Mesures de dépendance pour les processus alpha-stables

Ludovic d'ESTAMPES, Bernard GAREL et Dag TJØSTHEIM

ENSEEIHT, 2, rue Charles Camichel 31071 TOULOUSE

University of Bergen, Johs. Brunsgt. 12, N-5008 Bergen, Norway

✉ : destampe@len7.enseeiht.fr ☎ : +33561588367

JSBL 2002

PLAN

Introduction : rappels et définitions

1. Mesures de dépendance

1.1. Covariation

1.2. Corréliance

1.3. Corrélations basées sur les rangs

2. Illustrations théoriques et pratiques

2.1. Cas de deux V.A.R. SαS indépendantes

2.2. Combinaison linéaire de 2 V.A.R. SαS indépendantes

Introduction

Définition 1. La variable aléatoire réelle (V.A.R.) X suit une loi indéfiniment divisible si pour tout n, il existe n V.A.R. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ telles que

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}.$$

Définition 2. La V.A.R. X suit une loi stable si pour tout k et tous $X_1, \ldots, X_k$ V.A.R. i.i.d. de même loi que X, il existe $a_k > 0$ et b_k tels que

$$X_1 + \cdots + X_k \stackrel{d}{=} a_k X + b_k.$$

Théorème 1 (Levy-Khinchine). Si X suit une loi stable alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\boxed{\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\left\{i\mu t - \gamma\,|t|^\alpha \left[1 + i\beta\ \mathrm{sign}(t)\tan\frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{i\mu t - \gamma\,|t| \left[1 + i\beta\ \mathrm{sign}(t)\frac{2}{\pi}\ln|t|\right]\right\} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}}$$

4 paramètres :

- ➨ α : paramètre principal,
- ➨ μ : paramètre de position,
- ➨ γ : paramètre de dispersion,
- ➨ β :paramètre de symétrie.

Remarques.

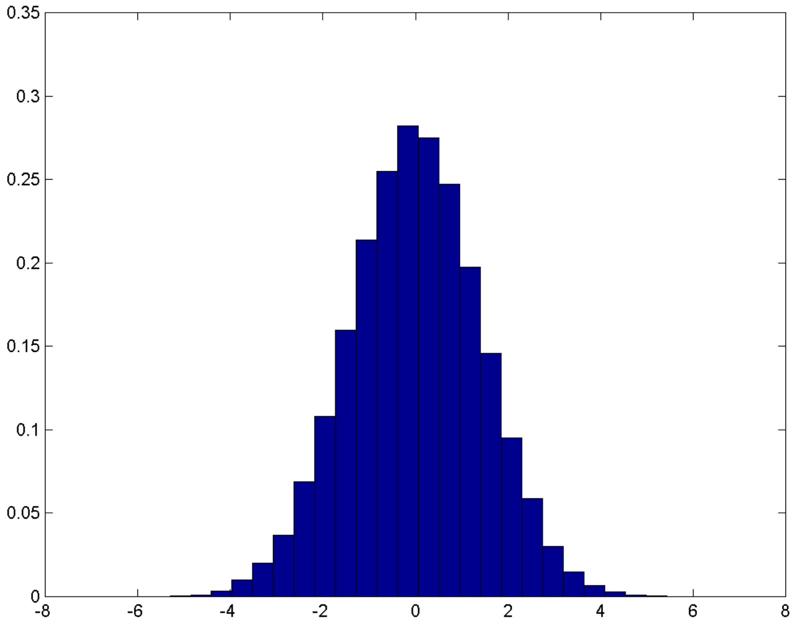
- ➨ $\alpha = 2$: loi gaussienne.
- ➨ $\alpha = 1$: loi de Cauchy.
- ➨ $\underline{\mu = \beta = 0 : \text{ loi S}\alpha\text{S.}}$

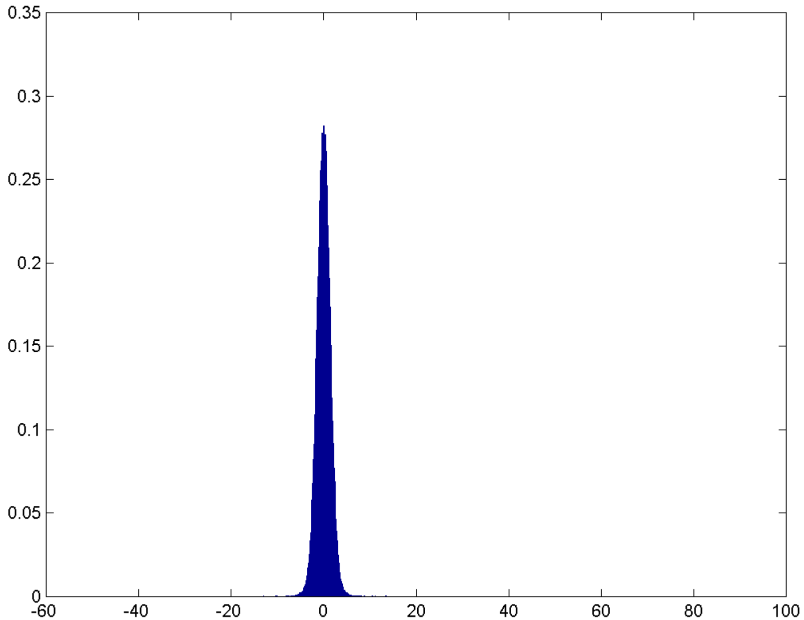
Propriétés 1. X suit une loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$,

➡ $Y = \dfrac{X - \mu}{\gamma^{1/\alpha}}$ suit une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

➡ Si $\alpha = 2$, alors $\forall p$, $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$.

➡ Si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, \ \mathbb{E}|X|^p < +\infty, \\ \forall p \geq \alpha, \ \mathbb{E}|X|^p = +\infty. \end{cases}$





Définition 3. Le vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ est symétrique alpha-stable (SαS) si et seulement si sa fonction caractéristique s'écrit pour tout $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle \underline{t}, \underline{X} \rangle}\right) = \exp\left\{ - \int_{S^{n-1}} |\langle \underline{t}, \underline{x} \rangle|^{\alpha} \, d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \right\}$$

où
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$,
- $\mu_{S^{n-1}}$ est une mesure symétrique sur l'ensemble des boréliens de la sphère unité.

  Cette mesure est aussi appelée «mesure spectrale».

Propriétés 2. Voir vecteurs gaussiens.
X_1 et X_2 V.A.R. SαS indépendantes $\Longrightarrow$ (X_1, X_2) vecteur SαS.

1. Mesures de dépendance

1.1. Covariation

Définition 4. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur SαS, si on pose $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ et $Z = \sum_{j=1}^n b_j X_j$, on définit la covariation entre Y et Z par :

$$\boxed{[Y, Z]_\alpha = \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j \right)^{\langle \alpha - 1 \rangle} d\mu_{S^{n-1}}(\underline{x}) \quad ,}$$

où $\begin{cases} \mu_{S^{n-1}} \text{ est la mesure spectrale} \\ \text{et} \\ u^{\langle v \rangle} = \text{sign } u \, |u|^v . \end{cases}$

Propriétés 3.

- $[X,Y]_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.

- X et Y deux VAR SαS indépendantes $\Longrightarrow [X,Y]_\alpha = 0.$

- $\forall\,(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2, \forall\,(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2,$

$$[a_1X_1 + a_2X_2, Y]_\alpha = a_1\,[X_1,Y]_\alpha + a_2\,[X_2,Y]_\alpha \ ,$$

$$[X, b_1Y_1 + b_2Y_2]_\alpha = b_1^{\langle\alpha-1\rangle}\,[X,Y_1]_\alpha + b_2^{\langle\alpha-1\rangle}\,[X,Y_2]_\alpha \ .$$

- $\boxed{\left|[X,Y]_\alpha\right| \leq \|X\|_\alpha\,\|Y\|_\alpha^{\alpha-1}}$ où $\|\cdot\|_\alpha^\alpha = [\cdot,\cdot]_\alpha$.

Coefficient de covariation :

$$\boxed{\{X_1, X_2\}_\alpha = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha} \quad .}$$

Propriétés 4.

- $\{aX, X\}_\alpha = \dfrac{[aX, X]_\alpha}{[X, X]_\alpha} = a$ et $\{X, aX\}_\alpha = \dfrac{[X, aX]_\alpha}{[aX, aX]_\alpha} = \dfrac{1}{a}$.

  $\Rightarrow$ *ni symétrique, ni borné.*

- $\forall 1 \leq p < \alpha,\ \{X_1, X_2\}_\alpha = \dfrac{\mathbb{E}\left[X_1 X_2^{\langle p-1\rangle}\right]}{\mathbb{E}\,|X_2|^p}$.

Théorème 2. Soit (X_1, X_2) vecteur SαS, on a

$$\boxed{\mathbb{E}\,(X_2 \;/\; X_1) = \{X_2, X_1\}_\alpha X_1 \ .}$$

1.2. Corréliance

$$\boxed{\mathrm{Corr}_\alpha\left(X_1, X_2\right) = \frac{[X_1, X_2]_\alpha \, [X_2, X_1]_\alpha}{[X_1, X_1]_\alpha \, [X_2, X_2]_\alpha} \quad .}$$

Propriétés 5.

- symétrique (par hyp.), bornée : $0 \leq \left|\mathrm{Corr}_\alpha\left(X_1, X_2\right)\right| \leq 1$
- X_1 et X_2 deux VAR SαS indépendantes $\Longrightarrow \mathrm{Corr}_\alpha\left(X_1, X_2\right) = 0$.
- $\mathrm{Corr}_\alpha\left(X, a\ X\right) = \dfrac{1}{a} \times a = 1$. $\mathrm{Corr}_2\left(X_1, X_2\right) = \left(\mathrm{Corrél.}\left(X_1, X_2\right)\right)^2$.
- $$\widehat{\mathrm{Corr}}_\alpha\left(X_1, X_2\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\ \mathrm{sign}(X_{2,i})}{\sum_{i=1}^{n} |X_{2,i}|}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{2,i}\ \mathrm{sign}(X_{1,i})}{\sum_{i=1}^{n} |X_{1,i}|}\right).$$

1.3. Corrélations basées sur les rangs

Coefficients de corrélation de Spearman et de van der Waerden :

$$\rho_n = 1 - \frac{6}{n\left(n^2-1\right)} \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - S_i\right)^2 \quad ,$$

$$vdW_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{n+1}\right) \Phi^{-1}\left(\frac{S_i}{n+1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left[\Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right]^2} \quad .$$

Résultats de normalité asymptotique. Sous l'hypothèse d'indépendance entre X_1 et X_2, on a

$$\sqrt{n-1}\;\rho_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0;1\right),$$

$$\sqrt{n-1}\;vdW_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0;1\right).$$

2. Illustrations théoriques et pratiques

2.1. Cas de 2 V.A.R. SαS indépendantes

α	$\{X_1, X_2\}_\alpha$	$\widehat{\{X_1, X_2\}}_\alpha$	Corr_α	$\widehat{\mathrm{Corr}}_\alpha$	ρ_n	vdW_n
2	0	0.0018 0.0027	0	0.0019 1.08e−5	−0.0009 0.0021	−0.0021 0.0020
1.9	0	−0.0028 0.0043	0	0.0017 1.57e−5	−0.0042 0.0017	−0.0035 0.0017
1.7	0	0.0059 0.0148	0	0.0040 0.0001	−0.0013 0.0025	−0.0030 0.0024
1.5	0	−0.0234 0.0373	0	−0.0009 0.0010	−0.0008 0.0023	−0.0004 0.0023
1.3	0	−0.0099 0.0753	0	0.0014 0.0017	0.0070 0.0018	0.0038 0.0018
1.1	0	−0.1516 1.4125	0	−0.0049 0.0051	−0.0009 0.0024	2.98e-5 0.0024

2.2. Combinaison linéaire de 2 V.A.R. SαS indépendantes

$$\text{On pose} \begin{cases} Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 \\ Y_2 = a_3 X_1 + a_4 X_2 \end{cases} .$$

Proposition.

- $\mathrm{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) = 1 \Longleftrightarrow a_1 a_4 = a_2 a_3$.
- si $a_1 = \gamma_{X_2}^{2/\alpha}; a_2 = a_3 = 1; a_4 = -\gamma_{X_1}^{2/\alpha}$, alors $\mathrm{Corr}_\alpha(Y_1, Y_2) < 0$.
- si $a_1 = \gamma_{X_2} \neq 1; a_2 = -\gamma_{X_1}; a_3 = a_4 = 1$, alors $\begin{cases} \{Y_1, Y_2\}_\alpha = 0 \\ \{Y_2, Y_1\}_\alpha \neq 0 \end{cases}$.

α	$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	$Corr_\alpha$	$\widehat{Corr}_\alpha$	ρ_n	vdW_n
2	-1.0976	-1.0970 $6.66e{-5}$	0.9878	0.9876 $9.73e{-6}$	-0.9929 $5.41e{-7}$	-0.9933 $4.36e{-7}$
1.9	-1.0989	-1.0978 $7.51e{-5}$	0.9890	0.9888 $1.01e{-5}$	-0.9932 $5.78e{-7}$	-0.9937 $3.93e{-7}$
1.7	-1.1016	-1.1003 $7.93e{-5}$	0.9914	0.9912 $8.18e{-6}$	-0.9938 $4.44e{-7}$	-0.9943 $3.45e{-7}$
1.5	-1.1043	-1.1039 $2.25e{-4}$	0.9938	0.9934 $5.83e{-6}$	-0.9946 $5.13e{-7}$	-0.9951 $3.25e{-7}$
1.3	-1.1070	-1.1088 $7.39e{-4}$	0.9963	0.9956 $4.18e{-6}$	-0.9951 $9.65e{-7}$	-0.9957 $5.79e{-7}$
1.1	-1.1097	-1.1097 $1.07e{-3}$	0.9988	0.9977 $1.76e{-6}$	-0.9960 $6.75e{-7}$	-0.9966 $3.68e{-7}$

$$a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = -0.8$$

α	$\{Y_1, Y_2\}_\alpha$	$\widehat{\{Y_1, Y_2\}}_\alpha$	$Corr_\alpha$	$\widehat{Corr}_\alpha$	ρ_n	vdW_n	$\widehat{\{Y_2, Y_1\}}_\alpha$
2	-0.3917	-0.3911 0.0001	0.7294	0.7279 0.0009	-0.8414 0.0002	-0.8512 0.0002	-1.8538 0.0046
1.9	-0.3900	-0.3903 0.0002	0.7404	0.7405 0.0012	-0.8423 0.0003	-0.8534 0.0002	-1.8946 0.0064
1.7	-0.3867	-0.3895 0.0006	0.7701	0.7688 0.0012	-0.8451 0.0003	-0.8577 0.0002	-1.9774 0.0098
1.5	-0.3834	-0.3820 0.0017	0.8126	0.8063 0.0017	-0.8469 0.0003	-0.8621 0.0003	-2.0915 0.0264
1.3	-0.3801	-0.3859 0.0025	0.8716	0.8516 0.0019	-0.8550 0.0003	-0.8715 0.0003	-2.2054 0.0727
1.1	-0.3768	-0.3828 0.0046	0.9512	0.9076 0.0014	-0.8681 0.0004	-0.8866 0.0003	-2.4699 0.3874

$$a_1 = 0.09; a_2 = 0.53; a_3 = -0.77; a_4 = -0.88$$