

INVERSIÓ CEGA DE FUNCIONS NO-LINEALS MITJANÇANT UN PROCÉS DE GAUSSIANITZACIÓ

Jordi Solé i Casals ¹, Christian Jutten ², Dinh Tuan Pham ³

¹ Grup de Processament de Senyal. Escola Politècnica Superior, Universitat de Vic, Carrer de la Sagrada Família, 7
08500 Vic, a/e: jordi.sole@uvic.es

² Laboratoire des Images et Signaux. Institut National Polytechnique de Grenoble, 46 Avenue Felix Viallet 38031
Grenoble Cedex, a/e: Christian.Jutten@inpg.fr

³ CNRS. LMC-IMAG, Bureau 33, 51 rue des Mathématiques, B. P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France
a/e: Dinh-Tuan.Pham@imag.fr

Data de recepció: 27/5/02
Data de publicació: 31/5/02

Resum

En aquest treball es presenta un nou mètode per a la inversió *cega* de funcions no-lineals mitjançant la *gaussianització* del senyal observat. El mètode es basa en restituir el caràcter aproximadament gaussià que presenta un senyal filtrat, gràcies al teorema del límit central, que ha vist canviada la seva distribució per l'efecte d'una funció no-lineal. Inicialment, doncs, aquest mètode és útil per a la inversió de sistemes de Wiener, tot i que en els darrers experiments realitzats s'han obtingut resultats interessants en sistemes purament no-lineals. El treball presenta dues possibles parametritzacions, la primera basada en xarxes neuronals i la segona en polinomis. En els dos casos s'aconsegueix invertir la funció desconeguda sense tenir cap coneixement *a priori* ni del senyal original, ni del filtre, ni de la funció no-lineal que volem invertir.

Abstract

In this work a new method for the blind inversion of nonlinear functions is presented, based on the *gaussianization* of the observed signal. The method restores the approximately gaussian character of the filtered signals, in accordance with the central limit theorem, that has been modified by a nonlinear distortion. Then, this method is appropriate for the inversion of Wiener systems, but in the latest experiments we have carried out, some interesting results have been obtained for a purely nonlinear system. This work develops two possible parameterizations. The first one is based on neural networks (multi-layer perceptron) and the second one uses a polynomial parameterization. In these two cases, we obtain the inverse function without having any *a priori* knowledge neither of the original signal, nor of the filter, nor of the nonlinear function.

Resumen

En este trabajo se presenta un nuevo método para la inversión *ciega* de funciones no-lineales mediante la *gaussianización* de la señal observada. El método se basa en restituir el carácter aproximadamente gaussiano que presenta una señal filtrada, gracias al teorema del límite central, que ha visto modificada su distribución por el efecto de una función no-lineal. Inicialmente este método es útil para la inversión de sistemas de Wiener, aún que en los últimos experimentos realizados se han obtenido resultados interesantes en sistemas puramente no-lineales. El trabajo presenta dos posibles parametrizaciones, la primera basada en redes neuronales y la segunda en polinomios. En los dos casos se consigue invertir la función desconocida sin tener ningún conocimiento *a priori* ni de la señal original, ni del filtro, ni de la función no-lineal a invertir.

1 Introducció

Quan els models lineals fallen, els models no-lineals apareixen com una tècnica potent, gràcies a les seves capacitats d'aproximació, per modelar situacions pràctiques. Exemples de sistemes no-lineals els trobem en molts llocs: en el canal d'enllaç entre una estació terrena i un satèl·lit, o bé en enllaços de microones que estan formats per un filtre lineal seguit per un amplificador TWT (*travelling wave tube*), no-lineal i sense memòria [1]. Altres exemples els podem trobar, en general, en qualsevol sistema d'adquisició de senyal, on el sensor presenta normalment un comportament no-lineal (seria el cas d'adquisició de senyal de veu, mitjançant un micròfon que té clarament una resposta no-lineal si l'entrada supera un valor determinat d'amplitud). La identificació d'aquests tipus de sistemes és, per tant, molt interessant tant des d'un punt de vista teòric com pràctic.

La major part de recerca feta fins a l'actualitat per a la identificació o la inversió d'aquest tipus de sistemes es basa en correlacions creuades d'ordre superior entre l'entrada i la sortida [2], o en l'aplicació dels teoremes de Busgang [3] i Prices [4], en el cas de sistemes no lineals amb entrades gaussianes. Aquests mètodes assumeixen que es disposa de l'entrada al sistema no-lineal. No obstant, en situacions reals normalment aquesta entrada no està disponible. Per tant, és necessari utilitzar tècniques d'identificació cegues per identificar o invertir aquests sistemes no-lineals.

En aquest treball ens centrarem en un cas particular de sistemes no-lineals, formats per un filtre lineal i invariant en el temps (LTI) seguits d'una distorsió no-lineal sense memòria (funció f), tal com es mostra a la figura 1. Aquesta classe de sistemes no-lineals, coneguts com a sistemes de Wiener, no és un simple model matemàtic més o menys atractiu sinó que es troba en diferents àrees com ara en biologia (en l'estudi del sistema visual [5], o en la relació entre la longitud d'un múscle i la seva tensió [6]), en la indústria (descripció d'una planta de destil·lació [7]), en sociologia i psicologia, i en molts d'altres àmbits (vegeu [8] i les seves referències).

A partir del treball de Taleb et al. [9], proposem un nou mètode d'inversió de sistemes de Wiener en el qual el criteri d'inversió de la distorsió no-lineal f és independent del criteri d'inversió del filtre h . D'aquesta manera s'aconsegueix una convergència molt ràpida del sistema i se separa el funcionament de les dues parts (lineal i no-lineal).

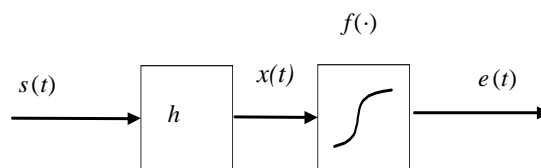


Figura 1: sistema de Wiener

En aquest treball descriurem el nou mètode proposat per a la compensació de la part no-lineal. La part lineal es pot invertir, tal com es mostra en [10] mitjançant la minimització de la informació mútua de la sortida.

2 Model i assumpcions

Suposarem que l'entrada al sistema, $s(t)$, és un procés desconegut, independent i idènticament distribuït (iid) i no-gaussià, i que els subsistemes h i f són també desconeguts i invertibles.

Estem interessats en recuperar $s(t)$ a la sortida del sistema d'inversió, observant només la sortida, $e(t)$, del sistema de Wiener. Això implica el disseny d'una estructura cega d'inversió. Aquesta estructura estarà formada, com en el sistema de Wiener, per un filtre LTI i una funció no-lineal, però en ordre invers; és a dir, primer la funció no-lineal i després el filtre lineal, tal i com es mostra a la figura 2. Aquest tipus d'estructura rep el nom de sistema de Hammerstein, on la funció no-lineal g s'ocupa de compensar l'efecte de f , i el filtre v de compensar l'efecte de h .

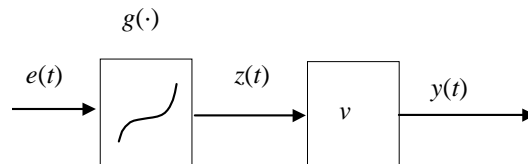


Figura 2: sistema de Hammerstein

3 Maximització de l'entropia

El mètode que proposem es basa en la següent observació: donat que hom suposa que el senyal $s(t)$ és iid i no gaussià, tindrem un senyal $x(t)$ aproximadament gaussià, degut al teorema del límit central, i aquesta gaussianitat es perdrà en $e(t)$ degut a l'efecte de la funció no-lineal f . Així, doncs, forçant d'obtenir un senyal que sigui aproximadament gaussià a la sortida de g , és a dir, que el senyal $z(t)$ sigui més gaussià que el senyal $e(t)$, recuperarem una bona aproximació del senyal buscat $x(t)$.

Com que per a una variància fixada la distribució gaussiana és la que presenta l'entropia més gran, proposem forçar la gaussianitat de $z(t)$ a partir de la maximització de la seva entropia: $\text{Max}(H(z))$. Per dur a terme aquesta tasca, parametritzarem convenientment la funció a determinar, g , i estimarem els paràmetres mitjançant un mètode de gradient.

Presentarem dues possibles parametritzacions de la funció g . La primera solució està basada en una parametrització amb una xarxa neural, concretament un perceptró multicapa (PMC), i la segona en una parametrització polinòmica.

3.1 Parametrització amb una xarxa neural

La idea d'utilitzar un perceptró multicapa va sorgir pel fet que, pel teorema d'aproximació de Kolmogorov es demostra que un PMC pot realitzar qualsevol funció arbitrària, per la qual cosa, si existeix la funció inversa de f s'ha de poder implementar amb un PMC. De fet, el teorema garanteix l'*existència* però no indica com trobar els coeficients ni la forma de les funcions $\sigma(\cdot)$ del perceptró.

Sigui, doncs, l'estructura de la figura 3 per al PMC, amb N neurones a la capa oculta. Si volem implementar la funció no-lineal $g(\cdot)$ amb la xarxa neural de la figura, necessitarem les derivades de $H(z)$ respecte dels paràmetres de la xarxa.

De l'observació de la figura 3 podem escriure:

$$g(e) = \sum_{i=1}^N w_i \sigma(h_i e - b_i) \quad (1)$$

$$g'(e) = \sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e - b_i) \quad (2)$$

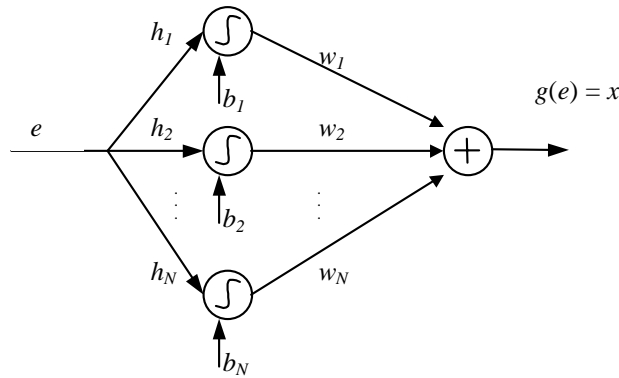


Figura 3: Estructura de la xarxa neural utilitzada per a la implementació de g

llavors, de la figura 1 obtenim:

$$x(t) = g(e(t)) = \sum_{i=1}^N w_i \sigma(h_i e(t) - b_i) \quad (3)$$

$$y(t) = (v * x)(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(i) g(e(t-i)) \quad (4)$$

Per tant, les derivades de $H(z) = H(e) + E \left[\sum_i \log g'(e_i) \right]$ que necessitem per construir el mètode de gradient seran:

- respecte de w_p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z)}{\partial w_p} &= \frac{\partial}{\partial w_p} E[\log(g'(e(t)))] = E \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \frac{\partial}{\partial w_p} g'(e(t)) \right] = \\ &= E \left[\frac{h_p \sigma'(h_p e(t) - b_p)}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

- respecte de h_p :

$$\frac{\partial H(z)}{\partial h_p} = E \left[\frac{w_p (e(t) h_p \sigma''(h_p e(t) - b_p) + \sigma'(h_p e(t) - b_p))}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \quad (6)$$

- respecte de b_p :

$$\frac{\partial H(z)}{\partial b_p} = E \left[\frac{-w_p h_p \sigma''(h_p e(t) - b_p)}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \quad (7)$$

Utilitzant aquests resultats, l'adaptació dels paràmetres es farà com:

$$\Delta w = E \left[\frac{h_p \sigma'(h_p e(t) - b_p)}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \quad (8)$$

$$\Delta h = E \left[\frac{w_p (e(t) h_p \sigma''(h_p e(t) - b_p) + \sigma'(h_p e(t) - b_p))}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \quad (9)$$

$$\Delta b = -E \left[\frac{w_p h_p \sigma''(h_p e(t) - b_p)}{\sum_{i=1}^N w_i h_i \sigma'(h_i e(t) - b_i)} \right] \quad (10)$$

Finalment, doncs, l'algorisme de gradient per a l'estimació de la funció g amb el PMC quedarà com:

$$\begin{aligned} w &\leftarrow w + \mu_w \Delta w \\ h &\leftarrow h + \mu_h \Delta h \\ b &\leftarrow b + \mu_b \Delta b \end{aligned} \quad (11)$$

3.2 Parametrització amb un polinomi

El mètode anterior, tot i ser general gràcies al teorema d'aproximació de Kolmogorov, té l'inconvenient de la gran quantitat de paràmetres a estimar (tres per a cada neurona). Això fa que l'estimació de g sigui computacionalment costosa. La idea d'utilitzar un polinomi per a la parametrització de la funció g , doncs, va sorgir per intentar obtenir un algorisme més eficient en temps de càlcul. A més, degut a que la funció a invertir ha de ser bijectiva, la funció g no pot ser periòdica, per la qual cosa és innecessari proposar un desenvolupament amb funcions trigonomètriques.

Sigui, doncs, el següent polinomi de grau N per a $g(\cdot)$:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n t^{n-1} \quad (12)$$

llavors, de la figura 1 obtenim:

$$x(t) = g(e(t)) = \sum_{n=1}^{N+1} a_n e(t)^{n-1} \quad (13)$$

$$y(t) = (v * x)(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(i)g(e(t-i)) \quad (14)$$

Si volem implementar la funció g amb aquest polinomi, necessitarem les derivades de $H(z)$ respecte dels coeficients del polinomi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z)}{\partial a_p} &= E \left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} a_n (n-1) e(\tau)^{n-2} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial a_p} g'(e(\tau)) \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{n=1}^{N+1} a_n (n-1) e(\tau)^{n-2} \right)^{-1} (p-1) e(\tau)^{p-2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Finalment, doncs, l'algorisme de gradient per a l'estimació de la funció g amb el polinomi quedarà com:

$$a \leftarrow a + \mu \Delta a \quad (16)$$

4 Resultats

4.1 Parametrizació amb polinomi

En aquest primer experiment presentem els resultats obtinguts en una simulació realitzada mitjançant parametrizació polinòmica amb un polinomi de grau $N = 10$. El senyal d'entrada era un soroll de distribució uniforme i $T = 1000$ mostres. El filtre desconegut h era un filtre de dos coeficients, $h = [1, 0.5]$, i la funció no-lineal desconeguda era de la forma $f=0.1*x+\tanh(5*x)$.

A la figura 4 es mostra l'histograma del senyal inicial $s(t)$, del senyal filtrat $x(t)$ i del senyal observat $e(t)$. Es comprova que el senyal $s(t)$ és de distribució uniforme, el senyal $x(t)$ presenta una distribució més gaussiana degut a l'efecte del filtre, encara que sigui un filtre de només dos coeficients, i el senyal $e(t)$ presenta una distribució molt lluny de la gaussiana, degut a l'efecte de la distorsió (funció no-lineal f).

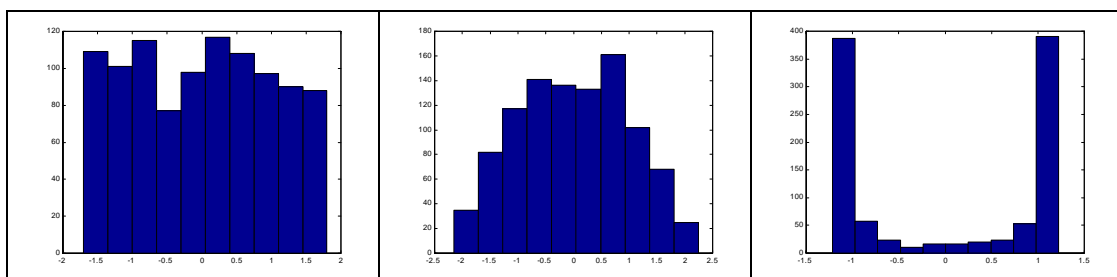


Figura 4: d'esquerra a dreta, histogrames de $s(t)$, $x(t)$ i $e(t)$, respectivament.

L'algorisme va convergir en 50 iteracions, i el resultat obtingut es mostra a la figura 5. A l'esquerra de tot es pot observar la funció no-lineal f . Al centre, la funció no-lineal g estimada mitjançant l'algorisme, i a la dreta la composició de les dues funcions. Es pot comprovar com aquesta composició és essencialment lineal, i per tant es demostra que la funció g obtinguda és la funció f^{-1} .

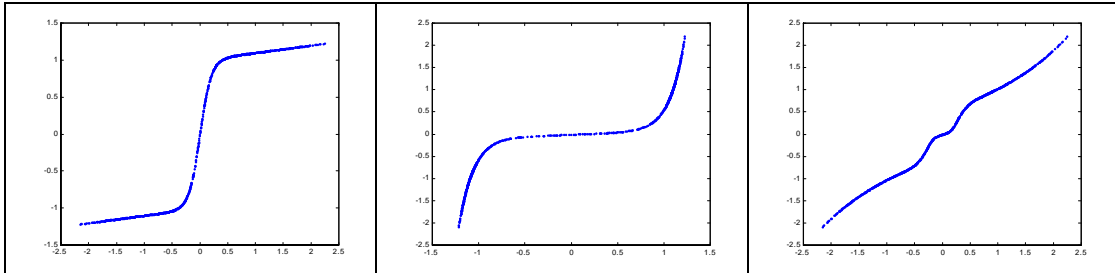


Figura 5: d'esquerra a dreta, les funcions f , g i $(g \circ f)$, respectivament.

Numèricament, l'error residual que s'obté a la sortida (NSR) és de -19.1849dB, que indica, per tant, una millora de gairebé 20 dB en la relació SNR.

4.2 Parametrització amb xarxa neural

En aquest segon experiment presentem els resultats obtinguts en una simulació realitzada mitjançant parametrització amb un perceptró multicapa de 7 neurones a la capa oculta. El senyal d'entrada era un soroll de distribució uniforme i $T = 100$ mostres. El filtre desconegut h era un filtre de nou coeficients, $h = [-0.0082, 0, -0.1793, 0, 0.6579, 0, -0.1793, 0, -0.0082]$, i la funció no-lineal desconeguda era de la forma $f = 0.1 \cdot x + \tanh(3 \cdot x)$.

A la figura 6 es mostra l'histograma del senyal inicial $s(t)$, del senyal filtrat $x(t)$ i del senyal observat $e(t)$. Es comprova, com en l'experiment anterior, que el senyal $s(t)$ és de distribució uniforme, el senyal $x(t)$ presenta una distribució més gaussiana degut a l'efecte del filtre, i el senyal $e(t)$ presenta una distribució molt lluny de la gaussiana, degut a l'efecte de la distorsió (funció no-lineal f).

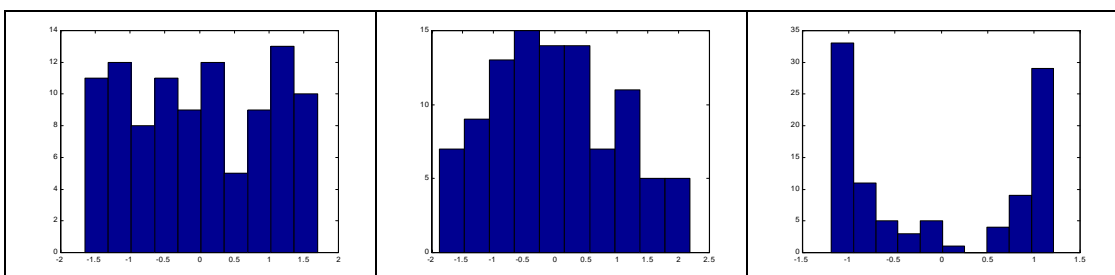


Figura 6: d'esquerra a dreta, histogrames de $s(t)$, $x(t)$ i $e(t)$, respectivament.

L'algorisme va convergir en 40000 iteracions, i el resultat obtingut es mostra a la figura 7. A l'esquerra de tot es pot observar la funció no-lineal f . Al centre, la funció no-lineal g estimada mitjançant l'algorisme, i a la dreta la composició de les dues funcions.

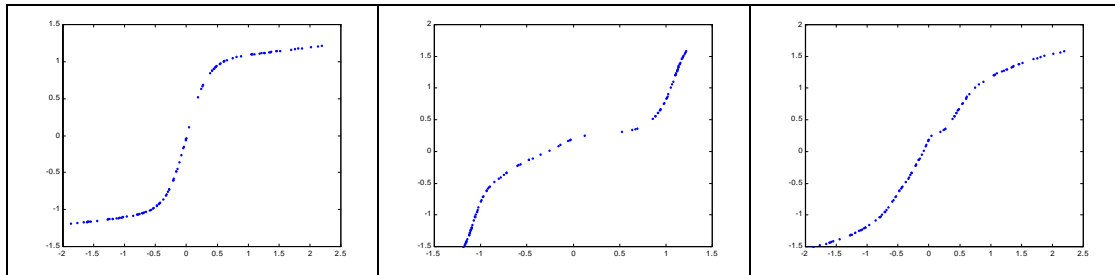


Figura 7: d'esquerra a dreta, les funcions f , g i $(g \circ f)$, respectivament.

Numèricament, l'error residual que s'obté a la sortida (NSR) és de -14.3399 dB, que indica, per tant, una millora de gairebé 15 dB en la relació SNR.

5 Conclusions

En aquest treball s'ha presentat un nou mètode per a la inversió cega de funcions no-lineals, basat en la gaussianització del senyal observat. Aquestes funcions no-lineals ens apareixen en els sistemes de Wiener, els quals, per tant, els podem invertir mitjançant la utilització d'aquest mètode per a la part no-lineal, i del mètode basat en la minimització de la informació mútua per a la part lineal.

Els resultats obtinguts en els experiments realitzats demostren el bon funcionament del mètode proposat. La parametrització polinòmica ens permet obtenir un algorisme ràpid i precís per a la inversió de funcions *invertibles amb polinomis*. Sortosament, la majoria de les funcions no-lineals que trobem en casos reals són del tipus saturant ($\tanh(\cdot)$), que permeten una inversió amb polinomis d'ordre petit. Per als casos de funcions no-lineals no invertibles amb polinomis, podem utilitzar la parametrització amb un perceptró multicapa. En aquest cas, el sistema consumeix més temps de càlcul degut al gran nombre de paràmetres a estimar. Això no obstant, la parametrització polinòmica ens permet invertir *qualsevol* tipus de funció invertible, sigui quina sigui la seva forma, gràcies al teorema de Kolmogorov.

Actualment estem treballant en l'aplicació d'aquest algorisme a senyals reals, no iid, i que per tant no compleixen les hipòtesis de partida. En experiments preliminars realitzats amb senyals no iid, els resultats obtinguts també han estat satisfactoris. Així mateix, estem acabant de desenvolupar un algorisme basat en estadístics d'ordre que permet la inversió instantània de la funció no-lineal, en una sola iteració, i que dona resultats molt bons fins i tot en situacions adverses (per exemple, sense filtre inicial h).

Referències

- [1] Feher, K. *Digital Communications-Satellite/Earth Station Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993
- [2] Billings, S.A.; Fakhouri, S.Y., "Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis", *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 691-697, juliol de 1978.
- [3] Boer, E.D., "Cross-correlation function of a bandpass nonlinear network", *Proc. IEEE*, vol. 64, pp. 1443-1444, setembre de 1976.

- [4] Jacovitti, G.; Neri, A.; Cusani, R, "Methods for estimating the autocorrelation function of complex stationary process" *IEEE Trans. Acoust, Speech Signal Processing*, vol. ASSP-35, pp. 1126-1138, agost de 1987.
- [5] den Brinker, A.C., "A comparison of results from parameter estimations of impulse responses of the transient visual system", *Biol. Cybern.*, vol. 61, pp. 139-151, 1989
- [6] Hunter, I.W., "Frog muscle fiber dynamics stiffness determined using nonlinear identification techniques", *Biophys. J.*, vol 49, p 81^a, 1985.
- [7] Bars, R.; Bèzi, I; Pilipàr B; Ojhelyi, B, "Nonlinear and long range control of a distillation pilot plan", *Proc. Ident. Syst. Parameter Estim. Ninth IFAC/IFORS Symp.*, pp. 848-853, Budapest, Hongria, juliol de 1990.
- [8] Hunter, I.W.; Korenberg, M.J., "The identification of nonlinear biological systems: Wiener and Hammerstein cascade models", *Biol. Cybern.*, vol. 55, pp. 135-144, 1985.
- [9] Taleb, A.; Solé, J.; Jutten, C, "Quasi-Nonparametric Blind Inversion of Wiener Systems" *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, pp. 917-924, maig de 2001.
- [10] Solé i Casals, Jordi. "Contribució a la separació de fonts i a les seves aplicacions". Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions (TSC), Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació de Barcelona (ETSETB). 2000. Tesi doctoral.