Corriger la Logique des Défauts par la Logique des Défauts

Philippe Besnard, Éric Grégoire, Sébastien Ramon

Corriger la Logique des Défauts par la Logique des Défauts ⋆

Philippe Besnard[12], Éric Grégoire[345], and Sébastien Ramon[345]

[1] IRIT, F-31000 Toulouse, France
[2] CNRS, UMR5505, F-31000, France
[3] Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France
[4] UArtois, CRIL, F-62300 Lens, France
[5] CNRS, UMR8188, F-62300 Lens, France

Résumé : Ce papier se situe dans le contexte de la fusion de sources d'information représentées à l'aide de la logique des défauts. Plus précisément, celui-ci se focalise sur la résolution du problème apparaissant quand les connaissances classiques des sources sont contradictoires, ayant pour effet de rendre triviale la théorie avec défauts résultante. Pour outre-passer ce problème, il est montré que, remplacer chaque formule appartenant aux sous-ensembles minimaux inconsistants (MUSes) de la réunion des connaissances classiques des sources par une règle de défaut super-normale correspondante, présente un comportement intéressant. De plus, il est examiné comment ces règles de défaut supplémentaires interagissent avec les règles de défaut initiales de la théorie. Chose intéressante, cette approche nous permet de manier le problème de théories avec défauts contenant des connaissances classiques contradictoires, en utilisant le cadre de la logique des défauts lui-même.

Mots-clés : Logique des défauts, fusion à base de logique, tolérance à l'inconsistance, sous-ensembles minimaux inconsistants.

1 Introduction

Dans la communauté de la Recherche en Intelligence Artificielle (I.A), l'un des outils les plus populaires pour manier des formes de raisonnement révisable est la logique des défauts de Reiter (Reiter (1980)) et ses principales variantes (par ex. Schaub (1992), Mikitiuk & Truszczyński (1993), Lukaszewicz (1988) et Brewka (1991) juste pour mentionner quelques papiers qui font école). La logique des défauts a été définie pour permettre de modéliser des formes de raisonnement par défaut. Cela permet à un

⋆. Ce papier est une traduction de l'anglais d'un papier présenté lors de la conférence ECSQARU'09 (Besnard *et al.* (2009))

système d'inférence d'émettre des conclusions par défaut et de les rétracter quand une nouvelle information montre que celles-ci mènent maintenant à l'inconsistance.

Par exemple, la logique des défauts est l'outil idéal pour représenter des modèles de raisonnement du type "Soit un employé x, par défaut nous devons permettre à x d'accéder à la base de données à moins que cela ne contredise certaines règles de sécurité. Si des informations supplémentaires font que de telles contradictions se produisent, alors la permission peut-être rétractée".

Une *théorie avec défauts* est constituée de deux parties : un ensemble de formules de la logique du premier ordre représentant les connaissances et un ensemble de règles de défauts, c.à.d. des sortes de règles d'inférence capturant des modèles de raisonnement révisable comme dans l'exemple précédent.

Dans ce papier, nous examinons comment plusieurs [1] théories avec défauts de la logique des défauts de Reiter doivent être fusionnées quand il est supposé que chaque théorie avec défauts représente les connaissances d'un agent ou d'une communauté d'agents. Plus précisément, il est montré que la fusion de ces théories n'est pas un problème qui doit être considéré comme trivial quand l'union ensembliste des formules de la logique classique des sources à fusionner est inconsistante. En effet, garder toutes ces formules fait du langage entier l'ensemble des inférences possibles parce que quand la partie des connaissances de la logique classique d'une théorie avec défauts est inconsistante, la théorie avec défauts trivialise.

Aussi surprenant que cela puisse paraître, à notre connaissance cette propriété de trivialisation de la logique des défauts n'a jamais été abordée dans la littérature jusqu'ici. À cet égard, le but de ce papier est de revisiter la logique des défauts de telle sorte que la trivialisation soit évitée en présence de prémisses inconsistantes, partageant ainsi l'intérêt des efforts importants fournis par la communauté de la Recherche en I.A à l'étude du raisonnement en présence de connaissances inconsistantes et au développement de techniques de tolérance à l'inconsistance (voir par ex. Bertossi *et al.* (2004)). En particulier, quand plusieurs sources d'information doivent être agrégées, une simple petite contradiction entre deux sources ne doit pas causer l'effondrement de tout le système.

Dans ce papier, une famille d'approches dans cette direction sont présentées. Elles se ramènent à l'étude des MUSes (sous-ensembles minimaux inconsistants) de formules de la logique classique. Par conséquent, une série de paradigmes du raisonnement sont examinés. En particulier, il est montré que remplacer chaque formule appartenant aux différents MUSes par une règle de défaut correspondante est une solution intéressante. Comme cas particulier, une méthode originale est donnée, visant à se prémunir des inconsistances qui peuvent se produire dans les ensembles de formules de la logique classique. Notons que cette dernière technique peut être exportée facilement aux principales variantes de la logique des défauts, comme par ex. la logique des défauts contrainte (Schaub (1992)), rationnelle (Mikitiuk & Truszczyński (1993)), justifiée (Lukaszewicz (1988)) ou répartie (Brewka (1991)), dont certaines assurent que les théories avec défauts quelconques possèdent au moins une extension.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section suivante, les MUSes et la manière avec laquelle ils peuvent être calculés est présentée. Dans les sections 3 et 4, une approche pour remplacer les MUSes par des règles de défauts additionnelles est intro-

1. D'un autre côté, ce qui suit s'applique aussi à une seule et même théorie avec défauts.

duite et étudiée dans le contexte du raisonnement en présence de contradictions de la logique classique Booléenne. La section 5 se concentre sur comment ces règles additionnelles interagissent avec celles de la théorie initiale. Enfin, dans la section 6, une étude de la complexité de ces techniques est fournie, et des techniques d'approximation sont présentées.

Tout au long du papier, les notations standard suivantes : $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\supset$ représentent respectivement les connecteurs standard de négation, disjonction, conjonction et d'implication matérielle. Quand Ω est un ensemble de formules de la logique, $Cn(\Omega)$ dénote la fermeture déductive de Ω. Aussi, rappelons que dans le cadre Booléen une *CNF* est une conjonction finie de clauses, où une clause est une disjonction de variables Booléennes signées.

Dans la suite, nous considérons que le lecteur est familier avec la logique des défauts de Reiter (Reiter (1980)). Une courte introduction de celle-ci est fournie en Annexe A.

2 Sous-ensembles Minimaux Inconsistants (MUSes)

Considérons que Σ soit un ensemble de formules Booléennes. Un *sous-ensemble minimal inconsistant (MUS)* Φ de Σ est défini comme suit :

$$\Phi \subseteq \Sigma \,;\ \Phi \text{ est insatisfaisable} \,;\ \forall \Psi \subset \Phi,\ \Psi \text{ est satisfaisable.}$$

Par conséquent, un MUS de Σ est un sous-ensemble de Σ qui est contradictoire et qui devient satisfaisable quand un de ses éléments est retiré. Autrement dit, un MUS de Σ décrit une contradiction à l'intérieur de Σ à l'aide d'un ensemble de formules de Σ qui ne peut être rendu plus petit.

Notation 1
L'ensemble de tous les MUSes d'un ensemble de formules Σ *est noté* $MUS(\Sigma)$*. L'ensemble de toutes les formules appartenant aux MUSes de* Σ *est noté* $\cup MUS(\Sigma)$*.*

Exemple 1
Notons $\Sigma = \{a, a \supset b, \neg b, a \supset (c \vee d), \neg d, c \supset b, d \supset e, (c \wedge e) \supset a\}$*. Clairement,* Σ *est insatisfaisable et contient deux MUSes, à savoir* $\Phi_1 = \{a, a \supset b, \neg b\}$ *and* $\Phi_2 = \{a \supset (c \vee d), a, \neg d, c \supset b, \neg b\}$*.*

Cet exemple illustre également que les MUSes peuvent partager des intersections non-vides.

De nombreuses techniques de manipulation des contradictions dans les systèmes à base de logique ont été abordées dans la littérature (voir par ex. Bertossi *et al.* (2004) et Konieczny & Grégoire (2006) qui étudient la question).

Une famille d'approches consistent à retrouver la satisfaisabilité en supprimant des MUSes ou parties de MUSes.

En effet, supprimer une formule dans chaque MUS permet de retrouver la consistance. Deux approches extrêmes peuvent donc être proposées dans cette voie. D'un côté, nous pourrions retirer l'union ensembliste de tous les MUSes, donc supprimer toute cause minimale d'inconsistance (en respectant le nombre de formules impliquées).

D'un autre côté, nous pourrions préférer une politique du changement minimal, laquelle nécessiterait de retirer au moins une formule par MUS.

3 Manipuler des Théories avec Défauts Localement Inconsistantes

Dans la suite, nous considérons que Σ est un ensemble de formules Booléennes et nous sommes particulièrement intéressés par des théories avec défauts $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ où Σ est inconsistant. Dans un tel cas, Γ possède une extension unique, qui est l'ensemble du langage logique.

Nous faisons une distinction entre les raisonnements crédules et sceptiques à partir d'une théorie avec défauts Γ : une formule f peut être inférée de manière *sceptique* (resp. *crédule*) à partir d'une théorie avec défauts Γ ssi f appartient à toutes extensions (resp. au moins une extension) de Γ.

Maintenant, puisqu'une théorie avec défauts est constituée de deux parties, à savoir un ensemble de défauts et un ensemble de faits, la fusion de théorie avec défauts revient à la combinaison des ensembles de faits et à la combinaison des ensembles de défauts. Dans la suite, nous considérons que les faits (resp. les défauts) sont combinés par ce processus de fusion.

Considérons que nous nous soyons donné n théories avec défauts $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ $(i \in [1..n])$ à fusionner, qui soient telles que l'union ensembliste de leur parties de la logique classique, à savoir $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$, soit inconsistante. Une voie directe pour aborder la trivialisation de la théorie avec défauts agrégée résultante consiste à la suppression d'assez de formules de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ afin que le sous-ensemble résultant devienne consistant.

Cependant, la suppression de formules est inutilement destructrice. En effet, un raisonnement crédule pourrait être intéressé par l'exploration des différentes extensions qui peuvent être obtenues si nous considérons comme acceptables les différents sous-ensembles maximaux consistant des différents MUSes de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$. Aussi, un raisonnement sceptique pourrait vouloir explorer ce qui peut appartenir à toutes ces extensions.

À cet égard, si nous remplaçons chaque formule f appartenant aux MUSes de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ par un défaut super-normal correspondant $\frac{:f}{f}$, nous obtenons une nouvelle théorie avec défauts où le raisonnement considérerait que *chaque formule f appartenant aux MUSes peut être inférée si f peut être considérée de façon consistante*.

Cependant, puisque l'union ensembliste des conséquents de ces nouveaux défauts est inconsistante, la logique des défauts interdit l'acceptation de l'ensemble de ces f à l'intérieur d'une même extension. Rappelons que cette politique n'applique par elle-même aucune priorité entre les formules remplacées puisque toutes sont traitées de manière uniforme. Chose intéressante, cette approche nous permet de manier le problème de théories avec défauts contenant des connaissances contradictoires en logique standard, en utilisant le cadre de la logique des défauts lui-même.

Définition 1 (*théorie avec défauts fusionnée*)
Considérons un ensemble non vide de n théories avec défauts de la forme $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ à fusionner. La théorie avec défaut fusionnée résultante est donnée par $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ où :

– $\Sigma = \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$,
– $\Delta = \cup_{i=1}^{n}\Delta_i \cup \{\frac{:f}{f} \mid f \in \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)\}$.

Cette définition correspond donc bien à une politique qui requiert un traitement uniforme des formules à l'intérieur des MUSes.

Aussi, des définitions alternatives peuvent faire utilisation d'opérateurs de sélection $select$ pour fournir un sous-ensemble de $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ tel que $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus select$-$(\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$ soit consistant, et tel que chaque formule de $select(\cup MUS\ (\cup_{i=1}^{n}$-$\Sigma_i))$ doive être remplacée dans la théorie avec défauts fusionnée résultante par un défaut super-normal correspondant.

4 Adresser le Problème de la Trivialisation dans le Cadre Booléen Standard

Premièrement, considérons la situation basique où l'ensemble des défauts $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ est vide. Ceci coïncide avec le problème de fusion d'ensembles de formules Booléennes dont l'union ensembliste est inconsistante. La définition donnée en section précédente fournit donc une approche originale pour aborder ce problème sous un autre angle.

Exemple 2
Soit $\Gamma_1 = (\emptyset, \{\neg a \vee b, \neg b\})$ *et* $\Gamma_2 = (\emptyset, \{a\})$ *deux théories avec défauts à fusionner. Clairement,* $\cup_{i=1}^{2}\Sigma_i = \{\neg a \vee b, a, \neg b\}$ *est inconsistante. La théorie avec défauts fusionnée résultante* $\Gamma = (\{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee b}{\neg a \vee b}, \frac{:\neg b}{\neg b}\}, \emptyset)$ *possède trois extensions* $E_1 = Cn(\{a, \neg a \vee b\})$*,* $E_2 = Cn(\{\neg b, \neg a \vee b\})$ *et* $E_3 = Cn(\{a, \neg b\})$ *; chacune d'entre-elles contient deux conséquents des trois défauts introduits.*

Notons qu'il est possible de caractériser l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la théorie avec défauts fusionnée, quand la théorie initiale ne contient aucun défaut.

Pour cela, nous avons recours à la fonction de choix θ pour une famille finie d'ensembles non-vides $\Xi = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$, laquelle "pioche" un élément dans chaque Ω_i de la famille. Dans le cas restrictif où Ξ est vide, $\theta(\Xi)$ est vide.

Notation 2
Soit Θ *dénotant la sous-classe des fonctions de choix* θ *pour* $\Xi = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ *tel que pour* $i \neq j$*,* $\theta(\Omega_i) \in \Omega_j \Rightarrow \theta(\Omega_j) = \theta(\Omega_k)$ *pour certains* $k \neq j$ *(mais* k *peut ne pas être* i*). Cette sous-classe est réduite aux fonctions de choix* θ *dont l'image est minimale t.q. si* $\theta \in \Theta$ *alors* $\nexists \theta' \in \Theta$ *t.q.* $\theta'(\Xi) \subset \theta(\Xi)$.

Proposition 1
Soit $n > 1$*. Considérons* n *théories avec défauts finies de la forme* $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ *à fusionner. Si* Δ_i *est vide pour* $i = 1..n$*, alors l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la théorie avec défauts fusionnée résultante* $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ *est* $Cn(\{\psi\})$ *où :*

$$\psi = \bigvee_{\theta \in \Theta} \bigwedge \left(\ (\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i) \setminus \theta(MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)) \ \right).$$

Remarque 1
Il est essentiel que les théories avec défauts à fusionner soient finies *pour que la première proposition tienne. Autrement,* $MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ *peut être infini. Donc, non seulement l'axiome de choix dénombrable serait nécessaire, mais pire encore, une disjonction infinie serait nécessaire (laquelle est au-delà de la logique classique). Par exemple, supposons que les théories avec défauts à fusionner soient* $\Gamma_1 = (\emptyset, \Sigma_1)$*,* $\Gamma_2 = (\emptyset, \Sigma_2)$*, et* $\Gamma_3 = (\emptyset, \Sigma_3)$ *où :*

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = \{p_1, q_1, r_1, \ldots\},\\
&\Sigma_2 = \{p_2, q_2, r_2, \ldots\},\\
&\Sigma_3 = \{\neg p_1, \neg p_2, \neg q_1, \neg q_2, \neg r_1, \neg r_2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Clairement, $MUS(\cup_{i=1}^{3}\Sigma_i) = \{\{p_1, \neg p_1\}, \{p_2, \neg p_2\}, \{q_1, \neg q_1\}, \{q_2, \neg q_2\}, \ldots\}$ *est infini. Donc,* ψ *aurait une infinité de conjonctions et de disjonctions. Par exemple, le fait de prendre* θ_1 *pour choisir uniquement des littéraux négatifs produit la conjonction infinie* $\bigwedge\{p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, \ldots\}$*. La disjonction serait aussi infinie puisqu'une infinité de fonctions de choix peuvent être prises en compte.*
Dans cet exemple, Σ *est vide mais il est facile de le modifier pour rendre* Σ *infini :*

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = \{p_1, q_1, r_1, s_1, \ldots\},\\
&\Sigma_2 = \{p_2, q_2, r_2, s_2, \ldots\},\\
&\Sigma_3 = \{\neg p_1, p_2, q_1, \neg q_2, \neg r_1, r_2, s_1, \neg s_2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Notons que la proposition suivante montre que toute formule de l'ensemble $\cup MUS$-$(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ appartient à au moins une extension de la théorie fusionnée. Par conséquent, aucune formule n'est perdue durant le processus de fusion dans le sens où chaque formule non contradictoire qui est remplacée par un défaut – et qui serait supprimée dans les approches de fusion classique – peut être trouvée dans au moins une extension de la théorie fusionnée.

Proposition 2
Soit $n > 1$*. Considérons* n *théories avec défauts finies* $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ *t.q.* $\cup_{i=1}^{n}\Delta_i$ *soit vide et* $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ *soit inconsistante. Soit* Γ *la théorie avec défauts résultante. Il n'existe pas d'extension de* Γ *qui contienne* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ *mais pour toute formule satisfaisable* f *de* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$*, il existe une extension de* Γ *contenant* f*.*

En se basant sur cette proposition, il peut être imaginé que l'intersection de toutes les extensions puisse coïncider exactement avec les extensions de la théorie avec défauts $\Gamma' = (\emptyset, \cup_{i=1}^{n}\Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i))$.

Comme l'exemple suivant le montre, ce n'est pas le cas puisque la calcul de plusieurs extensions mime un processus d'analyse par cas qui permet à des inférences d'être impliquées quand elles auraient été perdues si $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i)$ avaient simplement été supprimés de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$.

Exemple 3
Considérons $\Gamma_1 = (\emptyset, \{a \wedge b, c \supset d\})$ *et* $\Gamma_2 = (\emptyset, \{\neg a \wedge c, b \supset d\})$*. Clairement,* $\{a \wedge b, \neg a \wedge c\}$ *est un MUS. Si nous retirons simplement le MUS, nous obtenons* $\Gamma' = (\emptyset, \{c \supset d, b \supset d\})$*. Clairement,* Γ' *possède une unique extension* $Cn(\{c \supset d, b \supset$

$d\}$) qui ne contient pas d. Cela est tout à fait inapproprié puisque la contradiction est expliquée par la co-existence de a et $\neg a$. Supposons maintenant que a soit actuellement $vrai$. Alors, à partir de $a \wedge b$ et de $b \supset d$ nous pourrions conclure d. De la même manière, si a serait maintenant considéré comme $faux$ alors nous devrions aussi être à même de conclure d. Maintenant, $\Gamma = (\{\frac{:a\wedge b}{a\wedge b}, \frac{:\neg a\wedge c}{\neg a\wedge c}\}, \{c \supset d, b \supset d\})$ possède deux extensions, chacune d'entre-elles contient d. Par conséquent, d peut être inféré de manière sceptique par la théorie avec défauts Γ.

Ce dernier exemple nous montre aussi que ce traitement de l'inconsistance autorise l'inférence de plus de conclusions (légitimes) que ce qui pourrait être le cas en supprimant des MUSes ou parties de MUSes. Cela n'est pas surprenant puisqu'en affaiblissant les formules en règles de défaut, nous avons supprimé moins d'informations que si nous les avions simplement écartées. Une approche alternative pour permettre une telle forme d'analyse par cas à partir de prémisses inconsistantes peut être trouvée dans Besnard & Hunter (1995).

Appliquer la Proposition 1 à l'Exemple 3 montre que les conséquences de la théorie avec défauts fusionnée résultante $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ sont :

Exemple 4
$MUS(\cup_{i=1}^{2}\Sigma_i) = \{\{a\wedge b, \neg a\wedge c\}\}$ puisque $\Sigma_1\cup\Sigma_2$ a un seul MUS qui est $\{a\wedge b, \neg a\wedge c\}$. Donc, il y a uniquement deux fonctions de choix possibles sur $\{a\wedge b, \neg a\wedge c\}$. L'une choisit $a\wedge b$ et l'autre $\neg a\wedge c$. Notons les respectivement θ_1 et θ_2. Donc, la formule ψ de la Proposition 1 devient :

$$\psi = \bigvee_{\theta\in\{\theta_1,\theta_2\}} \bigwedge \Big(\ (\cup_{i=1}^{2}\Sigma_i) \setminus \theta(MUS(\cup_{i=1}^{2}\Sigma_i)) \ \Big) \,.$$

Qui est :

$$\psi = \bigvee_{\theta\in\{\theta_1,\theta_2\}} \bigwedge \Big(\ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \setminus \theta(\{\{a\wedge b, \neg a\wedge c\}\}) \ \Big) \,.$$

Soit :

$$\psi = \left(\bigwedge\{\neg a\wedge c, c\supset d, b\supset d\}\right) \bigvee \left(\bigwedge\{a\wedge b, c\supset d, b\supset d\}\right).$$

Après application de plusieurs règles logiques, ψ devient la conjonction des quatre formules qui suivent :

$$\begin{array}{l}
(\neg a\wedge c) \vee (a\wedge b), \\
((c\supset d)\wedge(b\supset d)) \vee (\neg a\wedge c), \\
((c\supset d)\wedge(b\supset d)) \vee (a\wedge b), \\
((c\supset d)\wedge(b\supset d)) \vee ((c\supset d)\wedge(b\supset d)).
\end{array}$$

Bien sûr, la dernière disjonction est équivalente à $(c \supset d)\wedge(b\supset d)$ et subsume les deux formules précédentes. Par conséquent :

$$\psi = ((\neg a\wedge c)\vee(a\wedge b)) \wedge (c\supset d)\wedge(b\supset d).$$

Finalement, l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la théorie avec défauts fusionnée résultante $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ est $Cn(\{b\supset d, c\supset d, b\vee c, \neg a\vee b, a\vee c\})$.

Observons que $Cn(\{b \supset d, c \supset d, b \vee c, \neg a \vee b, a \vee c\})$ *peut être simplifié en* $Cn(\{b \supset d, c \supset d, \neg a \vee b, a \vee c\})$*. Dans tous les cas,* $b \vee c$ *et* d *sont dans* $Cn(\{b \supset d, c \supset d, \neg a \vee b, a \vee c\})$*.*

Maintenant, une autre propriété intéressante du processus de fusion donné dans la Définition 1 est qu'un raisonnement sceptique peut être à même d'inférer (au moins) toutes les formules qu'il est possible d'inférer si les MUSes de $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i$ auraient été supprimés.

Proposition 3
Soit $n > 1$*. Considérons* n *théories avec défauts* $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ *à fusionner. Soit* $\cap_j E_j$ *l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la théorie avec défauts fusionnée résultante* $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$*. Soit* E *l'unique extension de* $\Gamma' = (\emptyset, \Sigma)$*. Si* Δ_i *est vide pour* $i = 1..n$*, alors* $E \subseteq \cap_j E_j$*.*

Exemple 5
Soit $\Gamma_i = (\Sigma_i, \Delta_i)$ *où* $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i = \{a, \neg a \vee \neg b, b, c\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n} \Delta_i = \emptyset$*.* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i) = \{a, \neg a \vee \neg b, b\}$*. La théorie avec défauts fusionnée résultante est* $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ *où* $\Sigma = \{c\}$ *et* $\Delta = \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}\}$*. Les extensions de* Γ *sont* $E_1 = Cn(\{c, a, \neg a \vee \neg b\})$*,* $E_2 = Cn(\{c, \neg a \vee \neg b, b\})$ *et* $E_3 = Cn(\{c, a, b\})$*. L'unique extension de la théorie avec défauts où toutes les formules de* $\cup MUS(\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i)$ *sont supprimées est* $E = Cn(\{c\})$*. Nous avons* $\cap_{j=1}^{n} E_j = Cn(\{c, a \vee b\})$ *et* $E \subseteq \cap_{j=1}^{n} E_j$*.*

Considérons maintenant le cas général où les théories contiennent des défauts, et étudions comment les nouveaux défauts interagissent avec les défauts des théories initiales.

5 Interaction des Défauts Introduits avec les Défauts de la Théorie Initiale

Premièrement, il est bien-connu que les théories avec défauts normaux jouissent de propriétés intéressantes, telles que la semi-monotonie (Reiter (1980)). Cette propriété assure que tant que nous augmentons une théorie avec défauts normaux Γ avec un défaut normal supplémentaire, alors toute extension de Γ est inclue dans une extension de la nouvelle théorie. Par conséquent, nous pouvons assurer que l'extension de la Proposition 2 aux théories avec défauts normaux tient puisque nous ajoutons uniquement des défauts super-normaux à l'union ensembliste des théories initiales.

D'un autre côté, l'extension de la Proposition 3 aux théories avec défauts normaux ne tient pas : comme le montre l'exemple suivant, l'extension unique de $\Gamma' = (\cup_{i=1}^{n} \Delta_i, \Sigma)$ n'est pas nécessairement contenue dans l'intersection ensembliste de toutes les extensions de la théorie fusionnée résultante.

Exemple 6
Considérons $\cup_{i=1}^{n} \Sigma_i = \{a, \neg a \vee \neg b, b, c\}$ *et* $\cup_{i=1}^{n} \Delta_i = \{\frac{a:d}{d}, \frac{c:\neg d}{\neg d}\}$*. La théorie avec défauts fusionnée résultante est* $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ *où* $\Sigma = \{c\}$ *et* $\Delta = \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a \vee \neg b}{\neg a \vee \neg b}, \frac{:b}{b}, \frac{a:d}{d}, \frac{c:\neg d}{\neg d}\}$*. Les extensions* $E_1 = Cn(\{c, a, \neg a \vee \neg b, d\})$ *et* $E_2 = Cn(\{c, \neg a \vee \neg b, b, \neg d\})$ *sont*

des extensions de Γ. *L'extension unique de la théorie avec défauts* $\Gamma' = (\cup_{i=1}^n \Delta_i, \Sigma)$ *est* $E = Cn(\{c, \neg d\})$ *tandis que* $\cap_{j=1}^n E_j = Cn(\{c\})$. *Donc* $E \nsubseteq \cup_{j=1}^n E_j$.

En effet, la suppression des MUSes empêche l'application de défauts (normaux) dont les prérequis appartiennent aux MUSes. Ainsi nous dérivons la proposition suivante.

Proposition 4
Soit $n > 1$. *Considérons* n *théories avec défauts normaux finies* $\Gamma_i = (\Delta_i, \Sigma_i)$ *à fusionner.* $\Gamma' = (\cup_{i=1}^n \Delta_i, \cup_{i=1}^n \Sigma_i \setminus \cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i))$. *Pour toute extension* E *de* Γ', *il existe une extension de la théorie avec défauts fusionnée résultante qui contient* E.

Notons que cette proposition assure que tant que nous itérons le processus de fusion de théories avec défauts normaux, nous serons toujours assurés que chaque extension pourra uniquement être étendue.

Maintenant, dans le cas général, le remplacement des MUSes ou parties de MUSes par des défauts super-normaux correspondants n'assure pas que nous obtenions des sur-ensembles des extensions qui pourraient être obtenus si ces MUSes ou parties de MUSes avaient été supprimés : la semi-monotonie ne tient plus.

Exemple 7
Considérons $\Gamma = (\Delta, \{a, \neg a\})$ *où* $\Delta = \{\frac{:b}{b}, \frac{a:c}{\neg b}, \frac{\neg a:c}{\neg b}\}$. *La théorie avec défauts* $\Gamma' = (\Delta, \emptyset)$ *exhibe une extension, qui est* $Cn(\{b\})$. *Au contraire,* $(\Delta \cup \{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}\}, \emptyset)$ *ne possède aucune extension contenant* b.

La généralisation de la Proposition 2 aux théories avec défauts contenant des défauts généraux ne tient pas non plus : comme montré dans l'exemple suivant, il peut arriver que des formules consistantes de $\cup MUS(\cup_{i=1}^n \Sigma_i)$ n'appartiennent à aucune extension de la théorie avec défauts fusionnée résultante.

Exemple 8
Considérons les théorie avec défauts $\Gamma_1 = (\emptyset, \{a, c\})$ *et* $\Gamma_2 = (\{\frac{c:b}{\neg a}\}, \{\neg a\})$ *à fusionner.* $\cup MUS(\cup_{i=1}^2 \Sigma_i) = \{a, \neg a\}$. *La théorie avec défauts fusionnée résultante est* $\Gamma = (\{\frac{:a}{a}, \frac{:\neg a}{\neg a}, \frac{c:b}{\neg a}\}, \{c\})$. *L'extension unique de* Γ *est* $E = Cn(\{c, \neg a\})$*, laquelle ne contient pas* a.

6 Complexité et Techniques d'Approximation

Dans le cadre Booléen, le calcul des MUSes est calculatoirement difficile dans le pire des cas puisque vérifier si une clause appartient ou non à l'ensemble des MUSes d'une CNF est Σ_2^p-*complet* (Eiter & Gottlob (1992)).

Par conséquent, le processus entier de recherche et de remplacement de formules contradictoires par des défauts super-normaux correspondants, et ensuite de raisonnement par défaut crédule n'est pas plus difficile calculatoirement que le raisonnement par défaut crédule lui-même puisque, dans le cas général, ce dernier est aussi Σ_2^p-*complet* (tandis qu'il est Π_2^p-*complet* dans la cas d'un raisonnement sceptique) (Gottlob (1992)).

Notons que des techniques algorithmiques récentes rendent possible le calcul d'un MUS pour plusieurs problèmes de la vie courante (Grégoire *et al.* (2006a)). Cependant, le nombre de MUS dans un ensemble de n clauses peut être intraitable aussi, puisqu'il est $C_n^{n/2}$ dans le pire des cas. Heureusement, des techniques efficaces de calcul de tous les MUSes pour plusieurs benchmarks (modulo une possible limitation d'explosion exponentielle), ont aussi été définies récemment (Grégoire *et al.* (2007)).

Cependant, dans certaines situations nous ne pouvons nous permettre de calculer l'union-ensembliste de tous les MUSes. Dans ce contexte, plusieurs techniques peuvent être appliquées.

Premièrement, il doit être noté qu'il n'est pas nécessaire de remplacer toutes les formules dans tous les MUSes par des défauts super-normaux correspondants pour rétablir la consistance. En effet, on pourrait tout d'abord détecter un MUS, remplacer toutes ses formules par des défauts, et ensuite itérer ce processus jusqu'à ce que la consistance soit rétablie. Une telle approche doit nous permettre de calculer tout les MUSes ; cela a été étudié dans le cadre Booléen clausal dans le contexte de la détection de *couvertures inconsistantes strictes* (Grégoire *et al.* (2006b)).

Définition 2 (*couverture inconsistante stricte*)
Soit Σ un ensemble de formules Booléennes. $\Sigma' \subseteq \Sigma$ est une couverture inconsistante stricte de Σ ssi $\Sigma \setminus \Sigma'$ est satisfaisable et $\Sigma' = \cup\mathcal{A}$ pour certains $\mathcal{A} \subseteq MUS(\Sigma)$ tel que, si $|\mathcal{A}| > 1$, tout couple de $\mathcal{A}$ sont disjoints.

Lèmme 1
Une couverture inconsistante stricte de Σ est vide ssi Σ est satisfaisable.

Lèmme 2
Une couverture inconsistante stricte de Σ existe toujours.

Lèmme 3
Pour tout $M \in MUS(\Sigma)$, il existe une couverture inconsistante stricte de Σ qui contient M.

Les couvertures inconsistantes strictes $IC(\Sigma)$ sont donc les ensembles minimaux de formules de Σ qui peuvent capturer assez de sources de contradiction dans Σ pour rétablir la consistance si elles sont réparées. Dans (Grégoire *et al.* (2006b)) une technique pour calculer les couvertures inconsistantes strictes dans le cas Booléen causal a été introduite et prouvée efficace pour plusieurs benchmarks difficiles. Clairement, une couverture inconsistante stricte est une approximation de l'union-ensembliste des MUSes dans le sens où toutes les formules d'une couverture appartiennent toujours à cet union mais pas l'inverse, et que la suppression d'une couverture restaure la consistance. Le prix à payer de cette approximation est que plusieurs couvertures peuvent co-exister pour un ensemble de MUSes donné.

Maintenant, la plupart du temps, il est possible d'extraire un sur-ensemble de Ω pour tous les MUSes de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ très rapidement, de telle manière que rétracter Ω restaurera la consistance de $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$. Ceci dit, ce sur-ensemble peut être $\cup_{i=1}^{n}\Sigma_i$ lui-même. Par conséquent, nous pouvons remplacer toutes les formules de Ω par des défauts super-normaux correspondants. Clairement, un tel processus restaurera la consistance mais le impliquera que l'information certaine et l'information controversée, c.à.d. les formules n'appartenant pas et appartenant aux MUSes seront indissociables et traitées de la même manière.

Une alternative consiste à remplacer au moins une formule par MUS. Clairement, d'un point de vue pratique, la détection d'une telle formule ne doit pas nous demander de calculer un MUS exactement mais simplement un sur-ensemble de celui-ci, tel que la suppression de cette formule rende ce sur-ensemble consistant. Puisque les MUSes peuvent partager des intersections non-vides, notons qu'il est cependant difficile de garantir qu'un nombre minimal de formules soient remplacées sans calculer tous les MUSes explicitement.

Conclusions et Travaux Futurs

Dans ce papier, un correctif pour la logique des défauts, l'une des logiques les plus populaires pour la représentation du raisonnement révisable, a été proposé. Il permet à un système de raisonnement de manier des théories impliquant des bases de la logique classique contradictoires là où la logique des défauts standard trivialise. Notons que ce nouveau cadre propose également une méthode originale pour traiter les théories inconsistantes de la logique classique. Une telle variante de la logique des défauts est spécialement intéressante quand on considère la fusion de plusieurs sources de connaissances : en effet, sans cette correction, un système de raisonnement basé sur la logique des défauts serait capable d'inférer toute conclusion (et son contraire) si deux informations (de la logique classique) étaient contradictoires l'une pour l'autre.

Dans l'approche basique décrite dans les sections précédentes, aucune distinction n'est faite entre les défauts de la théorie initiale et les défauts introduits pour remplacer les MUSes ou parties de MUSes, comme si les défauts étaient de la même nature épistémologique. En effet, les nouveaux défauts sont introduits pour *corriger* et *affaiblir* plusieurs éléments de connaissance qui exhibent autant de déficiences. Notre voie pour corriger les MUSes revient à considérer que les formules appartenant aux MUSes doivent être acceptées *par défaut*. De cette manière, il peut être défendu que le rôle des défauts additionnels est similaire au rôle des défauts des théories initiales, lesquels sont habituellement utilisés pour représenter des formes de raisonnement par défaut.

Au contraire, il peut être soutenu que les nouveaux défauts doivent être considérés avec une priorité plus forte (resp. plus faible) que celle des défauts des théories initiales. Dans ces deux cas, nous devons avoir recours à une forme de logique des défauts priori tisée (voir par ex. Brewka & Eiter (2000)). Nous prévoyons de nous intéresser à ce problème par la suite.

Annexe A : Logique des Défauts

Les ingrédients de base de la logique des défauts de Reiter (Reiter (1980)) sont les *règles de défaut* (abrègé en *défauts*). Un défaut d est de la forme :

$$\frac{\alpha(x) : \beta_1(x)\,,\;\ldots\;,\,\beta_m(x)}{\gamma(x)},$$

où $\alpha(x)$, $\beta_1(x)$, $\dots$, $\beta_m(x)$, $\gamma(x)$ sont des formules de la logique du premier ordre avec des variables libres appartenant à $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, et sont appelées le *prérequis*, les *justificatifs* et le *conséquent* de d, respectivement.

Intuitivement, d est destiné à permettre le raisonnement "*Si le prérequis appartient aux conclusions de la théorie, alors si chaque justificatif est consistant avec les conclusions de cette même théorie, le conséquent appartient lui-aussi à ces conclusions*".

Par conséquent, l'exemple de l'introduction peut-être représenté par

$$\frac{employe(x) : acces\_base\_permis(x)}{acces\_base\_permis(x)}.$$

Un tel défaut où le justificatif et le conséquent sont identiques est appelé *défaut normal*. Un défaut normal dont le prérequis est vide est appelé *défaut super-normal*. Pour un défaut d, nous utilisons $pred(d)$, $just(d)$, et $cons(d)$ pour noter le prérequis, l'ensemble des justificatifs et le conséquent de d, respectivement.

Une *théorie avec défauts* Γ est une paire (Δ, Σ) où Σ est un ensemble de formules de la logique du premier ordre et Δ est un ensemble de défauts. Il est habituellement supposé que Δ et Σ sont sous forme skolemisée et que les défauts ouverts, c.à.d. les défauts dont les variables sont libres, représentent l'ensemble de leurs instances fermées sur l'univers de Herbrand. Une théorie avec défauts avec des défauts ouverts est *fermée* en remplaçant les défauts ouverts par leurs instances fermées. Dans la suite, nous supposons que les théories avec défauts sont fermées.

Définir et calculer ce qui peut être inféré à partir d'une théorie avec défauts n'est pas un problème simple. Premièrement, il y a une forme de circularité dans la définition et dans le calcul de ce qui peut être inféré. Pour décider si le conséquent d'un défaut doit être inféré, nous avons besoin de vérifier la consistance de ses justificatifs. Cependant, ce test de consistance revient à prouver que les opposés des justificatifs ne peuvent être inférés à leur tour. En fait, dans le cas général, les méthodes à point fixe sont utilisées pour caractériser ce qui peut être inféré à partir d'une théorie avec défauts. Deuxièmement, aucun, un ou plusieurs ensembles de formules maximalement consistant, appelés *extensions*, peuvent être attendus à partir d'une seule et même théorie. Une manière de caractériser les extensions est définie comme suit (Reiter (1980)).

Considérons une série d'ensembles de formules E_i où $E_0 = Cn(\Sigma)$ et $E_{i+1} =$

$$Cn(E_i \cup \{\gamma \text{ t.q. } \frac{\alpha : \beta_1, \dots, \beta_m}{\gamma} \in \Delta \text{ où } \alpha \in E_i \text{ et } \neg\beta_1, \dots, \neg\beta_m \notin E\}),$$

pour $i = 0, 1, 2, etc.$ Alors, E est une extension de Γ ssi $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

Un défaut d est appelé *générateur* dans un ensemble de formules Π, si $pred(d) \in \Pi$ et $\{\neg a \text{ t.q. } a \in just(d)\} \cap \Pi = \emptyset$. Nous notons $GD(\Delta, E)$ l'ensemble de tous les défauts de Δ qui sont générateurs dans E. Il est aussi bien connu que toute extension d'une théorie avec défauts $\Gamma = (\Delta, \Sigma)$ est caractérisée par $GD(\Delta, E)$, c.à.d. $E = Cn(\Sigma \cup cons(GD(\Delta, E)))$, où $cons(\Delta') = \{cons(d) \text{ t.q. } d \in \Delta'\}$ pour tout ensemble Δ'.

Références

L. BERTOSSI, A. HUNTER & T. SCHAUB, Eds. (2004). *Inconsistency Tolerance*, volume 3300. Springer-Verlag New York, Inc., lecture notes in computer science edition.

BESNARD P., GRÉGOIRE E. & RAMON S. (2009). A default logic patch for default logic. In C. SOSSAI & G. CHEMELLO, Eds., *10th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09)*, p. 578–589, Heidelberg : Springer. Verona, Italy.

BESNARD P. & HUNTER A. (1995). Quasi-classical logic : Non-trivializable classical reasoning from inconsistent information. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty (ECSQARU'95)*, p. 44–51, London, UK : Springer-Verlag.

BREWKA G. (1991). Cumulative default logic : in defense of nonmonotonic inference rules. *Artificial Intelligence*, **50**(2), 183–205.

BREWKA G. & EITER T. (2000). Prioritizing default logic. In *Intellectics and Computational Logic (to Wolfgang Bibel on the occasion of his 60th birthday)*, p. 27–45, Deventer, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

EITER T. & GOTTLOB G. (1992). On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence*, **57**(2-3), 227–270.

GOTTLOB G. (1992). Complexity results for nonmonotonic logics. *Journal of Logic Computation*, **2**(3), 397–425.

GRÉGOIRE E., MAZURE B. & PIETTE C. (2006a). Extracting muses. In *European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'06)*, p. 387–391 : IOS Press.

GRÉGOIRE E., MAZURE B. & PIETTE C. (2006b). Tracking muses and strict inconsistent covers. In *ACM/IEEE Conference on Formal Methods in Computer Aided Design (FMCAD'06)*, p. 39–46.

GRÉGOIRE E., MAZURE B. & PIETTE C. (2007). Boosting a complete technique to find mss and mus thanks to a local search oracle. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'07)*, p. 2300–2305.

KONIECZNY S. & GRÉGOIRE E. (2006). Logic-based information fusion in artificial intelligence. *Information Fusion*, **7**(1), 4–18.

LUKASZEWICZ W. (1988). Considerations on default logic : an alternative approach. *Computational intelligence*, **4**(1), 1–16.

MIKITIUK A. & TRUSZCZYŃSKI M. (1993). Rational default logic and disjunctive logic programming. In *Workshop on Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning (LPNMR'93)*, p. 283–299, Cambridge, MA, USA : MIT Press.

REITER R. (1980). A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, **13**, 81–132.

SCHAUB T. (1992). On constrained default theories. In B. NEUMANN, Ed., *European conference on Artificial Intelligence (ECAI'92)*, p. 304–308, New York, NY, USA : John Wiley & Sons, Inc.