Pierre Samuel et Jules Vuillemin : mathématiques et philosophie

Sébastien Maronne

Pierre Samuel et Jules Vuillemin : mathématiques et philosophie*

Sébastien MARONNE (IMT & SPHERE)‡

Résumé : Je me propose dans cet article de présenter une modalité actuelle possible de relation entre mathématiques et philosophie. Pour ce faire, je considérerai un projet relativement récent de philosophie des mathématiques en prenant pour objet d'étude les contributions et réflexions de Pierre Samuel et Jules Vuillemin portant sur un concept *général* de structure dans la ligne de Nicolas Bourbaki, et en examinant plus précisément la notion de *problème universel*.

Abstract : In this article I aim to present an actual modality of relationship between mathematics and philosophy. To this purpose, I will consider a relatively recent project in philosophy of mathematics by taking as a case study Pierre Samuel's and Jules Vuillemin's reflections and contributions dealing with a *general* concept of structure in line with Nicolas Bourbaki, and by examining more specifically the notion of *universal problem.*

1. Introduction

Mathématiques et philosophie

Il en va des rapports entre mathématiques et philosophie comme des classiques, fussent-il cités et bien connus, ils ne laissent pas d'être rares et réfèrent au naguère de la philosophie des mathématiques (Cavaillès, Lautman) voire au jadis des grandes œuvres philosophiques (Kant, Descartes, Platon). Cette rareté prend sa source dans un fait qui va, somme toute, de soi : le développement propre à chaque discipline est en effet produit par des problèmes *de facto distincts* (qu'est-ce que pourrait signifier qu'un problème soit *à la fois* mathématique et philosophique ?) qui possèdent leurs spécificités techniques – en particulier dans le cas des mathématiques –. Pour autant, les concepts mobilisés pour résoudre des problèmes mathématiques et philosophiques distincts peuvent parfois apparaître, à l'image des astres, en conjonction pour l'observateur. Selon ce point de vue, la *philosophie des mathématiques* se définit (ou pourrait se définir[1]) comme ces quelques conjonctions remarquables entre mathématiques et philosophie et l'activité d'un philosophe des mathématiques consisterait ainsi à reconnaître puis à analyser, en passant le cas échéant par l'histoire, les méthodes et concepts à la source de ces rencontres. Cette définition, donnée par Sébastien Gandon dans son récent article « Quelle philosophie pour quelle mathématique ? » [Gandon, 2013], l'amène à s'interroger sur la possibilité d'une philosophie des mathématiques contemporaine :

* Paru dans Thierry Lambre (éd.), *Des mathématiques en Auvergne: histoire, progrès, interactions, t. 1,* Clermont-Ferrand, Revue d'Auvergne, p. 151-173, 2014.

‡ Institut de Mathématiques de Toulouse, Equipe Emile Picard, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9. *E-mail* : smaronne@math.univ-toulouse.fr

[1] En effet, le fait est que la philosophie des mathématiques peut aussi s'affranchir, dans une certaine mesure, et de la philosophie et des mathématiques, en développant une tradition autonome liée à la postérité de certains problèmes peu à peu déconnectés des disciplines qui leur ont donné naissance, autonomisation que d'aucuns ont pu critiquer. C'est ce que nous enseigne l'histoire de la philosophie des mathématiques, point sur lequel a insisté David Rabouin. Cf. par exemple le texte d'introduction du *Corpus de philosophie des mathématiques 1499-1701* qu'il a édité : http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?article1062.

> « Au sens où je l'entends, *une philosophie des mathématiques est donc la conjonction de deux exigences qui n'ont a priori rien à voir : que les concepts mobilisés fassent sens d'un strict point de vue philosophique et qu'ils fassent également sens d'un strict point de vue mathématique.* Qu'une telle conjonction puisse avoir lieu ne va donc absolument pas de soi. Les deux contextes d'évaluation sont en effet à la fois très contraints et très hétérogènes. Comment la philosophie et les mathématiques, qui ont leur propre histoire, leur propre exigence et leur propre rigidité pourraient-elles donner lieu à un discours qui « morde » à la fois sur les deux domaines ? Il y a eu, par le passé – les œuvres de Kant et Russell en témoignent –, des philosophies des mathématiques. *Il y a eu des moments où les trajectoires des deux disciplines étaient suffisamment proches pour que se cristallise la possibilité d'un discours réellement commun* – d'un discours qui ne soit pas la simple projection sur l'autre domaine de ses propres catégories. *La question que j'aimerais aborder pour finir est celle de savoir si l'époque actuelle fait partie de ces moments rares de l'histoire de la rationalité.* » [Gandon 2013, p. 209-210]

Je me propose ici de présenter une modalité actuelle possible des rapports entre mathématiques et philosophie. Pour ce faire, je considérerai un projet relativement récent de philosophie des mathématiques en prenant pour objet d'étude les contributions et réflexions de Pierre Samuel et Jules Vuillemin portant sur un concept *général* de structure dans la ligne de Nicolas Bourbaki, en examinant plus précisément la notion de *problème universel*. Bien que ce projet ait en un certain sens échoué, comme je l'expliquerai par la suite, il n'en demeure pas moins exemplaire dans l'histoire récente de la philosophie des mathématiques.

Samuel et Vuillemin

Un postulat fondamental de la philosophie de Vuillemin consiste à poser une relation intime entre mathématiques et philosophie, qui se révèle en particulier être une relation de cause à effet entre les renouvellements des méthodes de l'une et de l'autre[2]. Vuillemin écrit ainsi dans son introduction à la *Philosophie de l'algèbre* (1962) :

> « *Or il existe un rapport plus intime quoique moins apparent et plus incertain entre les Mathématiques pures et la Philosophie théorique*. *L'histoire des Mathématiques et de la Philosophie montre qu'un renouvellement des méthodes de celles-là a, chaque fois, des répercussions sur celles-ci.* L'occasion du platonisme a été fournie par la découverte des irrationnelles. […] Il est également connu que la méthode métaphysique de Descartes emprunte sans discontinuer à l'invention mathématique de la Géométrie Algébrique. […]
>
> Je me propose donc un double but :
>
> 1) j'examinerai comment une connaissance pure est possible eu égard à notre faculté de penser.
> 2) J'utiliserai les analogies de la connaissance mathématique pour critiquer, réformer et définir, autant qu'il se pourra la méthode propre à la Philosophie théorique. » [Vuillemin, 1962, p. 4-5]

Pour autant, le problème qui se pose d'emblée au philosophe visant à prendre pour objet de sa réflexion les mathématiques est bien la question de la pratique (et, symétriquement, au mathématicien désireux d'élaborer en propre une philosophie des mathématiques),

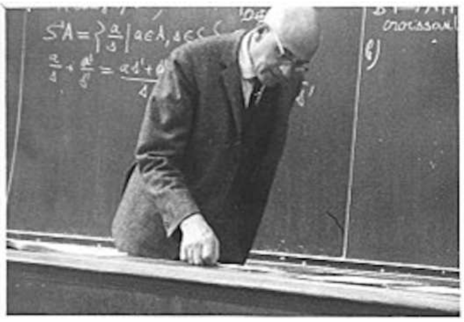
> « […] car jamais, par exemple, nous ne deviendrons mathématiciens, même en connaissant par cœur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas en même temps capable de

[2] Pour les rapports entre (histoire des) mathématiques et (histoire de la) philosophie chez Vuillemin, cf. [Schwartz, 2005] et [Rashed et Pellegrin, 2005].

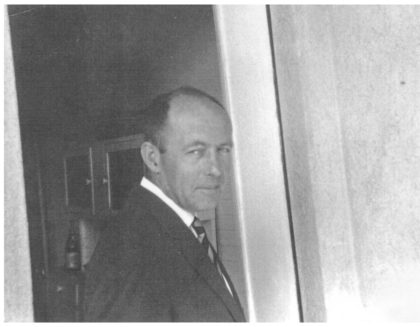
> résoudre n'importe quel problème ; et nous ne deviendrons jamais philosophes, si nous avons lu tous les raisonnements de Platon et d'Aristote, et que nous sommes incapables de porter un jugement assuré sur les sujets qu'on nous propose ; *dans ce cas, en effet, ce ne sont point des sciences que nous aurions apprises, semble-t-il, mais de l'histoire.* » [Descartes, 2002, AT X, 367]

Devant la technicité croissante des mathématiques qui les dérobe chaque jour davantage au philosophe, en particulier quant à ce qui regarde une *pratique concrète* de résolution de problèmes, la relation entre Pierre Samuel et Jules Vuillemin nous donne à voir une collaboration effective entre un mathématicien et un philosophe portant sur des développements contemporains de la recherche, à savoir ceux de l'algèbre moderne.

Samuel et Vuillemin, qui furent tous les deux professeurs à l'université de Clermont-Ferrand à la fin des années cinquante[3], paraissent en effet avoir discuté et travaillé, au jour le jour, comme en témoignent, entre autres, les deux dédicaces adressées par Jules Vuillemin à Pierre Samuel dans ses deux ouvrages classiques de philosophie des mathématiques, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* (1960) et *La philosophie de l'algèbre* (1962).[4]



Pierre Samuel (1921-2009)



Jules Vuillemin (1920-2001) - © Archives Jules Vuillemin[5]

À la recherche de la (plus grande) généralité

Une modalité possible des rapports entre mathématiques et philosophie concerne les valeurs épistémiques que les mathématiciens et les philosophes attribuent à des échantillons de la pratique mathématique. Je considérerai ici la valeur de la *généralité*[6] et la recherche corrélative dans une démonstration, un théorème, une théorie de *la plus grande généralité.* Comme on le sait bien, cette valeur a joué un rôle fondamental dans la rédaction des *Eléments de Mathématique* de Nicolas

[3] Sur Vuillemin, je renvoie, parmi d'autres études, aux articles parus dans deux numéros antérieurs de la *Revue d'Auvergne* intitulés « L'Auvergne en philosophie » : [Bardy, 2006], [Pariente, 2006], [Schwartz, 2007].

[4] « Je prie ici Mme Henri Gazanion, *M. Pierre Samuel*, M. Michel Serres et M. Raymond Siestrunck, d'accepter le témoignage de ma reconnaissance pour leurs corrections, leur aide, et leurs conseils. » [Vuillemin, 1960, 2] ; « À mes amis Pierre Samuel, Raymond Siestrunck, Georges Vallet » [Vuillemin, 1962]. Samuel est également cité dans [Vuillemin, 1962, note 1, p. 277] pour une remarque en relation avec sa « traduction » logico-mathématique de la théorie du moi fichtéen. Comme me le signale B. Mélès, on trouve aussi une mention de Samuel dans les *Leçons sur la première philosophie de Russell* (1968) (cf. [Vuillemin, 1968, p. 161, n. 5]), où Vuillemin dit lui devoir la démonstration figurant dans les pages qui précèdent.

[5] Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie — Archives Henri-Poincaré (UMR 7117), Université de Lorraine/CNRS.

[6] Pour une analyse plus développée de la généralité en mathématiques, je renvoie au recueil collectif [Chemla, Chorlay & Rabouin, à paraître].

Bourbaki, au point qu'on a pu parfois accuser ce dernier de verser dans une trop grande et inféconde généralité.

Cette exigence de la plus grande généralité est une exigence classique qu'on rencontre déjà dans les *Seconds Analytiques* d'Aristote. Aristote y critique une double démonstration de la permutation des rapports pour les grandeurs (continues) et les nombres (entiers) (*i.e.* si A : B :: C : D alors A : C :: B : D)[7] et fait référence à une démonstration générale *universelle*[8] qui serait commune aux nombres et aux grandeurs :

> « […] la convertibilité des propriétés était démontrée séparément des nombres, des lignes, des figures et des temps, quoiqu'il fût possible de la prouver de toutes ces notions au moyen d'une démonstration unique. Mais par le fait qu'il n'y avait pas de nom unique pour désigner ce en quoi toutes ces notions, à savoir les nombres, les longueurs, les temps et les solides, sont une seule et même chose, et parce qu'elles diffèrent spécifiquement les unes des autres, cette propriété était prouvée pour chacune séparément. *Mais à présent, la preuve est universelle, car ce n'est pas en tant que lignes ou que nombres que ces notions possèdent l'attribut en question, mais en tant que manifestant le caractère [générique] qu'elles sont supposées posséder universellement.* » [Aristote, 1995, p. 32-33][9]

Classiquement, la valeur de la généralité est mise en relation avec deux autres valeurs (ou au contraire opposée lorsque tel échantillon de la pratique est jugé inutilement général) : la fécondité d'une part[10], et la valeur explicative d'autre part. Si, par exemple, on considère à la fois les traditions françaises et analytiques, on trouve chez Bachelard à propos du théorème de Pythagore :

> « Le théorème de Pythagore a ainsi une valeur philosophique considérable. Il y a donc le plus grand intérêt à le montrer dans toute sa généralité, dans les développements d'une identité continuée. En le bornant au cas des carrés, on le mutile. Sur les carrés, on ne voit pas la portée de la *pythagoricité*, la hiérarchie de l'*idée pythagoricienne*. Sur le fond de la caverne, sur le tableau noir, on ne voit que l'ombre d'une grande vérité intelligible. Le carré n'est qu'un accident, c'est la *similitude,* « idée abstraite », qui donne la *loi.* La forme abstraite porte la pleine lumière. » [Bachelard, 1966, p. 94]

Dans un autre style, Kitcher souligne le caractère explicatif de la (bonne) généralisation :

> « *Les généralisations importantes sont explicatives*. Elles expliquent en nous montrant exactement comment, en modifiant certaines règles qui sont constitutives de l'usage d'expressions du langage, nous obtenons un langage et une théorie au sein desquels des résultats analogues à ceux que nous avons déjà acceptés seraient produits. À partir de la perspective de cette nouvelle généralisation, nous voyons notre ancienne théorie comme un cas particulier, un membre d'une famille de théories apparentées. » [Kitcher, 1984, p. 208-209][11]

---

[7] Cf. [Euclide(1990-2001), II, Prop. V.16 p. 99-104 & Prop. VII.13, p. 315]. Dans *Les Eléments* d'Euclide, si les énoncés du Livre V pour les grandeurs (continues) et du Livre VII pour les nombres (entiers) sont *mutatis mutandis* les mêmes, les démonstrations sont de nature essentiellement différentes. Pour une analyse du passage d'Aristote et des propositions afférentes des *Eléments*, cf. [Gardies, 1988, p. 19-21], [Rabouin, 2009, p. 74-84] et [Rabouin, à paraître].

[8] Le problème de l'universel est un problème classique commun aux mathématiques et à la philosophie. Cf. par exemple pour une analyse philosophique du rapport entre universel et nécessaire [Halimi, 2013].

[9] De façon frappante, l'entreprise bourbakiste d'élaboration d'une théorie pleinement générale des structures outrepassant un catalogue de théorèmes portant sur des structures données me paraît renvoyer au même problème mis en avant ici par Aristote.

[10] Cf. par exemple [Roque, à paraître].

[11] « Significant generalizations are explanatory. They explain by showing us exactly how, by modifying

Le mathématicien S. Mandelbrojt insiste enfin sur le caractère explicatif de la bonne généralisation, mais de façon plus nuancée, en indiquant pour but non pas la *plus grande* généralité mais la généralité *optimale.*

> « Le fait d'être général est une grande vertu pour un fait mathématique, et l'on éprouve une sorte de léger mépris pour le fait particulier. Je n'arrive pourtant pas à diviniser la généralité en soi. […] *La généralité est belle lorsqu'elle possède un caractère explicatif.* Lorsqu'on découvre un théorème avec des hypothèses restrictives qu'on sent un peu liées au sujet ou qui paraissent dues uniquement à la méthode employée pour sa démonstration, on cherche, évidemment, à se débarrasser de ces conditions gênantes. On cherche donc à généraliser le résultat pour donner au phénomène son aspect naturel. […] *Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème.* […] *C'est ainsi qu'on obtient la généralité explicative*. Personnellement, je sens *qu'il y a un optimum* à cette généralité. » [Mandelbrojt 1952, p. 426-427][12]

2. L'exemple de Descartes

On trouve en conclusion de l'ouvrage *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* de Vuillemin une thèse énonçant l'analogie profonde chez Descartes entre la méthode de la géométrie algébrique et la méthode universelle à l'œuvre en métaphysique :

> « La mathématique est, selon Descartes, une science de l'ordre et de la mesure. *Or la méthode algébrique qui la définit peut être abstraite de son objet*. Elle cesse alors d'être algébrique pour devenir universelle et n'a plus pour objet que l'ordre des idées de l'entendement pur.
> Cette méthode et cet ordre permettent à la Philosophie d'être une science, qui passe continument d'évidences en évidences, à partir du *je pense.* » [Vuillemin, 1960, 139-140]

Cette origine mathématique bien connue de la méthode cartésienne en métaphysique est narrée par l'auteur dans un célèbre passage du *Discours de la Méthode* :

> « Et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est à dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes [choses] qu'ils ont examinées ; bien que je n'en espérasse aucune utilité, sinon qu'elles accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités, et ne se contenter point de fausses raisons. *Mais je n'eus pas dessein, pour cela, de tâcher d'apprendre toutes ces sciences particulières, qu'on nomme communément mathématiques ; et voyant qu'encore que leurs objets soient différents, elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considèrent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général* […] » [Descartes, 1637, p. 19-20]

Dans ce texte, Descartes présente un état des lieux *apparent* des mathématiques qu'on pourrait appliquer aux mathématiques contemporaines. Les mathématiques apparaîtraient comme un agrégat de sciences particulières dont les objets seraient à

---

certain rules which are constitutive of the use of some expressions of the language, we would obtain a language and a theory within which results analogous to those we have already accepted would be forthcoming. From the perspective of the new generalization, we see our old theory as a special case, one member of a family of related theories. » Cf. [Mancosu, 2000, p. 144-148] pour une analyse des rapports entre explication et généralisation chez Kitcher.

[12] Une partie de ce texte est citée et commentée dans [Patras, 2001, p. 131].

première vue différents mais dont on pourrait reconnaître l'unité en exhibant une notion transversale, ici la notion de proportion[13]. On remarquera d'autre part, que Descartes oppose, comme c'est naturel, l'examen *en général* des proportions aux objets *particuliers* des mathématiques.

On retrouve du reste cette opposition entre particulier et général, et la priorité qui s'ensuit pour le général selon Descartes, dans la résolution des problèmes géométriques qui sont classés au moyen d'équations algébriques dans *La Géométrie*[14]. Descartes écrit ainsi dans une lettre à la princesse Elisabeth de novembre 1643 :

> « et en substituant une seule lettre au lieu de plusieurs, ainsi qu'elle a fait ici fort souvent, le calcul ne lui sera pas ennuyeux. C'est une chose qu'on peut quasi-toujours faire, lorsqu'on veut seulement voir de quelle nature est une question, c'est-à-dire si elle se peut [ré]soudre avec la règle et le compas, ou s'il y faut employer quelques autres lignes courbes du premier ou du second genre etc., et quel est le chemin pour la trouver : qui est ce de quoi je me contente ordinairement, touchant les questions particulières. » [AT, IV, 46-47]

3. Bourbaki et les structures

Comme on le sait bien, la méthode axiomatique et la notion de structure jouent un rôle central dans l'architecture des mathématiques bourbakiste[15]. De surcroît, elles permettent, malgré une fragmentation apparente, de retrouver l'unité des mathématiques :

> « […] nous croyons que *l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties*, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de 'méthode axiomatique' ». [Bourbaki, 1948a, p. 37]

Si l'on entrevoit ici une analogie avec l'opposition cartésienne entre les mathématiques agrégat de sciences particulières et la mathématique unifiée par la notion de proportion, cette analogie est confirmée par un renvoi aux règles du *Discours de la Méthode,* en tant qu'elle illustrerait la méthode axiomatique. Nous verrons plus loin que Vuillemin réfère lui aussi à cette quatrième règle du *Discours* dans sa *Philosophie de l'Algèbre.* Voici ce qu'écrit Bourbaki quant aux « règles de la méthode axiomatique » :

> « Puisant comme [la méthode expérimentale] à la source cartésienne, *elle "divisera les difficultés pour les mieux résoudre"* [16]; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à *dissocier* les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'eux *isolément*, et le

[13] Un candidat pour les mathématiques contemporaines selon Bourbaki étant la notion de structure, cf. [Bourbaki, 1948] et *infra*.

[14] Equations du premier ou second degré pour les problèmes plans constructibles à la règle et au compas, équations du troisième ou quatrième degré pour les problèmes solides construits en intersectant un cercle et une parabole, … Cf. [Descartes, 1637, p. 302-304 et p. 389*sq.*]

[15] En disant cela, je ne fais que paraphraser le titre du célèbre texte de Bourbaki publié en 1948 dans les *Grands courants de la pensée mathématique* de François Le Lionnais et des sections « Formalisme Logique et méthode axiomatique » [Bourbaki, 1948a, p. 36-38], « La notion de "structure" » [Bourbaki, 1948a*,* p. 39-41].

[16] Il s'agit de la deuxième règle de la méthode.

posant en principe abstrait, elle déroulera les conséquences qui lui sont propres[17] ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en *combinera* de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudiera comment ils réagissent les uns sur les autres[18]. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée. » [Bourbaki, 1948a, p. 38]

Bourbaki illustre cette méthode avec l'exemple de la théorie axiomatique des groupes abstraits, pour expliquer ensuite ce qu'est une structure mathématique :

> « On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une *structure mathématique*. *Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée* (2) ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (3) (dans le cas des groupes, c'était la relation $z = x + y$ entre trois éléments arbitraires) ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère et qui sont les *axiomes* de la structure envisagée (1). Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, *en s'interdisant toute autre hypothèse* sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur 'nature' propre). » [Bourbaki, 1948a, p. 40-41]

Bourbaki renvoie dans la note (2) au *Fascicule de résultats* de *Théorie des Ensembles* (cf. Figure 1) paru en 1939 et à sa définition d'espèce de structure [Bourbaki, 1939, §8, Echelles d'ensembles et structures, p. 41-45], en invoquant la nécessité d'une plus grande généralité pour « les besoins des mathématiques » :

> « *En réalité, cette définition des structures n'est pas assez générale pour les besoins des mathématiques ;* il faut aussi envisager le cas où les relations définissant une structure auraient lieu, non entre des *éléments* de l'ensemble considéré, mais aussi entre des *parties* de cet ensemble, et même, *plus généralement,* entre des éléments d'ensembles de 'degré' encore plus élevé dans ce qu'on appelle 'l'échelle de types' » [Bourbaki, 1948a, p. 40, n. 2]

Frontispice du Fascicule de résultats de *Théorie des Ensembles* de Bourbaki (1939)

---

[17] Comparer avec la troisième règle de la méthode : « conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés » [Descartes, 1637, p. 18].
[18] Comparer avec la quatrième règle de la méthode : « de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. » [Descartes, 1637, p. 19].

Le fait que cette recherche de la généralité chez Bourbaki soit conditionnée par les besoins *concrets* des mathématiques, à savoir l'établissement de résultats et la définition de notions nouvelles, a été souvent débattu, les adversaires de Bourbaki voyant plutôt dans la démarche bourbakiste une recherche (stérile) de la généralité pour la généralité. Dieudonné écrit ainsi en 1982 :

> « […] Une des attaques adressées au point de vue de *Bourbaki* [est] qu'il *aurait encouragé la tendance à publier des mathématiques vides et à généraliser pour la seule fin de généraliser*. Chaque fois qu'il a été décidé d'inclure une notion ou un théorème principal dans Bourbaki, ce n'a été qu'après une discussion prolongée, au cours de laquelle ses avocats devaient établir pour quels résultats ces notions ou résultats étaient un outil essentiel. »[19] [Dieudonné, 1982, p. 623] Cité par [Patras, 2001, p. 131].

Pour autant, quelles que soient les dénégations de Dieudonné, la notion bourbakiste générale de structure paraît fournir un exemple prototypique, à tout le moins si l'on se réfère à l'usage qui en est fait dans les *Eléments de Mathématique,* de généralisation inconditionnée, en particulier à de véritables besoins de la pratique mathématique. Comme l'écrit Patras :

> « Les objets algébriques (groupes, corps, …), les ensembles ordonnés et les espaces topologiques présentent une caractéristique commune : ils peuvent être décrits en termes purement ensemblistes à l'aide de quelques notions élémentaires (produits cartésiens, ensemble des parties, …). Des conditions *ad hoc* sur ce type de constructions ensemblistes permettent d'affirmer que l'on a affaire à un type d'objet algébrique donné, à un ensemble ordonné ou à un espace topologique. D'où l'idée de définir une notion universelle de « structure », qui engloberait toutes ces situations et, plus généralement, contiendrait en puissance toutes les définitions possibles d'objets mathématiques au travers d'une utilisation adéquate des opérations ensemblistes fondamentales. *À rechercher de la sorte une généralité inconditionnelle*, *Bourbaki a abouti à un concept très précis de « structure », mais peu maniable et d'un emploi difficile* – en dehors de situations élémentaires où l'on pourrait très bien se dispenser de l'utiliser. En témoigne le fait que Bourbaki lui-même ait peu employé dans ses traités, et seulement de manière anecdotique, sa propre notion formalisée de structure. » [Patras, 2001, p. 130]

On notera la distinction faite par Patras entre la *précision* du concept de structure bourbakiste et sa *rigidité* dans la pratique. Cette distinction pose la question de la relation entre le caractère explicatif d'une généralisation et ses deux composantes théoriques et pratiques. Autrement dit, une explication en mathématique est-elle nécessairement efficace dans la pratique ?

Je n'aborderai pas ici par faute de temps le débat au sein de Bourbaki qui déboucha finalement sur la décision de ne pas inclure la théorie des catégories dans

---

[19] « […] another attack on Bourbaki's point of view, namely that he would have encouraged the tendency to publish empty mathematics and to do generalizations for generality's sake. Whenever it was decided to include a notion or a main theorem in Bourbaki, it was only after prolonged discussion, in which its advocates were required to show in which results these notions or results were a crucial tool. »
Grothendieck écrit de manière plus polémique dans *Récoltes et semailles* : « *En une époque où la mode est au mépris des généralités* (persiflées mine de rien par cette tournure vaguement ridicule *'plus grande généralité naturelle'*…), la plume anonyme qui a pris soin ici de mon éloge funèbre m'a gratifié surabondamment de ce qui aujourd'hui est livré au dédain » [Grothendieck, 1984-1987, p. 448]. Sur la généralité chez Grothendieck, cf. [McLarty, 2007].

son traité[20]. Pour autant, je ferai remarquer en passant qu'une tradition française qui lie d'un côté la théorie bourbakiste des structures et de l'autre côté la théorie des foncteurs et des catégories reste à étudier dans le détail, *a contrario* de l'opposition souvent formulée entre ces deux théories : je veux parler de la théorie des catégories de Charles Ehresmann (cf. [Ehresmann, 1971]) mais aussi de la géométrie algébrique de Grothendieck (cf. Les *Eléments de Géométrie Algébrique* « rédigés avec la collaboration de Dieudonné »). Un point de passage possible de la théorie bourbakiste des structures à une théorie des catégories et des foncteurs est ainsi donné par la notion d'application universelle introduite par Pierre Samuel, membre de la seconde génération du groupe Bourbaki (comme Serre, Schwartz, …) dans son article de 1948 « On universal mappings ». Avant d'en venir à ce texte, je citerai le constat quelque peu désabusé fait par Samuel du refus de Bourbaki d'un *style d'écriture fonctoriel* [21] qu'on trouve dans la recension parue en 1972 dans les *Mathematical Reviews* du volume d'Algèbre (Ch. 1 à 3) des *Eléments de Mathématique* :

> « Il y a une nouvelle section sur les groupes libres et les monoïdes, et sur les groupes (et monoïdes) définis par générateurs et relations ; *ceux-là ne sont pas seulement considérés comme des solutions de problèmes d'application universelle, mais aussi construit de manière très explicite* ; en particulier, les sommes amalgamées de monoïdes et de groupes libres sont traitées clairement et avec efficacité. *Au regard de la façon dont cette section, mais aussi les sections des chapitres II et III sur les produits tensoriels et les algèbres universels sont écrits, on peut penser que Bourbaki n'envisage pas, à présent, d'écrire sur les catégories et les foncteurs : on a le sentiment que, pour lui, la fonctorialité est plutôt une façon de penser que d'écrire.* »[22] [Samuel, 1972]

4. Samuel et les problèmes universels

Dans son article « On universal mappings and free topological groups » [Samuel, 1948a] paru dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* en juin 1948, Samuel formalise le premier le problème des applications universelles. Un témoignage, parmi d'autres, que cet article s'inscrit dans le cadre du travail de Bourbaki est donné par cet extrait d'une lettre d'André Weil à Henri Cartan du 9 juin 1947 :

> « […] *nous avons reçu de Samuel un papier sur les applications universelles* […] Il conviendra que Samuel (qui, bien entendu, devra être convoqué à vos réunions, Bourbaki, Topologie, etc.) vous fasse un laïus là-dessus, et que vous vous fassiez une opinion sur l'opportunité d'insérer ça dans Bourbaki et où. […][23] En revanche, je conseillerais assez à Samuel de publier son papier, de préférence aux USA ; cela lui fera beaucoup plus vite sa 'réputation' en cet heureux

---

[20] Sur ce débat autour des catégories chez Bourbaki, je renvoie aux études de [Krömer, 2006] et [Corry, 2004, p. 372-379].

[21] Remarquons au passage la distinction intéressante faite par Samuel entre style de pensée et style d'écriture.

[22] « There is a new section on free groups and monoïds, and on groups (and monoïds) defined by generators and relations; *these are not only considered as solutions of universal mapping problems, but also constructed in a very explicit way* ; in particular, amalgamated sums of monoids and free groups are treated quite clearly and efficiently. From the way in which this section, and also the sections in Chapters II and III on tensor products and universal algebras are written, *one may guess that Bourbaki is not planning, for the time being, to write about categories and functors*: *one gets the feeling that, for him, functoriality is more a way of thinking than a way of writing* ». Une partie de ce texte est cité par [Corry, 2004, p. 378, n. 59]

[23] Suit une discussion intéressante par Weil de deux options possibles pour insérer l'article de Samuel dans les *Eléments* que je laisse de côté dans le cadre de cet article.

pays que des travaux plus solides et plus mûris (d'où accroissement de sa 'valeur marchande' et autres avantages qui après tout ne sont pas à dédaigner !). De tout ça, il conviendra que vous parliez en détail. » [Cartan & Weil, 2011, p. 234]

Pour compléter le contexte, ajoutons que l'article de Samuel sur les applications universelles paraît au même moment que sa thèse présentée en 1947 à Princeton dans les *Transactions de l'AMS* « Ultrafilters and compactifications of uniform spaces » (juillet 1948) [Samuel, 1948b] qui s'inscrit donc dans la lignée des travaux de Cartan sur les filtres et ultrafiltres, et de Weil sur les espaces uniformes[24]. On voit du reste apparaître dans ce travail la notion d'espace uniforme universel [Samuel, 1948b, p. 124] qu'on retrouve cité dans [Samuel, 1948a, p. 595] dans le premier exemple de la section 2 « problèmes de plongement » consacré à la caractérisation des espaces uniformisables. Ajoutons pour terminer que l'article fut recensé par S. Mac Lane pour les *Mathematical Reviews* (cf. MR0025152 (9,605f)).

Samuel introduit le problème des applications universelles selon un point de vue clairement bourbakiste :

> « On a observé que des constructions *aussi apparemment différentes* que les produits de Kronecker, l'extension de l'anneau d'opérateurs d'un module, le corps de fractions d'un anneau intègre, les groupes libres, les groupes topologiques libres, la complétion d'un espace uniforme, la compactification de Čech *entrent dans le même cadre*. Nous nous proposons dans cet article d'expliquer un *procédé de construction assez général* qui peut être appliqué à la plupart des exemples cités ci-dessus.
>
> *Cet article procédera axiomatiquement.* De fait, le problème en question (le problème d'une *'application universelle'*) ne peut être énoncé seulement qu'après un certain nombre d'axiomes. Lorsque la méthode de construction aura été expliquée, nous l'illustrerons au moyen de l'exemple classique de complétion d'un espace uniforme. *Pour d'autres exemples, le lecteur est renvoyé à un livre à paraître de N. Bourbaki.* La même méthode procure également des conditions nécessaires et suffisantes pour de nombreux problèmes de plongement. Des exemples à la fois topologiques et algébriques seront donnés. Dans la dernière partie de l'article, notre méthode de construction sera appliquée à la théorie de Markoff des groupes topologiques libres. »[25] [Samuel, 1948a, p. 591]

Il s'agit donc d'expliquer en suivant la méthode axiomatique un « procédé de construction assez général » qui permet de rendre compte de constructions « apparemment différentes » dans des contextes variés algébriques ou topologiques. Samuel renvoie en outre à une publication prochaine de Bourbaki pour d'autres

---

[24] Dans sa thèse, Samuel démontre qu'un espace uniforme *X* peut être plongé dans espace compact sans utiliser dans sa preuve le fait que *X* est complètement régulier, et donc la notion de fonction continue à valeurs réelles, comme le faisait A. Weil. Cf. la recension de R. Arens [MR0025717 (10,54a)]. Pour plus d'informations sur le contenu mathématique, cf. [Bourbaki, 1940, Ch. II] et [Bourbaki, 1948b].

[25] « It has been observed that constructions *so apparently different* as Kronecker products, extension of the ring of operators of a module, field of quotients of an integral domain, free groups, free topological groups, completion of a uniform space, Čech compactification *enter in the same frame*. We intend in this paper to explain *a rather general process of construction* which may be applied to most of the examples quoted above.

This paper will proceed axiomatically. In fact the problem under question (*problem of a 'universal mapping'*) can be only stated after a certain number of axioms. When the method of construction has been explained we shall illustrate it by the classical example of the completion of a uniform space. *For more examples the reader is referred to a forthcoming book of N. Bourbaki.* The same method gives also necessary and sufficient conditions for many imbedding problems. Both topological and algebraic examples will be given. In the last part of the paper our method of construction will be applied to Markoff's theory of free topological groups. »

exemples de problèmes d'applications universelles. Un texte consacré aux applications universelles figure en effet dans un appendice à *l'Algèbre multilinéaire* de 1948 [Bourbaki, 1948c] (en relation avec le problème universel du produit tensoriel) et disparaîtra dans les éditions ultérieures (cf. [Krömer, 2006, p. 144]). D'autre part, une telle construction générale répond bien à « des besoins mathématiques » comme paraît le montrer l'usage des applications universelles pour démontrer de façon incomparablement plus brève un théorème de Markov sur les groupes topologiques libres.

Décrivons à présent ce que Samuel entend par ensembles et applications universelles[26]. Prenons S et T deux espèces de structure[27]. Soient données une famille de T-applications, c'est-à-dire d'applications des ensembles d'espèce T dans les ensembles de même espèce, et une famille de $(S - T)$ applications, c'est-à-dire, d'applications des ensembles d'espèce S dans les ensembles d'espèce T. On suppose en outre que ces familles sont stables par composition, *i.e.* que le produit de composition d'une (S – T) application par une T-application est encore une (S – T) application [axiome $(S\text{-}T)_1$], et que le produit de deux T-applications est encore une T-application [axiome $(S\text{-}T)_2$].

Le « problème des applications universelles » [U_1] consiste à chercher pour un ensemble E d'espèce S donné, s'il existe un ensemble F_0 d'espèce T et une $(S - T)$ application ϕ_0 de E dans F_0 telle que toute $(S - T)$ application ϕ de E dans un ensemble F d'espèce T se factorise sous la forme

$$\phi = f \circ \phi_0,$$

où f est une T-application de F_0 dans F.

Si l'on suppose que les applications considérées vérifient certains axiomes « naturels » (en relation, en particulier, avec le produit cartésien, cf. [Samuel, 1948a, p. 592]), ce problème admet une solution, et même une infinité de solutions non isomorphes. En imposant en outre comme condition que deux T-applications de F_0 dans un F qui coïncident sur $\phi_0(E)$ soient identiques [U_2], on obtient alors un couple (F_0, ϕ_0) unique à isomorphisme près. Il s'agit de l'espace universel et de l'application universelle associés à E.[28]

Le seul exemple élémentaire détaillé à la suite par Samuel avant de passer aux problèmes de plongement est celui de la complétion d'un espace uniforme qui s'appuie sur le problème universel suivant :

> « […] Etant donné un espace uniforme séparé E, la construction [universelle] précédente produit un espace complet F_0 et une application uniformément continue ϕ_0 de E dans F telle que toute application uniformément continue de E est “induite” par une application uniformément continue de F_0. »[29] [Samuel, 1948a, 593]

Samuel démontre ensuite que ϕ_0 est un isomorphisme (pour la structure d'espace uniforme) de E sur $\phi_0(E)$ qui est dense dans F_0.

---

[26] Je ne peux malheureusement entrer davantage dans le détail mathématique de l'article de Samuel dans le cadre du présent article.

[27] Groupe, anneau, corps, ensemble ordonné, espace topologique, espace uniforme, etc…

[28] Cf. [Samuel, 1948a, p. 592-593]. On trouve aussi une présentation des ensembles et applications universelles dans [Choquet, 1962, p. 118].

[29] « […] given a separated uniform space E, the preceding construction provides with a complete space F_0 and a uniformly continuous mapping ϕ_0 of E into F such that every uniformly continuous mapping of E is “induced” by a uniformly continuous mapping of F_0. »

Esquissons à présent l'examen de la postérité des problèmes d'applications universelles. À l'image du phénomène observé auparavant pour les espèces de structure chez Bourbaki, à de rares exceptions près, les mathématiciens se contentent le plus souvent de produire la construction dans le cas particulier considéré en explicitant ensuite qu'il s'agit d'un problème d'application universelle. Corry écrit ainsi à propos de Bourbaki :

> « […] À cause de la lourdeur des concepts [d'espèce de structure et d'application universelle], la vérification formelle des conditions sous lesquelles le cas particulier en question peut être traité en se référant au cas général est en soi un processus élaboré qui n'est pas dans le livre, rendant douteux, une fois encore, les avantages qu'on aurait à investir autant d'efforts dans des concepts généraux. »[30] [Corry, 2004, p. 323]

On trouve ainsi dans le classique *Commutative Algebra* de Zariski & Samuel [Zariski et Samuel, 1956] les applications universelles mentionnées à deux reprises : dans le théorème III.34 intitulé « la propriété d'application universelle des produits tensoriels » [Zariski & Samuel, 1958, Ch. III, §14, p. 179], et dans le théorème 14 consacré à la « propriété universelle » des anneaux de fractions (cf. [Zariski & Samuel, 1958, Ch. IV, §9, p. 223].

Pour autant, la méthode des problèmes universels est reconnue comme un des procédés clefs des mathématiques modernes. Voici ce qu'écrit par exemple Gustave Choquet dans son article paru dans l'*Enseignement mathématique* en 1962[31], « L'analyse et Bourbaki » :

> « Lors de l'étude d'une structure, le mathématicien moderne est amené à utiliser des structures auxiliaires ; pour les construire, il a besoin d'un guide qui l'oriente vers les bonnes définitions. Nous examinerons ici quelques procédés qui ont fait leurs preuves et se sont révélés de bons guides. […]
> *Ensembles et applications universelles*. — […][32]
> *Exemples*
> a) *Groupe compact associé à un groupe topologique. — [E]* est un groupe topologique, *T* est l'espèce des groupes topologiques compacts, les (*S – T*) applications et les *T*-applications sont des homorphismes continus quelconques. L'espace [universel] [F_0] s'appelle le groupe compact associé à [*E*]. […]
>
> On montre qu'il y a identité entre les fonctions presque-périodiques sur [*E*] et les fonctions [$f \circ \phi_0$], où [*f*] est une fonction continue quelconque sur [F_0].
> *Cet exemple montre l'intérêt que peuvent avoir les ensembles universels pour l'Analyse.* […]
> *Catégories et foncteurs.* — La théorie des "catégories" est le dernier né des grands outils mathématiques. *À elle seule, elle suffirait à prouver l'unité des mathématiques.* Elle constitue un nouveau pas dans l'abstraction ; en effet, les relations qu'elle étudie ne sont plus les relations entre éléments d'un même ensemble, mais entre des êtres d'une même "catégorie", voire même entre différentes catégories. *Il est assez miraculeux qu'une telle généralité ne soit pas synonyme de vacuité et de facilité* ; en fait, cette théorie est devenue, dans de nombreux domaines, un guide indispensable de la jeune génération. »[33] [Choquet, 1962, p. 118-119]

---

[30] « However, due to the unwieldiness of the concepts, the formal verification of the conditions under which the particular case in question can be treated by using the general one is itself an elaborate process that is not carried out in the book, rendering doubtful, once again, the advantages of having invested so much effort in the general concepts. »

[31] Ce texte est tiré d'une conférence donnée au séminaire organisé par la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique à Lausanne le 26 juin 1961.

[32] Choquet présente ensuite le problème des applications universelles. Nous modifions ci-après ses notations dans la citation et reprenons celles de Samuel.

[33] Choquet cite ensuite les autres exemples donnés par Samuel auxquels il ajoute la variété d'Albanese en géométrie algébrique. Cf. [Serre, 1959].

Remarquons que Choquet considère immédiatement après les ensembles et applications universels les catégories et foncteurs qu'il rapporte comme le faisait Bourbaki pour les structures au problème de l'unité des mathématiques, ajoutant *cum grano salis* que ce nouveau pas dans l'abstraction conduit « assez miraculeusement » à une généralité non vide !

On trouve également mentionné dans une recension par A. Mattuck du traité d'algèbre de C. Chevalley *Fundamental Concepts of Algebra* (1956) le rôle essentiel dans l'algèbre moderne des caractérisations d'objets algébriques au moyen de propriétés universelles :

> « Deux techniques modernes fondamentales apparaissent et sont mises en avant dès le tout début. La première est la démonstration que A et B sont isomorphes en construisant des applications réciproques f et g telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident avec l'identité. *La deuxième est la caractérisation par propriété d'application universelle, utilisée ici pour définir les monoïdes libres et bientôt omniprésente.* Cette insistance sur les applications est l'un des éléments les plus caractéristiques de l'algèbre moderne. »[34] [Mattuck, 1957, p. 412]

A contrario, on trouve une critique assez vive par Mac Lane dans son traité classique *Categories for the working mathematician* du concept de construction universelle chez Bourbaki qui offrirait l'exemple d'une généralisation stérile et aurait retardé la découverte du concept de foncteur adjoint par Kan, fondamental selon Mac Lane, en théorie des catégories. L'histoire reconstruite par Mac Lane (le fait que les constructions universelles bourbakistes ne relèvent pas du langage catégorique, la place qu'il accorde à l'algèbre multilinéaire), son insistance marquée sur le concept de foncteur adjoint[35] et les arguments qu'ils invoquent nécessiteraient une discussion qui excède le cadre de cet article[36]. Je me contenterai de souligner que Mac Lane écarte l'idée que la généralité soit une valeur uniquement quantitative en soulignant qu'elle doit être soumise à d'autres valeurs, comme celle de la fécondité. On retrouve ici exprimé le point de vue de Mandelbrojt. Une généralité excessive, en différant une découverte, pourrait ainsi perdre de son caractère explicatif.

> « On pourrait aussi spéculer sur la raison pour laquelle la découverte des foncteurs adjoints a été autant retardée. Les idées sur les espaces de Hilbert ou les constructions universelles en topologie générale auraient pu suggérer la notion d'adjoint, mais elles ne l'ont pas fait ; peut-être que la guerre de 1939-1945 interrompit ce développement. Durant la décade suivante 1945-1955, il y avait très peu d'études des catégories, la théorie des catégories était seulement un langage, et ceux qui auraient pu y travailler ont peut être été découragés par la méfiance répandue à l'encontre du '*general abstract nonsens*' (la théorie des catégories). *Bourbaki l'a simplement manquée* [la découverte des foncteurs adjoints] ([Bourbaki, 1948c, Appendice III]). *Sa définition des constructions universelles était maladroite, parce qu'elle évitait le langage*

---

[34] « Two basic modern techniques appear and are emphasized from the very beginning here. One is the proof that A and B are isomorphic by constructing opposing maps f and g such that $f \circ g$ and $g \circ f$ are the identity. *The other is the universal mapping property characterization, here used to define the free monoid and soon to be ubiquitous.* This emphasis on mappings is one of the most characteristic features of the new algebra. »

[35] Cette insistance sur les foncteurs adjoints, sans autre argument, paraît excessive. On peut en effet montrer comment l'on peut passer de chacune de ces notions fondamentales de la théorie des catégories (problème universel, foncteur représentable, foncteur adjoint) à l'autre. Cf. par exemple [Jaffard, 1958]. Par ailleurs, la notion de foncteur représentable a joué un rôle clef en géométrie algébrique. On ne voit donc pas pourquoi l'insistance sur les foncteurs représentables plutôt que sur les foncteurs adjoints serait une « erreur ».

[36] Corry discute ce texte dans [Corry 2004, p. 368-369].

> *catégorique.* […] *Autrement dit, l'idée de Bourbaki des constructions universelles était conçue comme suffisamment générale pour inclure davantage – en particulier, les idées des constructions de l'algèbre multilinéaire qui étaient importantes pour les traditions mathématiques françaises*[37]. *Rétrospectivement, cette généralité ajoutée semble avoir été une erreur ; les problèmes de construction de Bourbaki mettaient en avant les foncteurs représentables […] La symétrie du problème de l'adjonction échappe à cette formulation. – [Bourbaki] a donc raté une découverte fondamentale. Cette découverte fut laissée à un homme plus jeune, peut-être moins redevable à la tradition ou à la mode. Dit autrement, une bonne théorie générale ne recherche pas la généralité maximale, mais la bonne généralité.* »[38] [Mac Lane, 1971, Ch. IV, p. 103]

5. Vuillemin et les structures

Dans cette dernière partie, j'aborderai le traitement du concept de structure (algébrique) par Vuillemin dans sa *Philosophie de l'Algèbre* (1962) en montrant qu'il emprunte à la conception bourbakiste. Il importe d'abord de remarquer que le traitement du concept de structure y est *tronqué*. En effet, Vuillemin non seulement n'étudie pas les développements mathématiques les plus récents de l'algèbre abstraite des structures[39] mais avait le projet d'examiner dans un second tome non publié le concept de structure en relation avec les problèmes de la mathématique universelle. Ajoutons qu'il semble que la section sur les structures était rédigée. Vuillemin écrit ainsi en quatrième de couverture de la seconde édition de *La Philosophie de l'Algèbre* de 1993 :

---

[37] Cette reconstruction est discutable et perd de vue le fait que l'origine des constructions universelles, si l'on considère l'article source de Samuel, est plutôt topologique.

[38] Je donne ci-après le texte original *in extenso* avec le contenu mathématique. « One may also speculate as to why the discovery of adjoint functors was so delayed. Ideas about Hilbert space or universal constructions in general topology might have suggested adjoints, but they did not; perhaps the 1939-1945 war interrupted this development. During the next decade 1945-55 there were very few studies of categories, category theory was just a language, and possible workers may have been discouraged by the widespread pragmatic distrust of 'general abstract nonsens' (category theory). *Bourbaki just missed ([1948J, Appendix III). His definition of universal construction was clumsy, because it avoided categorical language*, but it amounted to studying a bifunctor $W : X^{op} \times A \to \mathrm{Set}$ and asking for a universal element of $W(x, -)$ for each x. This amounts to asking for objects $Fx \in A$ and a natural isomorphism $W(x,a) \cong A(Fx, a)$; it *includes* the problem of finding a left adjoint F to a functor $G: A \to X$, with $W(x, a) = \hom_X(x, Ga)$. It also includes the problem of finding a tensor product for two modules A and B, with $W(\langle A, B\rangle, C)$ taken to be the set of bilinear functions $A \times B \to C$. Moreover, the tensor product $A \otimes B$ is not in this way an example of a left adjoint (though it is an example of our universal arrows). *In other words Bourbaki's idea of universal construction was devised to be so general as to include more* – and in particular, to include the ideas of multilinear algebra which were important to French Mathematical traditions. *In retrospect, this added generality seems mistaken; Bourbaki's construction problem emphasized representable functors*, and asked "Find Fx so that $W(x, a) \cong A(Fx, a)$". *This formulation lacks the symmetry of the adjunction problem*, "Find Fx so that $X(x, Ga) \cong A(Fx, a)$" *– and so missed a basic discovery; this discovery was left to a younger man, perhaps one less beholden to tradition or to fashion. Put differently, good general theory does not search for the maximum generality, but for the right generality.* »

[39] De ce fait, Vuillemin n'aborde pas le problème des applications universelles. Néanmoins, l'objet d'étude (l'algèbre) et l'horizon mathématique visé par Vuillemin (les structures), la dédicace initiale à Samuel, la citation précédemment mentionnée, la ligne bourbakiste, tous ces éléments nous paraissent témoigner d'un rapport à Samuel, et donc d'une conjonction entre mathématiques et philosophie consistant en un projet de philosophie des mathématiques fondée sur la notion de structure.

> « L'auteur se proposait d'examiner dans un tome second les trois concepts de *structure*, d'infini et d'ordre. Cet examen l'eût conduit aux questions concrètes de la mathématique universelle.
> *D'autres travaux et des parutions récentes sur ces sujets l'ont dissuadé de publier la première section de ce second tome* et de rédiger les deux autres. »

On peut se poser la question de savoir quels sont les « travaux et parutions récentes » qui dissuadèrent Vuillemin de publier la section sur les structures dans un second tome. Une hypothèse serait que le point d'arrêt mathématique mis au développement d'une théorie générale des structures du fait de l'avènement de la théorie des catégories en serait la cause. En effet, selon Vuillemin, le rapport intime entre mathématiques et philosophie se fonde en particulier sur le renouvellement des méthodes de la seconde par les développements de la première. Dans ces conditions, le renoncement en mathématiques à une théorie générale des structures a pour conséquence nécessaire l'abandon de sa contrepartie philosophique.

On trouve néanmoins dans les lectures données par Vuillemin de l'œuvre mathématique d'Abel puis de Galois, des anticipations des caractéristiques de la théorie des structures bourbakiste (d'aucuns diraient des projections issues d'une lecture rétrospective). Pour Vuillemin, la méthode *générale* d'Abel constitue ainsi un renouvellement fondamental des mathématiques dans la mesure où au contraire de la méthode génétique[40], ce sont les *relations* qui permettent de déterminer une propriété qui sont examinées *en premier lieu* sous leur forme *la plus générale*, avant la classe des objets, si tant est qu'ils existent, qui vérifient cette propriété[41].

> « Si l'on veut par conséquent comprendre, au point de vue méthodique et indépendamment des résultats découverts, le renouvellement qu'Abel a apporté aux mathématiques, il convient d'examiner en quoi sa méthode, *qu'il qualifie de « générale »* s'oppose à la méthode génétique. Or, qu'on la considère à l'œuvre dans la Théorie des équations, dans celle des intégrales définies ou dans celle de la convergence des séries de puissances, partout on aperçoit un même procédé. *En premier lieu, on analyse sous sa forme la plus générale une relation mathématique ou un ensemble défini de telles relations qui permettent de déterminer une propriété, dont on ignore encore si on peut ou non l'attribuer à une classe d'êtres* : par exemple le caractère d'être résoluble algébriquement, d'être convergent, d'être exprimable par un nombre défini de fonctions d'une certaine classe. *En second lieu, on considère la classe d'êtres à laquelle il s'agit d'attribuer cette propriété* (l'équation du cinquième degré, le développement de telle fonction en série infinie de puissances, la somme d'un nombre fini de fonctions dont la dérivée est une fonction algébrique) ; *on analyse ces êtres d'un point de vue général*, on définit les relations auxquelles leur nature permet de les assujettir. Enfin, ce double examen révèle les cas d'incompatibilité (démonstrations d'impossibilité) et, éventuellement, indique la voie pour trouver les nouvelles relations exigibles dans les cas de possibilité (intégrales hyperelliptiques, séries uniformément convergentes). » [Vuillemin, 1962, p. 213-214]

Ce changement de méthode est crucial car il produit une connaissance distincte des structures en jeu dans les problèmes mathématiques, pour reprendre un terme cartésien, et relève d'un nouveau type d'abstraction, la *formalisation*.

> « On voit immédiatement quel changement de méthode produira cette nouvelle exigence. Parce qu'elle prenait son point de départ dans des « natures simples » individuelles et qu'elle passait par analogie du spécial au général, la méthode génétique ne pouvait jamais être absolument assurée de ne pas mélanger l'accessoire à l'essentiel. À tout moment, des propriétés définissant les individus sur lesquels on se proposait de réfléchir venaient se mêler

[40] La méthode génétique considère les objets (et non les relations) en commençant, pour reprendre le vocabulaire cartésien, par les « natures simples » qui sont saisies par l'intuition, puis procède ensuite par généralisations successives. Cf. [Vuillemin, 1962, p. 217].
[41] Cf. *supra* p. 5 avec [Bourbaki, 1948a, p. 40-41].

> inextricablement avec les propriétés des structures entièrement indépendantes des individus qui les illustraient, et desquelles dépendait en réalité la solution du problème posé. Par exemple, dans la Théorie des équations, on ne parvenait pas à répondre au problème de la résolution de l'équation du cinquième degré, parce que les procédés utilisés pour les équations de degré moindre cachaient la véritable raison de la réussite, qui se trouve dans le fait que la racine d'une équation résoluble algébriquement est composée de fonctions algébriques exprimables par des fonctions rationnelles des racines de la proposée. […]
>
> Le principe du minimum chez Abel indique donc la nécessité de reconnaître dans la formation des concepts mathématiques une autre voie que l'abstraction par généralisation, qui demeurait, *malgré la Quatrième règle du Discours*[42] et les différentes méthodes *a priori* de Lagrange, la règle unique des Anciens Géomètres. *Cette voie nouvelle est l'abstraction par formalisation, irréductible à la précédente, en ce qu'elle exige d'abord qu'on mette au jour les conditions générales d'un problème, et par conséquent, les postulats dont la théorie dépend.* Tant qu'on réfléchit sur des individus, la méthode qu'on suit, si générale soit-elle, demeure *a posteriori*, comme le remarque Abel à propos de Lagrange, lui adressant le reproche même que celui-ci adressait à ses prédécesseurs. *Pour donner par conséquent à la méthode génétique son style véritablement critique, il faut emprunter une autre méthode, et analyser les structures dont dépendent des classes définies de problèmes de façon relativement indépendante des individus empiriques auxquels elles s'appliquent.* » [Vuillemin, 1962, p. 215-216]

Après avoir rappelé la définition de la loi de composition interne d'un ensemble E chez Bourbaki, comme fonction de $E \times E$ dans E, Vuillemin conclut en présentant cette idée comme « l'idée mère de la notion de structure », insistant non pas seulement sur la primauté accordée aux opérations par rapport aux objets, mais également sur le fait que l'opération est ainsi pensée dans toute sa généralité, car « abstraite de son résultat » :

> « *Telle est [la loi de composition interne],* si l'on fait abstraction de l'idée, accessoire à notre point de vue, de la loi de composition externe et d'opérateur, *l'idée-mère de la notion de structure.* […] l'idée de structure paraît résulter d'une abstraction formelle au second degré. N'importe quel élément de E peut être mis en correspondance avec n'importe quel élément, et cette correspondance donne toujours un résultat défini. *Ainsi l'opération est comme abstraite de son résultat* » [Vuillemin, 1962, p. 260-261]

6. Conclusion

Mon but dans cet article était de présenter quelques échantillons des rapports entre mathématiques et philosophie en prenant pour objet d'étude les notions de structure et de problèmes universels, et pour protagonistes, Pierre Samuel et Jules Vuillemin. J'ai privilégié la discussion de quelques citations signifiantes des auteurs en espérant marquer les similitudes entre les uns et les autres. Par manque de temps et d'espace, J'ai dû laisser de côté une analyse plus globale qui serait

---

[42] La quatrième règle du Discours de la Méthode (« faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre ») joue un rôle fondamental pour Vuillemin car il l'interprète comme « un précepte réflexif et régulateur, qui porte donc sur les méthodes et non sur les problèmes, et qui juge de leur *généralité* et de leur simplicité. » [Vuillemin, 1960, p. 137]. Il écrit ainsi en conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* :

> « La célèbre démonstration d'Abel, selon laquelle il est impossible de résoudre par radical l'équation générale du cinquième degré, en fournira la preuve. De cette difficulté, les Mathématiques ne triompheront qu'en concevant une méthode nouvelle, où l'analyse des structures précède et fonde l'analyse des problèmes particuliers.
>
> *Dans la quatrième Règle du* Discours, *Descartes a pressenti la nécessité de cette extension. De Lagrange à Galois, cette règle ne cessera de prendre de l'importance et du développement.* » [Vuillemin, 1960, p. 141]

Cf. aussi [Vuillemin, 1960, p. 135-138].

nécessaire pour établir une thèse historiographique. J'espère conduire ce travail de plus longue haleine dans le futur.

Ainsi, une étude d'histoire des mathématiques de la tradition française en théorie des catégories (qu'on pense à Samuel, Chevalley, Grothendieck, Ehresmann, Benabou) et de sa relation à la théorie bourbakiste des espèces de structure, jointe à un travail philosophique qui s'appuierait sur la méthode de Vuillemin, serait l'occasion de poursuivre l'étude des rapports dans la seconde moitié du vingtième siècle entre mathématiques et philosophie, en mettant sans doute en avant une continuité au contraire de l'opposition parfois manifestée entre structures et catégories. D'autre part, la référence constante et commune à Descartes, qu'on trouve à la fois chez Bourbaki et Vuillemin, suggère de conduire une étude *comparée* des problèmes, méthodes et concepts qu'on trouve dans les mathématiques et la philosophie à l'âge classique avec ceux des mathématiques et de la philosophie contemporaines, en visant une histoire sur le long terme de la philosophie des mathématiques.

Même si la pratique savante des mathématiques d'un Descartes qui révolutionne la géométrie au dix-septième siècle alliée à la production d'une grande œuvre philosophique nous paraissent aujourd'hui hors de portée, une conjonction entre mathématiques et philosophie demeure sans doute encore possible. L'exemple de Pierre Samuel et Jules Vuillemin en offre un exemple et invite philosophe et mathématicien à un partage et à un échange de pratiques et de concepts, dans le cadre d'une discussion ininterrompue « qui conduit à questionner plutôt qu'à résoudre » pour reprendre la belle formule de Vuillemin qu'on trouve dans l'introduction de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* sur laquelle je conclurai cet article :

> « Un portrait ne cache pas non plus les défauts du modèle, et c'est notre auteur [Descartes] qui conseille d'accorder plus à notre jugement qu'à l'autorité des livres, où les siens sont compris. Ce second éclaircissement conduit à questionner plutôt qu'à résoudre, mais aussi bien c'est là le seul plaisir et la seule utilité que nous pouvons raisonnablement attendre de l'histoire. » [Vuillemin, 1960, p. 2]

Remerciements

Je remercie Sébastien Gandon, Brice Halimi, Thierry Lambre, Baptiste Mélès, David Rabouin, et Joseph Tapia pour leur lecture et leurs commentaires précieux.

Références

[Bardy, 2006] J. Bardy, « Jules Vuillemin, philosophe pédagogue en quête de vérité », *Revue d'Auvergne* no 580-581 (« L'Auvergne en philosophie, 1 : Portraits et itinéraires »), 2006, p. 125-132.

[Bachelard, 1966] G. Bachelard, *Le rationnalisme appliqué*, Paris, PUF, 1966.

[Bourbaki, 1939] N. Bourbaki, *Théorie des Ensembles (fascicule de résultats)*, Ch. X, Paris, Hermann, 1939.

[Bourbaki, 1940] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Première partie. Livre III. Topologie Générale, Ch. I-II*, Paris, Hermann, 1940. [autres éditions, 1950, 1961, 165]

[Bourbaki, 1948a] N. Bourbaki, « L'architecture des mathématiques » in F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique,* Paris, 1948 [je cite la réimpression de Paris, Hermann, 1998].

[Bourbaki, 1948b] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Première partie. Livre III. Topologie Générale, Ch. IX*, *Utilisation des nombres réels en topologie générale,* Paris, Hermann, 1974. [autres éditions, 1958, 1963]

[Bourbaki, 1948c] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique. Première partie. Livre II : Algèbre. Chapitre 3 : Algèbre multilinéaire*, Paris, Hermann, 1948.

[Cartan & Weil, 2011] A. Cartan & A. Weil, *Correspondance,* éditée par M. Audin, Paris, SMF, 2011.

[Chemla, Chorlay & Rabouin, à paraître] K. Chemla, R. Chorlay & D. Rabouin (éds), *Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences*, à paraître.
[Choquet, 1962] G. Choquet, « L'analyse et Bourbaki », *L'Enseignement mathématique*, 8, p. 109-135.
[Corry, 2004] L. Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure* (2ème éd.), Basel, Birkhäuser, 2004.
[Descartes, 1637] R. Descartes, *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison & chercher la vérité dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode,* Leyde, Jean Maire, 1637 [je donne la pagination originale].
[Descartes, 2002] R. Descartes, *Règles pour la direction de* l'esprit (J. Brunscwicg & K. Sang Ong-Van-Cung), Paris, Le Livre de Poche, 2002 [je donne la pagination de l'édition latine du vol. X de l'édition d'Adam-Tannery].
[Dieudonné, 1970] J. Dieudonné, « The work of Nicholas Bourbaki », *Amer. Math. Monthly*, 77, p. 134-145.
[Dieudonné, 1982] J. Dieudonné, « The work of Bourbaki during the last thirthy years », *Notices of the Amer. Math. Soc.*, 29, 1982, p. 618-623.
[Euclide, 1990-2001] Euclide, *Les Eléments* (4 vols.), édition de Bernard Vitrac (Traduction et Commentaires) et Maurice Caveing (Introduction Générale). PUF, Paris, 1990-2001.
[Ehresmann, 1971] C. Ehresmann, *Catégories et structures,* Paris, Dunod, 1971.
[Gardies, 1988] J.-L. Gardies, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide,* Paris, Vrin, 1988.
[Gandon, 2013] S. Gandon, « Quelle philosophie pour quelle mathématique ? », *Archives de Philosophie,* 76, 2013 (2), p. 197-216.
[Grothendieck, 1985-1987] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles,* Université des Sciences et des Techniques du Languedoc, Montpellier [publié en plusieurs volumes].
[Halimi, 2013] B. Halimi, *Le Nécessaire et l'universel. Analyse et critique de leur corrélation*, Paris, Vrin, coll. « Analyse et philosophie », 2013.
[Jaffard, 1965] P. Jaffard, « Problèmes universels, foncteurs représentables et foncteurs adjoints », *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres.* 19 (no. 1), (1965-1966). Exp. No. 1, 12 p. http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A1_0
[Kitcher, 1984], P. Kitcher, *The nature of mathematical knowledge,* Oxford, OUP, 1984.
[Krömer, 2006] R. Krömer, « La "machine de Grothendieck" se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante », *Revue d'Histoire des Mathématiques,* 12 (2006), p. 119–162.
[Mac Lane, 1971] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician* (2nd edition), New York, Springer, 1971.
[Mancosu, 2008] P. Mancosu, « Mathematical explanation. Why it matters ? » in P. Mancosu (éd.), *The Philosophy of Mathematical Practice,* Oxford, OUP, p. 134-150.
[Mandelbrojt, 1952] S. Mandelbrojt, « Pourquoi je fais des mathématiques », *Revue de métaphysique et de morale,* 57, no 4, 1952, p. 422-429. [p. 115-123 dans le présent volume]. http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1985__6__47_0
[Mattuck, 1957] A. Mattuck, « Review of *Fundamental concepts of algebra.* By Claude Chevalley. New York, Academic Press, 1956 », *Bulletin of the American Mathematical Society* 63, no 6, November 1957, p. 412-417.
[McLarty, 2007] C. McLarty, « The rising sea : Grothendieck on simplicity and generality », in Jeremy J. Gray and Karen H. Parshall (eds.), *Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950),* Providence, RI, American Mathematical Society and London, London Mathematical Society, 2007, p. 301-325.
[Pariente, 2006] J.-C. Pariente, « Sur Jules Vuillemin », *Revue d'Auvergne*, no 580-581 (« L'Auvergne en philosophie, 1 : portraits et itinéraires »), 2006, p. 133-157.
[Patras, 2001] F. Patras, *La pensée mathématique contemporaine,* Paris, PUF, 2001.
[Rabouin, 2009] D. Rabouin, *Mathesis Universalis*. L'idée de « mathématique universelle » d'Aristote à Descartes », Paris, PUF, coll. Epiméthée, 2009.
[Rabouin, à paraître] D. Rabouin, « The problem of a "General" Theory in Ancient Greek Mathematics : Between Aristotle and Euclid » in K. Chemla, R. Chorlay, D. Rabouin (éds.), *Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences*, à paraître.
[Rashed et Pellegrin, 2005] R. Rashed et P. Pellegrin (dir.), *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre de Jules Vuillemin*, Paris, Albert Blanchard, 2005.
[Roque, à paraître] T. Roque, « The role of genericity in the history of dynamical systems theory » in K. Chemla, R. Chorlay, D. Rabouin (éds.), *Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences*, à paraître.

[Samuel, 1948a] P. Samuel, « On universal mappings and free topological groups », *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, June 1948, p. 591-598. Received by the editors August 12, 1947. [MR0025152 (9,605f) par S. Mac Lane]

[Samuel, 1948b] P. Samuel, « Ultrafilters and Compactification of Uniform Spaces », *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 64, No. 1 (Jul., 1948), p. 100-132. [MR0025717 (10,54a) par R. Arens]

[Samuel, 1972] P. Samuel, Review of Bourbaki, N. *Eléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* [MR0274237 (43 #2)].

[Schwartz, 2005] E. Schwartz, « Histoire des mathématiques et histoire de la philosophie chez Jules Vuillemin », in R. Rashed et P. Pellegrin (dir.), *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre de Jules Vuillemin*, Paris, Albert Blanchard, 2005, p. 1-28.

[Schwartz, 2007] E. Schwartz, « Le Sens et la portée de l'idéalisme allemand dans la philosophie de Jules Vuillemin », *Revue d'Auvergne* no 585 (« L'Auvergne en philosophie, 2 : Recherche, enseignement, échanges »), 2007, p. 105-134.

[Serre, 1959] J.-P. Serre, « Morphismes universels et variété d'Albanese », *Séminaire C. Chevalley* (1958-1959), t. 4, exp. no 10, p. 1-22. http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A10_0

[Vuillemin, 1960] J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Paris, PUF, 1960.

[Vuillemin, 1962] J. Vuillemin, *La philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962 [2ème édition, 1993].

[Vuillemin, 1968] J. Vuillemin, *Leçons sur la première philosophie de Russell*, Paris, Aubier, 1968.

[Zariski & Samuel, 1958] O. Zariski & P. Samuel, *Commutative Algebra* (vol. I), Princeton, Van Nostrand, 1958.