

**UVIC** FACULTAT D'EDUCACIÓ,  
TRADUCCIÓ I  
CIÈNCIES HUMANES

# **DETECCIÓ D'ERRORS EN L'APRENTATGE DELS TRIANGLES**

**TREBALL DE FINAL DE GRAU DE MESTRE D'EDUCACIÓ PRIMÀRIA**

M<sup>a</sup>Angels Melgosa Cunill

2012-2013

Isabel Sellas Ayats

Universitat de Vic, 17 de maig de 2013



## **Resum**

Aquest treball es basa en realitzar un estudi per tal d'identificar quins errors matemàtics cometien un grup d'alumnes de primer curs d'educació primària, en relació a la geometria. Concretament, aquest estudi és per identificar, mitjançant una prova, quines dificultats presenten els nens en relació als triangles. A partir dels errors que hagin sorgit, es dissenyarà la intervenció per tal d'intentar-los solucionar. Finalment, s'analitzarà si amb el treball realitzat els alumnes milloren els errors. En aquest treball s'ha utilitzat el mètode Concret-Representació-Abstracte de Bruner i les propostes que proposen certs autors (Bamberger, Schultz-Ferrell, ...) per ajudar a superar aquests errors. Realitzant aquest estudi s'ha pogut observar que els alumnes tenen la imatge d'un triangle prototípic. Això fa que cometin errors quan se'ls presenten altres triangles.

## **Paraules claus**

Dificultats dels alumnes, error, geometria, intervenció didàctica, matemàtiques, propostes d'ensenyament per a la geometria, prototip, representació gràfica estereotipada, triangle.

## **Abstract**

This work is based on a study to identify mathematical errors committed by a group of students in their first year of primary education in relation to geometry. Specifically, this study is to identify, through a test, the difficulties children have in relation to triangles. From the errors that have arisen, the intervention is designed to try to solve them. Finally, we analyse whether the students, after the intervention, don't make similar errors. In this paper we have used the Bruner's method Concrete-Representational-Abstract and proposals that suggest some authors (Bamberger, Schultz-Ferrell, ...) to help overcome these errors. In this study it was observed that the students have the prototypical image of a triangle. Children make errors when showed other triangles.

## **Keywords**

Student difficulties, error, geometry, educational intervention, mathematics, teaching suggestions for geometry, prototype, stereotyped graphic representation, triangle.

# Índex

	Pàg.
1. Introducció .....	5
2. Com aprenen matemàtiques els nens.....	8
2.1. Com aprenen geometria els nens: nivells de Van Hiele.....	8
2.2. Implicacions per l'ensenyament a partir dels nivells de Van Hiele .....	9
2.3. Etapes de l'aprenentatge de Bruner .....	10
2.4. Estratègies d'avaluació, ensenyament i aprenentatge .....	11
3. Conceptes i classificacions .....	12
3.1. Error.....	12
3.1.1. Classificacions dels tipus d'errors.....	12
3.2. Idea equivocada .....	13
3.3. Relació entre els errors i les idees equivocades .....	14
3.4. Sobregeneralització.....	16
3.5. Representació gràfica estereotipada .....	16
3.6. Prototip.....	17
4. Errors relacionats amb la geometria .....	18
5. Estudis.....	22
6. Propostes per ajudar a superar els errors o les idees equivocades .....	23
7. Metodologia .....	27
7.1. Orientació metodològica.....	27
7.2. Dimensions i aspectes concrets de l'estudi.....	27
7.3. Instrument .....	28
7.4. Aplicació de l'instrument.....	29
7.5. Intervenció.....	30
8. Resultats.....	33
8.1. Resultats del test d'abans de la intervenció.....	33
8.2. Resultats del test de després de la intervenció.....	41
8.3. Relació dels resultats del test d'abans i de després de la intervenció .....	46
9. Conclusions .....	52
10. Bibliografia i webgrafia.....	57

# 1. Introducció

El treball que he portat a terme s'ha realitzat com a Treball de Final de Grau que correspon al treball final dels estudis universitaris del Grau en Mestre d'Educació Primària cursat a la Universitat de Vic.

El treball es centra en el tema dels errors matemàtics i es vol identificar, mitjançant un estudi, quins errors cometen un grup d'alumnes. Dels errors sorgits, es fan diferents propostes perquè els infants puguin millorar aquests errors. Després de l'aplicació d'aquestes propostes, es mira si s'han millorat o no les dificultats presentades.

Segons Bamberger, Oberdorf i Schultz-Ferrell (2010), gairebé tots els alumnes cometen errors matemàtics a causa de malentesos comuns. L'alumnat es confon en formes comprensibles que emergeixen dels esforços que han de realitzar per donar sentit a un nou material. Per tant, els mestres en la planificació de les intervencions han d'anticipar aquests errors abans que aquests s'expandeixin i es consolidin. Així doncs, els mestres han d'estar preparats per abordar aquests conceptes erronis abans que esdevinguin un problema. També, ens comenten que molts d'aquests errors es poden catalogar ja que es produeixen freqüentment entre l'alumnat. També, els autors Bamberger, Oberdorf i Schultz-Ferrell (2010) proposen estratègies i activitats per solucionar aquests errors.

Així doncs, el treball consisteix en identificar quins errors matemàtics cometen un grup de catorze alumnes de primer curs d'educació primària de l'escola Collbaix de Sant Joan de Vilatorrada. Els errors són sobre el tema de geometria i concretament dels triangles. He escollit aquest tema perquè crec que és important conèixer quins errors, mitjançant els estudis realitzats, poden cometre els alumnes en relació a l'aprenentatge de les matemàtiques. Penso que si el mestre és conscient dels errors més freqüents que poden cometre els alumnes, l'enfocament de la intervenció pot ser diferent. També, considero que és rellevant atendre les necessitats dels infants ja que de vegades no es tenen en compte.

Per tant, els objectius del treball són:

- Fer un estudi per tal d'identificar els errors de geometria que puguin cometre els alumnes de primer curs d'educació primària.

- Fer propostes concretes per solucionar els errors anteriors que hagin pogut sorgir.
- Avaluar si a partir de les propostes concretes, els alumnes milloren els errors matemàtics que s'hagin pogut presentar.

Per a la realització d'aquesta memòria, he començat amb un marc teòric sobre el tema escollit. En aquest apartat, s'explica, a partir dels nivells de Van Hiele, com els nens aprenen geometria i quins aspectes el mestre ha de tenir presents perquè l'alumnat pugui avançar en aquests nivells. Després, es comenten les etapes d'aprenentatge de Bruner i el mètode Concret-Representació-Abstracte que el mestre pot usar en una intervenció didàctica. A més, es mostren algunes estratègies d'avaluació, ensenyament i aprenentatge que el mestre pot implementar en aquesta intervenció. Seguidament, es defineixen alguns conceptes, com ara error (error), idea equivocada (misconception) i sobregeneralització (overgeneralization) ja que aquests termes s'utilitzen per determinar les dificultats dels alumnes. També, es menciona la relació que hi ha entre els errors i les idees equivocades i la tipologia que han desenvolupat alguns autors per classificar els errors que cometten els alumnes. A continuació, es mostren alguns exemples d'errors que els alumnes poden cometre en relació als triangles. Després, s'esmenten dos estudis que s'han realitzat en relació a les idees equivocades dels triangles i el concepte de triangle que tenen els alumnes. Finalment, es nomenen algunes propostes per poder minimitzar o evitar els errors.

Seguidament, he descrit com s'ha desenvolupat la intervenció. En aquest apartat s'explica quina metodologia s'ha usat per dur a terme aquesta intervenció, quins aspectes s'han estudiat i analitzat i a qui va dirigit aquest estudi. A més, es detalla quina tècnica de recollida de dades s'ha utilitzat, es descriu la manera com s'han obtingut les dades i com aquestes s'analitzen i s'especifica la temporalització de l'estudi. També, es comenta la intervenció que s'ha portat a terme per poder solucionar els possibles errors que hagin sorgit.

Després, he comentat els resultats que s'han obtingut en aquesta investigació. En primer lloc, es presenten els resultats obtinguts en el test que es va realitzar abans de la intervenció. En segon lloc, es mostren els resultats obtinguts en el test que es va executar després de la intervenció. I en tercer lloc, s'exposa la relació dels resultats del test d'abans i de després de la intervenció.

Per últim, he fet unes conclusions. En aquest apartat s'explica quins errors han comès els alumnes en funció dels resultats obtinguts en l'estudi. A més a més, es comenta

algunes semblances amb els resultats d'altres investigacions que s'han dut a terme en relació aquest tema. També, s'indica quines altres accions es podrien realitzar per complementar aquest estudi o com es podria continuar en un futur. I finalment, es menciona com s'ha solucionat el problema d'investigació.

## 2. Com aprenen matemàtiques els nens

### 2.1. Com aprenen geometria els nens: nivells de Van Hiele

Els infants aprenen geometria passant per uns nivells concrets de pensament. Aquests nivells van ésser proposats per Van Hiele<sup>1</sup> i són cinc (nivell 0: visualització, nivell 1: anàlisi, nivell 2: deducció informal, nivell 3: deducció i nivell 4: rigor).

En el nivell de visualització, els alumnes reconeixen i anomenen les figures per les seves aparences físiques i no per les seves parts i propietats. Per exemple, quan un quadrat ha estat girat de manera que un dels seus vèrtexs està a la base horitzontal, aquesta figura no serà identificada com un quadrat sinó com un diamant. A més, l'alumnat no utilitza gaire els conceptes geomètriques sinó que usa les idees com ara "corbes" o "s'assembla a un coet".

En el nivell d'anàlisi, els alumnes poden descriure les figures per les seves propietats però encara no estableixen relacions entre les propietats. Per exemple, es poden numerar les propietats del rectangle i del paral·lelogram però no veure el rectangle com un paral·lelogram.

En el nivell de deducció informal, els alumnes poden establir les relacions entre les propietats. Per exemple, poden dir que un quadrat és un rectangle o que és un rectangle si té tots els angles rectes. Tot i així, poden seguir i construir arguments informals sobre les figures i les seves propietats però no comprenen el significat de la deducció en la seva globalitat.

En el nivell de deducció, els alumnes poden comprendre i treballar les relacions entre les propietats. A més, poden desenvolupar definicions per construir els teoremes. També, poden realitzar deduccions i demostracions utilitzant el raonament lògic.

En el nivell de rigor, els alumnes poden reconèixer les relacions entre els teoremes.

Aquest model de Van Hiele es caracteritza per unes propietats concretes. Una d'aquestes característiques és que els nivells són seqüencials, és a dir, l'estudiant ha de passar per tots els nivells, seguint l'ordre comentat anteriorment, i per passar d'un

---

<sup>1</sup> Podeu consultar la informació a Van de Walle, 2010.



nivell a un altre ha d'haver adquirit les estratègies d'aquell nivell. Una altra propietat és que els nivells no pertanyen a una franja d'edat en concret. També, la persona es trobarà en un nivell o un altre, en funció de les experiències geomètriques que hagi tingut. A més, si la instrucció o el llenguatge està a un nivell superior al de l'alumne, l'infant no podrà seguir el procés esperat.

## **2.2. Implicacions per l'ensenyament a partir dels nivells de Van Hiele**

El mestre ha de ser conscient que les experiències que presenta a l'alumnat són claus perquè aquest pugui avançar en els diferents nivells de Van Hiele<sup>2</sup>. El mestre al llarg del curs hauria d'observar una certa evolució en el pensament geomètric de l'alumne.

El mestre quan ensenya ha de tenir present que l'activitat que proposa estigui al nivell de pensament de l'alumne. Tot i així, la majoria d'activitats poden ser modificades i servir per dos nivells de pensament. També, la interacció entre mestre i nen farà que l'activitat s'adapti al seu nivell. A més, el mestre fomentarà i estimularà als nens perquè puguin passar al següent nivell.

A continuació, es mostren activitats de geometria que són adequades per a cada un dels tres nivells de Van Hiele (nivell 0: visualització, nivell 1: anàlisi, nivell 2: deducció informal).

En el nivell 0, una de les activitats que pot ser adient és mostrar diferents figures perquè les classifiquin, ja que aquest nivell és per veure si les figures són iguals o diferents. En un inici, els alumnes poden classificar aquestes figures sense tenir en compte les propietats geomètriques d'aquestes. Per exemple, les poden classificar pel color. Quan s'introdueixen les propietats (simetria, nombre de costats i vèrtexs, ...) haurien d'utilitzar aquestes característiques per classificar-les. Una altra activitat és incloure diversos exemples de figures de manera que les característiques irrellevants no siguin importants. Les activitats de dibuixar, construir, fabricar, muntar i desmuntar les figures de dues i tres dimensions han de ser elaborades a partir d'alguna propietat concreta. D'aquesta manera, l'alumnat desenvolupa un coneixement de les propietats geomètriques i les comença a usar de forma natural.

---

<sup>2</sup> Podeu consultar la informació a Van de Walle, 2010.

Els estudiants han de veure si les idees que tenen d'una figura en concret, també es poden aplicar a d'altres formes del mateix tipus. D'aquesta manera, s'ajuda als infants a passar del nivell 0 al nivell 1.

En el nivell 1, una de les activitats que pot ser apropiada és que l'alumnat s'hagi de centrar en les propietats de les figures en lloc de la identificació. Una altra activitat és analitzar el tipus de figures per determinar propietats noves. Per exemple, trobar diferents maneres de classificar els triangles en grups.

S'ha d'estimular als alumnes amb preguntes que impliquin un raonament, com poden ser les preguntes de "per què". D'aquesta manera, s'ajuda als infants a passar del nivell 1 al nivell 2.

En el nivell 1, les activitats que poden ser adequades són les que fomenten l'elaboració i prova d'hipòtesis o conjetures. També, les activitats que examinen les propietats de les figures per determinar les condicions de les diferents formes o conceptes.

### **2.3. Etapes de l'aprenentatge de Bruner**

Segons Bruner<sup>3</sup>, l'alumnat quan aprèn un concepte matemàtic ha de passar per unes etapes. Aquestes etapes són la manipulativa, la gràfica i la simbòlica.

L'etapa manipulativa correspon a que els alumnes treballen un determinat concepte matemàtic a través dels materials.

L'etapa gràfica fa referència que els infants representen amb dibuixos o esquemes gràfics el que s'ha fet amb objectes a l'etapa anterior.

L'etapa simbòlica es tracta el concepte matemàtic a nivell de números i símbols.

Sousa (2008) ens comenta que el mètode Concret-Representació-Abstracte s'ha basat amb les etapes de Bruner i cada nivell del mètode (concret, representació i abstracte) correspon a cadascuna de les etapes de Bruner. Aquest enfocament ajuda als alumnes que presenten dificultats en l'aprenentatge de les matemàtiques ja que abans de realitzar una comprensió del concepte a nivell abstracte, el contingut matemàtic

---

<sup>3</sup> Podeu consultar la informació a Martín, 2003.

s'ha treballat a un nivell concret. Això fa que l'infant pugui aprendre i entendre el contingut de manera més significativa i eficaç.

## **2.4. Estratègies d'avaluació, ensenyament i aprenentatge**

Segons Keeley i Tobey (2011), les estratègies d'avaluació, ensenyament i aprenentatge permeten el mestre obtenir informació sobre el procés d'aprenentatge de l'alumne i així pot prendre decisions per planificar o adaptar les activitats, pot observar el ritme d'aprenentatge, identificar idees equivocades i errors comuns que poden ser una dificultat per a l'aprenentatge, i dedicar més temps als conceptes i procediments on els alumnes presenten problemes. A més, aquestes estratègies s'utilitzen per propiciar el "feedback" dels infants. També, inicien l'ús d'habilitats metacognitives i fomenten el pensament dels alumnes.

Algunes de les estratègies que proposen aquests autors són:

- Vinyetes (Concept cartoons)

Aquesta estratègia consisteix en representar amb imatges les idees dels nens en relació a una idea matemàtica. L'alumnat decideix amb quina idea està d'acord i justifica la resposta.

- Classificació de cartes (Card sorts)

Aquesta estratègia es basa en que els alumnes col·laborativament classifiquen un conjunt de cartes amb imatges, nombres, símbols o paraules segons una característica específica o una categoria. Mentre realitzen la classificació, segons el coneixement que tenen en relació al concepte, els alumnes discuteixen les raons de posar cada carta en un grup o en un altre.

## 3. Conceptes i classificacions

### 3.1. Error

Segons Hansen<sup>4</sup>, un error (error) es pot produir per accident. Per exemple, un alumne pot haver fet bé totes les sumes d'un llistat i, en una, equivocar-se. També, pot ésser causat per una idea equivocada (misconception).

Drews<sup>5</sup> diu que un error es pot produir per diferents motius. Aquest es pot ocasionar per un descuit, una interpretació incorrecta de símbols o text, una falta d'experiència o coneixement relacionat amb el tema que es tracta, una manca de consciència o impossibilitat per comprovar la resposta o fruit d'una idea equivocada. També, assenyala que, si s'usen els recursos incorrectament, pot fer que els alumnes cometin errors. Per exemple, la recta numèrica pot ser una eina eficaç per ajudar a comptar endavant i endarrere si es demostra a l'alumne el procediment i l'entén.

Socas<sup>6</sup> defineix l'error com "la presència d'un esquema cognitiu inadequat en l'alumne i no només una conseqüència d'una falta específica de coneixement o distracció".

#### 3.1.1. Classificacions dels tipus d'errors

A continuació, es mostren algunes tipologies que diferents autors han desenvolupat per classificar els errors.

Socas<sup>7</sup> classifica els errors en relació a tres orígens. Aquests són: "errors que tenen el seu origen en un obstacle, errors que tenen el seu origen en l'absència de sentit i errors que tenen el seu origen en actituds afectives i emocionals cap a les matemàtiques".

---

<sup>4</sup> Podeu consultar la informació a McAteer, 2012.

<sup>5</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>6</sup> Podeu consultar la informació a Franchi i Hernández de Rincón, 2003: 65.

<sup>7</sup> Podeu consultar la informació a Franchi i Hernández de Rincón, 2003: 66.

Per Movshovitz i altres autors<sup>8</sup>, els errors es poden classificar en les següents categories: "errors deguts a dades mal utilitzades, errors deguts a una interpretació incorrecta del llenguatge, errors deguts a inferències no vàlides lògicament, errors deguts a l'ús de teoremes o definicions deformats, errors deguts a la manca de verificació en la solució i errors tècnics".

Radatz<sup>9</sup> classifica els errors tenint en compte el processament de la informació. Aquests es categoritzen en: "errors deguts a la dificultat del llenguatge, errors deguts a dificultats per obtenir informació espacial, errors deguts a un aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs, errors a causa de rigidesa del pensament i errors deguts a l'aplicació de regles o estratègies irrellevants".

I Astolfi<sup>10</sup> estableix pels errors la següent tipologia: "errors deguts a la comprensió de les instruccions de treball donades, errors que provenen dels hàbits escolars o d'una mala interpretació de les expectatives, errors com a resultat de les concepcions alternatives dels alumnes, errors deguts als processos adoptats, errors deguts a la sobrecàrrega cognitiva en l'activitat, errors que tenen el seu origen en una altra disciplina i errors causats per la complexitat del contingut".

### **3.2. Idea equivocada**

Segons Spooner (2002), una idea equivocada s'ocasiona per una falta de comprensió, per l'aplicació d'una regla malament o per una generalització matemàtica.

A més a més, Hansen<sup>11</sup> ens comenta que una idea equivocada es pot detectar perquè es produeix un patró de respostes incorrectes. Per exemple, un alumne no fa bé les sumes d'un llistat i en cada suma es veu que ha usat el mateix procediment. A més, ens menciona que les idees equivocades no sempre seran observades pel mestre o pel propi alumne. Per tant, pot donar-se el cas que la idea equivocada s'identifiqui al cap d'un temps o que no s'arribi a identificar.

---

<sup>8</sup> Podeu consultar la informació a Franchi i Hernández de Rincón, 2003: 67.

<sup>9</sup> Podeu consultar la informació a Franchi i Hernández de Rincón, 2003: 67.

<sup>10</sup> Podeu consultar la informació a Franchi i Hernández de Rincón, 2003: 67.

<sup>11</sup> Podeu consultar la informació a McAteer, 2012.

També, Chambers (2008: 107-108) ens diu que "les idees equivocades són errors sistemàtics". Les idees equivocades són interpretacions incorrectes de les matemàtiques. Aquestes idees ocorren perquè l'alumnat generalitza el concepte a una edat primerenca. Per exemple, una idea equivocada és creure que quan es multiplica per deu s'ha de posar un zero al final ja que això és cert pels nombres naturals però no pels nombres decimals. Així doncs, l'alumne primer aprèn a multiplicar per nombres naturals i aplica aquesta regla. Ara bé, el problema sorgeix quan l'alumne ha de multiplicar per nombres decimals ja que el nen ha après que, si aplica la regla, li dóna la resposta correcta. En aquest cas, el mestre observa la idea equivocada i explica que és incorrecta, tot demostrant el mètode correcte. Aquesta manera d'ensenyar farà que l'alumne sigui capaç d'aplicar aquest mètode i donar la resposta correcta però al cap d'un temps tornarà a aplicar la regla assimilada en un inici. Per tant, la idea equivocada encara forma part de la creença de l'alumne i no s'ha treballat de manera que tingui sentit per l'alumne. Això fa que les idees equivocades siguin difícils d'eliminar o reemplaçar.

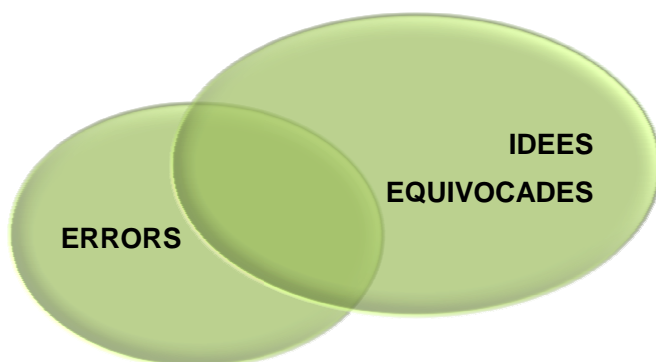
A més, Drews<sup>12</sup> apunta que les idees equivocades no s'ocasionen només amb nens que necessiten més ajuda sinó que també els altres infants poden cometre generalitzacions incorrectes.

### **3.3. Relació entre els errors i les idees equivocades**

A la figura 1, mitjançant el diagrama de Venn, es pot veure la relació que hi ha entre els errors i les idees equivocades. En aquest diagrama es mostra una àrea comuna als dos conjunts (errors i idees equivocades), la qual correspon als errors que es produeixen fruit de les idees equivocades o fruit de les idees que es reforcen o es creen a causa de cometre el mateix error diverses vegades.

---

<sup>12</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.



**Figura 1**<sup>13</sup>. Diagrama de Venn mostra la relació entre l'error i la idea equivocada.

També, una altra manera de mostrar aquesta relació entre els errors i les idees equivocades és a través del diagrama de Carroll (figura 2). En aquest diagrama es pot observar quatre resultats en cadascun dels requadres de la taula. El requadre ombrejat correspon a l'àrea comuna del diagrama de Venn.

	Error	Error
Idea equivocada	Un error està causat per una idea equivocada.	Quan una idea equivocada existeix però no hi ha un error evident, no és possible fer front a la idea equivocada.
Idea equivocada	Un error es produeix, però és degut a un error d'algun tipus. Aquest error és rectificat fàcilment pel nen.	Quan un nen està funcionant eficaçment, no comet errors ni té idees equivocades sobre l'estudi específic que afecta negativament el seu aprenentatge.

**Figura 2**<sup>14</sup>. Diagrama de Carroll mostra la relació entre l'error i la idea equivocada.

Cal dir que els errors comesos per idees equivocades són més interessants pels mestres perquè es poden abordar.

<sup>13</sup> Figura extreta de McAteer, 2012: 21.

<sup>14</sup> Figura extreta de McAteer, 2012: 22.

### **3.4. Sobregeneralització**

Segons Griffin i Madgwick<sup>15</sup>, l'alumnat aprèn un algorisme o una regla i després l'aplica a un altre context de manera inadequada. Aquestes idees equivocades normalment són generalitzacions de casos que els nens han vist abans de l'ensenyament.

A més, Askew i William<sup>16</sup> ens diuen que els alumnes faran algunes generalitzacions (overgeneralizations) incorrectes i si el mestre no intenta descobrir-les, aquestes restaran ocultes.

### **3.5. Representació gràfica estereotipada**

Segons Scaglia i Moriena (2005), una representació gràfica estereotipada (stereotyped graphic representation) és el dibuix que sovint s'utilitza per representar una figura geomètrica.

També, aquestes autores ens mencionen que les representacions gràfiques que es presenten amb més freqüència són les representacions gràfiques estereotipades.

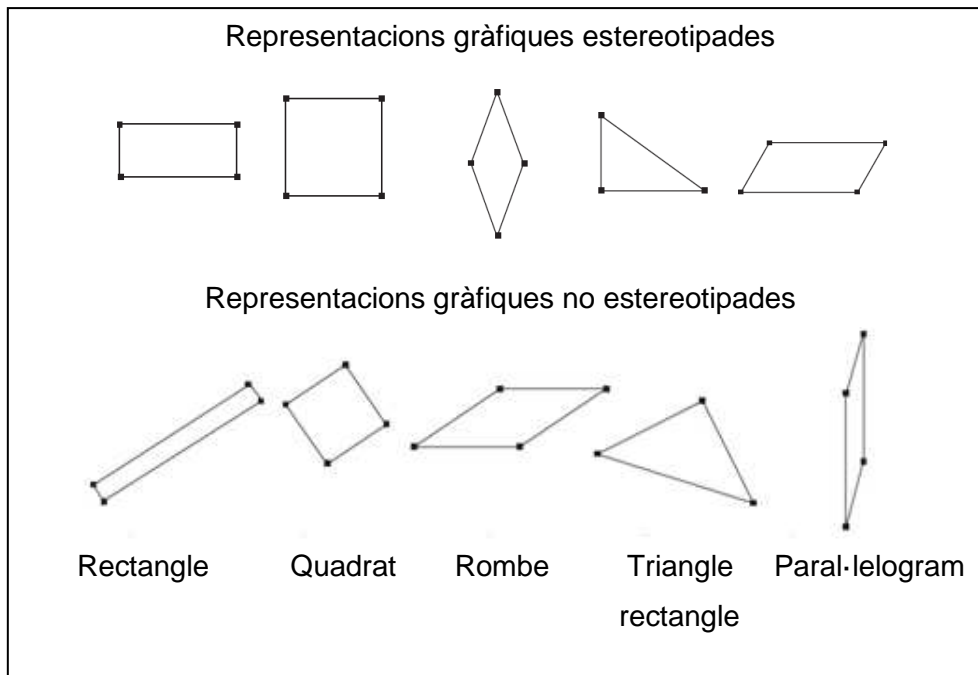
Alguns exemples de representacions gràfiques estereotipades i no estereotipades d'algunes figures geomètriques són les que es poden veure en la figura 3.

---

<sup>15</sup> Podeu consultar la informació a Rose i Minton, 2010.

<sup>16</sup> Podeu consultar la informació a Rose i Minton, 2010.





**Figura 3<sup>17</sup>**. Exemples de representacions gràfiques estereotipades i no estereotipades.

### 3.6. Prototip

Segons Ryan i Williams<sup>18</sup>, quan usem la paraula "prototip" (prototype) fa referència a un exemple típic del concepte. Per exemple, aquests autors ens diuen que la imatge que tenim la majoria de nosaltres d'un triangle correspon a un triangle equilàter amb la seva base a baix. Així és que, es pot produir un error perquè hi ha la possibilitat de no reconèixer altres triangles quan aquests es troben en una altre posició que no és la típica.

Per Scaglia i Moriena (2005), prototip és la imatge mental que té l'alumne d'un determinat concepte geomètric. Aquesta imatge s'ha format a partir de repetides representacions gràfiques estereotipades.

Schwarz i Hershkowitz<sup>19</sup> diuen que "cada concepte té un o diversos exemples prototípics que s'adquireixen primer; aquests exemples prototípics són en general els

<sup>17</sup> Figura extreta de Scaglia i Moriena, 2005: 115.

<sup>18</sup> Podeu consultar la informació a Thompson, 2010.

<sup>19</sup> Podeu consultar la informació a Scaglia i Moriena, 2005: 109.

que tenen la major llista d'atributs, tots els atributs crítics del concepte com també alguns atributs propis (aquells atributs que només tenen els exemples prototípics)".

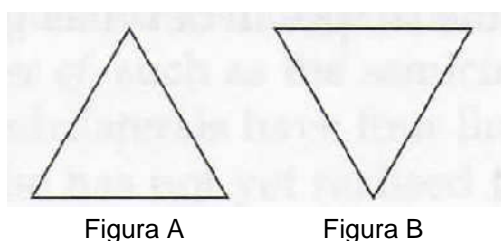
Hershkowitz<sup>20</sup> ens comenta que la posició horitzontal o vertical de l'angle recte del triangle rectangle prototípic són alguns atributs propis d'un exemple prototípic.

Segons Matos Hershkowitz<sup>21</sup>, una de les característiques principals dels prototips és la posició. Per exemple, els triangles, quadrats, rectangles i paral·lelograms han de tenir una base horitzontal. Un altre tret és la simetria. Per exemple, un triangle rectangle es pensa com a mig triangle. I una característica és la forma. Per exemple, molts alumnes no reconeixen els triangles prim, els triangles punxeguts o els quadrats molts petits.

Gutiérrez i Jaime<sup>22</sup> ens diuen que "en la formació de la imatge d'un concepte que té una persona, exerceixen un paper bàsic la pròpia experiència i els exemples que s'han vist o utilitzat tant en el context escolar com en l'extra escolar".

## 4. Errors relacionats amb la geometria

Els errors que els alumnes poden cometre són els que es mostren a continuació. Aquests errors poden fer referència a una idea equivocada, un error o una sobregeneralització. Per tant, a partir d'ara s'usarà el terme error per referir-se a qualsevol d'aquests termes.



**Figura 4**<sup>23</sup>. Alumnes només reconeixen la figura A com a triangle.

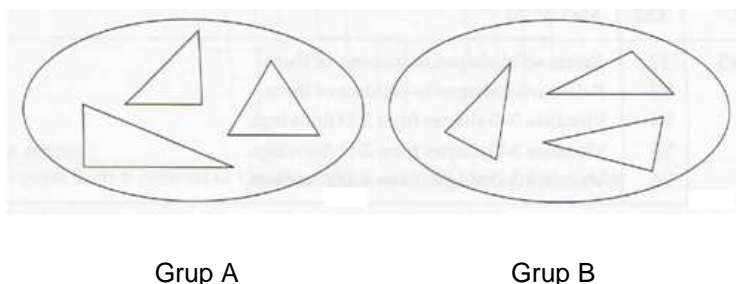
<sup>20</sup> Podeu consultar la informació a Scaglia i Moriena, 2005.

<sup>21</sup> Podeu consultar la informació a Scaglia i Moriena, 2005.

<sup>22</sup> Podeu consultar la informació a Scaglia i Moriena, 2005: 111.

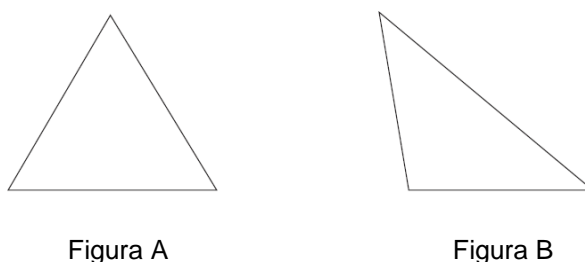
<sup>23</sup> Figura extreta de Hansen, 2005: 83.

D'aquestes dues figures (A i B), els infants només identifiquen la figura A com a un triangle. Això és perquè l'alumnat només ha vist triangles prototípics, és a dir, triangles que tenen la base a baix. Per tant, els alumnes tindran dificultats per reconèixer triangles quan es troben en altres posicions<sup>24</sup>.



**Figura 5<sup>25</sup>**. Alumnes només reconeixen el grup A com a triangle.

D'aquests dos grups (A i B), els nens només identifiquen el grup A com a triangles. Això passa perquè als alumnes només se'ls ha mostrat triangles prototípics, és a dir, triangles que tenen la base a baix, triangles rectangles o triangles equilàters. També, passa perquè no se'ls ha presentat triangles que estiguin en diferents posicions. Així doncs, el fet que els infants solament coneguin aquests tipus de triangles, fa que es formi una imatge mental concreta de triangle i que diguin que són triangles només els que tenen la base a baix o els que són equilàters<sup>26</sup>.



**Figura 6<sup>27</sup>**. La majoria d'alumnes reconeixen la figura A com a triangle.

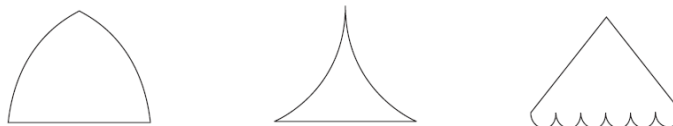
Ashlock (2006) ens comenta que hi haurà més estudiants que diran que la figura A és un triangle degut a les poques experiències que han tingut amb els triangles. També, aquestes experiències s'hauran basat en la forma o la posició del triangle prototípic.

<sup>24</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>25</sup> Figura extreta de Hansen, 2005: 84.

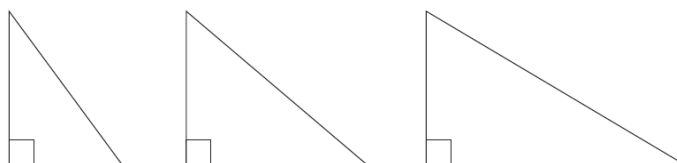
<sup>26</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>27</sup> Figura extreta de Ashlock, 2006: 16.



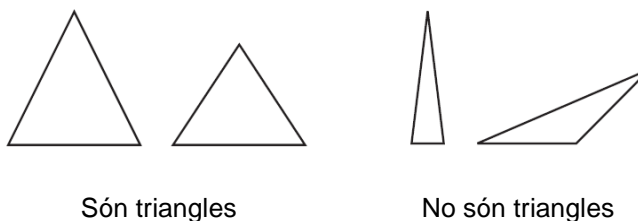
**Figura 7<sup>28</sup>**. Alumnes consideren les formes com a triangles per la seva posició.

Graeber<sup>29</sup> ens diu que els alumnes poden considerar que aquestes formes són triangles si tenen en compte la posició del triangle.



**Figura 8<sup>30</sup>**. Alguns cops els alumnes veuen aquests triangles.

Ashlock (2006) ens menciona que a l'alumnat, de vegades, se'ls ensenya aquest tipus de triangles rectangles.



**Figura 9<sup>31</sup>**. Alumnes només reconeixen el grup dels triangles estereotipats.

Un altre error que pot succeir és que l'alumne només consideri com a triangle un tipus en concret, com pot ser el triangle regular<sup>32</sup>.



**Figura 10<sup>33</sup>**. Alumnes consideren que aquestes formes són triangles pels vèrtexs.

<sup>28</sup> Figura extreta de Ashlock, 2006: 19.

<sup>29</sup> Podeu consultar la informació a Ashlock, 2006.

<sup>30</sup> Figura extreta de Ashlock, 2006: 19.

<sup>31</sup> Figura extreta de MathNavigator, 2012: 4.

<sup>32</sup> Podeu consultar la informació a MathNavigator, 2012.

<sup>33</sup> Figura extreta de MathNavigator, 2012: 4.

També, es pot donar el cas que l'alumnat consideri que aquestes dues formes són triangles perquè tenen, cada una d'aquestes, tres vèrtexs. Per tant, els alumnes no tenen en compte que els costats d'un triangle han de ser rectes<sup>34</sup>.



**Figura 11**<sup>35</sup>. Alumnes només consideren la figura A com a triangle.

Un altre error que pot ocórrer és que els alumnes només identifiquin la figura A com a triangle perquè s'assembla a la imatge mental que tenen de triangle. En canvi, es pensen que la figura B no és un triangle ja que diuen que la figura és massa llarga o massa prima per ser un triangle. Així doncs, aquest error es pot cometre perquè l'infant encara no té el coneixement de les propietats per aplicar-lo en l'anàlisi i identificació de les figures<sup>36</sup>.



**Figura 12**<sup>37</sup>. Alumnes consideren aquestes formes com a triangles si no tenen present les propietats.

Els alumnes poden pensar que les formes que es mostren en la figura 1 són triangles. L'alumnat pot cometre aquest error si no pensa amb les propietats dels triangles<sup>38</sup>.



**Figura 13**<sup>39</sup>. Alumnes només consideren com a triangle la figura A.

<sup>34</sup> Podeu consultar la informació a MathNavigator, 2012.

<sup>35</sup> Figura extreta de *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005: 8.

<sup>36</sup> Podeu consultar la informació a *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005.

<sup>37</sup> Figura extreta de *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005: 16.

<sup>38</sup> Podeu consultar la informació a *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005.

<sup>39</sup> Figura extreta de *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005: 17.

D'aquestes figures (A, B i C) l'alumnat només reconeix la figura A i B com a triangle. En canvi, no reconeix la figura C perquè la forma i l'orientació no és l'estereotipada. Així doncs, els alumnes reconeixen els triangles que els són familiars però no reconeixen els triangles que són diferents a la imatge mental que tenen<sup>40</sup>.

## 5. Estudis

Paola Vighi va realitzar una investigació sobre el concepte de triangle que tenen els nens a educació primària. Aquest estudi es va portar a terme amb alumnes d'edats compreses entre els set i onze anys. Per dur a terme aquesta investigació es van dissenyar tres activitats inicials i una activitat final.

En la primera activitat, l'alumnat, individualment, havia de dibuixar tres triangles i que aquests fossin diferents. A més, els nens havien d'explicar les decisions que havien pres a l'hora de dibuixar el triangle i les diferències que hi havia entre els triangles.

En la segona activitat, els alumnes havien de dibuixar en un paper tot el que els suggeria la paraula triangle.

En la tercera activitat, els infants havien de definir què és un triangle.

I en la quarta activitat, els alumnes, en grups, havien de classificar unes figures geomètriques segons si eren triangles o no, i havien de justificar per escrit les decisions. Després, el grup presentava la classificació al grup-classe.

En aquesta investigació es va poder confirmar, en la primera activitat, que els alumnes tenen la imatge que un triangle és equilàter o isòsceles i que té un costat horitzontal. En general, el primer triangle dibuixat tenia un costat horitzontal. A més, quasi tots els triangles tenien angles aguts. Uns quants nens van dibuixar tres figures geomètriques diferents (triangle, cercle i rectangle). Els alumnes van dibuixar els tres triangles diferents segons la posició, la mida i la forma.

També, a la segona activitat, es va poder veure que els dibuixos estaven relacionats amb triangles equilàters o isòsceles, relacionats amb objectes amb forma triangular

---

<sup>40</sup> Podeu consultar la informació a *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3: Geometry and Spatial Sense*, 2005.

(teulada, piràmide, etc.), relacionats amb angles, relacionats amb la paraula o el número tres i relacionats amb tres punts o objectes amb punts.

A la tercera activitat, es va poder observar que primerament feien una definició, després una explicació lingüística i per últim, feien referència a objectes que tenien la forma triangular.

A la quarta activitat, de tots els triangles que hi havien, només tots els alumnes van reconèixer un d'aquests triangles perquè era rectangular i isòsceles. Alguns alumnes van dir que els altres no eren triangles per diferents motius, com ara no és isòsceles o no té els costats iguals.

També, Palmina Cutugno i Filippo Spagnolo van dur a terme un estudi sobre les idees equivocades en relació als triangles. Aquest estudi es va realitzar a un grup d'estudiants d'onze i dotze anys.

En aquesta investigació, algunes de les preguntes que es van formular a l'alumnat havien estat que diguessin si una forma són triangles o no, tot justificant-ho i que dibuixessin un triangle i el definissin per escrit.

Una de les conclusions que es va arribar va ser el fet que l'alumne tingués un esquema mental rígid va fer que generalitzés el concepte de triangle. Això va provocar, per exemple, que l'infant dibuixés un triangle equilàter. I una altra conclusió va ser que l'alumne tenia una imatge mental estereotipada ja que dibuixava el triangle amb la base horitzontal.

## **6. Propostes per ajudar a superar els errors o les idees equivocades**

Per solucionar un error en concret o per prevenir una idea equivocada, Bamberger, Schultz-Ferrell i Oberdorf (2010) suggereixen unes propostes per poder tractar aquestes dificultats en l'aprenentatge de l'alumne.

Per intervenir la idea equivocada de classificar les figures geomètriques de dues dimensions incorrectament a causa de generalitzar a partir d'exemples incorrectes o de l'orientació de la figura, ens proposen algunes idees que es poden tenir en compte.

Una idea és que l'alumnat ha de buscar i reconèixer les figures geomètriques que es poden trobar a la classe, a l'escola o a l'entorn.

Una altra indicació és que s'ha de combinar la geometria amb conceptes numèrics ja que així els alumnes hauran de trobar diferents figures geomètriques en una mateixa activitat. Per exemple, es poden presentar diferents figures geomètriques (rectangles, quadrats, triangles, cercles, ...) i l'alumnat ha de comptar quantes n'hi ha de cada tipus i escriure'n el nombre.

També, s'ha d'elaborar targetes de conceptes amb exemples i no exemples de les figures geomètriques.

A més, s'ha d'elaborar exemples que mostrin els diferents atributs del concepte d'una determinada figura geomètrica. D'aquests exemples, s'han de formular preguntes als alumnes per veure si reconeixen les propietats rellevants d'una figura en concret.

S'ha de fomentar que els alumnes descriguin, dibuixin, identifiquin i classifiquin les figures geomètriques.

Quan es seleccionen publicacions relacionades amb les matemàtiques s'ha de tenir en compte que no hi hagin exemples de figures incorrectes. Per exemple, rombes que s'etiqueten diamants.

S'ha de deixar que l'alumnat pugui crear figures geomètriques amb diferents materials perquè puguin veure figures regulars i irregulars.

Es poden fer jocs com ara "Endevina la meva figura". Aquest joc consisteix en donar unes pistes i els alumnes van dibuixant la figura tenint present aquestes consignes. D'aquesta manera, l'alumnat, mitjançant les consignes donades, pot decidir quina figura s'ha descrit.

I una altra idea és que es poden incorporar altres continguts de geometria en les activitats de les figures geomètriques ja que així l'alumnat pot manipular i explorar durant més temps les figures.

També, Bamberger i Schultz-Ferrell (2010) donen alguns consells per poder comprovar el coneixement de l'alumnat mentre porten a terme activitats relacionades amb el tractament d'aquesta idea equivocada.



Un d'aquests consells és observar si els alumnes són capaços de classificar les figures geomètriques de diferents maneres.

Un altre és mirar si l'alumnat pot anomenar les figures sigui quina sigui la seva posició.

I un altre suggeriment és veure si els alumnes són capaços de crear polígons regulars i irregulars.

Wood<sup>41</sup> ens diu que "l'única manera d'evitar la formació d'idees equivocades és a través de la debat i la interacció. Un problema compartit, en un discurs matemàtic, pot esdevenir un problema solucionat".

Askew i altres autors<sup>42</sup> comenten que un ensenyament eficaç es basa en un debat entre el mestre i els alumnes, tot considerant que els nens poden aprendre efectivament dels altres, incloent als seus companys.

Tanner i Jones<sup>43</sup> ens mencionen que no és fàcil reestructurar el coneixement per introduir-ne de nou ja que abans d'assimilar el coneixement ha de ser revisat i reestructurat. Perquè això passi els alumnes necessiten acceptar i comprendre que la seva resposta no és correcta. També, el procés d'aprenentatge i l'ambient han de ser importants perquè els nens puguin fer l'esforç de reestructurar i canviar la seva manera de pensar. A més a més, els mestres necessiten acceptar que l'alumnat en el procés de reestructuració de la idea equivocada no només necessita una explicació del concepte sinó que també necessita ajuda. Aquest enfocament es coneix com l'ensenyament per conflicte cognitiu. Un exemple podria ser la suma de fraccions ( $1/2 + 1/4$ ) emprant l'estratègia de sumar numerador amb numerador i denominador amb denominador. El resultat obtingut ( $2/6$ ) es pot comparar amb una demostració amb material (rajola de xocolata), el qual es dona una meitat a un alumne i un quart a un altre nen, tot preguntant la quantitat que se'ls ha donat ( $3/4$ ). Per tant, el fet que hi hagin dues respostes diferents crea conflicte entre el coneixement conceptual existent i la nova informació. Aquest conflicte es pot resoldre a través del debat, l'intercanvi d'idees, les respostes justificades, les preguntes del mestre i escoltant els altres. L'assimilació només pot ocórrer quan la reestructuració té lloc en un esquema per fer front a aquest conflicte cognitiu.

---

<sup>41</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005: 17.

<sup>42</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>43</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

Bell<sup>44</sup> ens proposa que, perquè l'aprenentatge dels nens sigui més rellevant a llarg termini, han de ser els alumnes els quals trobin les idees equivocades a través del seu treball i no han de ser els mestres els quals decideixin cridar l'atenció sobre els possibles errors o idees equivocades. Això és possible gràcies al mètode d'ensenyament anomenat diagnòstic d'ensenyament. Aquesta metodologia es basa en escollir una tasca o un problema per ésser resolt a través d'un debat amb els companys, l'expressió de punts de vista contradictoris i el debat amb el grup-classe. Per tant, des d'aquest enfocament el conflicte cognitiu es resol i es consolida el nou aprenentatge.

Centrant-se amb el mètode diagnòstic d'ensenyament, Swan<sup>45</sup> creu que els errors i les idees equivocades han de ser acceptats, fer-se explícits i discutits i modificats si s'ha de produir l'aprenentatge a llarg termini. A més, comenta que això és improbable que passi si no és que a l'aula hi ha un clima de confiança, d'ajuda mútua i es té en compte els punts de vista individuals.

Hughes i Vass<sup>46</sup> assenyalen que el llenguatge que el mestre ha d'utilitzar perquè els alumnes puguin prendre riscos en el procés del nou aprenentatge ha de ser de suport. Per exemple, el mestre pot dir a l'alumne que és capaç de fer-ho.

Watson i Mason<sup>47</sup> diuen que l'aprenentatge es produeix en una conversa en la qual hi ha debat, preguntes i respostes entre el mestre i els alumnes. Aquesta conversa està enfocada per millorar i desenvolupar l'aprenentatge i no es dirigeix a preguntar si s'ha aconseguit la resposta correcta.

OFSTED<sup>48</sup> comenta que si els mestres deixen que els alumnes en les converses puguin expressar les seves idees i contrarestar-les amb les altres es pot descobrir i fer front als errors o idees equivocades i adaptar el seu ensenyament. A més, ajuda els alumnes a reflexionar i ordenar les idees i confirmar el seu propi coneixement.

També, si el mestre escolta les preguntes dels alumnes pot adonar-se dels nivells de coneixement, els errors en l'ús de la terminologia i les idees equivocades existents. El mestre ha de realitzar preguntes obertes perquè pugui esbrinar els errors o idees equivocades dels alumnes.

---

<sup>44</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>45</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>46</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>47</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>48</sup> Podeu consulta la informació a Hansen, 2005.

Segons DfEE<sup>49</sup>, per rectificar els errors o les idees equivocades es pot emprar la metodologia de les classes de matemàtiques diàries (Daily Mathematics Lesson). Aquest enfocament es basa en la interacció i participació dels alumnes amb el grup-classe i fomenta el debat i la cooperació entre grups i en parelles. Els mestres han de fer preguntes eficaces ja que han de fer pensar a l'alumnat, fomentar l'explicació dels mètodes i raonaments, i examinar els motius de les respostes incorrectes.

## **7. Metodologia**

### **7.1. Orientació metodològica**

La investigació es basa en l'orientació metodològica d'investigació-acció ja que es vol identificar quins errors cometen els alumnes per tal de poder-los millorar en la intervenció i posteriorment avaluar els resultats.

### **7.2 Dimensions i aspectes concrets de l'estudi**

L'estudi es basa en identificar quins errors cometen un grup d'alumnes de primer curs d'educació primària. Aquests errors estan relacionats amb el tema de geometria. Dins de la geometria, em centraré amb les dificultats en l'aprenentatge de les figures geomètriques, concretament amb els triangles. Per tant, miraré quins errors cometen els alumnes en relació a la identificació de triangles. Aquests errors són:

- Dificultats que tenen per dibuixar un triangle.
- Dificultats que tenen per dir les propietats dels triangles.
- Dificultats que tenen per identificar triangles i no triangles dins d'un grup d'imatges.

---

<sup>49</sup> Podeu consultar la informació a Hansen, 2005.

- Dificultats que tenen per identificar els triangles quan es presenten de forma no estereotipada.

L'estudi s'ha realitzat a tots els alumnes d'una classe de primer curs d'educació primària, en total a un grup de catorze alumnes. L'edat dels alumnes és de sis i set anys. En aquest grup hi ha alumnes amb diferents nivells d'aprenentatge. Cal dir que aquest estudi, en un inici, es va realitzar el test a un total de setze alumnes i quan es va tornar a passar el test es va fer a catorze alumnes. Per tant, hi ha hagut dos alumnes que no han acabat format part d'aquest estudi perquè no van completar la investigació. El motiu que aquests infants no realitzessin el test de després de la intervenció, va ser perquè van canviar d'escola.

També, aquest estudi m'ha servit per saber els coneixements previs dels alumnes i així poder planificar i portar a terme la intervenció per tal d'intentar millorar els possibles errors comesos.

### **7.3. Instrument**

La tècnica de recollida de dades que s'ha utilitzat per avaluar les dificultats d'aprenentatge, en relació a la identificació dels triangles, és un test<sup>50</sup>. Aquest test està format per sis preguntes. Aquestes preguntes són del tipus tancades i/o obertes segons la dimensió a valorar.

Per saber si els alumnes tenen dificultats per dibuixar un triangle, s'ha utilitzat una pregunta tancada quan es dibuixa el triangle.

Per saber si els alumnes tenen dificultats per dir les propietats dels triangles, s'ha fet servir una pregunta oberta quan s'explica com és un triangle i es diu en què es diferencien els triangles.

Per saber si els alumnes tenen dificultats per identificar triangles i no triangles dins d'un grup d'imatges, s'ha utilitzat una pregunta tancada quan l'alumnat diu si aquella forma és o no un triangle. També, s'ha usat una pregunta oberta per saber perquè identifiquen aquella forma com un triangle o no.

---

<sup>50</sup> Veure annex 1.

Per saber si els alumnes tenen dificultats per identificar els triangles quan es presenten de forma no estereotipada, s'ha fet servir una pregunta tancada quan l'alumnat diu quines de les figures geomètriques són o no són triangles. A més, s'ha utilitzat una pregunta oberta per conèixer perquè identifiquen aquella figura geomètrica com un triangle.

## **7.4. Aplicació de l'instrument**

Per obtenir les dades, s'ha passat un test per veure si cometien els errors anomenats anteriorment. Primerament, s'ha demanat als alumnes que dibuixin un triangle i que expliquin com és un triangle. Després, se'ls ha dit si sabien dibuixar un altre triangle que fos diferent a l'anterior. A continuació, se'ls ha demanat que diguin en què es diferencien els triangles dibuixats anteriorment. Tot seguit, se'ls ha donat una imatge en la qual hi ha triangles i no triangles i han d'encerclar les formes que són triangles. Una vegada ho han encerclat, se'ls ha demanat perquè cada forma és o no és un triangle. Per últim, se'ls ha mostrat diferents triangles de forma estereotipada i de forma no estereotipada. Els alumnes han d'encerclar aquelles figures geomètriques que consideren que són triangles. Un cop encerclades, se'ls ha demanat, de les figures que no han marcat com a triangle, que expliquin perquè no és un triangle.

Després de passar el test a l'alumnat, s'han analitzat quins errors han comès. Una vegada s'han analitzat els errors dels alumnes, s'han fet propostes concretes per tal que aquests millorin els errors comesos. En aquestes propostes s'ha potenciat l'ús de materials. Finalment, s'ha analitzat si amb les propostes concretes, els alumnes milloren els errors, tot traient-ne unes conclusions.

Aquest test s'ha passat abans i després de la intervenció. Concretament, s'ha passat en el segon període d'estada prèvia a l'escola (3, 4 i 5 de desembre de 2012) i durant el període intensiu d'estada a l'escola (21 de març de 2013).

Aquesta prova s'ha passat individualment.

La durada d'aquesta prova ha estat de cinc a quinze minuts per nen. Cal dir però, que aquesta durada ha variat en funció del nivell d'aprenentatge del nen.

Aquesta prova s'ha passat a tot l'alumnat d'un grup classe perquè en la mostra seleccionada hi ha alumnes amb diferents nivells d'aprenentatge. Per tant, considero que les dades que s'han obtingut són més representatives.

Les dades quantitatives, obtingudes a partir de les preguntes tancades, s'han analitzat i s'han organitzat a través de taules i/o gràfics. Per exemple, s'ha fet un gràfic sobre quants alumnes han identificat una forma o una figura com a triangle o no. I les dades qualitatives, obtingudes a partir de les preguntes obertes, s'han analitzat a partir de capturar, transcriure i ordenar la informació. Després, s'ha agrupat la informació obtinguda amb categories per tal d'establir uns codis.

Aquestes dades s'han obtingut a partir de la transcripció de les respostes donades pels nens. Ara bé, com a suport, s'han enregistrat els tests amb una gravació en vídeo<sup>51</sup>, ja que així ha permès revisar-les en cas de dubte.

## 7.5. Intervenció

La intervenció duta a terme ha constatat de set activitats i aquestes han estat dissenyades perquè els alumnes poguessin millorar els errors comesos en el test<sup>52</sup>. Aquest treball didàctic ha tingut una durada de sis hores i quinze minuts.

En aquesta seqüència d'activitats s'han treballat els triangles a partir d'exemples i no exemples. He considerat que si els alumnes veien exemples i no exemples podien reconèixer les característiques del concepte i aplicar aquestes característiques a partir de comparar i contrastar aquests exemples i no exemples (Bamberger, Schultz-Ferrell i Oberdorf, 2010). També, s'han mostrat triangles no estereotipats perquè l'alumnat no tingui dificultats en reconèixer qualsevol triangle que se li presenti. A més a més, aquesta seqüència dóna importància que sigui l'alumnat qui descobreixi i pensi les propietats dels polígons abans d'arribar a anomenar-los, ja que així les podrà interioritzar de manera més significativa (Van de Walle, 2010).

S'ha tingut en compte que els alumnes tinguin un paper actiu en el seu procés d'aprenentatge i que les activitats proposades resultin motivadores.

---

<sup>51</sup> Veure annex 2.

<sup>52</sup> Veure annex 3.

En la seqüència s'han proposat unes activitats d'educació matemàtica realista perquè l'alumnat es pugui adonar que les matemàtiques tenen una utilitat en la vida real.

En la realització d'aquesta seqüència d'activitats he tingut en compte el mètode CRA (Concret-Representació-Abstracte). Crec que si s'utilitza aquest mètode, l'alumne que té problemes en l'aprenentatge de les matemàtiques, pot desenvolupar en primer lloc un coneixement concret del concepte matemàtic i llavors té més capacitat d'aprendre i entendre el contingut matemàtic a nivell abstracte (Sousa, 2008).

He tingut present les estratègies d'avaluació, ensenyament i aprenentatge i les estratègies de comunicació. Les he utilitzat perquè crec que poden ajudar a l'alumnat en el seu aprenentatge pel que fa als triangles. A més, la majoria d'aquestes estratègies permeten a l'alumnat el raonament i fa que l'aprenentatge pugui resultar més significatiu (Keeley i Tobey, 2011).

Pel que fa a la comunicació he considerat que la realització de bones preguntes és important ja que fan pensar a l'alumnat i requereix que compregui i analitzi la tasca portada a terme (DfEE<sup>53</sup>).

En la primera activitat, es presenta una situació a l'alumnat i aquest ha de dir amb quin nen està d'acord (escriure-ho a la fitxa d'activitat<sup>54</sup>). La situació és que una mestra li ha dit al seu alumne que dibuixi dos triangles i ell ha dibuixat dos triangles (un és un triangle no estereotipat i l'altre no és un triangle). Després, hi ha un nen i una nena que opinen si el que ha dibuixat l'alumne són triangles o no.

En la segona activitat, es comprova quin nen té raó de la fitxa de la primera activitat. Per fer-ho, el mestre els comenta que es faran els triangles amb tres estaquetes i una goma elàstica. Després, els alumnes han de decidir en quin lloc han de clavar cadascuna de les estaquetes per poder formar el triangle. Tot seguit, el mestre formula unes preguntes per tal d'arribar a la resposta correcta. I es fa el mateix procediment per a l'altre triangle. Per últim, es comenta quin nen tenia raó i es justifica.

En la tercera activitat, en petits grups (grups de tres o quatre alumnes) han de classificar unes formes<sup>55</sup> (triangles i no triangles) segons les seves semblances. Un cop les han classificat en grup, es fa una posada en comú. En aquesta posada, comença sortint un dels grups a col·locar unes quantes figures segons com ells les

---

<sup>53</sup> Podem consultar la informació a Hansen, 2005.

<sup>54</sup> Veure annex 4.

<sup>55</sup> Veure annex 4.

han classificat. I així es va fent per cadascun dels grups. Mentre els diferents grups surten a col·locar la figura es discuteix amb els altres grups si estan d'acord o no amb com les han col·locat, tot guiant la intervenció per tal d'arribar a tenir les figures classificades en triangles i no triangles. Quan ja s'han classificat, s'anomenen que aquell grup són triangles i aquells altres no (escrivint el seu nom a la pissarra). També, entre tots es defineix un triangle. Per últim, es treballa que els triangles poden estar en diferents posicions i que els seus costats poden ser d'igual o diferent longitud.

En la quarta activitat, el mestre mostra a l'alumnat uns triangles no estereotipats<sup>56</sup> que s'havia construït amb el geoplà. Els alumnes han de dir si és o no un triangle, tot argumentant la resposta.

En la cinquena activitat, els alumnes han de crear en el geoplà quatre triangles. Un d'aquests ha de tenir els tres costats de diferent longitud, l'altre ha de tenir els dos costats de la mateixa longitud, l'altre ha de tenir els tres costats de la mateixa longitud i l'altre ha de ser inventat per l'alumne. Quan els han creat, els han de representar en la trama de punts de la fitxa d'activitat<sup>57</sup>. Abans de començar a elaborar aquests triangles, se'n representa un, entre tots, a la pissarra. Per representar un triangle a la trama de punts, s'utilitza l'últim triangle que s'ha mostrat a la quarta activitat. El mestre demana a l'alumnat com es pot representar la trama de punts i la fa a la pissarra, tot seguint les indicacions de l'alumnat. Una vegada s'ha dibuixat la trama de punts, es dibuixa el triangle. Tot seguit, els alumnes realitzen la fitxa d'activitat.

En la sisena activitat, l'alumnat, individualment, ha de buscar els triangles que hi ha en cadascun dels dos quadres del pintor Kandinsky<sup>58</sup>. Un cop cercats, els han d'encerclar.

En la setena activitat, es realitza un itinerari matemàtic per buscar les cares que són triangles dels cossos geomètrics que hi puguin haver en alguns edificis o altres espais. Quan els alumnes troben un triangle es fa una fotografia. Un cop s'ha realitzat el recorregut, l'alumnat en una fitxa amb les fotografies realitzades<sup>59</sup> ha de marcar els triangles.

Cal comentar que abans de realitzar aquesta intervenció, s'havia treballat el reconeixement de les figures geomètriques de dues dimensions i dels polígons, el coneixement i ús del vocabulari adequat per descriure les propietats dels polígons i els

---

<sup>56</sup> Veure annex 4.

<sup>57</sup> Veure annex 4.

<sup>58</sup> Veure annex 4.

<sup>59</sup> Veure annex 4.



seus elements (costat i vèrtex) i la classificació dels polígons segons el nombre de costats.

## **8. Resultats**

A continuació, es presenten els resultats que s'han obtingut abans i després de la intervenció didàctica. També, s'exposa una relació entre aquests resultats.

Per exposar aquests resultats, prèviament s'ha fet un buidatge de les dades obtingudes. En aquest buidatge, s'han establert unes categories per poder agrupar la informació i aquesta s'ha recollit en unes taules<sup>60</sup>. A partir d'aquí, s'han elaborat els gràfics o taules que es mostren en aquest apartat.

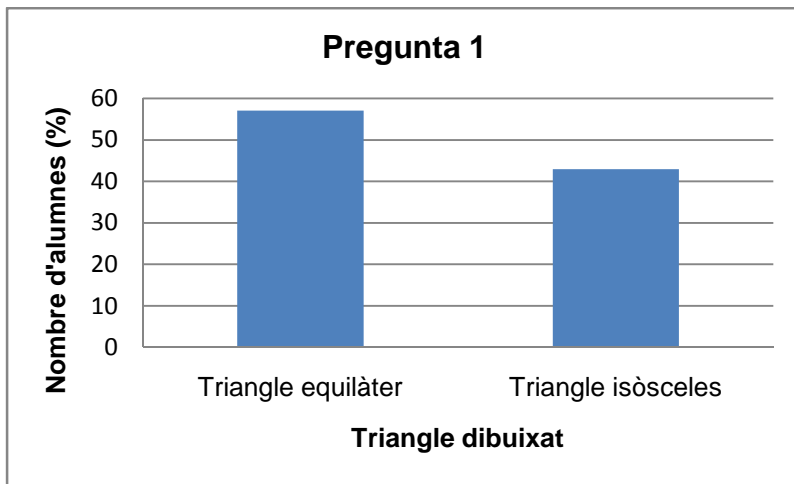
Cal comentar que, en algunes ocasions, els resultats no fan referència al total d'alumnes (catorze) ja que es dona el cas que un alumne ha donat més d'una resposta a la qüestió plantejada.

### **8.1. Resultats del test d'abans de la intervenció**

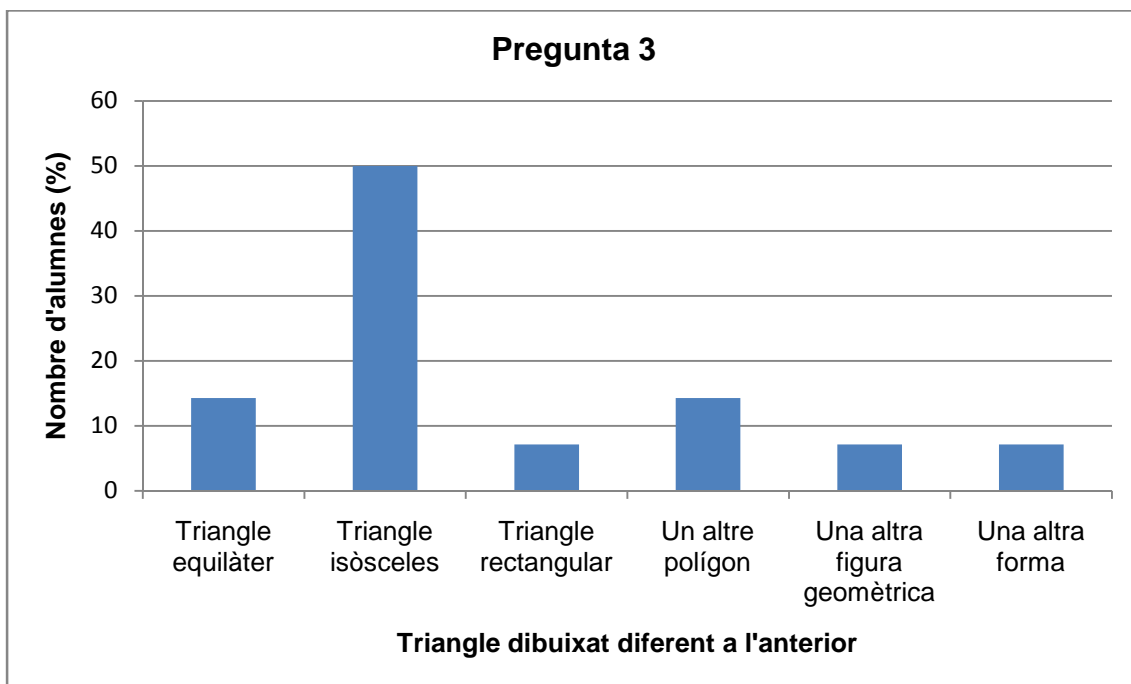
En la primera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle, vuit dels catorze alumnes han dibuixat un triangle equilàter i sis han dibuixat un triangle isòsceles. Els catorze alumnes han dibuixat el triangle amb la base horitzontal.

---

<sup>60</sup> Veure annex 5.

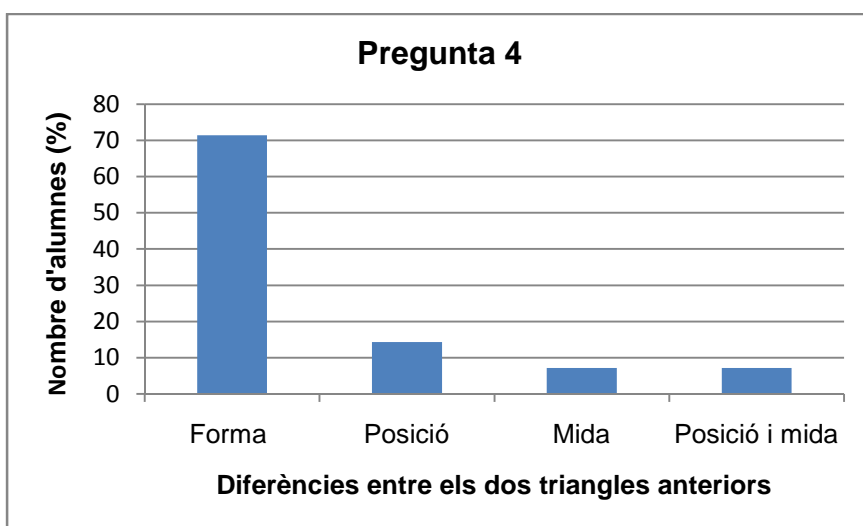


En la tercera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle diferent a l'anterior, dos alumnes han dibuixat un triangle equilàter, set alumnes han dibuixat un triangle isòsceles, un alumne ha dibuixat un triangle rectangular, dos alumnes han dibuixat un altre polígon, un alumne ha dibuixat una altra figura geomètrica i un alumne ha dibuixat una altra forma. Dels deu alumnes que han dibuixat un triangle, cinc alumnes han dibuixat el triangle amb la base horitzontal, tres alumnes la han dibuixat a un costat i dos alumnes la han dibuixat a dalt.



En la quarta pregunta, a l'hora d'explicar en que es diferencien els dos triangles dibuixats anteriorment (pregunta 1 i 3), deu alumnes han dit que són diferents en la forma, dos alumnes que són diferents en la posició, un alumne que són diferents en la mida i un alumne que són diferents en la posició i la mida. Dels deu alumnes que han

dibuixat un triangle diferent en la forma, un ha dibuixat dos tipus diferents de triangle equilàter, dos han dibuixat un triangle equilàter i després un altre polígon, un ha dibuixat un triangle equilàter i després un de rectangular, tres han dibuixat un triangle equilàter i després un triangle isòsceles, un ha dibuixat un triangle equilàter i després una altra forma, un ha dibuixat dos tipus diferents de triangle isòsceles i un ha dibuixat un triangle isòsceles i després una altra figura geomètrica.



En la segona pregunta, a l'hora de definir com és un triangle, tots els alumnes tenen clar el concepte de triangle, tot i que només set dels catorze alumnes han dit que un triangle té tres vèrtexs i només un ha dit que té tres costats. Cap alumne ha utilitzat el vocabulari correctament ja que per referir-se als vèrtexs els anomenen punxes o puntes i els costats en diuen ratlles. També, tres dels catorze alumnes han comparat el triangle amb un objecte de la realitat, com pot ser la teulada d'una casa.

Descripció de triangle (pregunta 2)		Nombre d'alumnes (%)
Té en compte les característiques	Costats	7,1
	Vèrtexs	50
Fa comparacions		21,4
Té el concepte correcte		100
Utilitza el vocabulari		0

En la pregunta 5, de les formes presentades a l'alumnat n'hi ha set que són triangles (forma 1, 5, 6, 8, 10, 12 i 15) i vuit que no són triangles (forma 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13 i 14).

La forma 10 ha estat reconeguda com a triangle per tots els alumnes. Dos dels catorze alumnes han dit que és un triangle perquè té tres costats. Set dels catorze alumnes ho han raonat dient que té tres vèrtexs. Un dels catorze alumnes ho ha argumentat dient

que està en la posició estereotipada. Cinc dels catorze alumnes han dit que té la forma del triangle estereotipat. I un dels catorze ha dit que no té els costats curts.

La forma 2, 4 i 9 ha estat reconeguda com a no triangle per tot l'alumnat.

La forma 2, dos dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè té quatre costats. Cinc dels catorze alumnes han dit que té quatre vèrtexs. Cinc dels catorze alumnes han dit que no té la forma del triangle. Un dels catorze alumnes ha dit que té dos triangles. I un dels catorze alumnes ha dit que se sembla a un estel.

La forma 4, tres dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè la regió del pla no està limitada per una línia tancada. Tres dels catorze alumnes han dit que és massa allargat. Quatre dels catorze alumnes que li falta un vèrtex. Tres dels catorze alumnes han dit que no té la forma del triangle estereotipat. Un dels catorze alumnes ha dit que no està en la posició estereotipada. I un dels catorze alumnes ha dit que té massa vèrtex.

La forma 9, un dels catorze alumnes ha dit que no és un triangle perquè té quatre costats. Un dels catorze alumnes ha dit que no té tres vèrtexs. Deu dels catorze alumnes han dit que la base no és recta, és a dir, que aquest costat no és una línia recta. I tres dels catorze alumnes han dit que se sembla a una avió de paper.

La forma 1 ha estat reconeguda com a triangle per nou dels catorze alumnes. D'aquests nou alumnes, un ha dit que és un triangle perquè té tres costats, cinc han dit que té tres vèrtexs i tres han dit que té la forma del triangle. Dels cinc alumnes que no l'han reconegut, quatre han dit que no és un triangle perquè no està en la posició estereotipada i un ha dit que no té la forma del triangle estereotipat.

La forma 3 ha estat reconeguda com a no triangle per dotze dels catorze alumnes. D'aquests dotze alumnes, tres han dit que no té la forma del triangle, dos han dit que té els costats corbats, quatre han dit que té forma rodona, tres han dit que és molt gran i un ha dit que té poc vèrtex. Dels dos alumnes que han dit que és un triangle, dos han dit que té tres vèrtexs i un que té els dos costats corbats.

La forma 5 ha estat reconeguda com a triangle per un dels catorze alumnes. Aquest infant ha dit que és un triangle perquè té tres vèrtexs. Dels altres tretze alumnes que han dit que no és un triangle, tres han dit que és allargat, tres que té el costat massa llarg, tres que no té la forma del triangle estereotipat, tres que no està en la posició estereotipada i un que sembla un avió de costat.

La forma 6 ha estat reconeguda com a triangle per cinc dels catorze alumnes. D'aquests cinc alumnes, un ha dit que és un triangle perquè té tres costats, dos han dit que té tres vèrtexs i dos han dit que té la forma del triangle. Dels altres nou alumnes que no l'han reconeguda com a triangle, dos han dit que no ho és perquè és allargat, un ha dit que té els costats massa llargs, un ha dit que té massa vèrtex, sis han dit que no està en la posició estereotipada i un que sembla una bandera.

La forma 7 ha estat reconeguda com a no triangle per dotze dels catorze alumnes. D'aquests dotze alumnes, quatre han dit que no és un triangle perquè no té la forma del triangle, dos han dit que té els costats corbats, dos que té forma de rodona, tres que és molt gran, un que té poc vèrtex i un altre que no està en la posició estereotipada. Dels altres dos alumnes que l'han reconeguda com a triangle, un ha dit que té la forma del triangle i l'altre que té dos costats corbats.

La forma 8 ha estat reconeguda com a triangle per quatre dels catorze alumnes. D'aquests quatre, dos han dit que és un triangle perquè té tres vèrtexs, un que el triangle pot estar en altres posicions que no sigui l'estereotipada i un ha dit que si el gires, amb el full, és un triangle. Dels altres deu alumnes que no l'han reconeguda com a triangle, set han dit que no ho és perquè no està en la posició estereotipada i un perquè té els costats petits.

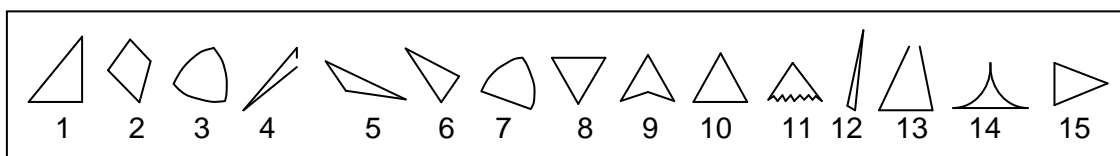
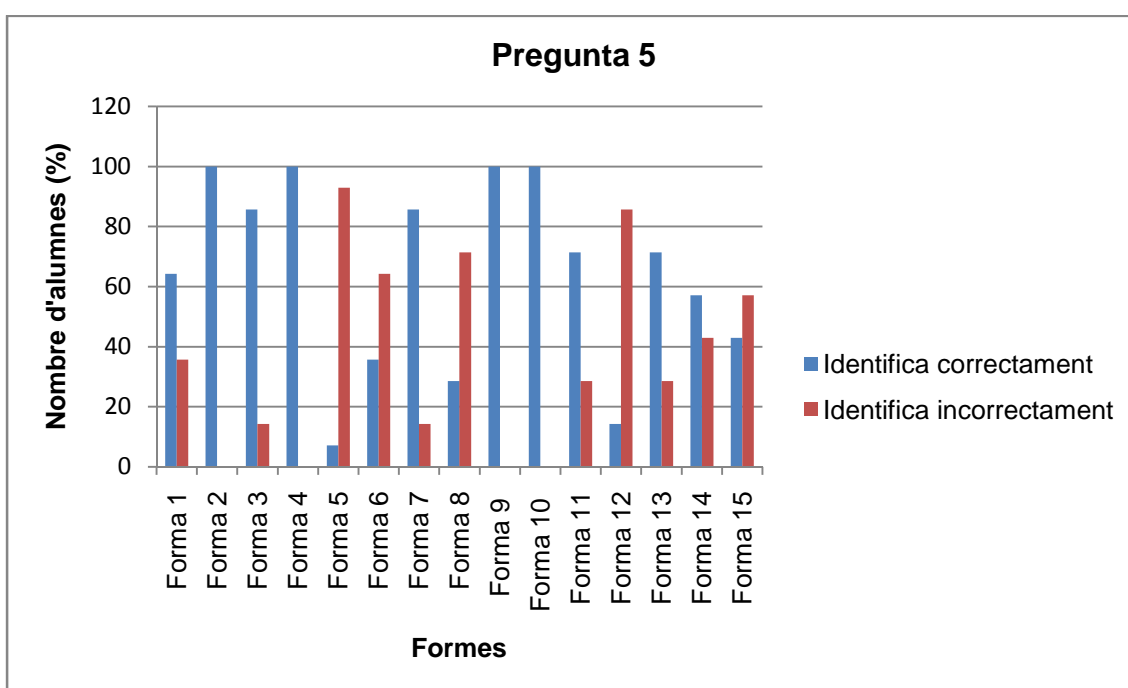
La forma 11 ha estat reconeguda com a no triangle per deu dels catorze alumnes. D'aquests deu alumnes, vuit han dit que no és un triangle perquè no té tots els costats rectes, un ha dit que no té tres costats i un ha dit que té més de tres vèrtexs. Dels quatre alumnes que han dit que és un triangle, un ha dit que és un triangle perquè té tres vèrtexs, dos han dit que té la forma del triangle estereotipat i un ha dit que té nou vèrtexs.

La forma 12 ha estat reconeguda com a triangle per dos dels catorze alumnes. Aquests dos alumnes han dit que és un triangle perquè té tres vèrtexs. Dels altres dotze alumnes, deu han dit que no és un triangle perquè és molt allargat, un ha dit que té els dos costats massa llargs i dos que és més punxegut.

La forma 13 ha estat reconeguda com a no triangle per deu dels catorze alumnes. Aquests deu alumnes han dit que no és un triangle perquè li falta un vèrtex. Dels altres quatre, un ha dit que és un triangle perquè té tres costats, dos han dit que té la forma del triangle estereotipat, un ha dit que està en la posició estereotipada i un ha dit que té dos vèrtexs.

La forma 14 ha estat reconeguda com a no triangle per vuit dels catorze alumnes. D'aquests vuit alumnes, un ha dit que no és un triangle perquè no té la forma del triangle, cinc han dit que no té els costats rectes i dos que té massa vèrtexs. Dels altres sis alumnes que han dit que és un triangle, un ha dit que ho és perquè té tres costats, dos perquè té tres vèrtexs i quatre perquè té la forma del triangle estereotipat.

La forma 15 ha estat reconeguda com a triangle per sis dels catorze alumnes. D'aquests sis alumnes, tres han dit que és un triangle perquè té tres vèrtexs, un ha dit que té la forma del triangle estereotipat, un ha dit que el triangle pot estar en altres posicions que no sigui l'estereotipada i un ha dit que indica com una fletxa. Dels altres vuit alumnes, sis han dit que no és un triangle perquè no està en la posició estereotipada, dos han dit que té massa vèrtex i un que sembla una bandera girada.



En la pregunta 6, dels polígons presentats a l'alumnat tots són triangles (triangle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 i 14).

El polígon 1 i 7 ha estat reconegut com a triangle per sis dels catorze alumnes.

El polígon 1, els vuit alumnes que no l'han reconegut com a triangle, un ha dit que no ho és perquè no té la forma del triangle estereotipat, cinc han dit que no està en la

posició prototípica, dos han dit que té el costat massa llarg i un que es sembla a una bandera.

El polígon 7, els vuit alumnes que no l'han reconegut com a triangle, un ha dit que no ho és perquè no té la forma del triangle estereotipat, quatre han dit que no està en la posició prototípica, dos han dit que té el costat massa llarg i un que és més petit.

Els polígons 2, 6 i 13 han estat reconeguts com a triangle per set dels catorze alumnes.

El polígon 2, els set alumnes que no l'han reconegut com a triangle han dit que no ho és perquè no està en la posició estereotipada.

El polígon 6, els set alumnes que no l'han reconegut com a triangle, cinc han dit que no està en la posició estereotipada, un ha dit que és més petit i un no ho ha sabut justificar.

El polígon 13, els set alumnes que no l'han reconegut com a triangle, un ha dit que no ho és perquè no té la forma del triangle prototípic, cinc han dit que no està en la posició estereotipada i un que té un costat diferent.

Els polígons 3, 8, 9 i 12 no han estat reconeguts com a triangle per cap dels catorze alumnes.

El polígon 3, nou alumnes han dit que no és un triangle perquè és molt allargat, dos han dit que és més punxegut, un ha dit que té un costat massa petit, un ha dit que no té la forma del triangle prototípic i quatre han dit que no està en la posició estereotipada.

El polígon 8, cinc alumnes han dit que no és un triangle perquè és més allargat, un ha dit que és més punxegut, tres han dit que té un costat llarg, dos que no té la forma del triangle estereotipat, quatre han dit que no estava en la posició estereotipada i un ha dit que sembla una fletxa.

El polígon 9, sis alumnes han dit que no és un triangle perquè és allargat, un ha dit que té el costat més curt que l'altre, dos han dit que té el costat més llarg i l'altre més curt, quatre han dit que no té la forma del triangle prototípic i quatre han dit que no està en la posició estereotipada.

El polígon 12, tres alumnes han dit que no és un triangle perquè és més allargat, tres han dit que té el costat més llarg, tres han dit que té massa vèrtex, dos han dit que no té el vèrtex al centre, dos han dit que no té la forma del triangle prototípic i tres han dit que no està en la posició estereotipada.

El polígon 4 ha estat reconegut com a triangle per onze dels catorze alumnes. Dels tres alumnes que no l'han reconegut com a triangle, dos ho han argumentat dient que és una mica allargat i un que és una mica gran.

El polígon 5 ha estat reconegut com a triangle per dos dels catorze alumnes. Dels dotze alumnes que no l'han reconegut com a triangle, quatre han dit que no està en la posició estereotipada, un que és una mica allargat, dos que és petit, un que té un costat curt, dos que té els dos costats més llargs que l'altre, un que té poc vèrtex i un que no té un vèrtex.

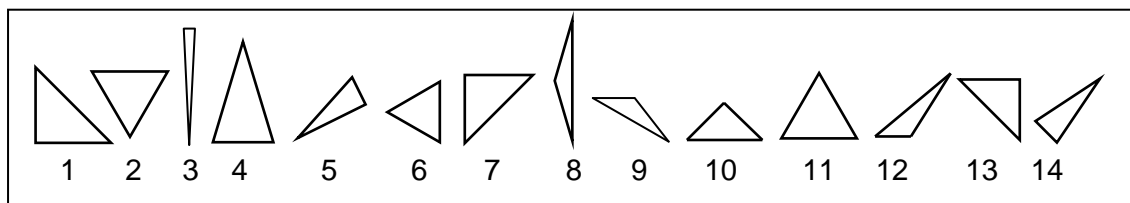
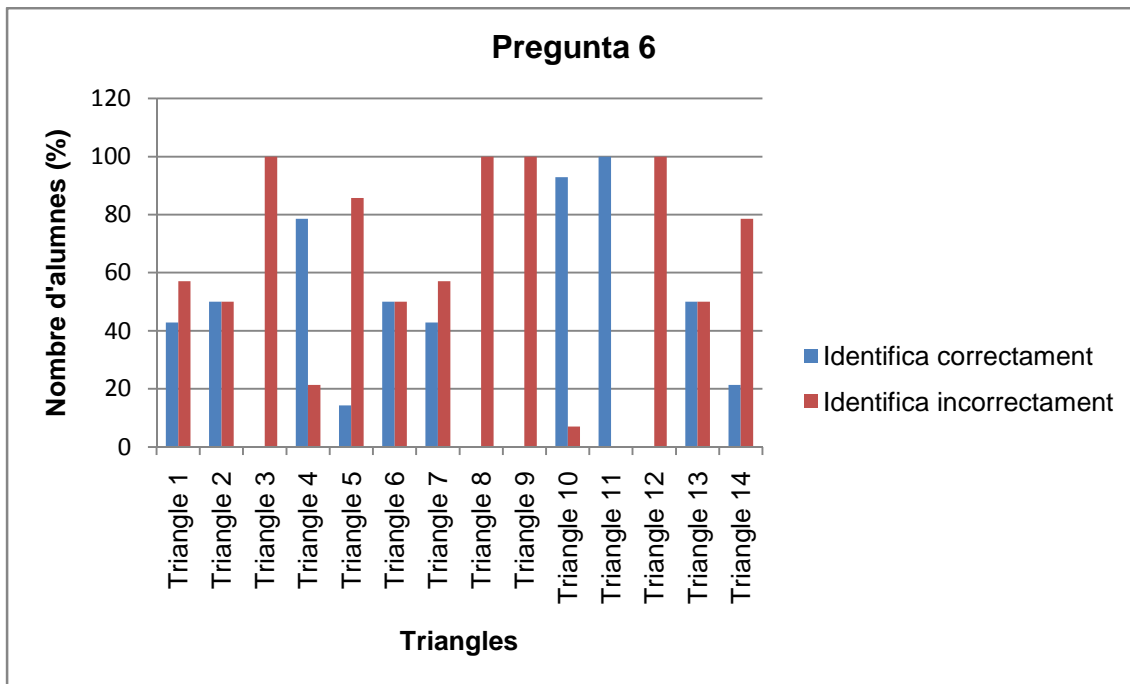
El polígon 10 ha estat reconegut com a triangle per tretze dels catorze alumnes. L'alumne que no l'ha reconegut com a triangle ha dit que té el costat massa llarg.

El polígon 11 ha estat reconegut com a triangle per tots els alumnes.

El polígon 14 ha estat reconegut com a triangle per tres dels catorze alumnes. Dels onze alumnes que no l'han reconegut com a triangle, tres han dit que és una mica allargat, un ha dit que és més punxegut, un ha dit que té un costat diferent, tres han dit que té massa vèrtex i cinc han dit que no està en la posició estereotipada.

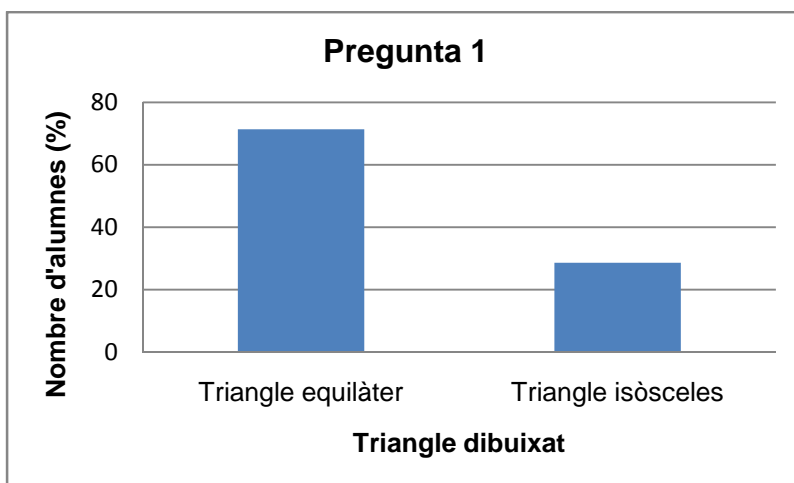
Cal comentar que en la pregunta 6, els alumnes que han dit que els polígons mostrats són triangles, no es va preguntar perquè deien que era un triangle. No es va fer perquè vaig pensar que amb tots els comentaris realitzats al llarg del test ja em permetia veure quina idea tenien de triangle i podia interpretar perquè l'havien reconegut com a triangle.



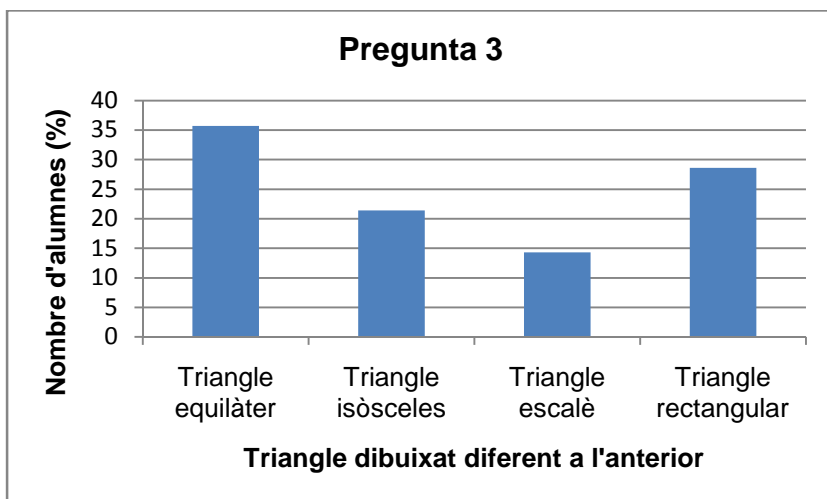


## 8.2. Resultats del test de després de la intervenció

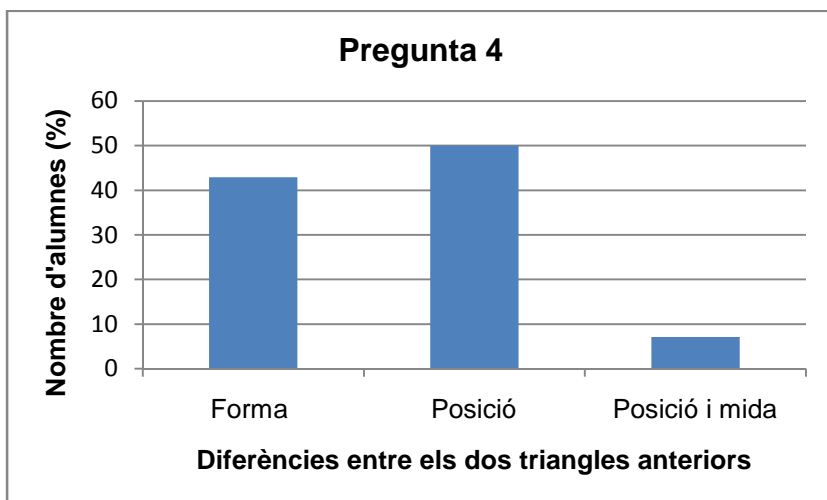
En la primera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle, deu dels catorze alumnes han dibuixat un triangle equilàter i quatre han dibuixat un triangle isòsceles. Els catorze alumnes han dibuixat el triangle amb la base horitzontal.



En la tercera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle diferent a l'anterior, cinc alumnes han dibuixat un triangle equilàter, tres alumnes han dibuixat un triangle isòsceles, quatre alumnes han dibuixat un triangle rectangular i dos alumnes han dibuixat un triangle escalè. Set dels catorze alumnes han dibuixat el triangle amb la base horitzontal, sis alumnes l'han dibuixat a un costat i un alumne l'ha dibuixat a dalt.



En la quarta pregunta, a l'hora d'explicar en que es diferencien els dos triangles dibuixats anteriorment (pregunta 1 i 3), sis alumnes han dit que són diferents en la forma, set alumnes que són diferents en la posició i un alumne que són diferents en la posició i la mida.



En la segona pregunta, a l'hora de definir com és un triangle, tots els alumnes tenen clar el concepte de triangle i tots han dit que un triangle té tres vèrtexs. A més, la majoria d'alumnes han dit que un triangle té tres costats. Dotze dels catorze alumnes ha utilitzat el vocabulari correctament. No hi ha hagut cap alumne que hagi fet una comparació.

Descripció de triangle (pregunta 2)		Nombre d'alumnes (%)
Té en compte les característiques	Costats	92,3
	Vèrtexs	100
Fa comparacions		0
Té el concepte correcte		100
Utilitza el vocabulari		85,7

En la pregunta 5, de les formes presentades a l'alumnat n'hi ha set que són triangles (forma 1, 5, 6, 8, 10, 12 i 15) i vuit que no són triangles (forma 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13 i 14).

Les formes 1, 5, 6, 8, 10 i 15 han estat reconegudes com a triangle per tots els alumnes. Set dels catorze alumnes han dit que aquestes formes són triangles perquè tenen tres costats. Onze dels catorze alumnes ho han raonat dient que tenen tres vèrtexs. I tres dels catorze alumnes ho han argumentat dient que tenen els costats rectes.

Les formes 2, 3, 4, 7, 9, 11, 13 i 14 han estat reconegudes com a no triangle per tot l'alumnat.

La forma 2, sis dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè té quatre costats. Dotze dels catorze han dit que té quatre vèrtexs. I un dels catorze ha dit que té forma quadrada.

La forma 3, tots els alumnes han dit que aquesta forma no és un triangle perquè té els costats corbats.

La forma 4, tots els alumnes han dit que aquesta forma no és un triangle perquè la regió del pla no està limitada per una línia tancada.

La forma 7, tots els alumnes han dit que aquesta forma no és un triangle perquè no té tots els costats rectes.

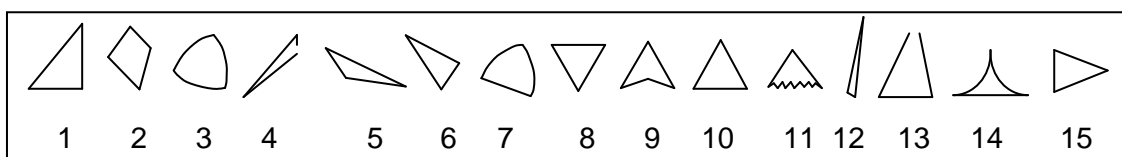
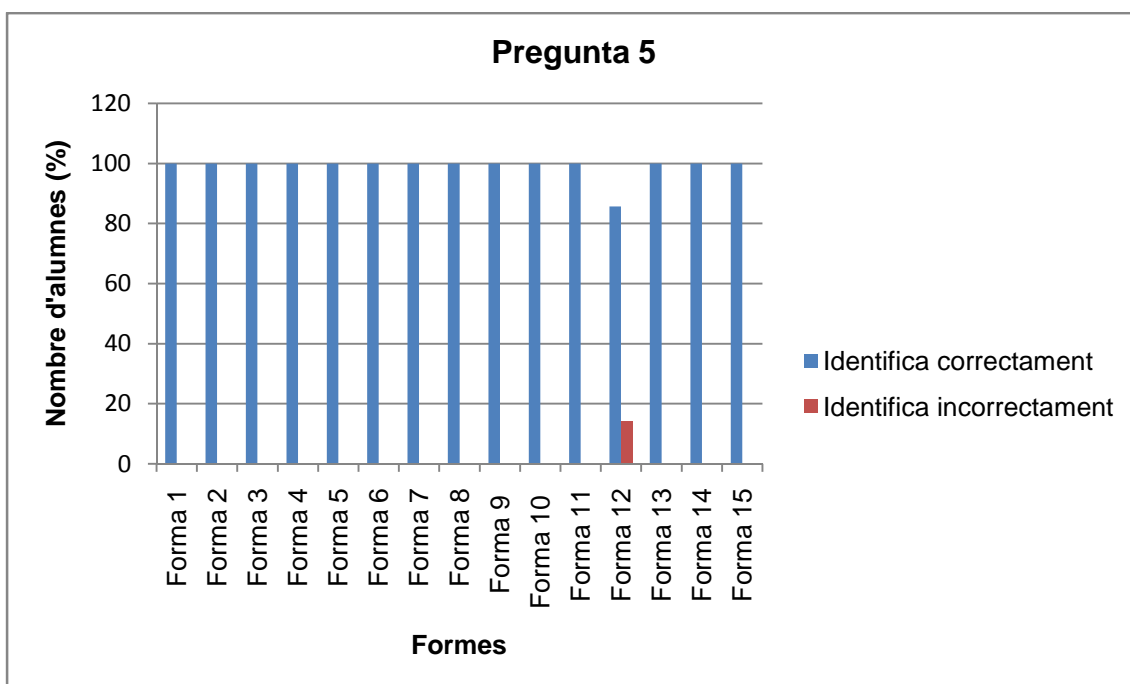
La forma 9, quatre dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè té quatre costats. Deu dels catorze alumnes han dit que té quatre vèrtexs. I tres dels catorze alumnes han dit que la base no és recta, és a dir, que aquest costat no és una línia recta.

La forma 11, deu dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè no té tots els costats rectes. I deu dels catorze alumnes han dit que té més de tres vèrtexs.

La forma 13, onze dels catorze alumnes han dit que no és un triangle perquè la regió del pla no està limitada per una línia tancada. Tres dels catorze alumnes han dit que li falta un vèrtex. I un dels catorze alumnes ha dit que té quatre vèrtexs.

La forma 14, tots els alumnes han dit que no és un triangle perquè no té tots els costats rectes.

La forma 12 ha estat reconeguda com a triangle per dotze dels catorze alumnes. Un dels dos alumnes han dit que no és un triangle perquè és massa allargat. L'altre alumne ha dit que no ho podia ser perquè tenia un costat curt i els altres llargs.



En la pregunta 6, dels polígons presentats a l'alumnat tots són triangles (triangle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 i 14).

Els polígons 1, 2, 4, 6, 10, 11 i 13 han estat reconeguts com a triangle per tots els alumnes.

Els polígons 3, 8, 9 i 14 han estat reconeguts com a triangle per dotze dels catorze alumnes.

Els polígons 5 i 7 han estat reconeguts com a triangle per tots els alumnes exceptuant un.

El polígon 12 ha estat reconegut com a triangle per onze dels catorze alumnes.

Els alumnes que han reconegut aquests polígons com a triangle ho han argumentat de la següent manera. Nou dels catorze alumnes han dit que aquestes formes són triangles perquè tenen tres costats. Dotze dels catorze alumnes ho han raonat dient que tenen tres vèrtexs. I set dels catorze alumnes ho han argumentat dient que tenen els costats rectes.

Els dos alumnes que no han reconegut el polígon 3 com a triangle, un d'ells ha dit que no és un triangle perquè no està en la posició estereotipada i és massa allargat. L'altre ha dit que no ho pot ser perquè té un costat curt i els altres llargs.

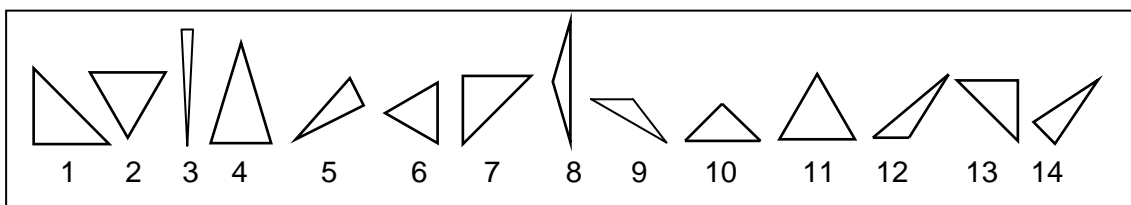
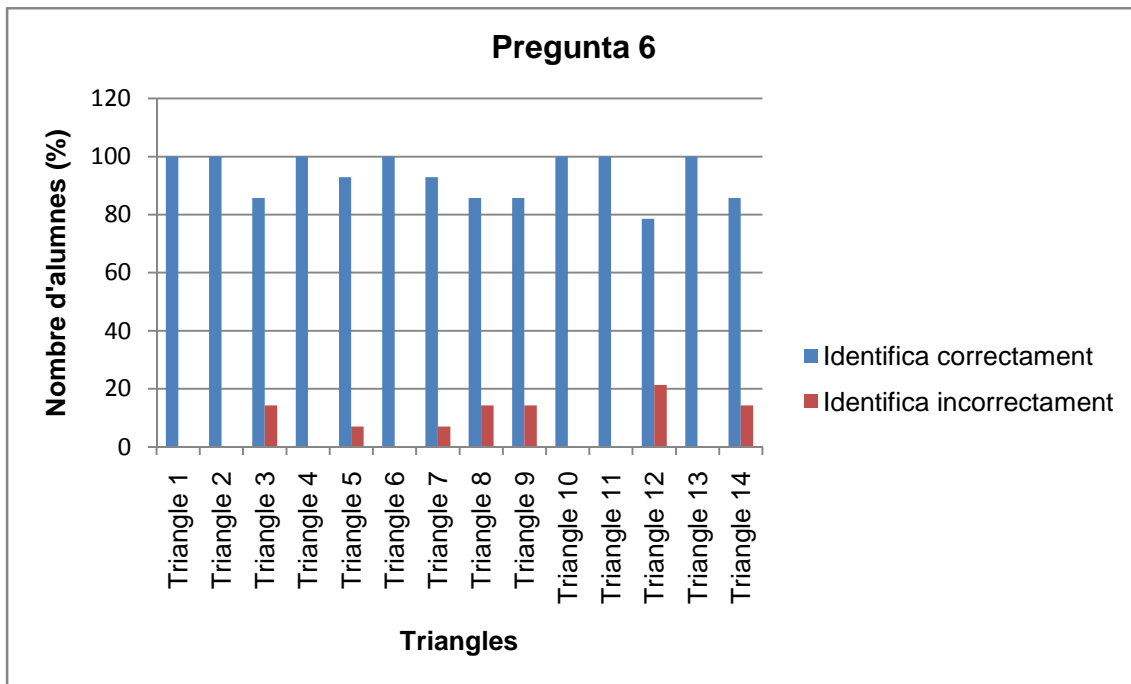
L'alumne que no ha reconegut els polígons 5 i 7 no ha sabut justificar perquè no ho són.

Els dos alumnes que no han reconegut el polígon 8 com a triangle, un d'ells ha dit que no és un triangle perquè té la base horitzontal a un costat i és allargat. L'altre no ha sabut justificar perquè no ho és.

Els dos alumnes que no han reconegut el polígon 9 com a triangle, un d'ells ha dit que no és un triangle perquè no té la forma dels triangles i és massa allargat. L'altre no ha sabut justificar perquè no ho és.

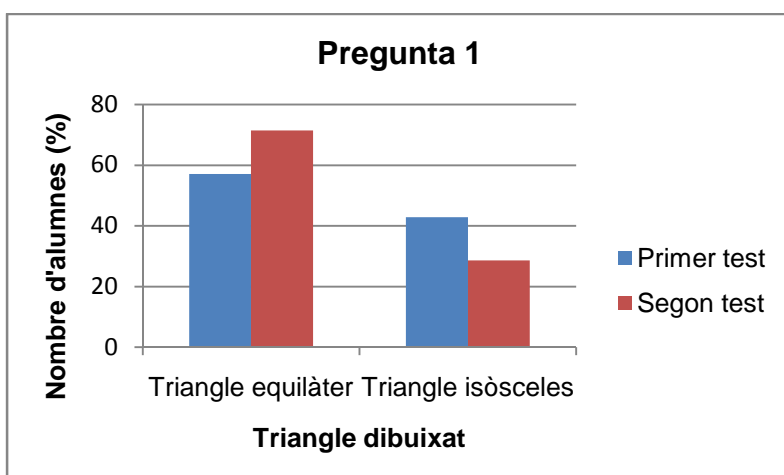
Els tres alumnes que no han reconegut el polígon 12 com a triangle, un d'ells ha dit que no és un triangle perquè té un costat curt i els altres llargs. L'altre alumne ha dit que no ho és perquè té un dels vèrtexs massa allargat. I l'altre no ha sabut justificar perquè no ho és.

Els dos alumnes que no han reconegut el polígon 14 com a triangle, un d'ells ha dit que no és un triangle perquè és una mica gruixut. L'altre no ha sabut justificar perquè no ho és.

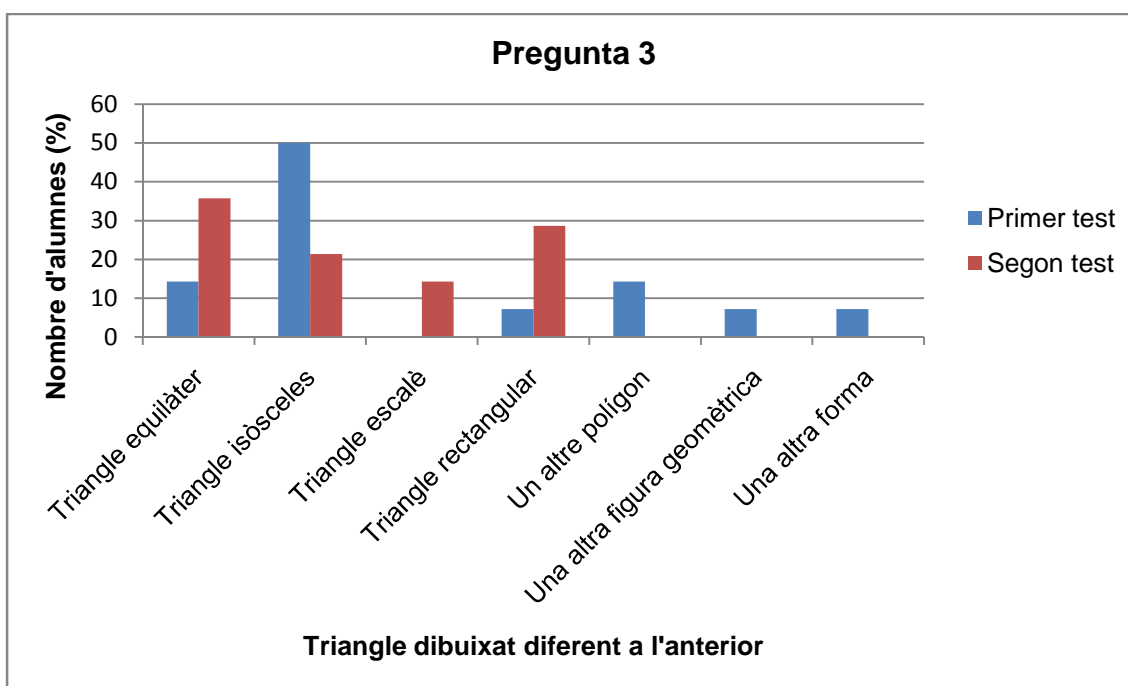


### 8.3. Relació dels resultats del test d'abans i de després de la intervenció

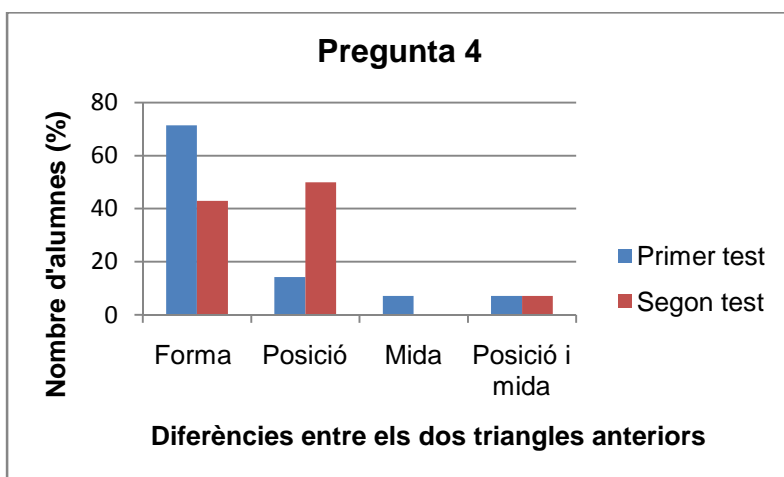
En la primera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle, s'ha observat que en el primer test l'alumnat ha dibuixat més triangles isòsceles. En canvi, en el segon test els alumnes han dibuixat més triangles equilàters.



En la tercera pregunta, a l'hora de dibuixar un triangle diferent a l'anterior, s'ha vist que en el segon test els alumnes han dibuixat més triangles equilàters i rectangulars. En canvi, en el primer test l'alumnat ha dibuixat més triangles isòsceles. També, s'ha observat que en el segon test els alumnes ja dibuixen com a triangle, el triangle escalè. A més, en el segon test l'infant ja no dibuixa com a triangle altres figures geomètriques o altres formes.



En la quarta pregunta, a l'hora d'explicar en què es diferencien els dos triangles dibuixats anteriorment (pregunta 1 i 3), en el primer test l'alumnat ha explicat que els triangles es diferencien sobretot per la forma. En canvi, l'alumnat en el segon test ja té més en consideració que una diferència entre els triangles pot ser la posició. També, es pot destacar que en el segon test la mida no apareix com una diferència.



En la segona pregunta, a l'hora de definir com és un triangle, l'alumnat en el segon test ja té més en compte les característiques d'un triangle (costats i vèrtexs). A més, la majoria d'alumnes ja utilitzen el vocabulari correctament. En canvi, els alumnes en el segon test deixen de fer comparacions.

Descripció de triangle (pregunta 2)		Nombre d'alumnes (%)	
Té en compte les característiques	Costats	7,1	92,3
	Vèrtexs	50	100
Fa comparacions		21,4	0
Té el concepte correcte		100	100
Utilitza el vocabulari		0	85,7

 Primer test	 Segon test
---	--

En la pregunta 5, les formes 2, 4, 9 i 10 han estat identificada correctament en el primer i segon test per tots els alumnes.

La forma 1 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per nou dels catorze alumnes. Els altres cinc alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí.

Les formes 3 i 7 han estat identificades correctament en el primer i segon test per dotze dels catorze alumnes. Els altres dos alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí.

La forma 5 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per un dels catorze alumnes. Els altres tretze alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí.

La forma 6 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per cinc dels catorze alumnes. Els altres nou alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí.

La forma 8 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per quatre dels catorze alumnes. Els altres deu alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí.

















Les formes 11 i 13 han estat identificades correctament en el primer i segon test per deu dels catorze alumnes. Els altres quatre alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí.

La forma 12 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per dos dels catorze alumnes. Els altres deu alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí. I els altres dos alumnes no l'han reconeguda ni en el primer ni en el segon test.

La forma 14 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per vuit dels catorze alumnes. Els altres sis alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí.

La forma 15 ha estat identificada correctament en el primer i segon test per sis dels catorze alumnes. Els altres vuit alumnes en el primer test no l'han reconeguda i en el segon sí.

Primer test	Segon test															
Identifica correctament	Identifica correctament															
<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	9	14	12	14	1	5	12	4	14	14	10	2	10	8	6
<b>Sí</b>	<b>No</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>No</b>	<b>Sí</b>	5	0	2	0	13	9	2	10	0	0	4	10	4	6	8
<b>No</b>	<b>No</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0

En la pregunta 6, els polígons 2, 6 i 13 han estat identificats correctament en el primer i segon test per set dels catorze alumnes. Els altres set alumnes en el primer test no les han reconegudes i en el segon sí.

El polígon 1 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per sis dels catorze alumnes. Els altres vuit alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí.

Els polígons 3, 8 i 9 dotze dels catorze alumnes en el primer test no les han identificades i en el segon sí. Els altres dos alumnes no les han reconegut ni en el primer ni en el segon test.

El polígon 4 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per onze dels catorze alumnes. Els altres tres alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí.

El polígon 5 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per dos dels catorze alumnes. Els altres onze alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí. I l'altre alumne no l'ha reconegut ni en el primer ni en el segon test.

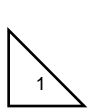
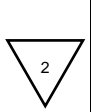
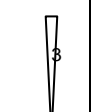

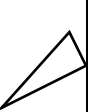
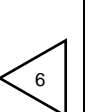
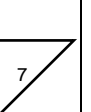

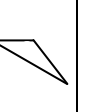
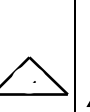

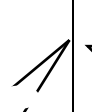
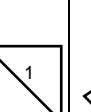

El polígon 7 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per sis dels catorze alumnes. Els altres set alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí. I l'altre alumne no l'ha reconegut ni en el primer ni en el segon test.

El polígon 10 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per tretze dels catorze alumnes. L'altre alumne en el primer test no l'ha reconegut i en el segon sí.

El polígon 11 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per tots els alumnes.

El polígon 12, onze dels catorze alumnes en el primer test no l'han identificat i en el segon sí. Els altres tres alumnes no l'han reconegut ni en el primer ni en el segon test.

El polígon 14 ha estat identificat correctament en el primer i segon test per tres dels catorze alumnes. Els altres nou alumnes en el primer test no l'han reconegut i en el segon sí. I els altres dos alumnes no l'han reconegut ni en el primer ni en el segon test.

Primer test	Segon test														
Identifica correctament	Identifica correctament														
<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	6	7	0	11	2	7	6	0	0	13	14	0	7	3
<b>Sí</b>	<b>No</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>No</b>	<b>Sí</b>	8	7	12	3	11	7	7	12	12	1	0	11	7	9
<b>No</b>	<b>No</b>	0	0	2	0	1	0	1	2	2	0	0	3	0	2

## 9. Conclusions

Amb la realització d'aquest estudi es pot observar que la majoria d'alumnes tenen la imatge mental d'un triangle prototípic, és a dir, d'un triangle equilàter o isòsceles amb la base horitzontal a baix. Per tant, això fa que l'alumnat cometi errors quan se li presenten altres tipus de triangles no estereotipats. Aquests errors estan relacionats bàsicament amb la forma o la posició del triangle i amb no tenir present les propietats del triangle.

Es pot observar que el primer triangle dibuixat pels alumnes en els dos tests correspon a un triangle equilàter o isòsceles amb la base horitzontal a baix. El triangle equilàter amb la base a baix, segons els autors Ryan i Williams correspondria a la imatge que tenim la majoria de nosaltres d'un triangle. També, el fet que el triangle tingui la base horitzontal correspon a una característica prototípica de la posició (Matos Hershkowitz).

També, es pot veure que quan se'ls va demanar que dibuixessin un triangle diferent a l'anterior, l'alumnat seguia dibuixant bàsicament un triangle isòsceles o equilàter. Això pot ser perquè els infants des de petits generalitzen el concepte (Chambers) i aquesta idea equivocada és difícil de reemplaçar. Tot i així, en el segon test es dibuixen més triangles rectangles i s'introdueix el triangle escalè. Per tant, els alumnes dibuixen altres tipus de triangles fruit d'haver vist durant la intervenció altres exemples de triangles que no fossin representacions gràfiques estereotipades. A més, en el segon test es deixen de dibuixar formes o figures geomètriques que no siguin triangles. Això passa perquè els alumnes, en el primer test, les representacions gràfiques que han vist són les representacions gràfiques estereotipades ja que segons ens comenten les autores Scaglia i Moriena aquestes són les quines es presenten amb més freqüència.

L'alumnat, quan ha d'explicar en què es diferencien els dos triangles que ha dibuixat, en el primer test, diferencia els triangles principalment per la forma. Així doncs, com que els alumnes només han vist triangles prototípics, és a dir, triangles que tenen la base a baix, fa que els infants tinguin una imatge concreta de triangle i no considerin com a triangle altres tipus. En canvi, en el segon test els triangles es distingeixen per la posició i la forma. En aquest cas, els alumnes, en la intervenció, han vist que els triangles poden estar en posicions diferents i aquesta experiència fa que la imatge canviï.

Els alumnes, quan han de definir en el primer test com és un triangle, tenen clar el concepte de triangle, però només alguns infants asseguren que els triangles tenen tres vèrtexs. A més, alguns nens usen les comparacions per explicar o acabar d'explicar el concepte. També, l'alumnat va cometre l'error que no va utilitzar el vocabulari correctament ja que els vèrtexs els anomenaven punxes o puntes i els costats en deien ratlles. Així doncs, segons els nivells de Van Hiele es podria dir que la majoria d'alumnes es troben en el nivell de visualització (nivell 0) ja que descriuen el triangle per la seva aparença i no per les propietats. A més a més, no usen els conceptes geomètrics adients i s'ajuden de les comparacions, com per exemple "és com una teulada".

Els infants, quan han d'explicar en el segon test com és un triangle, tenen clar el concepte de triangle, tenen en compte les característiques, utilitzen el vocabulari correctament i no fan comparacions. Per tant, segons els nivells de Van Hiele, la majoria d'alumnes es trobarien en el nivell d'anàlisi (nivell 1) ja que descriuen el triangle per les seves propietats.

Quan l'alumnat ha de reconèixer quines formes són triangles, n'hi ha alguns que en el primer test cometen l'error de no identificar la forma 1 correctament perquè tenen la imatge mental del triangle prototípic (triangle regular amb la base a baix). Els altres alumnes no tenen problema en identificar-la correctament perquè, segons Asholock, se sol ensenyar aquest tipus de triangle.

No hi ha hagut problemes per identificar la forma 2 correctament ja que no tenia la forma semblant a un triangle.

Els alumnes que van reconèixer incorrectament la forma 3 i 7, podien cometre aquest error perquè van considerar que tenia tres vèrtexs i no va tenir en compte que els costats d'un triangle han de ser rectes (*Geometry*, 2010).

L'alumnat va identificar correctament la forma 4, tot i que en el primer test, a l'hora de justificar perquè no ho era, alguns van considerar que no ho era per la forma no estereotipada que tenia. Per tant, l'alumnat podia cometre aquest error pel fet de no pensar en les propietats.

La majoria d'alumnes en el primer test van reconèixer incorrectament la forma 5 perquè tenien la imatge mental d'un triangle prototípic.

Els infants que van identificar incorrectament la forma 6 en el primer test, van realitzar aquest error perquè van considerar que només podia ser triangle un tipus en concret, com ara el triangle regular (*Geometry*, 2010). També, podia succeir perquè no estava en una posició prototípica.

L'alumnat que en el primer test no va reconèixer correctament la forma 8 és perquè els nens han vist triangles que tenen la base a baix (Hansen).

La forma 9 va ser identificada correctament ja que la majoria d'alumnes va tenir en compte les propietats.

La forma 10 va ser identificada correctament perquè s'assemblava a la imatge mental que tenen de triangle. És a dir, els triangles prototípics que tenen la base horitzontal a baix.

Els nens que en el primer test no van reconèixer correctament la forma 11 i 14 van cometre l'error de considerar que són triangles perquè tenen tres vèrtexs i per tant, no van tenir en compte que els costats d'un triangle han de ser rectes (*Geometry*, 2010). També, l'error es podia ocasionar perquè van tenir en compte la posició del triangle prototípic (Graeber).

Els alumnes que en el primer test van reconèixer incorrectament la forma 12 va ser perquè no s'assemblava a la imatge mental que tenen de triangle. En canvi, en el segon test, aquest error va ocórrer perquè els infants encara van tenir present la imatge i no les propietats.

La forma 13 va ser identificada incorrectament per alguns alumnes. Aquest error es podia ocasionar perquè van tenir present la posició del triangle prototípic.

Quan l'alumnat ha de reconèixer quins polígons són triangles, n'hi ha alguns que en el primer test cometen l'error de no identificar el polígon 1 correctament perquè tenen la imatge mental del triangle prototípic (triangle regular amb la base a baix). Els altres alumnes no tenen problema en identificar-lo correctament perquè, segons Asholock, se sol ensenyar aquest tipus de triangle.

Els alumnes que en el primer test van identificar incorrectament el polígon 2 va ser perquè els nens havien vist triangles que tenen la basa a baix (Hansen).

El polígon 3 en el primer test no va ser reconegut correctament perquè la forma i l'orientació no era l'estereotipada. En canvi, en el segon test alguns alumnes van

cometre l'error perquè van tenir present la imatge mental del triangle, en lloc de les propietats.

Alguns alumnes van cometre l'error de no identificar el polígon 4 correctament. Aquest error va ser perquè van considerar el triangle regular com a triangle.

L'alumnat que va reconèixer incorrectament el polígon 5 va ser degut a la imatge estereotipada que tenen de triangle.

El polígon 6 no va ser reconegut correctament per alguns alumnes ja que aquest no es trobava amb la base a baix.

Els alumnes que van identificar incorrectament el polígon 7 va ser perquè tenen la imatge mental de la forma o la posició del triangle prototípic.

Els infants van cometre l'error d'identificar incorrectament el polígon 8 i 9 a causa de ser triangles no estereotipats. Per tant, els alumnes van tenir dificultats per reconèixer aquests triangles ja que no formaven part del seu esquema mental.

L'alumnat no va presentar dificultats per reconèixer el polígon 10 i 11 ja que aquests triangles eren exemples prototípics perquè tenien la base horitzontal a baix.

L'alumnat va cometre l'error de no reconèixer correctament el polígon 12 perquè no tenia la forma dels triangles prototípics.

Els alumnes que van identificar incorrectament el polígon 13 va ser perquè aquest triangle rectangle no tenia la base a baix o no tenia la forma del triangle regular.

L'alumnat que va reconèixer incorrectament el polígon 14 va cometre l'error de considerar que era massa allargat o que no tenia la base a baix. Així doncs, els nens no van tenir present les propietats del triangle.

Pel que fa a les investigacions portades a terme per altres autors (Vighi i Cutugno i Spagnolo), puc observar que la imatge que tenen els alumnes a l'hora de dibuixar un triangle coincideix amb aquests autors, ja que els infants dibuixen un triangle equilàter o isòsceles amb un costat horitzontal. També, es dona el cas, tant a les investigacions com l'estudi que he realitzat, que alguns nens quan han de dibuixar un triangle diferent a l'anterior dibuixen una altra figura geomètrica. A més, a l'hora de definir el triangle tots coincidim (en el meu cas primer test) que l'alumnat fa referència a objectes que

tenen la forma triangular, com ara la teulada. Tot i així, no se segueix el mateix procediment en la definició de triangle.

En aquest treball he volgut estudiar de manera global quins errors cometien un grup d'alumnes en relació als triangles i com aquests errors milloraven en una intervenció. Però també es podria realitzar una investigació més concreta, és a dir, analitzant individualment quina evolució ha fet cada alumne. Per exemple, es podria observar quina imatge té de triangle un alumne i si aquesta ha evolucionat o no. A més a més, aquest estudi es podria aprofundir més ja que es podria analitzar detalladament les relacions entre els nens que al primer test i al segon identificaven correctament la forma o el polígon, els quins no ho identificaven en el primer test però sí en el segon i els quins no ho identificaven en cap dels dos tests.

En aquest estudi la majoria d'alumnes han millorat els errors comesos i aquests errors s'ha pogut solucionar pel treball didàctic que s'ha portat a terme. Aquestes dificultats s'han solucionat ja que s'han proposat activitats en les quals, el debat amb els companys i amb el grup-classe i els comentaris en relació a les idees contradictòries eren necessaris perquè es resolgués l'activitat. Per tant, el paper del mestre era d'anar guiant en el procés d'ensenyament-aprenentatge i de formular les preguntes adients perquè l'alumne pogués pensar i raonar sobre el seu propi coneixement. A més a més, a les activitats es van mostrar exemples i no exemples de triangles i exemples de triangles no estereotipats. També, els alumnes van poder classificar i crear triangles amb els geoplans.



## 10. Bibliografia i webgrafia

- (2005). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics. Kindergarten to Grade 3* [en línia]: *Geometry and Spatial Sense*. Ontario. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: [http://eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Guide\\_Math\\_K\\_3\\_GSS.pdf](http://eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Guide_Math_K_3_GSS.pdf)
- Ashlock, Robert B. (2006). *Error patterns in computation* [en línia]: *Using error patterns to improve instruction*. Novena edició. Upper Saddle River, New Jersey; Columbus, Ohio: Pearson/Merrill Prentice Hall. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: [http://www.pearsonhighered.com/assets/hip/us/hip\\_us\\_pearsonhighered/samplechapter/0135009103.pdf](http://www.pearsonhighered.com/assets/hip/us/hip_us_pearsonhighered/samplechapter/0135009103.pdf)
- Bamberger, Honi J.; Oberdorf, Christine (2010). *Activities to Undo Math Misconceptions. Grades 3-5*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Bamberger, Honi, J.; Oberdorf, Christine; Schultz-Ferrell, Karren (2010). *Math Misconceptions. From Misunderstanding to Deep Understanding. PreK-Grade 5*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Bamberger, Honi J.; Schultz-Ferrell, Karren (2010). *Activities to Undo Math Misconceptions. PreK-Grade 2*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chambers, Paul (2008). *Teaching Mathematics*. London: Sage Publications.
- Cutugno, Palmina; Filippo, Spagnolo. *Misconception about triangle in Elementary school* [en línia]. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: <http://math.unipa.it/~grim/SiCutugnoSpa.PDF>
- Franchi, Lissette; Hernández de Rincón. "Tipología de errores en el área de la geometría plana". *Educere: Investigación arbitrada*, 2004, núm. 24, p. 63-71.
- Hansen, Alice (2005). *Children's errors in mathematics: understanding common misconceptions in primary schools*. Exeter: Learning Matters.
- Keeley, Page; Tobey, Cheryl Rose (2011). *Mathematics Formative Assessment. 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction and Learning*. USA: Corwin.
- Martín, Antonio Ramón (2003). *Apuntes sobre la didáctica de la operación aritmética* [en línia]: *La división en la educación primaria*. Tenerife: Col-legi públic Aguamansa. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: [http://www.matematicaparatodos.com/BOLETINES2005/Archivo\\_PDF\\_Boletin\\_25.pdf](http://www.matematicaparatodos.com/BOLETINES2005/Archivo_PDF_Boletin_25.pdf)

- MathNavigator (2012). *Geometry* [en línia]. Boston: Pearson. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: <<http://www.google.es/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0C4QFjAA&url=http%3A%2F%2Fknowledgebase.pearsonschool.com%2Fkmp%2FgetAttach%2F1761%2FAA-05917%2F&ei=HVGBUZKtOIKM7Ab3xYGQCg&usg=AFQjCNH6nD3qKAu-0HedolPiTDNO7LseNg>>
- McAteer, Mary (2012). *Improving Primary Mathematics Teaching and Learning*. England: Open University Press.
- Rose, Cheryl; Minton, Leslie G. (2010). *Uncovering Student Thinking in Mathematics, grades K-5: 25 Formative Assessment Probes for the Elementary Classroom*. California: Corwin Press
- Scaglia, Sara; Moriena, Susana. "Prototipos y estereotipos en geometría". *Educación matemática*, 2005, núm. 3, p. 105-120.
- Sousa, David A. (2008). *How the brain learns mathematics*. California: Corwin Press.
- Spooner, Mike (2002). *Errors and Misconceptions in Maths at Key Stage 2: Working Towards Success in SATS*. Oxon: David Fulton Publishers.
- Thompson, Ian (2010). *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*. England: Open University Press.
- Van de Walle, John A. (2010). *Elementary and school mathematics teaching developmentally*. Boston: Pearson/Allyn and Bacon Publishers.
- Vighi, Paola. *The triangle as a mathematical object* [en línia]. Italy: Mathematics Departement, University of Parma. [Consulta: 2 de maig de 2013]. Disponible a: <[http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7\\_Vighi\\_cerme3.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Vighi_cerme3.pdf)>