathcal{T}$ and a vertex of the graph T .

The clique graph of G , denoted by $K(G)$, is the graph whose vertex set is the set of maximal complete subgraphs of G and two vertices of $K(G)$ are adjacent if and only if the corresponding complete subgraphs in G share at least one vertex. The set of graphs in \mathcal{T} with n triangles is denoted by \mathcal{T}_n .

Let \mathcal{A}_n be the set of trees on n vertices with maximal degree lower than or equal to 3. The following proposition is straightforward:

Proposition 1. *The application $K : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ is one-to-one.*

Equation (1) enables us to compute the number of closed walks of length 7 of a graph $G \in \mathcal{T}$:

Lemma 1. *We have for $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$:*

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

where t is the number of vertices of $K(G)$ (ie the number of triangles in G) and t_3 is the number of vertices of degree 3 in $K(G)$.

PROOF : We use the relation

$$\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M) |M(G)|.$$

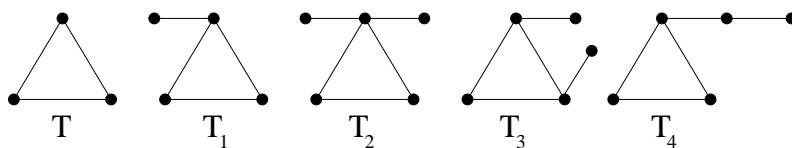


Figure 2: subgraphs of $G \in \mathcal{T}$ belonging to \mathcal{M}_7

As an odd closed walk necessarily runs through an odd cycle, it is clear that $M \in \mathcal{M}_7$ contains one and only one triangle. Only the graphs $T, T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{M}_7$ depicted in figure 2 can arise as subgraphs of $G \in \mathcal{T}$.

Let t be the number of vertices of $K(G)$ and $t_i, 1 \leq i \leq 3$, be the number of vertices of $K(G)$ of degree i . Since $K(G) \in \mathcal{A}_t$, we have $t_1 + t_2 + t_3 = t$ and $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 2t - 2$ (the sum of the degrees is twice the number of edges) showing $t_1 = t_3 + 2$ and $t_2 = t - 2 - 2t_3$.

For a triangle T of G (denoted by $T \subset G$), let $N(T)$ be the set of triangles of G sharing one vertex with T and $d(T) = |N(T)|$. Note that $d(T)$ is the degree of the vertex in $K(G)$ corresponding to $T \subset G$. We have:

- $|T(G)| = t$.
- $|T_1(G)| = 2 \sum_{T \subset G} d(T) = 2 \sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2(2t - 2)$
- $|T_2(G)| = \sum_{T \subset G} d(T) = \sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2t - 2$
- $|T_3(G)| = 4t_2 + 12t_3 = 4(t - 2) + 4t_3$
- $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$, indeed let e and e' be the two bridges of T_4 such that e shares a vertex with the triangle of T_4 . Let T be a triangle of G , then the number of T_4 such that e and e' belongs to T is $2d(T)$. The number of T_4 such that e belongs to T and e' does not is 4 if $d(T) = 2$ or 12 if $d(T) = 3$. This implies $|T_4(G)| = (2t_1 + 4t_2 + 6t_3) + (4t_2 + 12t_3)$, that is, $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$.

Let A, A_i denote the adjacency matrices of T, T_i . The resolution of the equations $\text{tr}(A^7) = w_7(T)$, $\text{tr}(A_1^7) = w_7(T) + w_7(T_1)$, $\text{tr}(A_2^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_2)$, $\text{tr}(A_3^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_3)$, and $\text{tr}(A_4^7) = w_7(T) + w_7(T_1) + w_7(T_4)$ yields $w_7(T) = 126$, $w_7(T_1) = 84$, $w_7(T_2) = 28$, $w_7(T_3) = 14$ and $w_7(T_4) = 14$.

This implies $\sum_i \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M) |M(G)| = 686t - 672 + 112t_3$.

□

Theorem 4. *The A -spectrum characterises $K^{-1}(P_k)$ in \mathcal{T} .*

PROOF : If $G \in \mathcal{T}$ is A -cospectral with $K^{-1}(P_k)$ then G and $K^{-1}(P_k)$ have the same number of vertices and triangles. If G and $K^{-1}(P_k)$ are not isomorphic then $K(G)$ possesses a vertex of degree 3 (so G is not isomorphic to T) and the previous lemma implies $\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(K^{-1}(P_k))} \lambda_i^7 < \sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(G)} \lambda_i^7$. This contradicts A -cospectrality of G with $K^{-1}(P_k)$.

□

3 The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Proposition 2. *i) The sum of squares of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum.*

ii) The sum of cubes of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum and from the number of triangles contained in G .

PROOF : i) We have $\text{tr}(L^2) = \text{tr}(D^2) - 2\text{tr}(AD) + \text{tr}(A^2)$, but $\text{tr}(AD) = 0$, $\text{tr}(A^2) = 2m$ where m is the number of edges and $\text{tr}(D^2)$ is the sum of squares of degrees of G .

ii) We have $\text{tr}(L^3) = \text{tr}(D^3) - \text{tr}(A^3) + 3\text{tr}(A^2D)$. But $\text{tr}(A^3)$ is six times the number of triangles of G , $\text{tr}(A^2D)$ is the sum of squares of degrees of G and $\text{tr}(D^3)$ is the sum of cubes of G .

□

Proposition 3. *If G is a graph on n vertices L -cospectral with a centipede, then G is a tree having $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1.*

PROOF : Theorem 1 implies that the maximal degree of G is at most 5. For $i = 1, \dots, 5$, let n_i be the number of vertices of degree i of G . The Laplacian spectrum of G determines the number of vertices, the number of edges, the sum of squares of the degrees and the sum of cubes of the degrees, that is:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26 \end{cases}$$

This system implies $n_2 = n_4 = -4n_5 = 2(n + 2 - 2n_1)$ showing $n_2 = n_4 = n_5 = 0$, $n_3 = \frac{n-2}{2}$, $n_2 = 0$ and $n_1 = \frac{n+2}{2}$.

□

Proposition 4. *Let G be a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1, if $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_k)$ then G is a centipede.*

PROOF : If G is not a centipede then it contains the subgraph H depicted in figure 3. This implies that $\mathcal{L}(G)$ is not isomorphic to $K^{-1}(P_k)$.

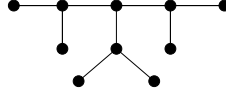


Figure 3: Subgraph of a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1 and different from a centipede

□

Theorem 5. *The centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

PROOF : Let G be a graph with n vertices L -cospectral with the centipede on n vertices. According to proposition 3, G is a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1. As G is L -cospectral with a centipede, theorem 3 implies that $\mathcal{L}(G)$ is A -cospectral with the line graph of the centipede, that is, $\mathcal{L}(G)$ is A -cospectral with $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$. Moreover $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$, so $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ (theorem 4) and G is a centipede by proposition 4.

□

Since the Laplacian eigenvalues of a graph gives the Laplacian eigenvalues of its complement [4], we have the following corollary:

Corollary 1. *The complement of a centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

Remark 1. Non-uniqueness in \mathcal{T}_n of graphs maximising t_3 prevents unfortunately the adaptation of our proof to graphs in \mathcal{T}_n with t_3 maximal.

Acknowledgements

The author would like to thank the referee for his attentive reading and his relevant remarks.

References

- [1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (1974).
- [2] E.R. van Dam, W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, *Linear Algebra and its Applications* 373 (2003) 241-272.
- [3] M. Doob, Eigenvalues of graphs, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press (2004) 30-55.
- [4] B. Mohar, The Laplacian Spectrum of Graphs, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, 2 (1991) 871-898.
- [5] M.W. Newman, The Laplacian Spectrum of Graphs, Masters Thesis, University of Manitoba, 2000.
- [6] G.R. Omid, K. Tajbakhsh, Star-like trees are determined by their Laplacian spectrum, *Linear Algebra and its Applications* 422 (2007) 654-658.
- [7] X. Shen, Y. Hou, Y. Zhang, Graph Z_n and some graphs related to Z_n are determined by their spectrum, *Linear Algebra and its Applications*, 404 (2005) 58-68.