Module BSPLIN : manuel d'utilisation et de reference

F.J. Palma Molina

UNITE DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports Techniques

N° 96

MODULE BSPLIN : MANUEL D'UTILISATION ET DE REFERENCE

Francisco J. PALMA MOLINA

JUILLET 1988

MODULE BSPLIN : MANUEL D'UTILISATION ET DE REFERENCE

MODULE BSPLIN : USAGE AND REFERENCE MANUAL

FRANCISCO J. PALMA MOLINA

I.N.R.I.A.
BP.105
78153 LE CHESNAY Cedex
FRANCE

et

UNIVERSIDAD de MALAGA,
Dpto. Análisis Matemático
Campus de Teatinos s/n
29080 MALAGA
ESPAGNE

RESUME :

Nous présentons un nouveau module de la Bibliothèque MODULEF permettant d'approcher des fonctions par des méthodes B-Splines. Nous indiquons les différentes possibilités de visualisation et de manipulation des fonctions approchées et nous donnons plusieurs exemples d'utilisation.

ABSTRACT :

We present a new module of the MODULEF Library for the approximation of functions by the method of B-Splines. We indicate the different possibilities for visualisation and manipulation of the approximated functions and give several examples of usage.

1. INTRODUCTION

Ce rapport constitue le manuel d'utilisation et de référence du module BSPLIN. Ce module permet, d'une part, de créer une structure de données où sont stockés tous les paramètres nécessaires à l'approximation de fonctions à une ou deux variables par des méthodes B-Splines, et, d'autre part, de préparer le travail pour une interface avec un calcul d'éléments finis.

Le module permet aussi la visualisation des fonctions approchées via les modules TRACOU, VIS3D et TRNOPO de la Bibliothèque MODULEF. Nous donnons finalement quelques sous-programmes utilitaires qui permettent l'utilisation et l'exploitation des informations stockées dans la structure de données.

Dans le paragraphe 2 nous donnons un bref rappel théorique de l'approximation de fonctions par des méthodes B-Splines. Le paragraphe 3 fait une description du module BSPLIN, de la structure de données créée et des possibilités de visualisation. Le paragraphe 4 concerne les aspects techniques de la mise en oeuvre du module et finalement le paragraphe 5 donne quelques exemples d'utilisation du module et d'exploitation de la structure de données.

SOMMAIRE :

2. APPROXIMATION DE FONCTIONS PAR DES METHODES B-SPLINES

On rappelle d'abord la définition et les propriétés les plus importantes des fonctions de base B-Splines. On décrit ensuite la méthode d'approximation de fonctions réelles à une ou deux variables par des fonctions Splines, i.e., par une combinaison linéaire de fonctions de base B-Splines.

2.1. Les fonctions de base B-Splines à une variable

Considérons **l'ensemble de données** $\{k,n,t\}$ où :

(i) k et n sont deux **entiers** tels que :

$$1 \leq k \leq n \tag{2.1.1}$$

(ii) t est une **suite** non décroissante de $n+k$ points

$$t=\{t_i \in \mathbb{R} \ : \ i=1,\dots,n+k \text{ et } t_i \leq t_{i+1} \text{ pour tout } i=1,\dots,n+k-1\} \tag{2.1.2}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes

$$t_1 = \dots = t_k = x_1 \tag{2.1.3}$$

$$t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = x_2 \tag{2.1.4}$$

$$t_i < t_{i+k} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \tag{2.1.5}$$

Dans ces conditions, pour chaque entier $\ell=1,\dots,k$ nous définissons **n fonctions B-Splines d'ordre ℓ** sur l'intervalle $[x_1,x_2]$ que nous notons

$$B_{i,\ell} \ : \ x \in [x_1,x_2] \rightarrow B_{i,\ell}(x) \in \mathbb{R} \qquad i=1,\dots,n \tag{2.1.6}$$

Ces fonctions sont définies **itérativement** par les **relations** :

Pour $\ell = 1$

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [t_i, t_{i+1}[\quad \text{et} \quad i=1, \dots, n \\ 1 \text{ si } x=t_{n+1} \text{ et } i=n \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

Pour $\ell \geq 2$

$$B_{i,\ell}(x) = \begin{cases} C_{i,\ell}(x-t_i)B_{i,\ell-1}(x)+C_{i+1,\ell}(t_{i+\ell}-x)B_{i+1,\ell-1}(x) & i=1,\dots,n-1 \\ C_{i,\ell}(x-t_i)\ B_{i,\ell-1}(x) & i=n \end{cases} \tag{2.1.7}$$

où

$$C_{i,\ell} = \begin{cases} 1/(t_{i+\ell-1}-t_i) & \text{si } t_i \neq t_{i+\ell-1} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Les fonctions B-Splines d'ordre ℓ=k sont notées plus simplement

$$B_i : x \in [x_1, x_2] \rightarrow B_i(x) \in \mathbb{R} \qquad i=1,..,n \qquad (2.1.8)$$

et elles sont appelées **fonctions de base B-Splines d'ordre k** dépendantes de l'ensemble de données {k,n,t}.

Exemple 1 : Pour les valeurs

k=3 n=10

t={0,0,0,0.2,0.5,0.5,0.5,1,1.5,1.5,2,2,2}

nous donnons ci-après les graphes de quelques fonctions B-Splines d'ordre 1 non nulles.

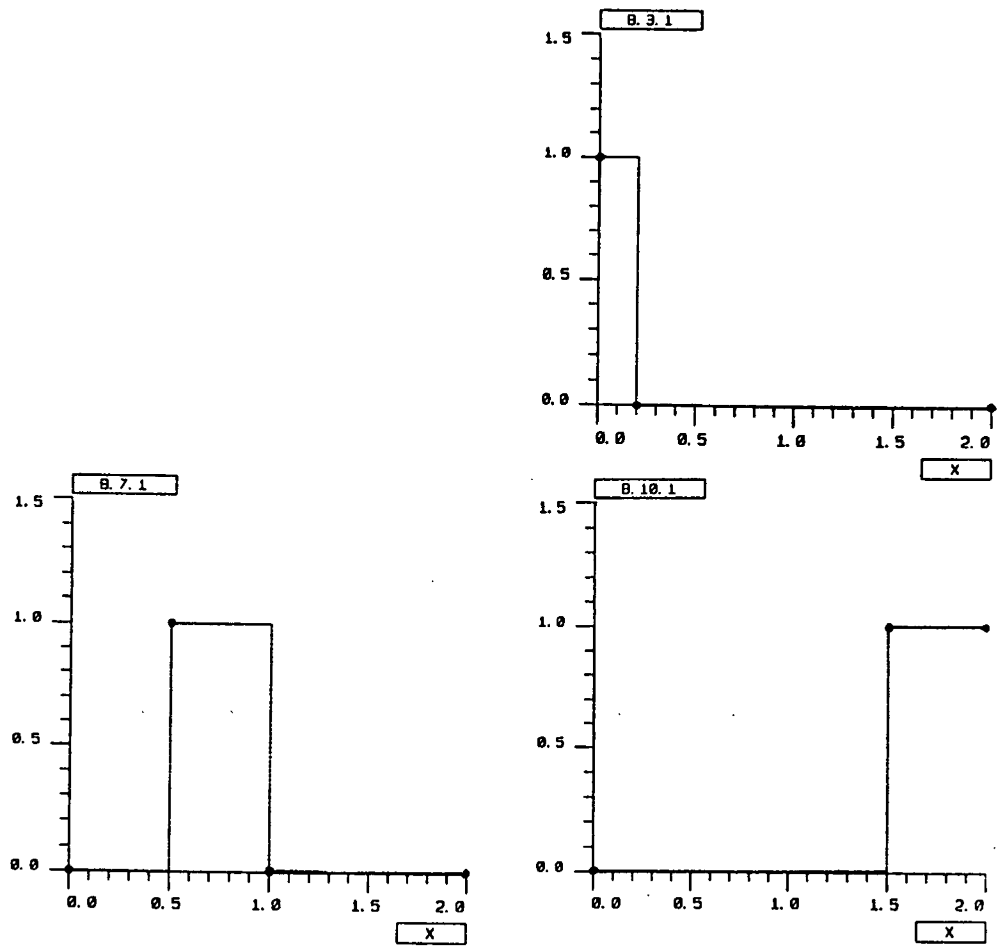


Fig 1 : Graphe des fonctions $B_{3,1}$, $B_{7,1}$ et $B_{10,1}$.

Idem pour les fonctions B-Splines d'ordre 2.

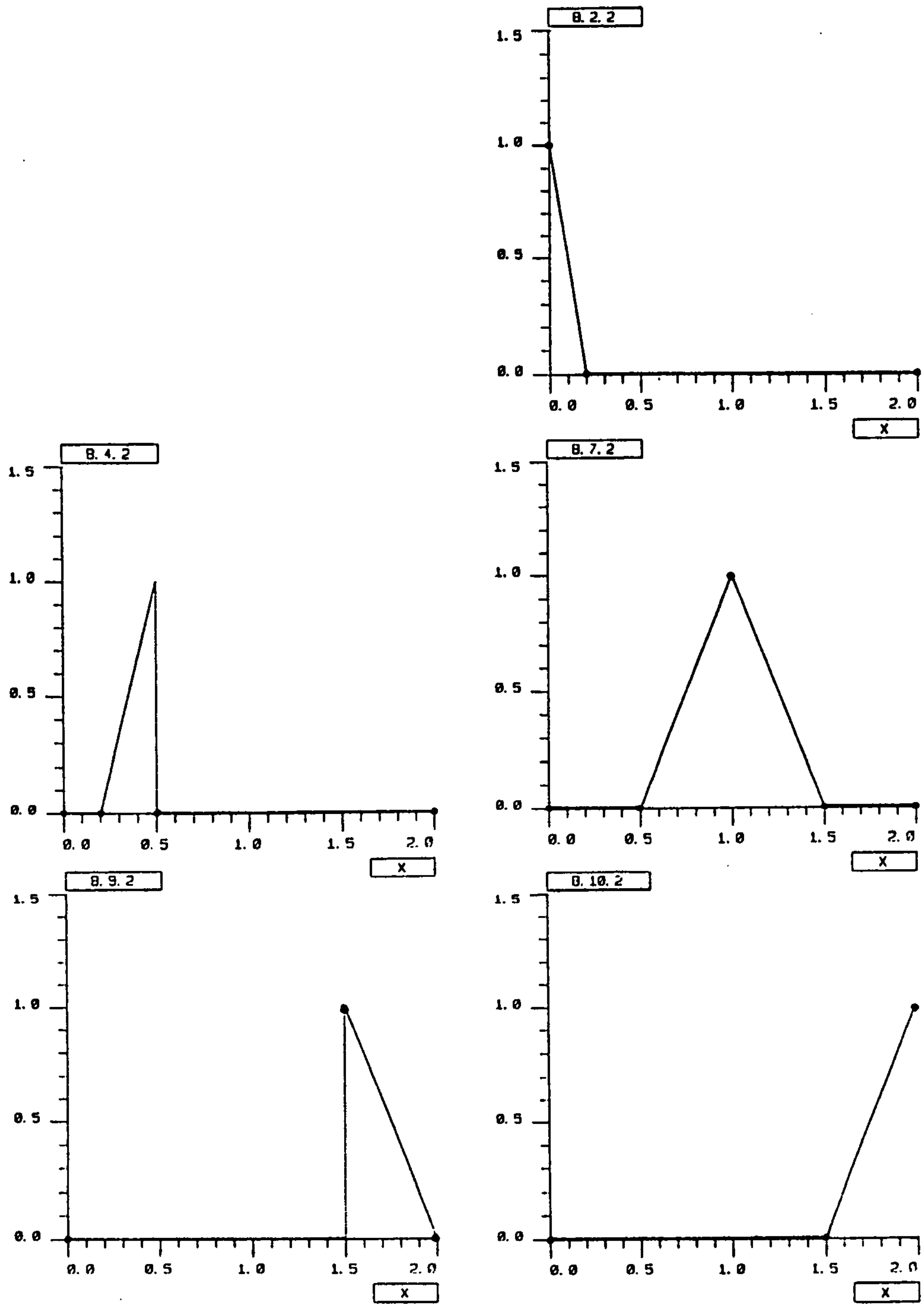


Fig 2 : Graphe des fonctions $B_{2,2}$, $B_{4,2}$, $B_{7,2}$, $B_{9,2}$ et $B_{10,2}$.

Idem pour les fonctions de base B-Splines d'ordre 3.

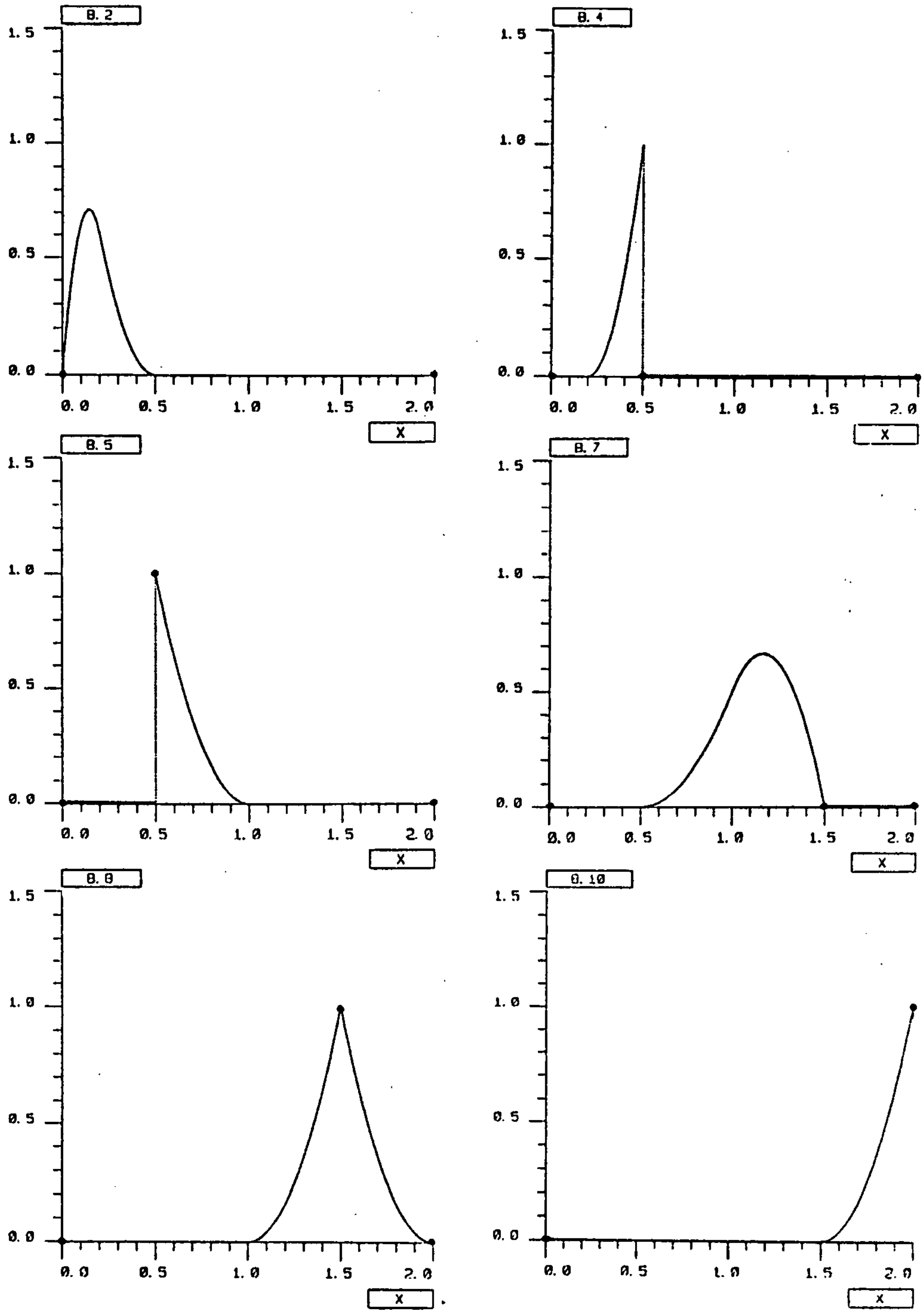
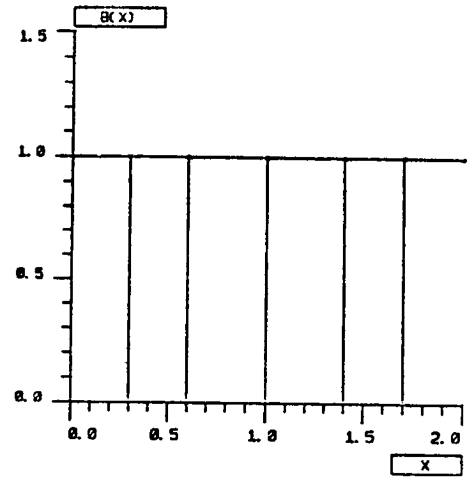


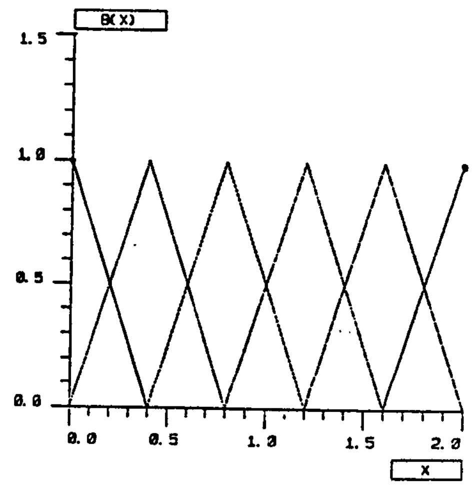
Fig 3 : Graphe des fonctions B_2, B_4, B_5, B_7, B_8 et B_{10}.

Exemple 2 : Nous donnons ci-après les graphes des fonctions de base B-Splines pour les valeurs suivantes de {k,n,t}

k=1 n=6
t={0,0.3,0.6,1,1.4,1.7,2}



idem pour
k=2 n=6
t={0,0,0.4,0.8,1.2,1.6,2,2}



idem pour
k=3 n=6
t={0,0,0,0.5,1,1.5,2,2,2}

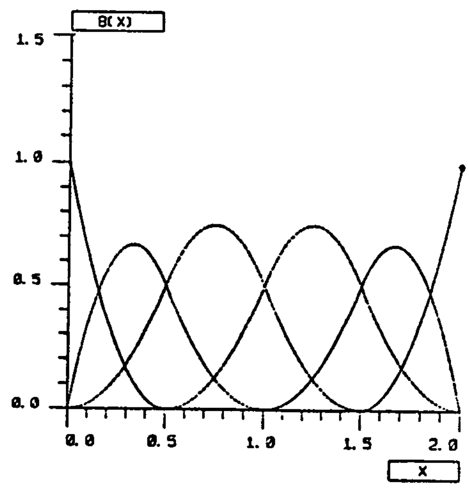
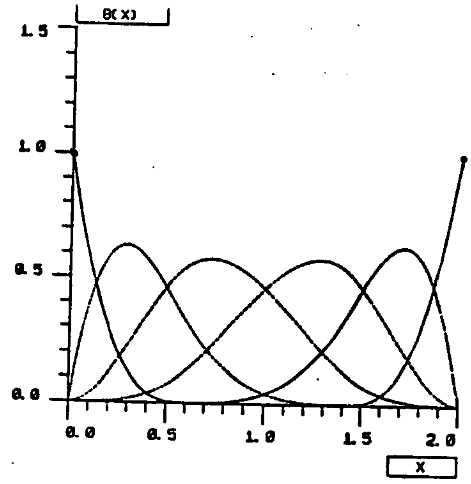
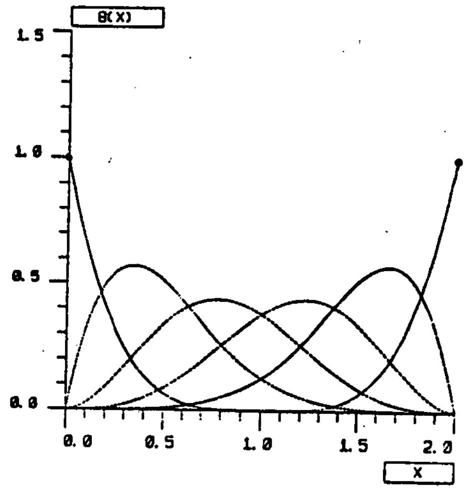


Fig 4a : Graphe des fonctions de base B-Splines d'ordre 1, 2 et 3

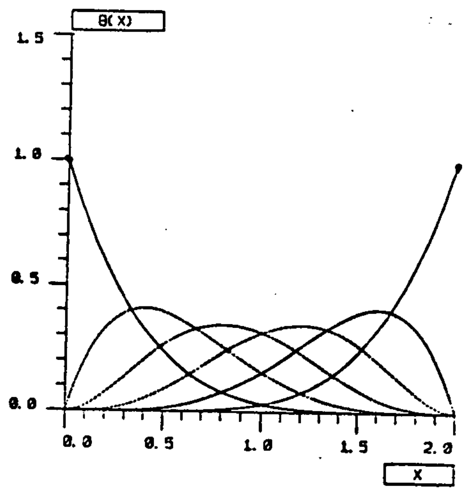
Idem pour
k=4 n=6
t={0,0,0,0,0.6,1.4,2,2,2,2}



idem pour
k=5 n=6
t={0,0,0,0,0,1,2,2,2,2,2}



Idem pour
k=6 n=6
t={0,0,0,0,0,0,2,2,2,2,2,2}



<u>Fig 4b</u> : Graphe des fonctions de base B-Splines d'ordre 4, 5 et 6.

Maintenant nous rappelons les propriétés les plus importantes des fonctions B-Splines que nous utiliserons dans la suite.

Proposition 1 : *On considère l'ensemble de données (k,n,t) vérifiant les propriétés (2.1.1) à (2.1.5) et soit $B_{i,\ell}$ (pour $\ell=1,\dots,k$ et $i=1,\dots,n$) les fonctions B-Splines définies par les relations itératives (2.1.7). Alors on vérifie :*

(i) Les fonction $B_{i,\ell}$ sont positives

$$B_{i,\ell} \geq 0 \text{ pour tout } x \in [x_1,x_2] \tag{2.1.9}$$

(ii) Le support des fonctions $B_{i,\ell}$ est donnée par

$$\text{supp } B_{i,\ell} = \begin{cases} \phi & \text{si } t_i = t_{i+\ell} \\ [t_i, t_{i+\ell}] & \text{autrement} \end{cases} \tag{2.1.10}$$

De plus, dans le cas où le support n'est pas vide on a :

$$B_{i,\ell}(x) > 0 \text{ pour tout } x \in]t_i, t_{i+\ell}[\tag{2.1.11}$$

(iii) Les fonctions B-Splines d'ordre ℓ donnent une partition de l'unité dans l'intervalle $[x_1,x_2]$, i. e

$$\sum_{i=1}^{n} B_{i,\ell}(x) = 1 \text{ pour tout } x \in [x_1,x_2] \tag{2.1.12}$$

(iv) Si pour $j=k,\dots,n$ on a

$$t_j < t_{j+1} \quad \text{et } [t_j, t_{j+1}] \subset \text{supp } B_{i,\ell} \tag{2.1.13}$$

alors on vérifie

$$B_{i,\ell}|_{[t_j,t_{j+1}[} \in P_{\ell-1}\,([t_j,t_{j+1}[) \tag{2.1.14}$$

(voir la remarque 1 pour le cas $j=n$).

(v) Sur les points t_j avec $j=k+1,\dots,n$ appartenant au support de la fonction $B_{i,\ell}$ s'effectuent les raccords des différents polynômes qui définissent la fonction, ces raccords étant de classe $C^{\ell-k_j-1}$, où k_j est le nombre de fois qu'on répète le point t_j dans le support de la fonction considérée (voir remarque 2).

(vi) On vérifie

$$B_{k-\ell+1,\ell}(x_1)=1 \quad \text{et} \quad B_{n,\ell}(x_2)=1 \tag{2.1.15}$$

La démonstration de ces propriétés est immédiate à partir des relations itératives (2.1.7) (cf. C. de BOOR [1978], chap. IX à XI).

Remarque 1 : Dans le cas j=n pn peut considérer l'intervalle fermé, i.e., la relation (2.1.14) devient

$$B_{i,\ell}|_{[t_n,t_{n+1}]} \in P_{\ell-1}([t_n,t_{n+1}]) \tag{2.1.16}$$

(il suffit de remarquer que $B_{n,1}(t_{n+1})=1$ et non $B_{n,1}(t_{n+1})=0$). □

Remarque 2 : Evidemment de (2.1.2) et (2.1.5) on déduit $k_j \le k$. D'autre part si $\ell-k_j-1<0$, alors $C^{\ell-k_j-1}$ signifie une discontinuité de saut au point considéré. De (2.1.14) on déduit qu'il y a continuité à droite dans toutes les discontinuités. □

Des propriétés (iv) et (v) de la proposition précédente nous déduisons le :

Corollaire 1 : *Sous les hypothèses de la propositions 1, et si, de plus, la sous-suite $\{t_j : j=k+1,\dots,n\} \subset t$ est strictement croissante (ou elle est vide), alors les fonctions de base B-Splines d'ordre k vérifient :*

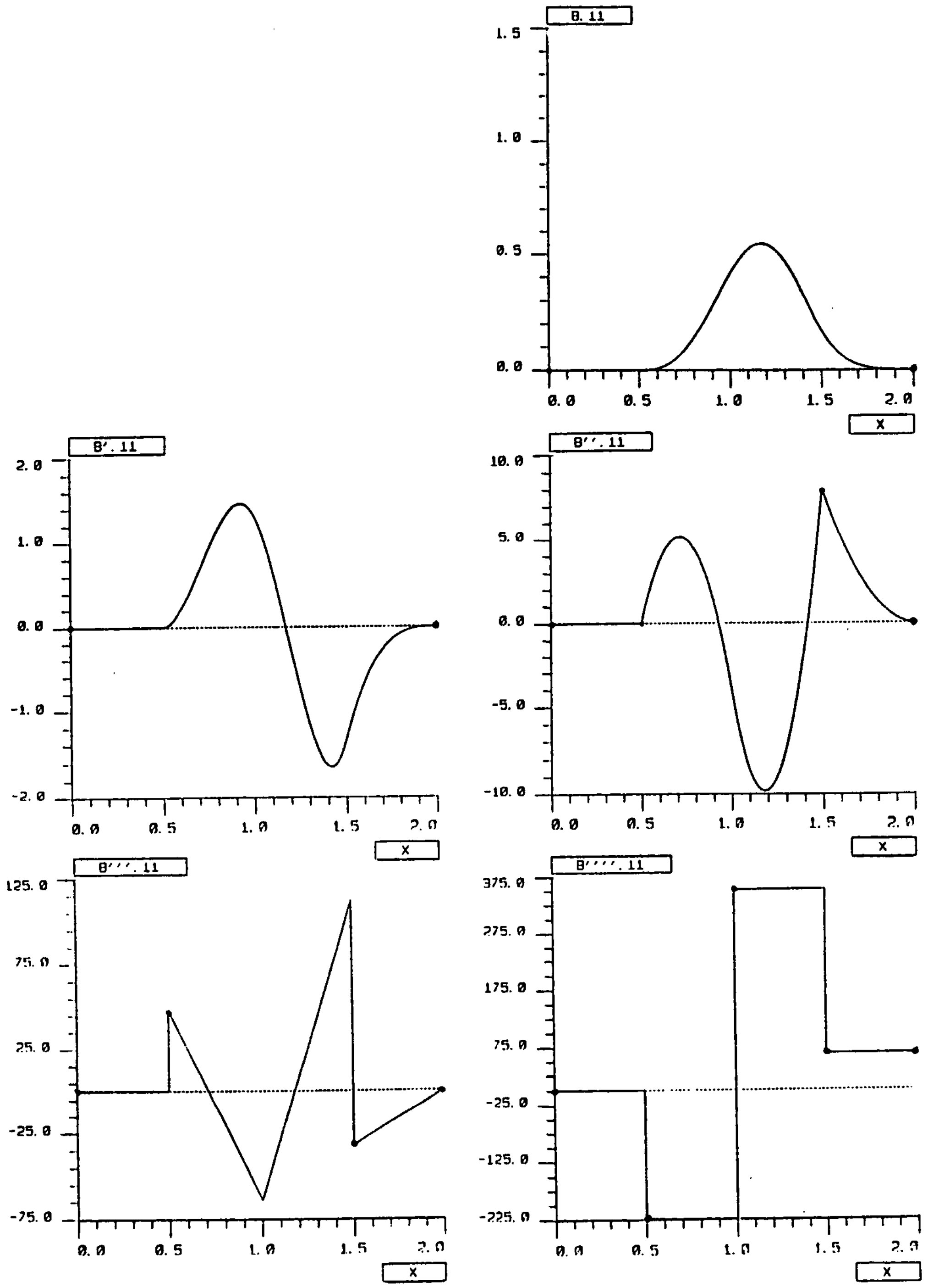
$$\begin{aligned} &B_i|_{[t_j,t_{j+1}[} \in P_{k-1}([t_j,t_{j+1}[) \text{ pour tout } j=k,\dots,n \\ &B_i \in C^{k-2}([x_1,x_2]) \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

(voir les remarques 1 et 2 pour les cas extrêmes).

Exemple 3 : Nous illustrons la vérification de (v),Prop. 1 en traçant le graphe de la fonction B_{11} et de toutes ses dérivées non nulles pour l'ensemble de données

$k = 5 \quad n = 15$

$t = \{0,0,0,0,0,0.2,0.2,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,1,1.5,1.5,2,2,2,2,2\}$



<u>Fig 5</u> : Graphe de la fonction B_{11} et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre

Idem pour :

$k = 5 \qquad n = 14$

$t = \{0,0,0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1.2,1.4,1.6,1.8,2,2,2,2,2\}$

(on remarque que nous sommes ici sous les hypothèses du corollaire 1).

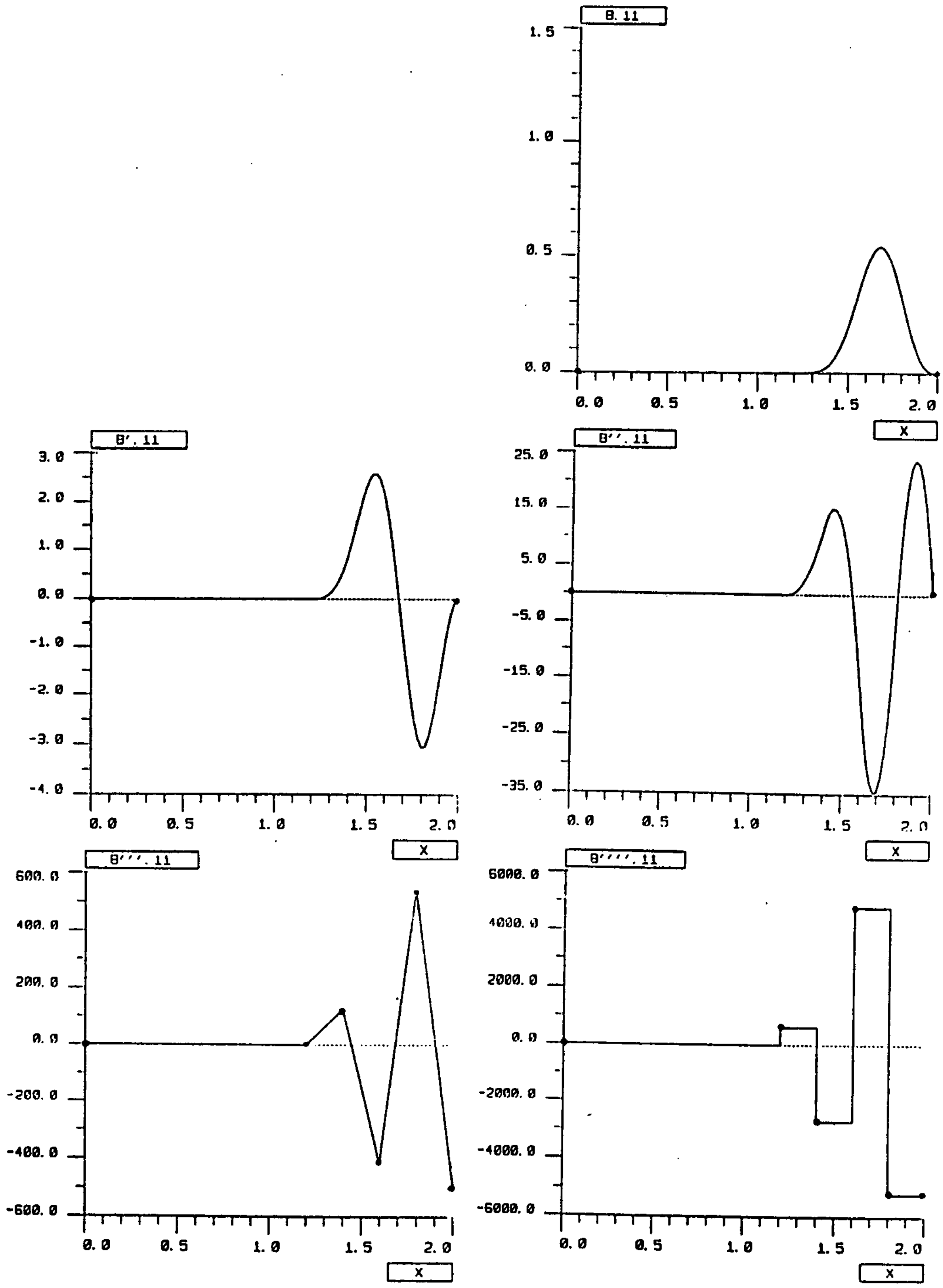


Figure 6 : Graphe de la fonction B_{11} et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre

Pour conclure ce paragraphe nous définissons l'espace des fonctions splines, que nous notons $\$_{k,n,t}$, comme l'espace vectoriel engendré par les n fonctions de base B-Splines d'ordre k dépendantes de l'ensemble de valeurs {k, n, t}, i.e.

$$\$_{k,n,t} = \{ f : x \in [x_1, x_2] \to f(x) \in \mathbb{R} : f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i$$

$$\text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1,\ldots, n \} \qquad (2.1\text{-}18)$$

2.2. Approximation de fonctions à une variable.

Soit une fonction réelle f, que nous supposerons "assez régulière", définie sur un intervalle non dégénéré :

$$f : x \in [x_1, x_2] \to f(x) \in \mathbb{R} \qquad (2.2\text{-}1)$$

Sur cet intervalle nous considérons une suite τ strictement croissante de n points, que nous appelons suite de points d'interpolation

$$\tau = \{\tau_i \in [x_1, x_2] : i = 1,\ldots,n \text{ et } \tau_i < \tau_{i+1} \text{ pour tout } i = 1,\ldots,n-1\} \qquad (2.2\text{-}2)$$

et nous supposons f connue au moins sur les n points de la suite τ, i.e., nous connaissons l'ensemble de valeurs interpolées

$$\{ f(\tau_i) : i = 1,\ldots,n\} \qquad (2.2.3)$$

Remarque 3 : Si $n \geq 2$ nous supposons toujours implicitement

$$\tau_1 = x_1 \text{ et } \tau_n = x_2 \qquad (2.2.4)$$

(si $n = 1$, τ_1 est un point quelconque de l'intervalle).

Finalement soit k un entier (ordre d'interpolation) tel que :

$$1 \leq k \leq n \qquad (2.2.5)$$

Nous souhaitons obtenir une fonction réelle πf définie sur le même intervalle

$$\pi f : x \in [x_1, x_2] \to \pi f(x) \in \mathbb{R} \qquad (2.2.6)$$

telle qu'elle soit une approximation de f au sens suivant :

(i) πf coincide avec f aux points d'interpolation

$$\pi f(\tau_i) = f(\tau_i) \text{ pour tout } i = 1,\ldots,n \qquad (2.2.7)$$

(ii) πf est polynomiale par morceaux de degré k-1, c'est à dire qu'il existe une partition de l'intervalle $[x_1, x_2]$ telle que :

$$\pi f \in P_{k-1} \text{ sur chaque élément de la partition} \qquad (2.2.8)$$

(iii) πf est de classe k-2 sur tout le domaine

$$\pi f \in C^{k-2}([x_1, x_2]) \qquad (2.2.9)$$

Remarque 4 : Pour k = 1 les propriétés (ii) et (iii) précédentes représentent une fonction constante par morceaux avec des éventuelles discontinuités de saut. Nous demandons une continuité à droite dans tous les points de discontinuité.

Pour obtenir cette approximation, à partir des données k, n et τ nous construisons une suite t de n+k points vérifiant les relations (2.1-2) à (2.1-5) et nous prenons <u>πf dans l'espace vectoriel des fonctions Splines</u> $\$_{k,n,t}$

$$\pi f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i \in \$_{k,n,t} \tag{2.2-10}$$

Les réels $\{\alpha_i : i = 1,\ldots,n\}$ sont appelés <u>coefficients d'interpolation</u> de la fonction f.

Nous expliciterons plus loin la construction de la suite t à partir des données précédentes, mais nous imposons de plus que

$$t_i < t_{i+1} \text{ pour tout } i = k+1,\ldots, n-1 \tag{2.2-11}$$

Grâce au corollaire 1 et comme la fonction πf est une combinaison linéaire des fonctions de base B-Splines, la relation (2.2-11) entraîne les propriétés (ii) et (iii) de l'approximation; dans la propriété (ii) on a comme partition de l'intervalle la sous-suite

$$\{ t_i \in [x_1, x_2] : i = k,\ldots, n+1 \} \subset t \tag{2.2-12}$$

D'autre part, pour satisfaire la propriété (i) de l'approximation il suffit de résoudre <u>le système linéaire</u> correspondant, i.e., avec (2.2-7) et (2.2-10)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_j(\tau_i) = f(\tau_i) \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.2-13}$$

que nous écrivons sous la forme matricielle

$$\begin{aligned} &BSP.\ ALPHA = FON \\ &BSP = (BSP_{ij}) \text{ où } BSP_{ij} = B_j(\tau_i) \qquad i,j = 1,\ldots,n \\ &ALPHA = {}^t[\alpha_1 \ldots \alpha_n] \\ &FON = {}^t[f(\tau_i) \ldots f(\tau_n)] \end{aligned} \tag{2.2-14}$$

Nous décrivons maintenant la construction de la suite t pour les différents cas (évidemment nous souhaitons que la matrice BSP soit inversible et le plus simple possible) :

- Pour k = 1 nous prenons :

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 \\ t_{n+1} &= x_2 \\ t_{i+1} &= (\tau_{i-1}+\tau_i)/2 \quad i=2,\ldots,n \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

- Pour $k \geq 2$ nous prenons :

$$\begin{aligned} t_1 &= \ldots = t_k = \tau_1 = x_1 \\ t_{n+1} &= \ldots = t_{n+k} = \tau_n = x_2 \\ t_i &= (\tau_{i-(k-1)} + \ldots + \tau_{i-1})/ (k-1) \quad i = k+1,\ldots,n \end{aligned} \tag{2.2-16}$$

Dans tous les cas possibles il est immédiat de vérifier que les relations (2.1.-2) à (2.1-5) et (2.2-11) sont satisfaites. De plus, la matrice BSP a une structure assez simple (elle est positive, bande de largeur de bande k-2, la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1, etc.). Dans C. de BOOR [1978], chapitre XIII on donne une démonstration de l'inversibilité de cette matrice. Ainsi le système linéaire (2.2-13) a une seule solution ce qui entraîne l'existence et unicité de l'approximation πf de la fonction f.

Remarque 5 : Le choix (2.2-16) pour la suite t s'avère une bonne approximation de celle donnée par MICCHELLI-RIVLIN-WINODGRAD [1976] qui est optimale dans le sens qu'elle fournit la plus petite constante C pour l'estimation d'erreur

$$\|f-\pi f\|_{r,\infty,[x_1,x_2]} \leq C\, h^{\ell-r} \|f\|_{\ell,\infty,[x_1,x_2]} \quad \text{pour tout}$$

$$r = 0,\ldots,\ell \text{ et } \ell = 1,\ldots,k \qquad (2.2\text{-}17)$$

où

$$\|f\|_{\ell,\infty,[x_1,x_2]} = \text{sup.ess.}\ \{ D^{\ell}f(x) \ : \ x \in [x_1,\ x_2] \ \} \qquad (2.2\text{-}18)$$

$$h = \max \{ \tau_{i+1} - \tau_i \ : \ i = 1,\ldots,\ n-1 \ \}$$

Exemple 4 : Nous donnons ci-après le graphe de la fonction

$$f(x) = x.\ \cos\left(\frac{2\,\Pi}{x}\right) + \sqrt{1 + x^2} \qquad x \in [0,2]$$

et à côté les graphes des fonctions approchées πf obtenues en considérant une suite τ de 51 points d'interpolation (les points sont en progression géométrique de raison 1.1) et les ordres d'interpolation k = 1,2,3

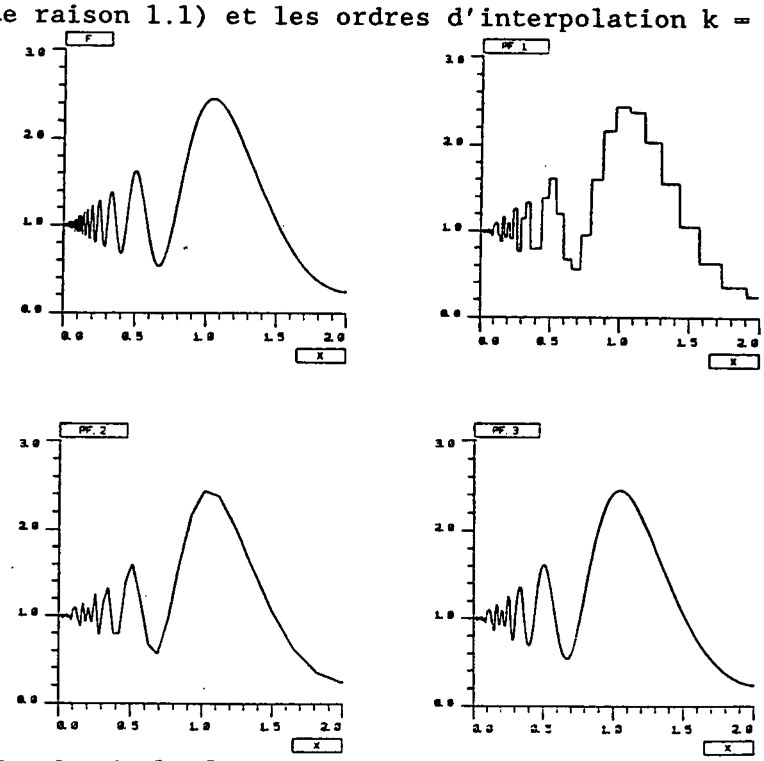


Figure 7 : Graphe de la fonction exacte (en haut à gauche) et de ses approximations par des fonction B-Splines d'ordre 1, 2 et 3.

Idem pour la fonction en escalier :

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } x \in [0,0.5[\\ 0.7 & \text{si } x \in [0.5,1[\\ 0.3 & \text{si } x \in [1,1.2[\\ 0.5 & \text{si } x \in [1.2,1.6[\\ 1. & \text{si } x \in [1.6,2] \end{cases}$$

avec 61 points d'interpolation équidistantes et les ordres d'interpolation $k = 1,2,3$. Dans chaque cas nous donnons le graphe de la fonction exacte (en trait plein) et le graphe de la fonction approchée (en trait pointillé).

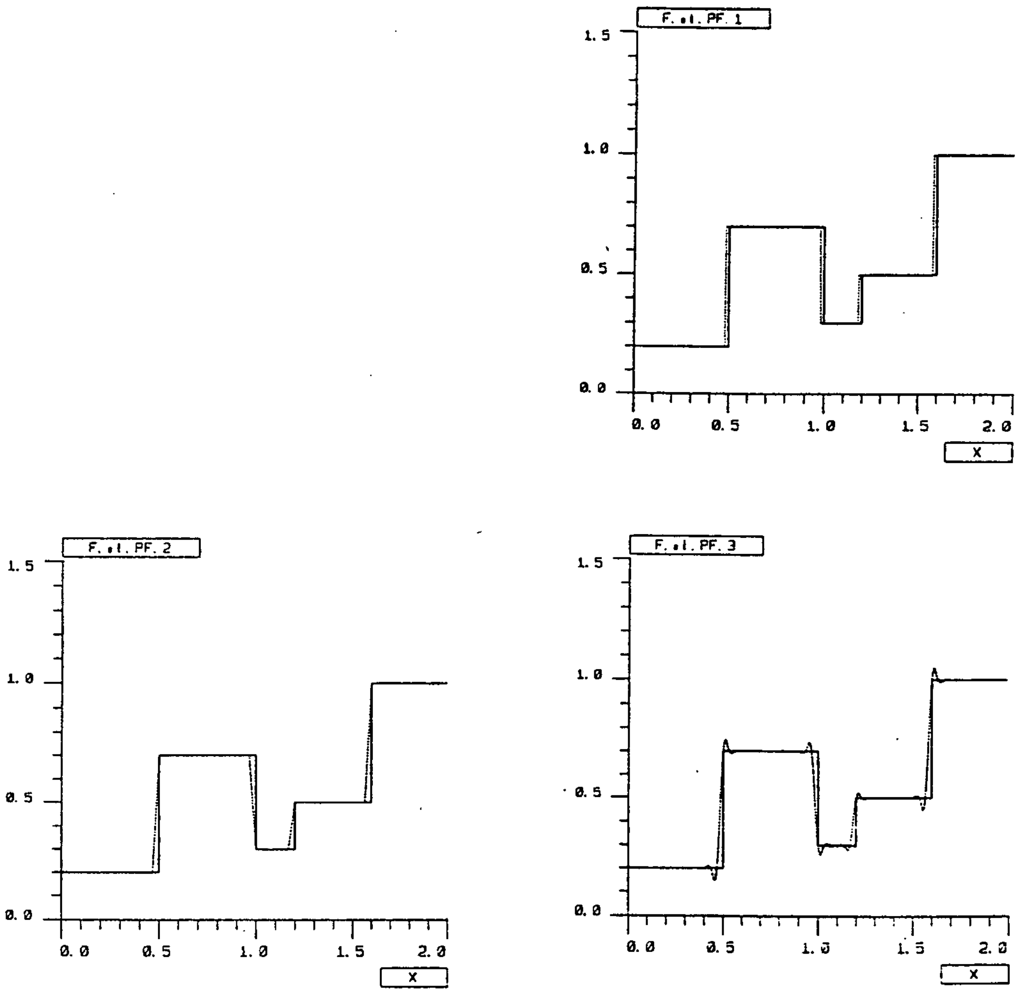


Figure 8 : Approximations d'une fonction en escalier par des B-Splines d'ordre 1,2 et 3

2.3 Approximation de fonctions à deux variables.

Nous considérons maintenant une fonction réelle f, "assez régulière", définie sur un rectangle non dégénéré

$$f : (x,y) \in [x_1,x_2] \times [y_1,y_2] \to f(x,y) \in \mathbb{R} \tag{2.3-1}$$

Soit τ^x et τ^y deux suites strictement croissantes, la première de nx points de l'intervalle $[x_1, x_2]$ et la seconde de ny points de l'intervalle $[y_1, y_2]$

$$\tau^x = \{\tau_i^x \in [x_1,x_2]\ i=1,\dots,nx \text{ et } \tau_i^x < \tau_{i+1}^x \text{ pour tout } i=1,\dots,nx-1\}$$
$$(2.3\text{-}2)$$
$$\tau^y = \{\tau_j^y \in [y_1, y_2]\ j=1,\dots,ny \text{ et } \tau_j^y < \tau_{j+1}^y \text{ pour tout } j=1,\dots,ny-1\}$$

Ce seront les suites des abscisses et ordonnées des points d'interpolation. Nous faisons aussi une hypothèse supplémentaire du même type que (2.2-4), i.e.

$$\begin{array}{llll} \text{si } nx \geq 2 & \tau_1^x = x_1 & \text{et} & \tau_{nx}^x = x_2 \\ \text{si } ny \geq 2 & \tau_1^y = y_1 & \text{et} & \tau_{ny}^y = y_2 \end{array} \tag{2.3-3}$$

Nous supposons f connue sur les points de la grille rectangulaire $\tau^x \times \tau^y$ c'est à dire qu'on connait l'ensemble de valeurs interpolées

$$\{ f(\tau_i^x, \tau_j^y) : i = 1,\dots,nx,\ j=1,\dots,ny \} \tag{2.3-4}$$

et finalement, soit kx et ky deux entiers (ordres d'interpolation dans les directions x et y) tels que

$$\begin{array}{l} 1 \leq kx \leq nx \\ 1 \leq ky \leq ny \end{array} \tag{2.3-5}$$

Soit à approcher f par une fonction πf

$$\pi f : (x,y) \in [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \to \pi f(x,y) \in \mathbb{R} \tag{2.3-6}$$

telle que :

(i) elles coïncident sur les points de la grille $\tau^x \times \tau^y$

$$\pi f(\tau_i^x, \tau_j^y) = f(\tau_i^x, \tau_j^y) \text{ pour tout } i = 1,\dots,nx \text{ et } j = 1,\dots,ny \tag{2.3-7}$$

(ii) πf est polynomial par morceaux, i.e. il existe une partition rectangulaire du domaine de définition de f telle que

$$\pi f \in P_{kx-1} \times P_{ky-1} \text{ sur chaque élément (rectangle) de la partition .} \tag{2.3-8}$$

(iii) πf est de classe k-2 sur tout le domaine, avec $k = \min\{kx,ky\}$

$$\pi f \in C^{k-2}([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) \tag{2.3-9}$$

(la remarque 4 reste valable sur chacune des directions).

Pour obtenir cette approximation nous procédons comme dans le cas monodimensionnel : nous construisons des suites t^x et t^y par des relations analogues et nous prenons πf dans un produit tensoriel d'espaces de fonctions Splines

$$\pi f \in \$_{kx,nx,t^x} \times \$_{ky,ny,t^y}$$
$$\pi f\ (x,y) = \sum_{i,j=1}^{nx,ny} \alpha_{ij}\ B_i^x(x).\ B_j^y\ (y) \qquad (2.3\text{-}10)$$

où

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i=1,\dots,\ nx \text{ et } j=1,\dots,ny$$
$$B_i^x \in \$_{kx,nx,t^x} \text{ pour tout } i=1,\dots,nx \qquad (2.3\text{-}11)$$
$$B_j^y \in \$_{ky,ny,t^y} \text{ pour tout } j=1,\dots,ny$$

A nouveau la vérification de (2.3-8) et (2.3-9) est une conséquence immédiate du corollaire 1 et des propriétés de régularité des suites t^x et t^y. En ce qui concerne la relation (2.3-7) nous avons le <u>système linéaire</u>

$$\sum_{i,j=1}^{nx,ny} \alpha_{ij} B_i^x\ (\tau_I^x).\ B_j^y\ (\tau_J^y) = f\ (\tau_I^x\ ,\ \tau_J^y\ )\ I=1,\dots,nx,\quad J=1,\dots,ny \qquad (2.3\text{-}12)$$

que nous écrivons sous la forme matricielle

$$\text{BSPX. ALPHA. } {}^t\text{BSPY} = \text{FON}$$

$$\text{BSPX} = (\text{BSPX}_{ij}) \text{ où } \text{BSPX}_{ij} = B_j^x\ (\tau_i^x)\ i,j=1,\dots,nx$$
$$\text{BSPY} = (\text{BSPY}_{ij}) \text{ où } \text{BSPY}_{ij} = B_j^y\ (\tau_i^y)\ i,j=1,\dots,ny \qquad (2.3\text{-}13)$$
$$\text{ALPHA} = (\alpha_{ij})\quad i=1,\dots,nx \quad j=1,\dots,ny$$
$$\text{FON} = (f_{ij}) \text{ où } f_{ij} = f(\tau_i^x,\tau_j^y)\quad i=1,\dots,nx,\ j=1,\dots,ny$$

Dans le paragraphe précédent nous avons justifié l'inversabilité des matrices BSPX et BSPY; nous écrivons donc

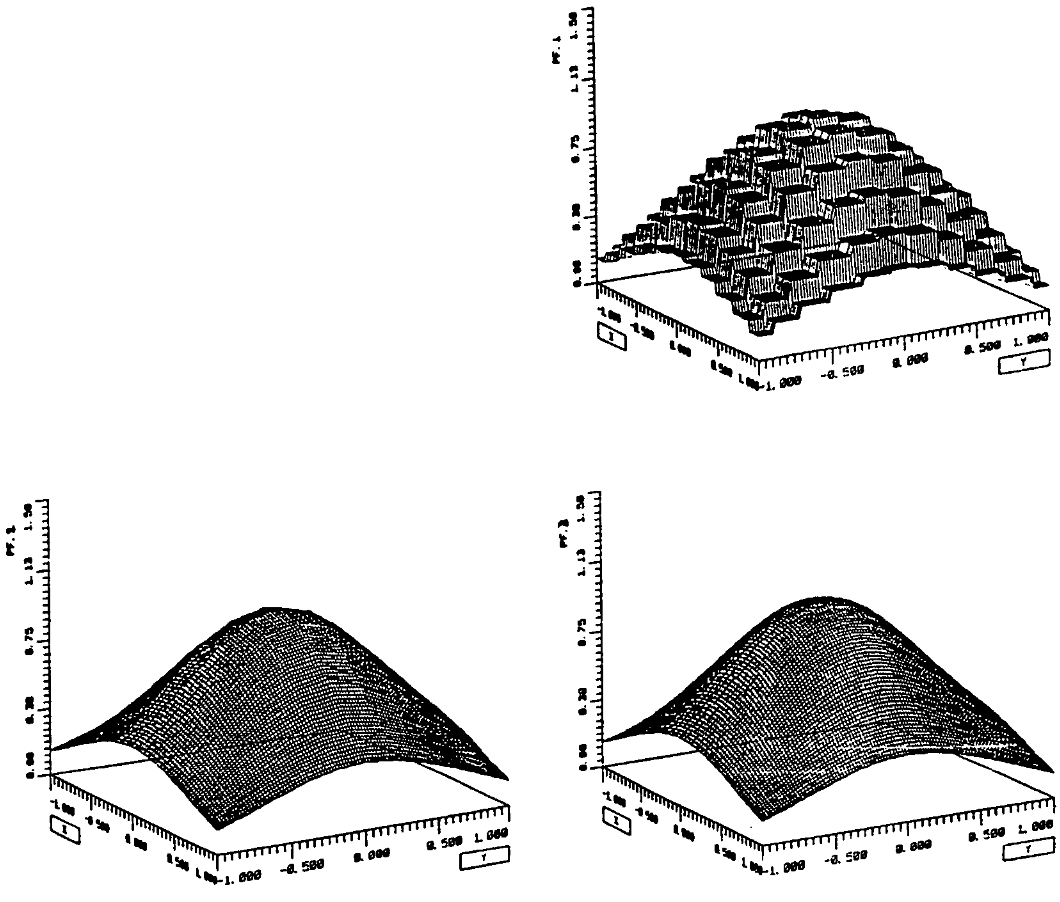
$$\text{ALPHA} = \text{BSPX}^{-1}.\ \text{FON}\ .\ \text{BSPY}^{-t}$$

Ce qui donne <u>l'existence et unicité de l'approximation</u> πf de la fonction f. La matrice ALPHA est appelée matrice des <u>coefficients d'interpolation.</u>

<u>Exemple 5</u> : Pour la fonction

$$f(x) = e^{-(x^2+y^2)} \qquad (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$$

Nous donnons les graphes des fonctions approchées en considérant une grille rectangulaire de 11x11 points d'interpolation équidistants et les ordres d'interpolation kx = ky = 1,2,3.



<u>Figure 9</u> : Approximation d'une fonction exponentielle par des B-Splines d'ordre 1, 2 et 3

3. Description du module BSPLIN.

Nous donnons dans ce paragraphe une description complète du module BSPLIN : création d'une structure de Données (S.D.) COOR (BSPLIN), utilisation, manipulation et modification de cette S.D., évaluation et visualisation des fonctions approchées.

3.1. But :

Le module BSPLIN construit une S.D. COOR (BSPLIN) (i.e., une S.D.COOR avec des modifications, en particulier lors de l'utilisation des tableaux associés), où sont stockés tous les paramètres necessaires à l'approximation de fonctions par des méthodes B-Splines. Nous renvoyons au paragraphe 3.3 pour une description précise du stockage de ces paramètres.

En particulier le module BSPLIN calcule les coefficients d'interpolation (que nous avons notés α_i ou α_{ij} dans les paragraphes 2.2 et 2.3) à partir des données fournies par l'utilisateur, parmi lesquelles se trouvent soit l'expression explicite de la fonction (cas où on veut "discrétiser" la fonction), soit les valeurs aux points d'interpolation (cas où on ne connait la fonction qu'en quelques points "d'observation").

Nous pouvons aussi préparer le travail pour une interface avec un calcul d'éléments finis : si nous avons un maillage du domaine de définition des fonctions (donné par une S.D. NOPO), le module calcule pour chaque élément quels sont les coefficients d'interpolation qui interviennent, c'est à dire, ceux dont le support de la fonction de base B-Spline correspondante a une intersection non vide avec l'élément considéré. Cela peut être interessant au niveau du temps de calcul car on pourra se restreindre aux coefficients qui interviennent dans l'élément pour un problème utilisant les fonctions approchées. Nous illustrons cela par un exemple : soit f une fonction (définie sur le domaine rectangulaire Ω que nous avons approché par des méthodes B-Splines, i.e.

$$f = \sum_i \alpha_i B_i$$

Considérons la fonctionnelle

$$J(f) = \int_\Omega f = \sum_T \int_T f = \sum_T \int_T \sum_i \alpha_i B_i$$

où $T \in \mathcal{T}$ (triangulation de Ω). Nous sommes interessés par le calcul du gradient de cette fonctionnelle

$$\nabla J(f) = \left(\frac{\partial\ J\ (f)}{\partial\ \alpha_i}\right) = \left(\ \sum_T \int_T B_i\right) = \sum_T \left(\int_T B_i\right)$$

Etant donné que ce calcul se fait normalement élément par élément (et non variable par variable) nous pouvons nous restreindre pour un élément fixe T, aux coefficients qui interviennent dans cet élément, car évidemment pour les autres l'intégrale de la fonction de base correspondante est nulle.

Finallement, nous fournissons des sous-programmes qui permettent très facilement de restaurer une S.D. COOR (BSPLIN) et d'évaluer en un point les fonctions approchées. Il est possible aussi de construire par un programme conversationel des fichiers qui tracent les fonctions approchées via les modules TRACOU, VIS3D ou TRNOPO de la bibliothèque MODULEF.

3.2. Limites d'utilisation :

Les fonctions à approcher sont à une ou deux variables et la méthode utilisée est celle décrite dans les paragraphes 2.2 et 2.3. Cependant, au niveau du calcul, nous travaillons toujours dans le cas bidimensionnel, en prenant les valeurs par défaut si les fonctions sont à une seule variable

$$ky = 0 \quad ny = 1 \quad \tau^y = \{0.\} \quad t^y = \{0.\} \quad BSPY = (1.)$$

Pour stocker les paramètres nous utilisons une S.D. COOR mais en utilisant des tableaux associés structurés par avance. Ces tableaux sont nommés correlativement de la même façon que les tableaux standard, i.e., en faisant intervenir le niveau de la S.D. Ceci peut poser des problèmes à la restauration ou à la sauvegarde de la S.D., que nous résolvons en utilisant des sous-programmes spécifiques (voir paragraphe 3.4).

Le nombre de fonctions à traiter est limité par la place de mémoire disponible (taille du super-tableau). Pour NFT fonctions, le nombre de mots LCOBS nécessaires au stockage de la S.D. COOR (BSPLIN) est inférieur ou égal à

$$LCOBS = 110 + NFT\ (5 + KX + KY + 2.\ (NX + NY + NX.NY))$$

où KX, NX, KY, NY sont les bornes supérieures des paramètres d'interpolation correspondants pour les NFT fonctions. Dans le cas où on calcule aussi l'interface avec la S.D. NOPO, on doit ajouter

$$LCOBS^* = LCOBS + 45 + NE.(1 + NFT\ .\ NX\ .\ NY)$$

avec NE = nombre d'éléments du maillage (on remarque que les éléments doivent être droits, i.e. sa géométrie doit être définie seulement par les sommets).

Nous remarquons que toutes les fonctions doivent avoir le même domaine de définition. On rappelle que ce domaine doit être un segment sur l'axe X ou un rectangle dans le plan X Y de côtés parallèles aux axes.

Pour chaque fonction, la suite de points d'interpolation est construite automatiquement (points équidistants ou en progression géométrique), ou bien l'utilisateur donne les points à la main. D'autre part, pour les valeurs interpolées, soit l'utilisateur écrit la fonction explicitement (utilisation des fonctions interprétées ou d'un sous programme fonction) soit il donne la suite des valeurs à la main. Dans chaque cas un paramètre d'option dans les cartes de données fait le choix.

3.3. Description de la S.D.COOR (BSPLIN) :

Pour le stockage de tous les paramètres détaillées dans le paragraphe 2 nous utilisons une S.D.COOR (voir brochure Modulef n°2). Cependant les valeurs gardées dans chacun des tableaux ne correspond pas à l'utilisation standard de cette S.D. D'autre part nous avons besoin de quelques tableaux de plus, ce qui nous oblige à l'utilisation de tableaux associés structures par avance. Ces tableaux sont nommées :

COn5, COn6,...

où n est le niveau de la S.D. Le nombre de tableaux associés est 3 dans le cas normal et 5 si on réalise aussi l'interface avec la S.D.NOPO. Donc, il n'est pas possible d'utiliser les tableaux associés de façon standard.

Tous les sous-programmes utilitaires permettant la manipulation d'une S.D. COOR (impression, lecture,...) restent valables, exceptés ceux de restauration et de sauvegarde pour lesquels il est conseillé d'utiliser des sous-programmes spécifiques (voir paragraphe suivant).

Toute la gestion des tableaux (adresses, longueurs,...) est fait via le tableau NZCOOR (16) de sauvegarde du COMMON/ALCOOR/ et non pas par le common proprement dit. Donc, au cours d'une utilisation simultanée avec une S.D. COOR habituelle, le COMMON/ALCOOR/ contient toujours les valeurs de cette dernière.

S.D. COOR (BSPLIN)

Tableau C000 : Type : entier. Longueur : 32 mots

NTITRE	(1-20)	
NDATE	(21-22)	
NOMCRE	(23-28)	
NOMSD	(29)	= 'COOR'
NIVSD	(30)	= NICOOR
NETAT	(31)	= 0
NTASD	(32)	= 3 (cas normal) ou 5 (cas NOPO/BSPLIN)

Tableau C001 : Type : entier. Longueur : 22.NTASD mots.
Boucle N = 1 à NTASD

NOM	(22.(N-1)+1)
ADRESSE	(22.(N-1)+2)
LONGUEUR	(22.(N-1)+3)
NTYPE	(22.(N-1)+4)
COMMENTAIRE	(22.(N-1)+5 - 22.(N-1)+22)

Tableau C002 : Type : entier. Longueur : 7 mots.

NTYP	(1)	= 2 (Type du tableau C004 : entier)
NINDI	(2)	= 2 (Nombre de ses indices)
M1	(3)	= 1 (valeur maximale du premier indice)
NDCSMC	(4)	(longueur du tableau C004)
NCOBS	(5)	= 1 (Code de la segmentation : en blocs)
NBLOC	(6)	= 1 (Nombre de blocs)
NTACOO	(7)	= 1 (Type des axes de coordonnées : x,y)

Tableau C003 : Type : entier. Longueur : 2 mots

C003	(1)	= 0
C003	(2)	(Longueur du tableau C004)

Tableau C004 : Type : réel simple précision.

Longueur : $\sum_{N=1}^{NFT}$ (nx(N)+kx(N)+ny(N)+ky(N)) mots.

Boucle N = 1 à NFT

Boucle I = 1 à nx(N) + kx(N)

C004 (.) = $t_I^x(N)$ (Abscisses des points de raccord des fonctions B-Splines)

Boucle J = 1 à ny (N) + ky(N)

C004 (.) = $t_J^y(N)$ (Ordonnées)

Tableau associé 1 : Nom : C005 Type : entier Longueur : 3+5.NFT mots.

NDD (1)	(Dimension du domaine de définition des fonctions)
NE (2)	(Nombre d'éléments du maillage NOPO)
NFT (3)	(Nombre de fonctions à traiter)
Boucle N=1 à NFT	
NOM (N)	(Nom de la fonction)
kx (N)	(Ordre d'interpolation sur la direction X)
nx (N)	(Nombre de points d'interpolation sur la direction X)
ky (N)	(idem sur le direction Y)
ny (N)	(idem sur la direction Y)

Tableau associé 2 : Nom : C006 Type : réel simple précision.

Longueur : $\sum_{N=1}^{NFT}$ (nx(N) + ny(N)) mots.

Boucle N = 1 à NFT

Boucle I = 1 à nx(N)

C006(.) = $\tau_I^x(N)$ (Abscisses des points d'interpolation)

Boucle J = 1 à ny(N)

C006(.) = $\tau_J^y(N)$ (Ordonnées)

Tableau associé 3 : Nom : C007 Type : réel double précision

Longueur : 2.($\sum_{N=1}^{NFT}$ nx(N).ny(N)) mots.

Boucle N=1 à NFT

Boucle J = 1 à ny(N)

Boucle I = 1 à nx(N)

C007(.) = $\alpha_{IJ}(N)$ (Coefficients d'interpolation)

<u>Tableau associé 4 :</u> <u>Nom : C008</u> Type : entier. Longueurs : NE+1 mots.

C008 (1) (Maximum du tableau C008)

Boucle N = 1 à NE

C008 (N+1) (Nombre de coefficient qui interviennent dans l'élément considéré).

<u>Tableau associé 5</u> : <u>Nom : C009</u> Type : entier Longueur : $\sum_{N=1}^{NE}$ C008(N+1) mots.

Boucle N = 1 à NE

Boucle I = 1 à C008 (N+1)

C009(.) (Numéro du I-ème coefficient intervenant dans le N-ième élément).

3.4. Utilisation et manipulation d'une S.D. COOR (BSPLIN) :

Une fois qu'on dispose d'une S.D. COOR (BSPLIN) contenant les paramètres d'interpolation d'une ou plusieurs fonctions, pour évaluer en un point une de ces fonctions approchées il faut exécuter les opérations suivantes :

a) restaurer en mémoire centrale la S.D. et initialiser le tableau NZCOOR(16) de sauvegarde du COMMON/ALCOOR/. Il est conseillé ici d'utiliser la :

```
      SUBROUTINE RECOBS(M,NF,NI,NZ,NT,NDD,NE,NFT,NVC,NMVCE,X1,X2,Y1,Y2)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: RESTAURER UNE S.D. COOR(BSPLIN) ET INITIALISER QUELQUES
C ---  VARIABLES.
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  M  = SUPER-TABLEAU
C  NF = NUMERO DU FICHIER (OU 0 SI M.C.)
C  NI = NIVEAU DE LA S.D.
C
C PARAMETRES DE SORTIE:
C --------------------
C  NZ      = TABLEAU NZ(16) DE SAUVEGARDE DU COMMON
C  NT      = NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES
C  NDD     = DIMENSION DU DOMAINE DE DEFINITION DES FONCTIONS
C  NE      = NOMBRE D'ELEMENTS DU MAILLAGE (SI NOPO/BSPLIN)
C  NFT     = NOMBRE DE FONCTIONS TRAITEES
C  NVC     = NOMBRE DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION
C  NMVCE   = NOMBRE MAXIMAL DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION QUI
C            INTERVIENNENT PAR ELEMENT (SI NOPO/BSPLIN)
C  X1, X2 = EXTREMITES DES ABSCISSES
C  Y1, Y2 = EXTREMITES DES ORDONNEES
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER M,NF,NI,NZ,NDD,NE,NFT,NVC,NMVCE
      REAL X1,X2,Y1,Y2
      DIMENSION M(*),NZ(16)
      .....
```

Ce sous programme a l'avantage par rapport à SDREST (Bibliothèque UTSD) d'initialiser quelques variables utiles dans la suite et de gérer directement tous les problèmes posés par l'utilisation non standard des tableaux associés.

b) récupérer les caractéristiques de la fonction à traiter. Il suffit d'appeler la :

```
      SUBROUTINE RECAFO(M,NZ,NF,NOM,KX,NX,KY,NY,IATAUX,IATAUY,IATX,
     &                  IATY,IAALPHA)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: RECUPERATION DES CARACTERISTIQUES D'UNE FONCTION.
C ---
C
C PARAMETRES D'ENTRE:
C ------------------
C  M  = SUPER-TABLEAU
C  NZ = TABLEAU NZ(16) DE SAUVEGARDE DU COMMON
C  NF = NUMERO DE LA FONCTION A TRAITER
C
C PARAMETRES DE SORTIE:
C --------------------
C  NOM             = NOM DE LA FONCTION
C  KX, KY          = DEGRE DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES
C  NX, NY          = NOMBRE DE COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
C  IATAUX, IATAUY  = ADRESSES DES TABLEAUX DE COORDONNEES DES POINTS
C                    D'INTERPOLATION
C  IATX, IATY      = ADRESSES DES TABLEAUX DE COORDONNEES DES POINTS DE
C                    RACCORD DES FONCTIONS B-SPLINES
C  IAALPHA         = ADRESSE DU TABLEAU DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER M,NZ,NF,KX,NX,KY,NY,IATAUX,IATAUY,ITTX,IATY,IAALPHA
      CHARACTER NOM*4
      DIMENSION M(*),NZ(16)
      .....
```

A la sortie nous avons à notre disposition les différentes caractéristiques de l'interpolation de la fonction et les adresses de mémoire des différents tableaux.

c) calculer la valeur de la fonction approchée et de ses dérivées en un point. Avec les caractéristiques et les adresses de mémoire fournies par le sous-programme précédent nous appelons :

```
      SUBROUTINE FABSPL(NX,NY,KD,M,KX,KY,X,Y,IATX,IATY,NDD,IAALPHA,FA)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: RECUPERER LA VALEUR D'UNE FONCTION QUI A ETE APPROCHEE PAR
C ---   DE METHODES B-SPLINES.
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  NX, NY       = NOMBRE DE COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
C  KD           = ORDRE DE DERIVATION
C  M            = SUPER-TABLEAU
C  KX, KY       = DEGRE DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES
C  X, Y         = POINT OU ON CALCULE LA FONCTION
C  IATX, IATY   = ADRESSES DES TABLEAUX DE COORDONNEES DES POINTS DE
C                 RACCORD DES FONCTIONS B-SPLINES
C  NDD          = DIMENSION DU DOMAINE
C  IAALPHA      = ADRESSE DU TABLEAU DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION
C
C PARAMETRE DE SORTIE:
C -------------------
C  FA = TABLEAU FA(*) CONTENANT LA VALEUR DE LA FONCTION ET DE SES
C       DERIVEES
C       POUR NDD = 1
C       f f   f    f     ...
C          ,x  ,xx  ,xxx
C
C       POUR NDD = 2
C       f f   f   f    f    f    f     f     f     f     ...
C          ,x  ,y  ,xx  ,xy  ,yy  ,xxx  ,xxy  ,xyy  ,yyy
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER NX,NY,KD,M,KX,KY,IATX,IATY,NDD,IAALPHA
      DOUBLE PRECISION X,Y,FA(*)
      DIMENSION M(*)
      .....
```

A la sortie, le tableau FA contient les valeurs cherchées.

L'écriture d'un programme principal contenant tous ces appels est à la charge de l'utilisateur. Ce programme doit contenir obligatoirement les instructions suivantes :

- COMMON M(LM)

Déclaration du super-tableau de travail de LM mots. Tous les tableaux sont gérés dans ce super-tableau. Sa taille doit être supérieure ou égale au nombre de mots nécessaires au bon stockage des tableaux (voir l'estimation faite dans le paragraphe 3.2).

- DOUBLE PRECISION DM
- EQUIVALENCE (M(1),DM)

Afin de réaliser l'alignement des réels double précision (on remarque que les calculs des coefficients d'interpolation se font en double précision).

- CALL INITIS (M, LM, IMPRE, NNN)

Pour initialiser certaines variables des COMMONS de travail (IMPRE = 0,1,...,10, paramètre d'impression de l'exécution et NNN = 0,1,2,3, paramètre d'impression des adressages dans le super-tableau sont à initialiser).

Dans le cas où la S.D. COOR (BSPLIN) a été modifiée et où une sauvegarde sur fichier est nécessaire, il est conseillé d'utiliser la :

```
      SUBROUTINE SACOBS(M,NZ,NF)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: SAUVEGARDER UNE S.D. COOR(BSPLIN).
C ---
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  M  = SUPER-TABLEAU
C  NF = NUMERO DU FICHIER (OU 0 SI M.C.)
C  NZ = TABLEAU NZ(16) DE SAUVEGARDE DU COMMON
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER M,NZ,NF
      DIMENSION M(*),NZ(16)
      .....
```

A nouveau l'avantage par rapport à SDSAUV (Bibliothèque UTSD) réside dans la gestion directe des tableaux associés.

Pour finir, nous présentons deux sous-programmes utilitaires. Le premier

```
      SUBROUTINE RECIPE(NVCE,M,NZ,NEL,IANUM)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: RECUPERATION DES NUMEROS DES VARIABLES D'INTERPOLATION QUI
C ---  INTERVIENNENT DANS UN ELEMENT FINI CONSIDEREE.
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  M   = SUPER-TABLEAU
C  NZ  = TABLEAU NZ(16) DE SAUVEGARDE DU COMMON
C  NEL = NUMERO DE L'ELEMENT
C
C PARAMETRES DE SORTIE:
C --------------------
C  NVCE  = NOMBRE DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION QUI INTERVIENNENT
C  IANUM = ADRESSE DU TABLEAU DES NUMEROS DES COEFFICIENTS
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER NVCE,M,NZ,NEL,IANUM
      DIMENSION M(*),NZ(16)
      .....
```

récupère pour un élément fini du maillage considéré le nombre de coefficients d'interpolation qui interviennent et ses numéros. Nous rappelons que les coefficients sont numérotés, fonction par fonction, et à, l'intérieur de chaque fonction, nous lisons la matrice ALPHA (voir (2.3-13)) colonne par colonne de haut en bas et de gauche à droite.

Le second programme utilitaire calcule les fonctions B-Splines (et éventuellement ses dérivées) en un point

```
      SUBROUTINE FBSPLI(K,N,L,KD,X,T,FBS)
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: CALCUL DES VALEURS DE TOUTES LES FONCTIONS B-SPLINES D'ORDRE L
C ---   (DEPENDANTES DES PARAMETRES K, N ET T(1:N+K)) ET DE SES
C       DERIVEES JUSQU'A L'ORDRE KD, AU POINT X.
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  K  = DEGRE DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES
C  N  = NOMBRE DE COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
C  L  = ORDRE DES FONCTIONS B-SPLINES A CALCULER
C  KD = ORDRE DE DERIVATION
C  X  = POINT OU ON CALCULE LES FONCTIONS
C  T  = SUITE DE COORDONNEES T(1:N+K) DES POINTS DE RACCORD DES
C       FONCTIONS B-SPLINES
C
C PARAMETRES DE SORTIE:
C --------------------
C  FBS = TABLEAU FBS(1:N,1:KD+1) CONTENANT LES VALEURS DES FONCTIONS
C        B-SPLINES ET DE SES DERIVEES AU POINT X
C                    J-1
C                   d    B(I,L)
C        FBS(I,J) = ----------- (X)  I=1,...,N  J=1,...,KD+1
C                        J-1
C                     d x
C +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER K,N,L,KD
      DOUBLE PRECISION X,FBS
      REAL T
      DIMENSION T(N+K),FBS(N,KD+1)
      .....
```

Il utilise les relations itératives (2.1-7) et des relations analogues pour les dérivées. Normalement il est appelé (directement ou indirectement) dans tous les problèmes car il calcule la valeur des fonctions de base.

Dans le paragraphe 5 nous donnons quelques exemples d'utilisation de ces sous-programmes.

3.5. Tracé des fonctions.

A l'aide d'un programme conversationnel nous pouvons construire trés facilement les fichiers nécessaires pour tracer (via les modules TRACOU, VIS3D ou TRNOPO de la Bibliothèque Modulef) les graphes des fonctions approchées. L'utilisateur doit fournir simplement le nom du fichier contenant la S.D. COOR (BSPLIN), le nombre de points pour le tracé, le nom du fichier à construire et choisir l'option de dessin. Les possibilités suivantes sont offertes :

- Pour le cas monodimentionnel

(i) Tracé d'une ou plusieurs courbes

$$\{ (t, \pi f_i(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [x_1,x_2] \}$$

(ii) Dans le cas où le nombre de courbes est supérieur ou égal à 2 on peut tracer aussi la courbe paramétrée

$$\{ (\pi f_1(t), \pi f_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [x_1,x_2] \}$$

(iii) Si nous avons au minimum 3 courbes, nous pouvons dessiner la bande de $\mathbb{R}^2$

$$\{ M = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{OM} = \vec{\phi}(t)+ \frac{1}{2} e(t) \vec{n}(t), \ t \in [x_1,x_2],$$

$$e(t) \in [- \frac{1}{2} \pi f_3(t), \frac{1}{2} \pi f_3(t)] \}$$

où $\vec{\phi}(t)$ est la courbe paramétrée

$$\vec{\phi}(t) = (\pi f_1(t), \pi f_2(t)) \quad t \in [x_1,x_2]$$

et $\vec{n}(t)$ est le vecteur normal unitaire à cette courbe.

Tous ces tracés sont à faire via le module TRACOU de la bibliothèque Modulef .

Exemple 6 : Dans le cas (i) la visualisation d'une approximation de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \in [1,2] \end{cases}$$

par des fonctions B-Splines d'ordre 4 est donnée sur la figure 10.

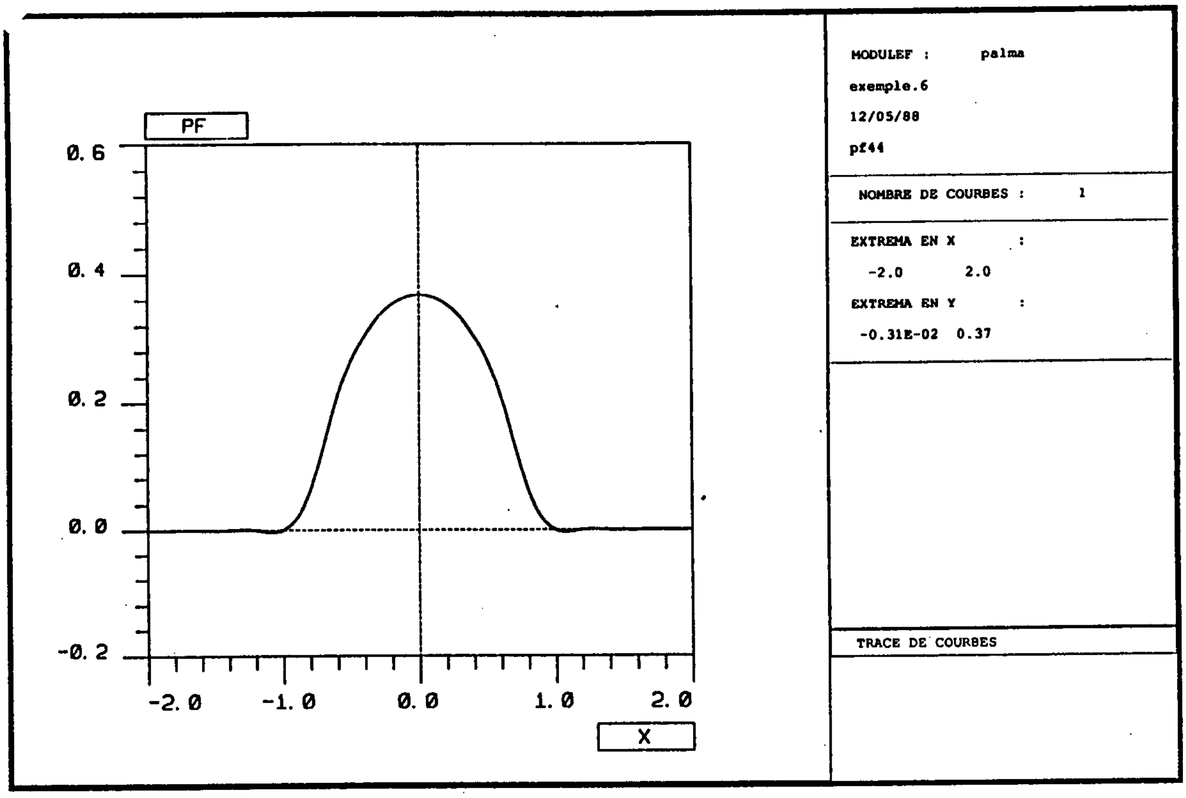


Figure 10 : Approximation d'une fonction cut-off par des B-Splines d'ordre 4

Dans le cas (ii) et (iii) nous approchons la section d'un réservoir cylindrique d'équation

$$\vec{\phi}(t) = \begin{cases} (1 - \cos(\pi t/2)\ ,\ \sin(\pi t/2)) & t \in [0,1] \\ (3t - 2,\ 1) & t \in]1,2] \\ (4 + \sin(\pi(t-2)/2)\ ,\ \cos(\pi(t-2))/2) & t \in]2,3] \end{cases}$$

par des B-Splines d'ordre 5 et son épaisseur, donnée par

$$e(t) = \begin{cases} 0.1 + 0.1t & t \in [0,1] \\ 0.2 & t \in]1,2] \\ 0.2 + 0.1(2-t) & t \in]2,3] \end{cases}$$

par des B-Splines d'ordre 2. La visualisation par TRACOU des courbes approchées est donnée sur la figure 11.

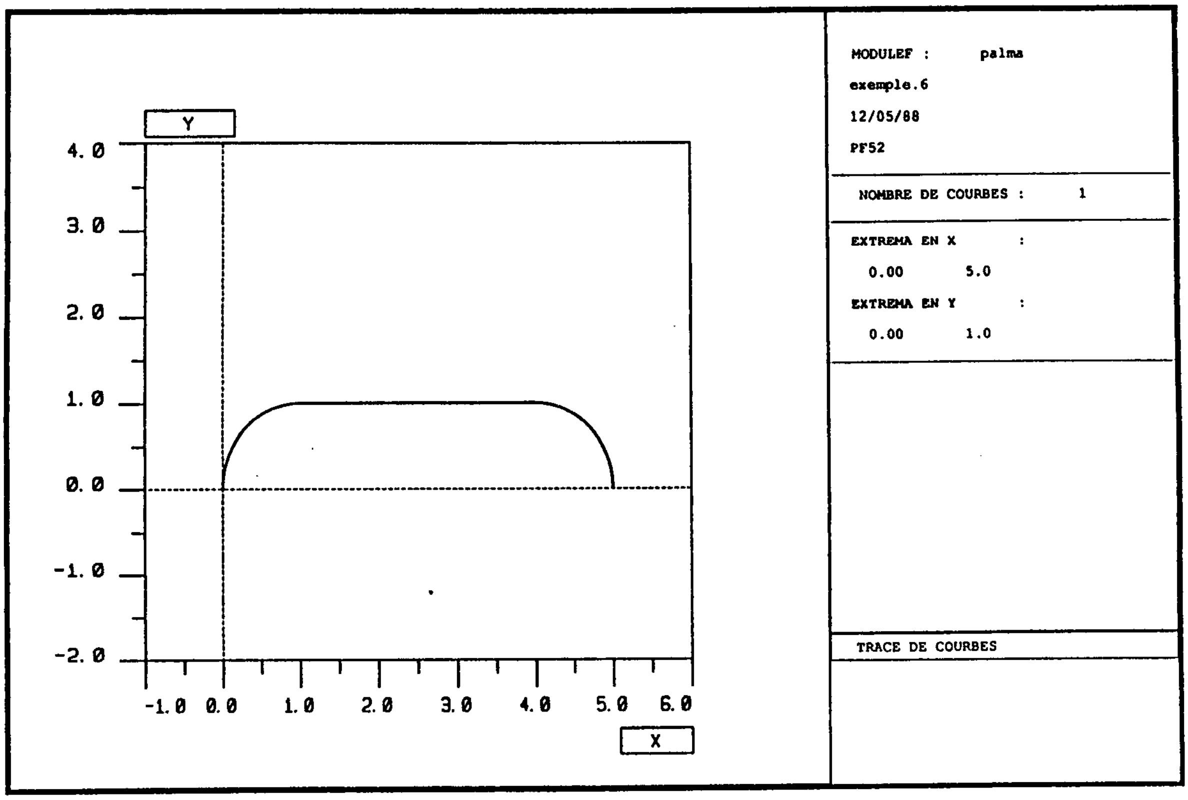


Figure 11.a : Approximation de la section d'un réservoir cylindrique

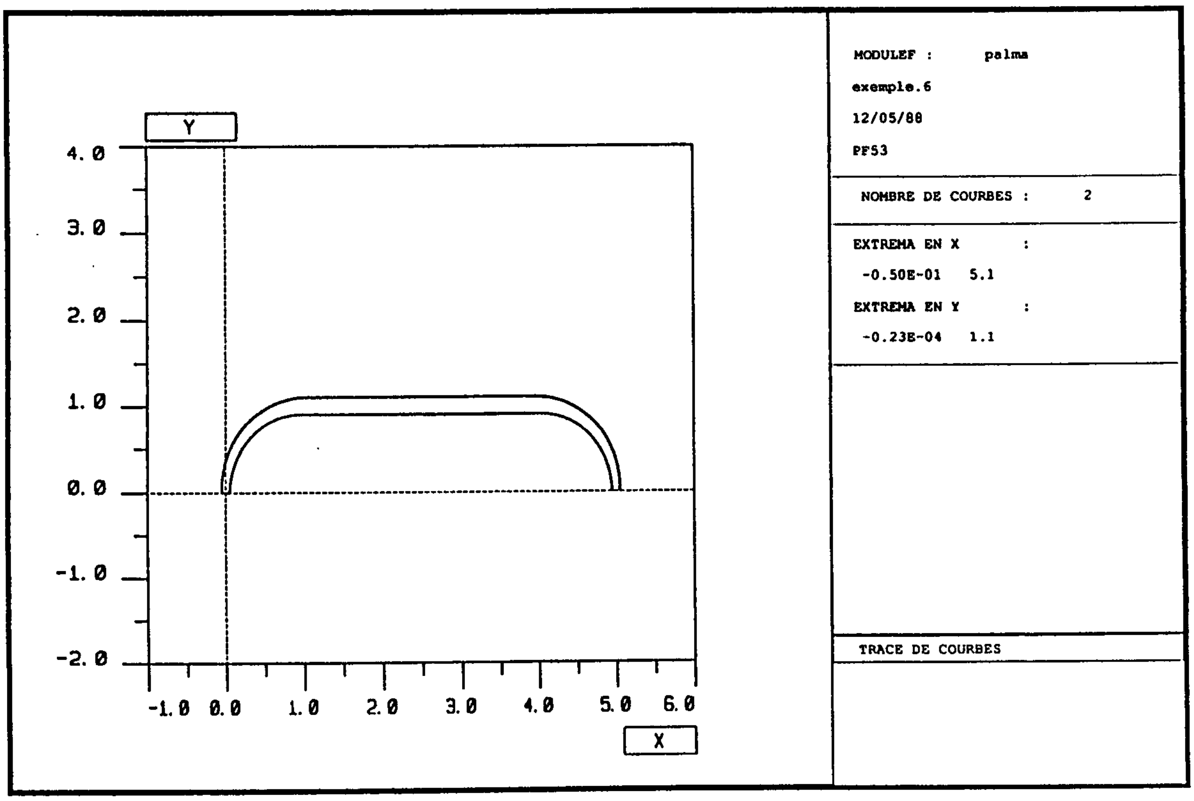


Figure 11.b : Approximation de la section d'un réservoir cylindrique
(avec son épaisseur)

- Pour le cas bidimensionnel :

(i) Trace d'une ou plusieurs surfaces

$$\{ (t_1,t_2, \pi f_i(t_1,t_2)) : (t_1,t_2) \in [x_1,x_2] \times [y_1,y_2] \}$$

via le module VIS3D.

(ii) Si nous avons au minimum 3 fonctions nous pouvons dessiner la surface paramétrée

$$\{(\pi f_1(t_1,t_2), \pi f_2(t_1,t_2) \pi f_3(t_1,t_2)) : (t_1,t_2) \in [x_1,x_2] \times [y_1,y_2]\}$$

(iv) Si nous avons une quatrième fonction nous pouvons dessiner la coque dont la surface moyenne est la surface paramétré précédente et dont l'épaisseur est donnée par la quatrième fonction.

Dans les deux derniers cas nous construisons une S.D.NOPO dont les éléments sont des rectangles et des héxaèdres respectivement.

Exemple 7 : Dans le cas (i) nous donnons la visualisation d'une approximation de la fonction (paraboloide hyperbolique)

$$f(x,y) = 0.1 (y^2 - x^2) \quad (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$$

par de B-Splines d'ordre 3.

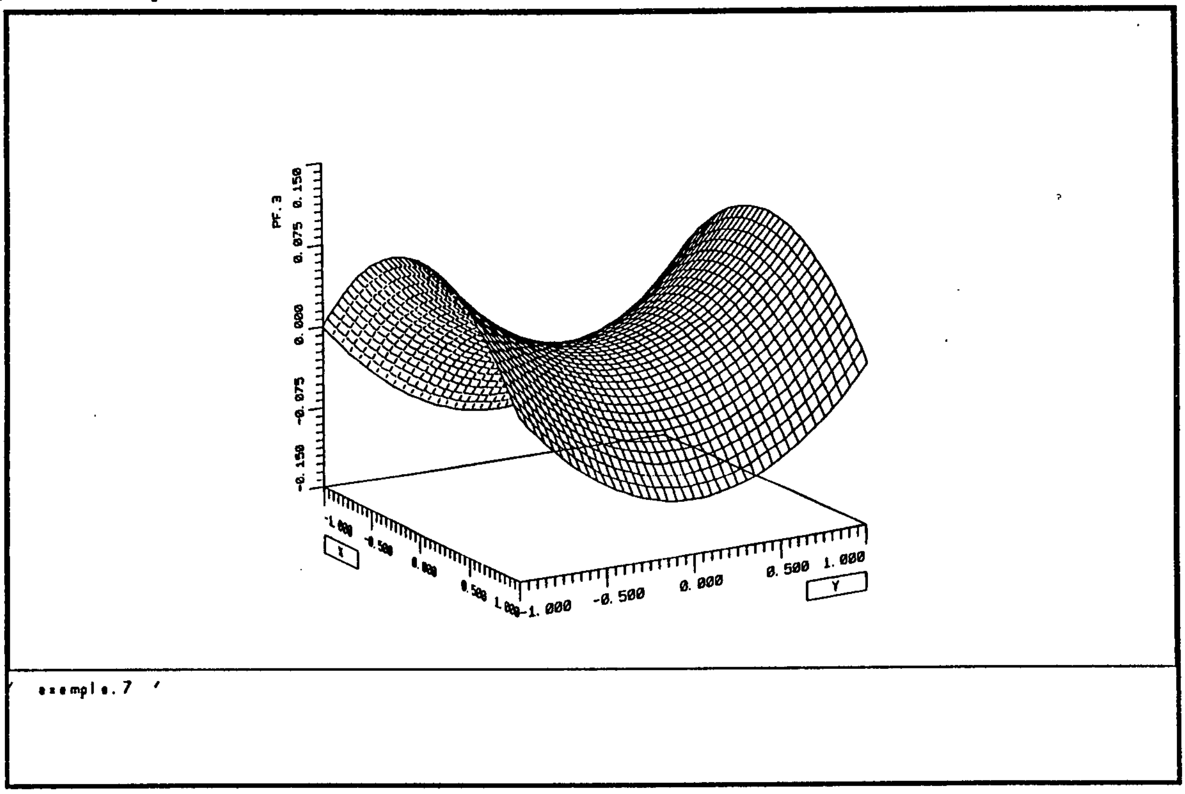


Figure 12 : Approximation d'un paraboloide hyperbolique par des B-splines d'ordre 3

Pour illustrer les cas (ii) et (iii) nous donnons le graphe de la surface moyenne d'un barrage (voir BERNADOU-BOISSERIE [1982]) approchée par des B-Splines d'ordre 5 et une vue de la moitié du même barrage mais avec son épaisseur approchée par de B-Splines d'ordre 2.

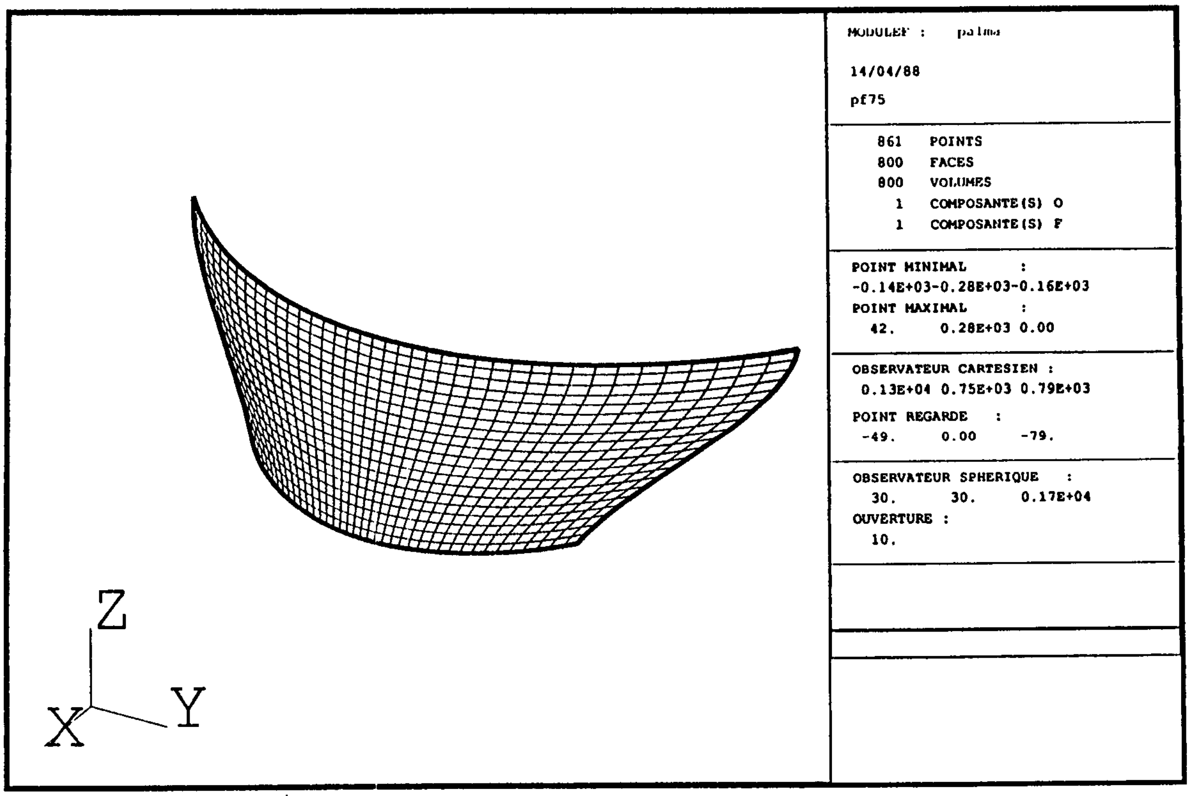


Fig. 13.a : Approximation de la surface moyenne d'un barrage par des B-Splines d'ordre 5.

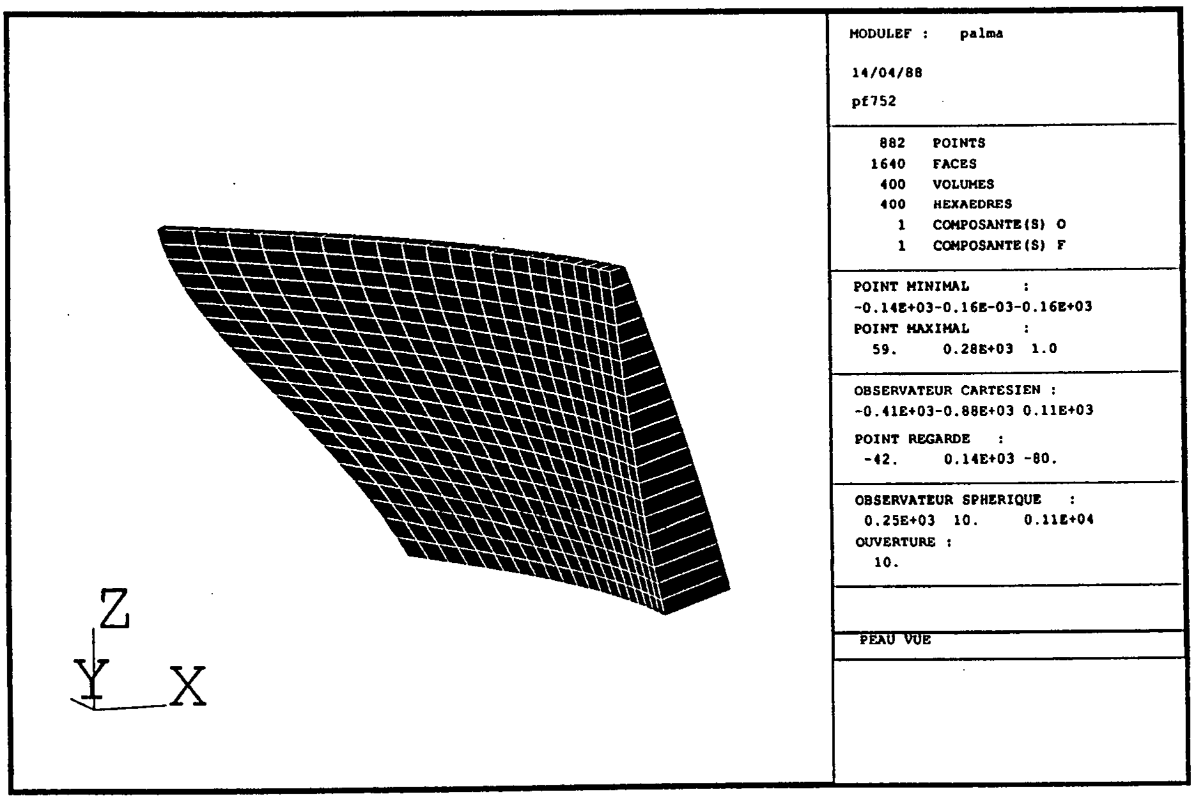


Fig. 13 b : Vue de l'approximation de la moitié du même barrage avec son épaisseur.

4. Mise en oeuvre du module BSPLIN.

4.1. Appel, bibliothèques, programmes.

L'éxécution du module BSPLIN nécessite :

- un programme principal en fortran d'appel au module ;
- éventuellement les sous-programmes fonction

  DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO1

  DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO2

  ou les fonctions interprétées (cf. Rapport Technique INRIA N°28);
- des cartes de données;
- un chargement;
- une compilation;
- une édition de liens

On peut utiliser comme programme principal BSPLXX (cf. Brochure Modulef n°108); sinon il faut écrire (voir le paragraphe 3.4 pour plus de détails) :

```
PROGRAM PRINCIPAL

PARAMETER(LM=.....)
DOUBLE PRECISION DM
EXTERNAL DEFFO1,DEFFO2
COMMON M(LM)
EQUIVALENCE(M(1),DM)
CALL INITIS(M,LM,IMPRE,NNN)
CALL BSPLIN(M,DEFFO1,DEFFO2)
STOP
END
```

Si quelques unes des fonctions à approches sont données par un sous-programme fonction, il faut écrire selon que le domaine est monodimensionnel ou bidimensionnel :

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO1(NR,X)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: DEFINIR L'UTILISATEUR UNE OU PLUSIEURS FONCTIONS.
C ---
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  NR = NUMERO DE REFERENCIE DE LA FONCTION
C  X  = POINT OU ON CALCULE LA FONCTION
C
C PARAMETRE DE SORTIE:
C -------------------
C  DEFFO1 = VALEUR DE LA FONCTION
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER NR
      REAL X
C
      IF (NR.EQ.1) THEN
       DEFFO1 = F1(X)
      ELSEIF (NR.EQ.2) THEN
       DEFFO1 = F2(X)
      ...
      ENDIF
C
      END
```

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO2(NR,X,Y)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: DEFINIR L'UTILISATEUR UNE OU PLUSIEURS FONCTIONS.
C ---
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  NR    = NUMERO DE REFERENCIE DE LA FONCTION
C  X, Y  = POINT OU ON CALCULE LA FONCTION
C
C PARAMETRE DE SORTIE:
C -------------------
C  DEFFO2 = VALEUR DE LA FONCTION
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      INTEGER NR
      REAL X,Y
C
      IF (NR.EQ.1) THEN
       DEFFO2 = F1(X,Y)
      ELSEIF (NR.EQ.2) THEN
       DEFFO2 = F2(X,Y)
      ...
      ENDIF
C
      END
```

Nous rappelons que l'expression explicite de ces fonctions peut être donnée aussi par des fonctions interprétées.

Finalement les bibliothèques utiles pour l'exécution du module sont :

UTIL, UTSD, COSD, CONV

4.2. Les cartes de données :

Nous remarquons tout d'abord qu'en utilisant le préprocesseur BSPLIW et le programme conversationnel CNVBSP nous pouvons créer de façon commode un fichier contenant les données du module BSPLIN. Sinon, les valeurs à fournir doivent suivre les régles du format libre (voir brochure Modulef n°44).

On va utiliser la présentation suivante :

VAL (TYPE) description

avec : VAL : nom de la variable, du tableau,...
(TYPE) : (I) entier, (R) réel simple précision, (D) réel double précision. (A) chaine de caractères
Description : commentaire sur la donnée concernée.

Les cartes à fournir sont les suivantes :

CTITRE(A)	20 caractères, titre du travail
NOCOOR(A)	32 caractères, nom du fichier de sauvegarde de la S.D. COOR(BSPLIN). Si NOCOOR='MC', pas de sauvegarde sur mémoire secondaire.
NICOOR(I)	niveau de la S.D. COOR (BSPLIN)
NCTP(I)	type de problème (1=approximation, 2=approximation et NOPO/BSPLIN).
NDD(I)	dimension du domaine de définition des fonctions (1 = sur l'axe X, 2 = dans le plan XY)
NFT(I)	nombre de fonctions à traiter
si NCTP = 1	
X1(R) X2(R)	extrêmités de l'intervalle du domaine de définition des fonctions sur la direction X
si NDD = 2	
Y1(R) Y2(R)	idem sur la direction Y
si NCTP = 2	
NONOPO(A)	32 caractères, nom du fichier contenant la S.D. NOPO. Si NONOPO='MC', elle se trouve en mémoire centrale
NINOPO(I)	niveau de la S.D. NOPO.

Boucle n = 1 à NFT

NOM(n) 4 caractères, nom de la fonction

KX(n) NX(n) ordre d'interpolation et nombre de points d'interpolation sur la direction X

si NDD = 2

KY(n) NY(n) idem sur la direction Y.

si NX = 1

TAUX(1) (R) seule abscisse des points d'interpolation

si NX≥3

NOPIX(I) option pour la construction des abscisses des points d'interpolation (1 = équidistantes, 2 = en progression géométrique, 3 = fournies à la main)

si NOPIX = 2

RAISX(R) raison de la progession géométrique

si NOPIX = 3

boucle i = 2 à NX-1

TAUX(i) (R) suite croissante des abscisses des points d'interpolation (exceptées la première et la dernière)

si NDD = 2

si NY = 1

TAUY(1) (R)seule ordonnée des points d'interpolation

si NY ≥ 3

NOPIY(I) option pour la construction des ordonnées...

si NOPIY = 2

RAISY (R) raison de la progression géométrique

si NOPIY = 3

boucle j = 2, NY - 1

TAUY(j) (R) idem pour les ordonnées

NOFI(n) numéro d'option pour la constructiondes valeurs interpolées (1=fonction constante, 2=fonction interprétée, 3=sous-programme fonction, 4=valeurs fournies à la main)

si NOFI = 1

CTE(D) valeur de la constante

si NOFI = 2

si NDD = 1

NOM(X)=... ; (A) 72 caractères, expression de la fonction (en finissant par ;)

si NDD = 2

NOM(X,Y)=...; (A) 72 caractères, idem

si NOFI = 3

NR (n) numéro de référence de la fonction dans le sous-programme fonction

si NOFI = 4

boucle i = 1 à NX

si NDD = 1

NOM(TAUX(i)) (D) valeur de la fonction au point considérée

si NDD = 2

Boucle j = 1 à NY

NOM(TAUX(i),TAUY(j)) (D) idem

5. Exemples d'utilisation :

D'abord nous donnons un exemple complet de création conversationnelle du fichier de données, exécution du module et création du fichier de dessin. Il s'agit d'une courbe paramétrée qui passe par un ensemble de 64 points "d'observation". Le programme conversationnel est le suivant :

```
bsplxx

 **************
 MODULE BSPLIN.
 **************

 Construction d'une S.D. COOR(BSPLIN) ou sont stockes:
 - les parametres necessaires a l'approximation de
   fonctions par des Methodes B-Splines.
 - eventuellement, l'intersection entre le maillage B-Splin
   cree (supports des fonctions de base B-Splines) et un
   maillage du domaine de definition des fonctions, decrit par
   une S.D. NOPO.

 Le Module permet aussi la creation de fichiers pour dessiner
 les fonctions approchees.

 **  ECRIRE EN MAJUSCULES S.V.P.  **

 -- CREATION DATA ? --- EXECUTION MODULE ? --- DESSINER S.D. ? --- FIN ?
    -                   -                      -                  -
C

 ****************************************************************
 **  CREATION CONVERSATIONELLE DES DONNEES DU MODULE BSPLIN.  **
 ****************************************************************

 -- NOM DU FICHIER DE DONNEES A CREER ?
F8.DATA

 **  DONNEES GENERALES.  **

 -- TITRE DU TRAVAIL ?
EXEMPLE
 -- NOM DU FICHIER DE LA S.D. COOR(BSPLIN) A CREER ?
    (TAPER 'MC' SI PAS DE SAUVEGARDE SUR FICHIER)
F8.SD
 -- TYPE DE PROBLEME ?
    1 = APPROXIMATION DE FONCTIONS
    2 = APPROXIMATION ET RELATION NOPO/BSPLIN
1
 -- DIMENSION DU DOMAINE ?
    1 = FONCTION DEFINIE SUR L'AXE X
    2 = FONCTION DEFINIE DANS LE PLAN XY
1
 -- NOMBRE DE FONCTIONS A TRAITER ?
2

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES DONNEES GENERALES (OUI-NON) ?
N

 **  COORDONNEES DES SOMMETS DU DOMAINE DE DEFINITION.  **

 ** LE DOMAINE DOIT ETRE UN SEGMENT SUR L'AXE X, DE COORDONNEES:

      (X1,0) |-------------------| (X2,0)

 -- EXISTE UNE S.D. NOPO CONTENANT UN MAILLAGE DU DOMAINE (OUI-NON) ?
N
 -- VALEURS DES COORDONNEES: X1 ET X2 ?
0 31.6

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES VALEURS DES COORDONNEES (OUI-NON) ?
N

 **  DESCRIPTION DE LA FONCTION NUMERO: 1.  **

 ** CARACTERISTIQUES DE L'INTERPOLATION

 -- NOM DE LA FONCTION ?
PHI1
 -- DEGRE DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES ?
3
 -- NOMBRE DE POINTS D'INTERPOLATION ?
64

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES CARACTERISTIQUES DE L'INTERPOLATION (OUI-NON) ?
N

 ** COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION

 ** ABSCISSES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** IL Y A 64 ABSCISSES A CONSTRUIRE:
    TAUX1( 1),....,TAUX1(64)
    AVEC  TAUX1( 1) =  0.00000000E+00  ET  TAUX1(64) =  0.31600000E+02
 -- OPTION POUR LA CONSTRUCTION DE  TAUX1( 2),....,TAUX1(63) ?
    1 = EQUIDISTANTES
    2 = EN PROGRESSION GEOMETRIQUE
    3 = FOURNIR A LA MAIN
3
 -- VALEUR DE  TAUX1( 2) ?
1
 -- VALEUR DE  TAUX1( 3) ?
2.5

.....

 -- VALEUR DE  TAUX1(62) ?
31
 -- VALEUR DE  TAUX1(63) ?
31.3
 ** LA SUITE CONSTRUITE EST LA SUIVANTE:
    TAUX1( 1) =  0.00000000E+00
    TAUX1( 2) =  0.10000000E+01
    TAUX1( 3) =  0.25000000E+01
    TAUX1( 4) =  0.40000000E+01
    TAUX1( 5) =  0.42000000E+01
    TAUX1( 6) =  0.44000000E+01
    TAUX1( 7) =  0.46000000E+01
    TAUX1( 8) =  0.48000000E+01
    TAUX1( 9) =  0.60000000E+01
    TAUX1(10) =  0.73000000E+01
    TAUX1(11) =  0.75000000E+01
    TAUX1(12) =  0.76000000E+01
    TAUX1(13) =  0.78000000E+01
    TAUX1(14) =  0.80000000E+01
    TAUX1(15) =  0.82000000E+01
    TAUX1(16) =  0.85000000E+01
    TAUX1(17) =  0.95000000E+01
    TAUX1(18) =  0.11000000E+02
    TAUX1(19) =  0.12000000E+02
    TAUX1(20) =  0.13000000E+02
    TAUX1(21) =  0.14000000E+02
    TAUX1(22) =  0.15000000E+02
    TAUX1(23) =  0.16000000E+02
    TAUX1(24) =  0.16800000E+02
    TAUX1(25) =  0.17100000E+02
    TAUX1(26) =  0.17300000E+02
    TAUX1(27) =  0.17500000E+02
    TAUX1(28) =  0.17700000E+02
    TAUX1(29) =  0.18200000E+02
    TAUX1(30) =  0.18800000E+02
    TAUX1(31) =  0.19300000E+02
    TAUX1(32) =  0.19600000E+02
    TAUX1(33) =  0.20000000E+02
    TAUX1(34) =  0.20500000E+02
    TAUX1(35) =  0.21200000E+02
    TAUX1(36) =  0.21800000E+02
    TAUX1(37) =  0.22300000E+02
    TAUX1(38) =  0.22500000E+02
    TAUX1(39) =  0.22800000E+02
    TAUX1(40) =  0.23000000E+02
    TAUX1(41) =  0.23200000E+02
    TAUX1(42) =  0.23500000E+02
    TAUX1(43) =  0.23900000E+02
    TAUX1(44) =  0.24100000E+02
    TAUX1(45) =  0.24300000E+02
    TAUX1(46) =  0.24800000E+02
    TAUX1(47) =  0.25400000E+02
    TAUX1(48) =  0.25900000E+02
    TAUX1(49) =  0.26300000E+02
    TAUX1(50) =  0.26900000E+02
    TAUX1(51) =  0.27800000E+02
    TAUX1(52) =  0.28300000E+02
    TAUX1(53) =  0.28500000E+02
    TAUX1(54) =  0.28800000E+02
    TAUX1(55) =  0.29100000E+02
    TAUX1(56) =  0.29300000E+02
    TAUX1(57) =  0.29500000E+02
    TAUX1(58) =  0.29800000E+02
    TAUX1(59) =  0.30300000E+02
    TAUX1(60) =  0.30600000E+02
    TAUX1(61) =  0.30800000E+02
    TAUX1(62) =  0.31000000E+02
    TAUX1(63) =  0.31300000E+02
    TAUX1(64) =  0.31600000E+02

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LA SUITE (OUI-NON) ?
N

 ** VALEURS DE LA FONCTION AUX POINTS D'INTERPOLATION

 -- OPTION POUR LA DEFINITION DE LA FONCTION ?
    1 = CONSTANTE SUR TOUT LE DOMAINE
    2 = DONNEE PAR FONCTION INTERPRETEE
    3 = DONNEE PAR DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO1
    4 = VALEURS FOURNIES A LA MAIN
4
 ** IL Y A   64 POINTS D'INTERPOLATION
 -- VALEUR DE PHI1(TAUX1( 1)) ?
20
 -- VALEUR DE PHI1(TAUX1( 2)) ?
18.5

.....

 -- VALEUR DE PHI1(TAUX1(63)) ?
19.2
 -- VALEUR DE PHI1(TAUX1(64)) ?
20

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES VALEURS DE PHI1 (OUI-NON) ?
N

 **  DESCRIPTION DE LA FONCTION NUMERO: 2.  **

 ** CARACTERISTIQUES DE L'INTERPOLATION

 -- NOM DE LA FONCTION ?
PHI2
 -- DEGRE DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES ?
3
 -- NOMBRE DE POINTS D'INTERPOLATION ?
64

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES CARACTERISTIQUES DE L'INTERPOLATION (OUI-NON) ?
N

 ** COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION

 ** ABSCISSES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** IL Y A 64 ABSCISSES A CONSTRUIRE:
    TAUX2( 1),....,TAUX2(64)
    AVEC  TAUX2( 1) =  0.00000000E+00  ET  TAUX2(64) =  0.31600000E+02
 -- OPTION POUR LA CONSTRUCTION DE  TAUX2( 2),....,TAUX2(63) ?
    1 = EQUIDISTANTES
    2 = EN PROGRESSION GEOMETRIQUE
    3 = FOURNIR A LA MAIN
3
 -- VALEUR DE  TAUX2( 2) ?
```

```
1
 -- VALEUR DE  TAUX2( 3) ?
2.5

.....

 +- VALEUR DE  TAUX2(62) ?
31
 -- VALEUR DE  TAUX2(63) ?
31.3
 ** LA SUITE CONSTRUITE EST LA SUIVANTE:
    TAUX2( 1) =  0.00000000E+00
    TAUX2( 2) =  0.10000000E+01
    TAUX2( 3) =  0.25000000E+01
    TAUX2( 4) =  0.40000000E+01
    TAUX2( 5) =  0.42000000E+01
    TAUX2( 6) =  0.44000000E+01
    TAUX2( 7) =  0.46000000E+01
    TAUX2( 8) =  0.48000000E+01
    TAUX2( 9) =  0.60000000E+01
    TAUX2(10) =  0.73000000E+01
    TAUX2(11) =  0.75000000E+01
    TAUX2(12) =  0.76000000E+01
    TAUX2(13) =  0.78000000E+01
    TAUX2(14) =  0.80000000E+01
    TAUX2(15) =  0.82000000E+01
    TAUX2(16) =  0.85000000E+01
    TAUX2(17) =  0.95000000E+01
    TAUX2(18) =  0.11000000E+02
    TAUX2(19) =  0.12000000E+02
    TAUX2(20) =  0.13000000E+02
    TAUX2(21) =  0.14000000E+02
    TAUX2(22) =  0.15000000E+02
    TAUX2(23) =  0.16000000E+02
    TAUX2(24) =  0.16800000E+02
    TAUX2(25) =  0.17100000E+02
    TAUX2(26) =  0.17300000E+02
    TAUX2(27) =  0.17500000E+02
    TAUX2(28) =  0.17700000E+02
    TAUX2(29) =  0.18200000E+02
    TAUX2(30) =  0.18800000E+02
    TAUX2(31) =  0.19300000E+02
    TAUX2(32) =  0.19600000E+02
    TAUX2(33) =  0.20000000E+02
    TAUX2(34) =  0.20500000E+02
    TAUX2(35) =  0.21200000E+02
    TAUX2(36) =  0.21800000E+02
    TAUX2(37) =  0.22300000E+02
    TAUX2(38) =  0.22500000E+02
    TAUX2(39) =  0.22800000E+02
    TAUX2(40) =  0.23000000E+02
    TAUX2(41) =  0.23200000E+02
    TAUX2(42) =  0.23500000E+02
    TAUX2(43) =  0.23900000E+02
    TAUX2(44) =  0.24100000E+02
    TAUX2(45) =  0.24300000E+02
    TAUX2(46) =  0.24800000E+02
    TAUX2(47) =  0.25400000E+02
    TAUX2(48) =  0.25900000E+02
    TAUX2(49) =  0.26300000E+02
    TAUX2(50) =  0.26900000E+02
    TAUX2(51) =  0.27800000E+02
    TAUX2(52) =  0.28300000E+02
    TAUX2(53) =  0.28500000E+02
    TAUX2(54) =  0.28800000E+02
    TAUX2(55) =  0.29100000E+02
    TAUX2(56) =  0.29300000E+02
    TAUX2(57) =  0.29500000E+02
    TAUX2(58) =  0.29800000E+02
    TAUX2(59) =  0.30300000E+02
    TAUX2(60) =  0.30600000E+02
    TAUX2(61) =  0.30800000E+02
    TAUX2(62) =  0.31000000E+02
    TAUX2(63) =  0.31300000E+02
    TAUX2(64) =  0.31600000E+02

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LA SUITE (OUI-NON) ?
N

 ** VALEURS DE LA FONCTION AUX POINTS D'INTERPOLATION

 -- OPTION POUR LA DEFINITION DE LA FONCTION ?
    1 = CONSTANTE SUR TOUT LE DOMAINE
    2 = DONNEE PAR FONCTION INTERPRETEE
    3 = DONNEE PAR DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO1
    4 = VALEURS FOURNIES A LA MAIN
4
 ** IL Y A   64 POINTS D'INTERPOLATION
 -- VALEUR DE PHI2(TAUX2( 1)) ?
9
 -- VALEUR DE PHI2(TAUX2( 2)) ?
8.2

.....

 -- VALEUR DE PHI2(TAUX2(63)) ?
9.8
 -- VALEUR DE PHI2(TAUX2(64)) ?
9.6

 -- VOULEZ-VOUS MODIFIER LES VALEURS DE PHI2 (OUI-NON) ?
N

 **********************************************************************
 **  FIN DE LA CREATION CONVERSATIONELLE DES DONNEES DU MODULE BSPLIN.  **
 **********************************************************************

 -- CREATION DATA ? --- EXECUTION MODULE ? --- DESSINER S.D. ? --- FIN ?
    -                   -                      -                   -
E

 -- NOM DU FICHIER CONTENANT LES DONNEES ?
F8.DATA
 -- PARAMETRE D'IMPRESSION POUR L'EXECUTION ?
6

 *********************
 **  MODULE BSPLIN.  **
 *********************

 **  DONNEES GENERALES.  **

     TITRE DU TRAVAIL:                 EXEMPLE
     NOM DU FICHIER DE LA S.D.:        F8.SD
     NIVEAU DE LA S.D.:                0
     TYPE DE PROBLEME:                 APPROXIMATION
     DIMENSION DU DOMAINE:             1
     NOMBRE DE FONCTIONS A TRAITER: 2

 **  COORDONNEES DES SOMMETS DU DOMAINE DE DEFINITION.  **

 ** COORDONNEES DES SOMMETS:
    X1 =  0.00000000E+00
    Y1 =  0.00000000E+00
    X2 =  0.31600000E+02
    Y2 =  0.00000000E+00

 **  INTERPOLATION DE LA FONCTION NUMERO: 1.  **

 ** CARACTERISTIQUES GENERALES
    NOM1 = PHI1
    KX1  =  3
    NX1  = 64
    KY1  =  0
    NY1  =  1

 ** COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 64
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** COORDONNEES DES POINTS DE RACCORD DES FONCTIONS B-SPLINES
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 67
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** VALEURS DE LA FONCTION AUX POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DE POINTS D'INTERPOLATION:   64

 ** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES AUX COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 64
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** COEFFICIENTS D'INTERPOLATION CORRESPONDANTS A CETTE FONCTION
 ** NOMBRE DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION POUR CETTE FONCTION:   64

 **  INTERPOLATION DE LA FONCTION NUMERO: 2.  **

 ** CARACTERISTIQUES GENERALES
    NOM2 = PHI2
    KX2  =  3
    NX2  = 64
    KY2  =  0
    NY2  =  1

 ** COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 64
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** COORDONNEES DES POINTS DE RACCORD DES FONCTIONS B-SPLINES
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 67
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** VALEURS DE LA FONCTION AUX POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DE POINTS D'INTERPOLATION:   64

 ** VALEURS DES FONCTIONS DE BASE B-SPLINES AUX COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION
 ** NOMBRE DES ABSCISSES: 64
 ** NOMBRE DES ORDONNEES:  1

 ** COEFFICIENTS D'INTERPOLATION CORRESPONDANTS A CETTE FONCTION
 ** NOMBRE DE COEFFICIENTS D'INTERPOLATION POUR CETTE FONCTION:   64
 ++ OPEN(11,FILE='f8.sd',SPEC='UNFORMATTED',RECL=0)

 ****************************
 **  FIN DU MODULE BSPLIN.  **
 ****************************

 -- CREATION DATA ? --- EXECUTION MODULE ? --- DESSINER S.D. ? --- FIN ?
    -                   -                      -                   -
D

 **************************************
 **  CREATION DE FICHIERS DE DESSIN.  **
 **************************************

 -- NOM DU FICHIER CONTENANT LA S.D. COOR(BSPLIN) ?
    (TAPER 'MC' SI ELLE SE TROUVE EN MEMOIRE CENTRALE)
MC
 -- NIVEAU DE LA S.D. COOR(BSPLIN) (EN MEMOIRE CENTRALE!!) ?
0
 -- DESSIN DE COURBES VIA TRACOU (OUI-NON) ?
N
 -- DESSIN DE COURBES PARAMETRISEES VIA TRACOU (OUI-NON) ?
O
 -- NOM DU FICHIER QUI CONTIENDRA LA COURBE ?
PF83
 -- NOMBRE DE POINTS POUR LE DESSIN ?
200

 **********************************************
 **  FIN DE LA CREATION DE FICHIERS DE DESSIN.  **
 **********************************************

 -- CREATION DATA ? --- EXECUTION MODULE ? --- DESSINER S.D. ? --- FIN ?
    -                   -                      -                   -
F
```

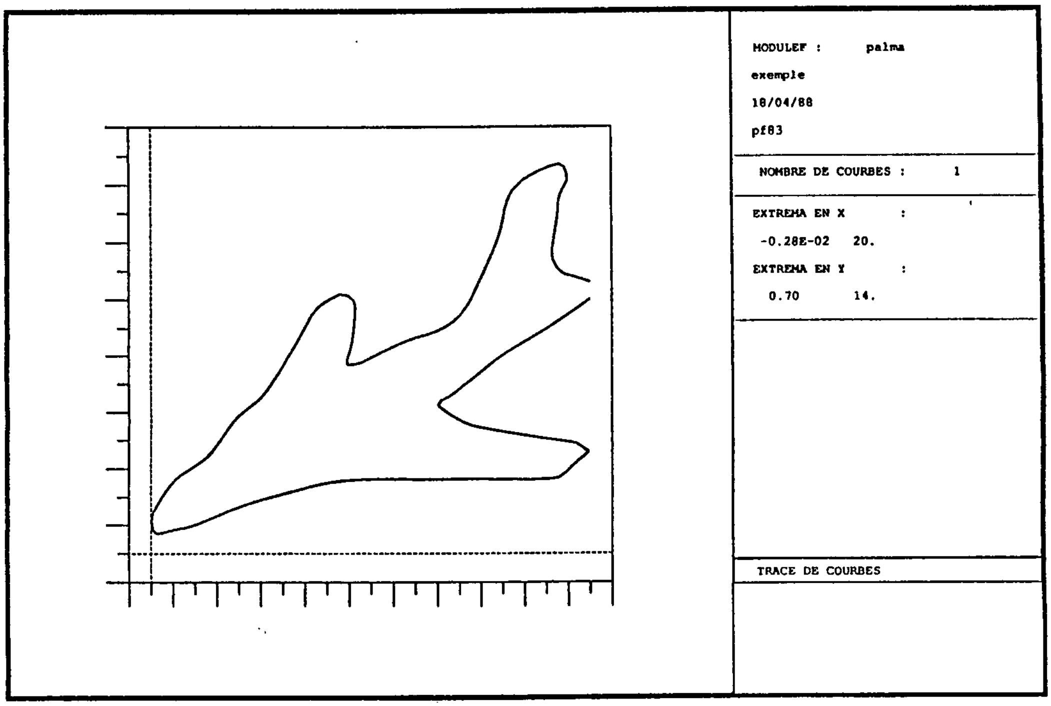
Le fichier de données créé est (légèrement abrégé) :

```
'EXEMPLE
F8.SD                                   $ NOCOOR (S.D. COOR-BSPLIN)
     0                                  $ NICOOR (S.D. COOR-BSPLIN)
     1                                  $ NCTP
     1                                  $ NDD
     2                                  $ NFT
 0.00000000E+00  0.31600000E+02         $ X1 ET X2
PHI1                                    $ NOM1
     3                                  $ KX1
    64                                  $ NX1
     3                                  $ NOPIX1
 0.10000000E+01                         $ TAUX1( 2)
 0.25000000E+01                         $ TAUX1( 3)
 0.40000000E+01                         $ TAUX1( 4)
 0.42000000E+01                         $ TAUX1( 5)
 0.44000000E+01                         $ TAUX1( 6)
 0.46000000E+01                         $ TAUX1( 7)
 0.48000000E+01                         $ TAUX1( 8)
 0.60000000E+01                         $ TAUX1( 9)
 0.73000000E+01                         $ TAUX1(10)
 0.75000000E+01                         $ TAUX1(11)
 0.76000000E+01                         $ TAUX1(12)
 0.78000000E+01                         $ TAUX1(13)
 0.80000000E+01                         $ TAUX1(14)
 0.82000000E+01                         $ TAUX1(15)
 0.85000000E+01                         $ TAUX1(16)
 0.95000000E+01                         $ TAUX1(17)
 0.11000000E+02                         $ TAUX1(18)
 0.12000000E+02                         $ TAUX1(19)
 0.13000000E+02                         $ TAUX1(20)
 0.14000000E+02                         $ TAUX1(21)
 0.15000000E+02                         $ TAUX1(22)
 0.16000000E+02                         $ TAUX1(23)
 0.16800000E+02                         $ TAUX1(24)
 0.17100000E+02                         $ TAUX1(25)
 0.17300000E+02                         $ TAUX1(26)
 0.17500000E+02                         $ TAUX1(27)
 0.17700000E+02                         $ TAUX1(28)
 0.18200000E+02                         $ TAUX1(29)
 0.18800000E+02                         $ TAUX1(30)
 0.19300000E+02                         $ TAUX1(31)
 0.19600000E+02                         $ TAUX1(32)
 0.20000000E+02                         $ TAUX1(33)
 0.20500000E+02                         $ TAUX1(34)
 0.21200000E+02                         $ TAUX1(35)
 0.21800000E+02                         $ TAUX1(36)
 0.22300000E+02                         $ TAUX1(37)
 0.22500000E+02                         $ TAUX1(38)
 0.22800000E+02                         $ TAUX1(39)
 0.23000000E+02                         $ TAUX1(40)
 0.23200000E+02                         $ TAUX1(41)
 0.23500000E+02                         $ TAUX1(42)
 0.23900000E+02                         $ TAUX1(43)
 0.24100000E+02                         $ TAUX1(44)
 0.24300000E+02                         $ TAUX1(45)
 0.24800000E+02                         $ TAUX1(46)
 0.25400000E+02                         $ TAUX1(47)
 0.25900000E+02                         $ TAUX1(48)
 0.26300000E+02                         $ TAUX1(49)
 0.26900000E+02                         $ TAUX1(50)
 0.27800000E+02                         $ TAUX1(51)
 0.28300000E+02                         $ TAUX1(52)
 0.28500000E+02                         $ TAUX1(53)
 0.28800000E+02                         $ TAUX1(54)
 0.29100000E+02                         $ TAUX1(55)
 0.29300000E+02                         $ TAUX1(56)
 0.29500000E+02                         $ TAUX1(57)
 0.29800000E+02                         $ TAUX1(58)
 0.30300000E+02                         $ TAUX1(59)
 0.30600000E+02                         $ TAUX1(60)
 0.30800000E+02                         $ TAUX1(61)
 0.31000000E+02                         $ TAUX1(62)
 0.31300000E+02                         $ TAUX1(63)
     4                                  $ NOFI1
 0.20000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 1))
 0.18500000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 2))
 0.16000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 3))
 0.13800000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 4))
 0.13400000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 5))
 0.13000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 6))
 0.13400000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 7))
 0.13800000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 8))
 0.16000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1( 9))
 0.19100000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(10))
 0.19500000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(11))
 0.19900000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(12))
 0.19500000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(13))
 0.19100000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(14))
 0.18700000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(15))
 0.18000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(16))
 0.15500000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(17))
 0.12000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(18))
 0.10000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(19))
 0.81999999999999900E+01                $ PHI1(TAUX1(20))
 0.65000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(21))
 0.42000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(22))
 0.20000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(23))
 0.90000000000000000E+00                $ PHI1(TAUX1(24))
 0.30000000000000000E+00                $ PHI1(TAUX1(25))
 0.10000000000000000E+00                $ PHI1(TAUX1(26))
 0.00000000000000000E+00                $ PHI1(TAUX1(27))
 0.20000000000000000E+00                $ PHI1(TAUX1(28))
 0.10000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(29))
 0.20000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(30))
 0.30000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(31))
 0.36000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(32))
 0.42000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(33))
 0.51000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(34))
 0.63000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(35))
 0.70000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(36))
 0.77000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(37))
 0.81000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(38))
 0.86000000000000100E+01                $ PHI1(TAUX1(39))
 0.91999999999999900E+01                $ PHI1(TAUX1(40))
 0.93000000000000100E+01                $ PHI1(TAUX1(41))
 0.91999999999999900E+01                $ PHI1(TAUX1(42))
 0.90000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(43))
 0.89000000000000000E+01                $ PHI1(TAUX1(44))
 0.93000000000000100E+01                $ PHI1(TAUX1(45))
 0.10200000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(46))
 0.11800000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(47))
 0.13000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(48))
 0.14000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(49))
 0.15000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(50))
 0.16000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(51))
 0.16300000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(52))
 0.16700000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(53))
 0.17800000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(54))
 0.18700000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(55))
 0.18900000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(56))
 0.19000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(57))
 0.18700000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(58))
 0.18500000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(59))
 0.18300000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(60))
 0.18300000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(61))
 0.18600000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(62))
 0.19200000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(63))
 0.20000000000000000E+02                $ PHI1(TAUX1(64))
PHI2                                    $ NOM2
     3                                  $ KX2
    64                                  $ NX2
     3                                  $ NOPIX2
 0.10000000E+01                         $ TAUX2( 2)
 0.25000000E+01                         $ TAUX2( 3)

.....

 0.31000000E+02                         $ TAUX2(62)
 0.31300000E+02                         $ TAUX2(63)
     4                                  $ NOFI2
 0.90000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 1))
 0.81999999999999900E+01                $ PHI2(TAUX2( 2))
 0.70000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 3))
 0.57000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 4))
 0.55000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 5))
 0.53000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 6))
 0.50000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 7))
 0.48000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 8))
 0.43000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2( 9))
 0.39000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(10))
 0.38000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(11))
 0.36000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(12))
 0.33000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(13))
 0.30000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(14))
 0.27000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(15))
 0.26000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(16))
 0.26000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(17))
 0.26000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(18))
 0.26000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(19))
 0.25000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(20))
 0.22000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(21))
 0.17000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(22))
 0.10000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(23))
 0.80000000000000000E+00                $ PHI2(TAUX2(24))
 0.70000000000000100E+00                $ PHI2(TAUX2(25))
 0.80000000000000000E+00                $ PHI2(TAUX2(26))
 0.12000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(27))
 0.16000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(28))
 0.25000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(29))
 0.31000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(30))
 0.38000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(31))
 0.45000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(32))
 0.50000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(33))
 0.56000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(34))
 0.70000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(35))
 0.80000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(36))
 0.88000000000000100E+01                $ PHI2(TAUX2(37))
 0.90000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(38))
 0.91999999999999900E+01                $ PHI2(TAUX2(39))
 0.90000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(40))
 0.86999999999999900E+01                $ PHI2(TAUX2(41))
 0.78000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(42))
 0.70000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(43))
 0.67000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(44))
 0.67000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(45))
 0.70000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(46))
 0.76000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(47))
 0.79000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(48))
 0.84000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(49))
 0.96999999999999900E+01                $ PHI2(TAUX2(50))
 0.11600000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(51))
 0.12500000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(52))
 0.13000000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(53))
 0.13500000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(54))
 0.13700000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(55))
 0.13500000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(56))
 0.13200000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(57))
 0.12700000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(58))
 0.11700000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(59))
 0.10800000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(60))
 0.10400000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(61))
 0.10000000000000000E+02                $ PHI2(TAUX2(62))
 0.98000000000000100E+01                $ PHI2(TAUX2(63))
 0.96000000000000000E+01                $ PHI2(TAUX2(64))
```

Finalement, la visualisation de la courbe paramétrée est :

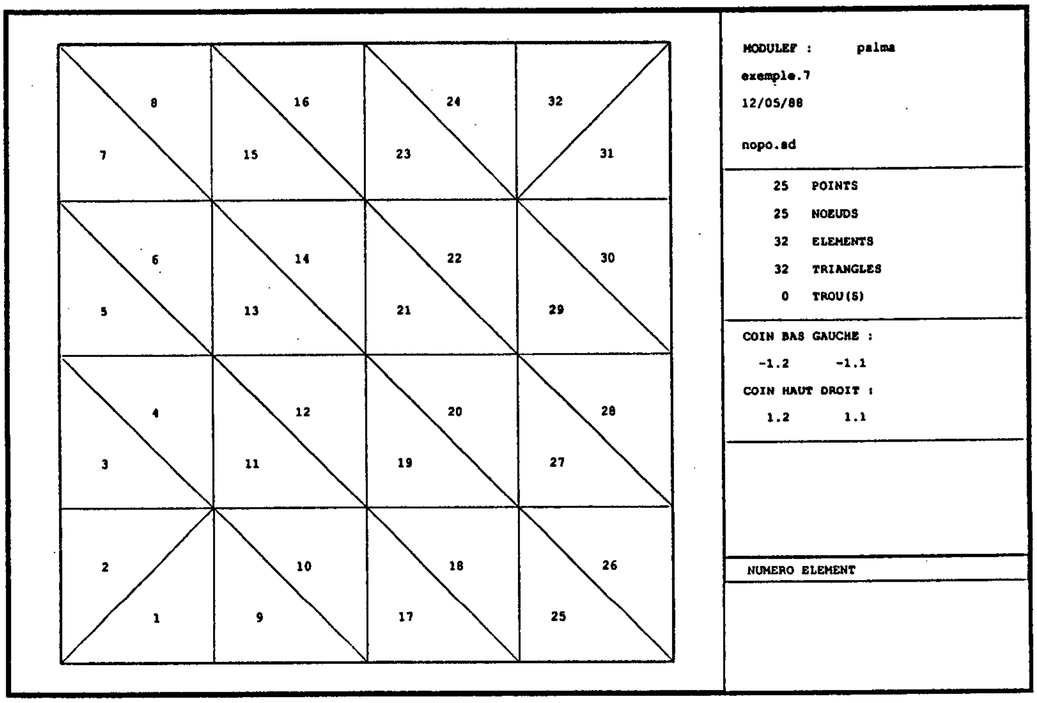


A titre d'exemple nous donnons aussi le fichier de données et le sous-programme fonction utilisé dans l'exemple 7 pour le barrage.

```
'exemple.7
F7.SD                                   $ NOCOOR (S.D. COOR-BSPLIN)
     0                                  $ NICOOR (S.D. COOR-BSPLIN)
     1                                  $ NCTP
     2                                  $ NDD
     4                                  $ NFT
 0.00000000E+00 0.10000000E+01          $ X1 ET X2
 0.00000000E+00 0.10000000E+01          $ Y1 ET Y2
PHI1                                    $ NOM1
     5                                  $ KX1
    11                                  $ NX1
     5                                  $ KY1
    11                                  $ NY1
     1                                  $ NOPIX1
     1                                  $ NOPIY1
     3                                  $ NOFI1
     1                                  $ NR1
PHI2                                    $ NOM2
     5                                  $ KX2
    11                                  $ NX2
     5                                  $ KY2
    11                                  $ NY2
     1                                  $ NOPIX2
     1                                  $ NOPIY2
     3                                  $ NOFI2
     2                                  $ NR2
PHI3                                    $ NOM3
     5                                  $ KX3
    11                                  $ NX3
     5                                  $ KY3
    11                                  $ NY3
     1                                  $ NOPIX3
     1                                  $ NOPIY3
     3                                  $ NOFI3
     3                                  $ NR3
EPAI                                    $ NOM3
     2                                  $ KX3
    11                                  $ NX3
     2                                  $ KY3
    11                                  $ NY3
     1                                  $ NOPIX3
     1                                  $ NOPIY3
     3                                  $ NOFI3
     4                                  $ NR3
```

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION DEFFO2(NR,X,Y)
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C BUT: DEFINIR L'UTILISATEUR UNE OU PLUSIEURS FONCTIONS.
C ---
C
C PARAMETRES D'ENTREE:
C -------------------
C  NR     - NUMERO DE REFERENCIE DE LA FONCTION
C  X, Y   - POINT OU ON CALCULE LA FONCTION
C
C PARAMETRE DE SORTIE:
C -------------------
C  DEFFO2 - VALEUR DE LA FONCTION
C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C PROGRAMMEUR: F. PALMA, INRIA ET UNIV. MALAGA, FEVRIER-88.
C ......................................................................
      DOUBLE PRECISION PI,XX,YY,RO,Z,A,T,X1
      DATA PI /3.14159265358979300/
C
      XX - DBLE(X)
      YY - DBLE(Y)
      Z  - 157.
      A  - TAN(PI/4.5)
      T  - 48.178*PI/180.
      RO - 200.-0.008233*Z**2*YY**2+0.000029*Z**3*YY**3
      X1 - XX
C
      IF (NR.EQ.1) THEN
       DEFFO2 = RO*(EXP(A*T*ABS(XX))*COS(T*ABS(XX)+PI/4.5)-COS(PI/4.5))
     &          +0.269*Z*YY-0.00000*Z**3*YY**3
      ELSEIF (NR.EQ.2) THEN
       IF (XX.EQ.0.) X1 = 1.
       DEFFO2 = ABS(XX)*RO*(EXP(A*T*ABS(XX))*SIN(T*ABS(XX)+PI/4.5)
     &          -SIN(PI/4.5))/X1
      ELSEIF (NR.EQ.3) THEN
       DEFFO2 = -Z*YY
      ELSEIF (NR.EQ.4) THEN
       DEFFO2 = 8.+0.248*Z*YY-0.000003*Z**3*YY**3+2.D-8*Z**2*YY**2
     &          *(1.+0.003*Z*YY)*((EXP(A*T*ABS(XX))-1)*RO
     &          /SIN(PI/4.5))**2
      ENDIF
      END
```

Maintenant nous donnons l'impression de la S.D. COOR (BSPLIN) créée dans l'exemple 7 pour le cas du paraboloide hyperbolique et en faisant aussi l'interface avec le maillage suivant :



```
imaQ<x
 **************
 APPEL DE IM'SD'
 **************

 -- NOM DU FICHIER CONTENANT LA S.D. ?
F6.SD
 -- FICHIER ACCES DIRECT (OUI-NON) ?
N
 -- PARAMETRE D'IMPRESSION ?
10
 -- SORTIE SUR ECRAN (OUI-NON) ?
O
 &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

     IMPRESSION DE LA S.D. COOR DE NIVEAU  0

 &&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&
 TITRE                            : exemple.7
 DATE ET NOM UTILISATEUR          : 18/04/88  palma
 TYPE DE LA STRUCTURE DE DONNEES  : COOR
 NIVEAU ET NUMERO D'ETAT          :       0     0
 NOMBRE DE TABLEAUX ASSOCIES      :       5

 LE  TABLEAU  1 : COO5 DE TYPE ENTIER       A      8 MOTS
 CONTENU DE CE TABLEAU  :   NDD,NE,NFT; BOUCLE SUR NFT: NOM,KX,NX,KY,NY.
 NOM  :   COO5 TYPE :  1 VALEURS :
              2          32           1  1179602486          3           7
              3           7
 LE  TABLEAU  2 : COO6 DE TYPE REEL1MOT    A     14 MOTS
 CONTENU DE CE TABLEAU  :   TAU: COORDONNEES DES POINTS D'INTERPOLATION.
 NOM  :   COO6 TYPE :  2 VALEURS :
  -0.1000000E+01 -0.6666666E+00 -0.3333333E+00  0.0000000E+00  0.3333334E+00
   0.6666666E+00  0.1000000E+01 -0.1000000E+01 -0.6666666E+00 -0.3333333E+00
   0.0000000E+00  0.3333334E+00  0.6666666E+00  0.1000000E+01
 LE  TABLEAU  3 : COO7 DE TYPE REEL2MOT    A     98 MOTS
 CONTENU DE CE TABLEAU  :   ALPHA: COEFFICIENTS D'INTERPOLATION.
 NOM  :   COO7 TYPE :  5 VALEURS :
   0.0000000000000000E+00  0.5000000703700860E-01  0.9166666862581220E-01
   0.1027777803997539E+00  0.9166666189000315E-01  0.4999999758749560E-01
   0.0000000000000000E+00 -0.5000000703700860E-01 -0.4462351202384565E-17
   0.4166666118980029E-01  0.5277777186401431E-01  0.4166666919222956E-01
  -0.7261340699815153E-08 -0.5000000703700860E-01 -0.9166666862581220E-01
  -0.4166666118980027E-01 -0.2761864522931170E-17  0.1111111029823814E-01
  -0.2963522133699357E-08 -0.4166666375144643E-01 -0.9166666862581220E-01
  -0.1027777803997539E+00 -0.5277777186401432E-01 -0.1111111029823813E-01
  -0.2115668612747035E-18 -0.1111111150720803E-01 -0.5277777517761172E-01
  -0.1027777803997539E+00 -0.9166666189000315E-01 -0.4166666919222954E-01
   0.2963522132328314E-08  0.1111111150720803E-01  0.1292654061854142E-18
  -0.4166667175387553E-01 -0.9166666189000315E-01 -0.4999999758749560E-01
   0.7261340696186909E-08  0.4166666375144644E-01  0.5277777517761170E-01
   0.4166667175387553E-01 -0.3443936619657249E-17 -0.4999999758749560E-01
   0.0000000000000000E+00  0.5000000703700860E-01  0.9166666862581220E-01
   0.1027777803997539E+00  0.9166666189000315E-01  0.4999999758749560E-01
   0.0000000000000000E+00
 LE  TABLEAU  4 : COO8 DE TYPE ENTIER       A     33 MOTS
 CONTENU DE CE TABLEAU  :   NMVCE; BOUCLE SUR NE: NVCE.
 NOM  :   COO8 TYPE :  1 VALEURS :
             24           9           9          15          15          12
             12           9           9          15          15          24
             22          19          19          15          15          12
             12          19          19          16          15          12
             12           9           9          15          15          12
             12           9           9
 LE  TABLEAU  5 : COO9 DE TYPE ENTIER       A    441 MOTS
 CONTENU DE CE TABLEAU  :   BOUCLE SUR NE: BOUCLE SUR NVCE: NUVCE.
 NOM  :   COO9 TYPE :  1 VALEURS :
              1           2           3           8           9          10
             15          16          17           1           2           3
              8           9          10          15          16          17
              1           2           3           8           9          10
             15          16          17          22          23          24
             29          30          31           1           2           3
              8           9          10          15          16          17
             22          23          24          29          30          31
             15          16          17          22          23          24
             29          30          31          36          37          38
             15          16          17          22          23          24
             29          30          31          36          37          38
             29          30          31          36          37          38
             43          44          45          29          30          31
             36          37          38          43          44          45
              1           2           3           4           5           8
              9          10          11          12          15          16
             17          18          19           1           2           3
              4           5           8           9          10          11
             12          15          16          17          18          19
              1           2           3           4           5           8
              9          10          11          12          15          16
             17          18          19          22          23          24
             25          26          29          30          31          32
              3           4           5           9          10          11
             12          15          16          17          18          19
             22          23          24          25          26          29
             30          31          32          33          15          16
             17          18          19          22          23          24
             25          26          29          30          31          32
             33          36          37          38          39          16
             17          18          19          22          23          24
             25          26          29          30          31          32
             33          36          37          38          39          40
             29          30          31          32          33          36
             37          38          39          40          43          44
             45          46          47          29          30          31
             32          33          36          37          38          39
             40          43          44          45          46          47
              3           4           5           6          10          11
             12          13          17          18          19          20
              3           4           5           6          10          11
             12          13          17          18          19          20
```

```
              3           4           5           6          10          11
             12          13          17          18          19          20
             24          25          26          27          31          32
             33           4           5           6          10          11
             12          13          17          18          19          20
             24          25          26          27          31          32
             33          34          17          18          19          20
             24          25          26          27          31          32
             33          34          38          39          40          41
             18          19          20          24          25          26
             27          31          32          33          34          38
             39          40          41          31          32          33
             34          38          39          40          41          45
             46          47          48          31          32          33
             34          38          39          40          41          45
             46          47          48           5           6           7
             12          13          14          19          20          21
              5           6           7          12          13          14
             19          20          21           5           6           7
             12          13          14          19          20          21
             26          27          28          33          34          35
              5           6           7          12          13          14
             19          20          21          26          27          28
             33          34          35          19          20          21
             26          27          28          33          34          35
             40          41          42          19          20          21
             26          27          28          33          34          35
             40          41          42          33          34          35
             40          41          42          47          48          49
             33          34          35          40          41          42
             47          48          49

 TABLEAU C O O 2
 ---------------
 TYPE DU TABLEAU COO4                   (NTYT) :      2
 NOMBRE DE SES INDICES                 (NINDI) :      2
 DIMENSION DU DOMAINE                   (NDIM) :      1
 VALEUR MAXIMALE DU DEUXIEME INDICE       (M2) :     20
 CODE DE LA SEGMENTATION               (NCODS) :      1
 NOMBRE DE BLOCS                       (NBLOC) :      1
 TYPE DES AXES DES COORDONNEES        (NTACOO) :      1

 TABLEAU C O O 3
 ---------------
  LISTE DES NUMERO DES COLONNES DE FIN DES PAGES

 ------------------------------------------
 PAGE     1 :     20   PAGE

 ------------------------------------------


 TABLEAU C O O 4
 ---------------
 ---------
 | POINT |
 ---------
 -0.10000000E+01
 -0.10000000E+01
 -0.10000000E+01
 -0.50000000E+00
 -0.16666670E+00
  0.16666670E+00
  0.50000000E+00
  0.10000000E+01
  0.10000000E+01
  0.10000000E+01
 -0.10000000E+01
 -0.10000000E+01
 -0.10000000E+01
 -0.50000000E+00
 -0.16666670E+00
  0.16666670E+00
  0.50000000E+00
  0.10000000E+01
  0.10000000E+01
  0.10000000E+01

 -- IMPRESSION --- FIN   ?
     -             -
F
Fortran STOP
```

Pour finir, nous donnons le programme utilisé daans l'exemple 4 (fonction en escalier) pour comparer la fonction exacte et la fonction approchée. Il montre l'utilisation des sous-programmes utilitaires décrits dans le paragraphe 3.4.

```
      program test3
C comparaison de la fonction exacte et la fonction approchee
      double precision dm,deffol,xx,fa
      character nocoor*32,nom*4
      dimension m(100000),nz(16)
      equivalence (dm,m(1))
      call initis(m,100000,0,0)
C lecture de donnees
      print*,'nom du fichier contenant la S.D. COOR(BSPLIN)'
      call libcar(nocoor)
      print*,'nombre de points'
      read*,np
      print*,'numero de la fonction'
      read*,nfo
C restauration de la S.D.
      call trunit(nf)
      call ouvris(nf,nocoor,'OLD,UNFORMATTED',0)
      call recobs(m,nf,0,nz,nt,ndd,ne,nft,nvc,nmvce,x1,x2,y1,y2)
      close(nf)
      if (ndd.eq.2) stop
C recuperation des caracteristiques de la fonction
      call recafo(m,nz,nfo,nom,kx,nx,ky,ny,iataux,iatauy,iatx,iaty,
     &            iaalpha)
C ouverture du fichier de dessin
      call trunit(nfd)
      call ouvris(nfd,'comp.'//nom,' ',0)
      write(nfd,*) 2
C abscisses des points
      write(nfd,*) np
      do 1 i=1,np
       write(nfd,*) x1+(x2-x1)*real(i-1)/real(np-1)
    1 continue
C valeurs de la fonction exacte
      do 2 i=1,np
       x = x1+(x2-x1)*real(i-1)/real(np-1)
       write(nfd,*) deffol(1,x)
    2 continue
C abscisses des points
      write(nfd,*) np
      do 3 i=1,np
       write(nfd,*) x1+(x2-x1)*real(i-1)/real(np-1)
    3 continue
C valeurs de la fonction approchee
      do 4 i=1,np
       xx = dble(x1+(x2-x1)*real(i-1)/real(np-1))
       call fabspl(nx,ny,0,m,kx,ky,xx,0.d0,iatx,iaty,ndd,iaalpha,fa)
       write(nfd,*) fa
    4 continue
C fermeture du fichier de dessin
      close(nfd)
      end
```

Bibliographie

BERNADOU, M.; BOISSERIE, J.M. [1982] : The finite element method in thin shell theory : Application to Arch Dam Simulations ; Birkhaüser, Boston.

BERNADOU, M. ; GEORGE, P.L. ; HASSIM, A. ; JOLY, P. ; LAUG, P. ; PERRONNET, A. ; SALTEL, E. ; STERR, D. ; VANDERBORCK, G. ; VIDRASCU, M. [1985] : Modulef : une bibliothèque modulaire d'éléments finis ; INRIA.

BERNADOU, M. ; LALANNE, B. [1986] : Sur l'approximation des coques minces par des méthodes "B-Splines et éléments finis"; Part 1 : Formulation du problème et estimations d'erreur ; Rapport de Recherche INRIAR n°474.

BOOR, C. de [1978] : A practical guide to Splines, Springer-Verlag, New-York.

LAUG, P. [1984] : Les fonctions interprétées. Manuel d'utilisation, de programmation, de référence. Rapport technique INRIA n°38.

MICCHELLI, C.A. ; RIVLIN, T.J. ; WINOGRAD, S. [1976] : The optimal recovery of smooth functions. Num. Math. 26, pp. 191-200.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique