

**Estimateur d'erreur géométrique et métriques
anisotropes pour l'adaptation de maillage: Partie II:
exemples d'applications**

Frédéric Alauzet, Pascal Frey

► **To cite this version:**

Frédéric Alauzet, Pascal Frey. Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage: Partie II: exemples d'applications. [Rapport de recherche] RR-4789, INRIA. 2003. inria-00071797

HAL Id: inria-00071797

<https://hal.inria.fr/inria-00071797>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Estimateur d'erreur géométrique et métriques
anisotropes pour l'adaptation de maillage.
Partie II : exemples d'applications*

Frédéric Alauzet — Pascal J. Frey

N° 4789

31 mars 2003

THÈME 4



*Rapport
de recherche*



Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie II : exemples d'applications

Frédéric Alauzet^{*}, Pascal J. Frey[†]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4789 — 31 mars 2003 — 37 pages

Résumé : Ce rapport présente quelques résultats relatifs à l'adaptation de maillages anisotropes non structurés, en dimensions deux et trois. Dans la partie I de ce rapport, on a décrit un estimateur d'erreur géométrique *a posteriori* basé sur une majoration de l'erreur d'interpolation. A l'aide de cet estimateur on peut construire une carte de métriques basée sur une approximation discrète du hessien de la solution qui va servir à générer un maillage unité vis-à-vis de cette carte de métriques. Plusieurs exemples analytiques sont d'abord fournis pour valider l'estimateur d'erreur proposé. Ensuite un exemple en mécanique des fluides est montré.

Mots-clés : Adaptation de maillage, maillage anisotrope, estimateur d'erreur *a posteriori*, erreur d'interpolation, métrique, maillage unité.

^{*} Email : Frederic.Alauzet@inria.fr

[†] Email : Pascal.Frey@inria.fr

Geometric error estimate and anisotropic metrics for mesh adaptation.

Part 2: application examples

Abstract: This report presents several results related to the anisotropic unstructured mesh adaptation, in two and three dimensions. In the first part of this study, we have described an *a posteriori* geometric error estimate based on a majoration of the interpolation error. Then, using this error estimate, a metric map based on a discrete approximation of the hessian of the solution is constructed that will be used to construct a unit mesh with respect to this metric map. Several analytical examples are presented here to validate the proposed error estimate. Then, a CFD example is shown.

Key-words: Mesh adaptation, anisotropic mesh, *a posteriori* error estimate, interpolation error, metric, unit mesh.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Exemples analytiques	5
2.1	Calcul de l'écart à la surface	6
2.2	Une fonction simple 2D : un sinus	7
2.3	Intersection de deux champs 2D anisotropes	12
2.4	Un exemple simple en dimension trois	17
2.5	Intersection de deux champs en dimension trois	22
2.6	Un cas simple sur un supertoroïde	27
3	Application en mécanique des fluides	31
3.1	Scramjet en régime supersonique	31
4	Une brève conclusion	37

1 Introduction

On a présenté dans [1] un estimateur d'erreur géométrique *a posteriori*, basé sur une majoration de l'erreur d'interpolation. Celui-ci est destiné à définir une carte de métriques anisotrope pouvant servir à gouverner la génération de maillages dans le souci d'équi-répartir dans chaque direction l'erreur évaluée sur le maillage. Cet estimateur d'erreur est basé sur le hessien des variables du problème, ce qui lui confère son caractère anisotrope. La métrique résultante permet de modifier le produit scalaire usuel qui sous-tend la notion de distance utilisée par le générateur de maillage. Le maillage désiré est ainsi un maillage unité dans cette métrique, sur lequel l'erreur d'interpolation est bornée par le seuil prescrit. L'appellation "géométrique" vient du fait que la solution sur un maillage peut être vue comme une surface cartésienne, on cherche alors à définir une métrique géométrique permettant de contrôler l'écart à cette surface. De la sorte, il apparaît clairement que l'estimateur d'erreur est indépendant du type de problème à résoudre.

Cette approche a été implémentée dans le contexte de simulations numériques, les exemples considérés ici étant de nature analytiques ou correspondant à des calculs en mécanique des fluides.

On considère deux séries d'exemples. Dans la première, on étudie plusieurs champs analytiques en dimensions deux et trois, destinés à valider l'estimateur d'erreur (le contrôle de l'écart à la surface analytique). En particulier, on va s'attacher à illustrer le calcul du hessien d'un champ de solutions discret, ainsi que l'intersection de plusieurs métriques anisotropes. Dans la seconde série, un exemple d'adaptation de maillage est tiré d'un problème classique de mécanique des fluides.

2 Exemples analytiques

Dans cette section, on va présenter quelques exemples d'adaptation de maillages basés sur des champs analytiques en dimensions deux et trois. Pour cela, le champ considéré est défini par une fonction analytique de \mathbb{R}^d à valeur dans \mathbb{R} , représentant une surface cartésienne de \mathbb{R}^{d+1} . La génération des maillages adaptés aux champs prescrits fait appel à une boucle d'adaptation de maillage. Un tel schéma itératif se compose de plusieurs étapes. D'abord, un maillage initial du domaine est créé, aux nœuds duquel le champ discret est calculé (la valeur de la fonction est calculée en chaque sommet). Puis, l'estimateur d'erreur proposé évalue l'erreur d'interpolation commise sur ce maillage. Si celle-ci est inférieure au seuil prescrit, le couple maillage-solution est jugé satisfaisant et le calcul peut s'arrêter. Sinon, on construit une carte de métriques anisotrope aux sommets de ce maillage et on cherche à l'adapter. On cherche alors à générer un maillage unité vis-à-vis de cette métrique. Enfin, le processus est itéré. Généralement, en quelques itérations, une solution stable pour le couple maillage-solution est obtenue.

Le couple maillage-métrique forme l'*espace de contrôle* qui va servir à gouverner la génération du nouveau maillage adapté. Le maillage de l'espace de contrôle est appelé la *maillage de fond*. Plus précisément, la métrique en tout nouveau sommet est obtenue par un schéma d'interpolation (à partir des métriques aux sommets de l'élément du maillage de fond contenant ce point) et non en faisant appel à la fonction analytique.

En pratique, les algorithmes de maillage utilisés sont basés soit sur des méthodes d'optimisation locales (ajout/suppression de sommet, bascule d'arête, bougé de sommet, etc.) en dimension deux et pour la surface en dimension trois [3], soit sur une méthode de type Delaunay (remaillage global du domaine) pour le volume en dimension trois [5].

Pour chaque exemple, on va préciser en particulier :

- le nombre d'adaptations de maillages,
- la taille des maillages : np le nombre de points et ne le nombre d'éléments (triangles ou tétraèdres),
- le seuil d'erreur prescrit ε (on cherche à construire un maillage tel que, pour chaque élément, $\varepsilon_K = \|u - \Pi_h u\|_{\infty, K} \leq \varepsilon$), l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{ne} \sum_K \varepsilon_K$ et l'erreur maximale $\varepsilon_{max} = \max_K \varepsilon_K$ commises sur un élément (correspondant respectivement à l'écart moyen et à l'écart maximal à la surface),
- le temps cpu t de la génération de maillage (en sec. sur une station de travail HP PA-RISC à 500 Mhz, incluant les entrées/sorties).

En outre, pour chaque exemple, on montre plusieurs maillages adaptés et les cartes des écarts à la surface (analytique) aux éléments. En dimension deux, on donne de plus les surfaces cartésiennes correspondant au champ prescrit.

Avant de détailler les résultats sur des exemples analytiques, on va préciser de quelle façon l'écart à la surface est calculé.

2.1 Calcul de l'écart à la surface

L'objectif de cette étude est d'illustrer le comportement de l'estimateur d'erreur géométrique. On cherche donc à démontrer que cet estimateur basé sur le hessien de la solution contrôle effectivement un écart à la surface. Pour cela, on va comparer cet écart calculé sur chaque élément au seuil ε prescrit.

En dimension deux, l'écart à la surface de chaque élément est calculé en considérant la valeur maximale entre les écarts aux milieux des arêtes et l'écart au barycentre du triangle. Si on note $(x_i, y_i)_{i=1,3}$ les coordonnées des sommets du triangle K , x_g, y_g les coordonnées du barycentre de K et $(x_{e_j}, y_{e_j})_{j=1,3}$ les coordonnées des milieux des arêtes de K . Alors, l'écart de l'élément ε_K est donné par la formule :

$$\varepsilon_K = \max\left(\max_{j=1,3}(\varepsilon_{K,e_j}), \varepsilon_{K,g}\right),$$

où $\varepsilon_{K,g}$ (resp. ε_{K,e_j}) est l'écart du barycentre (resp. du milieu de l'arête e_j) de K avec la surface, qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{K,g} &= \left|f(x_g, y_g) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 f(x_i, y_i)\right|, \\ \varepsilon_{K,e_j} &= \left|f(x_{e_j}, y_{e_j}) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} f(x_i, y_i)\right|.\end{aligned}$$

De manière similaire, en dimension trois, on va comparer cet écart calculé sur chaque tétraèdre au seuil ε prescrit. L'écart à l'hypersurface de chaque élément est calculé en considérant la valeur maximale entre les écarts aux milieux des arêtes, les écarts aux milieux des faces et l'écart au barycentre du tétraèdre. On note $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,4}$ les coordonnées des sommets de l'élément K , x_g, y_g, z_g les coordonnées du barycentre de K , $(x_{f_k}, y_{f_k}, z_{f_k})_{k=1,4}$ les coordonnées des milieux des faces de K et $(x_{e_j}, y_{e_j}, z_{e_j})_{j=1,6}$ les coordonnées des milieux des arêtes de K . Alors, l'écart de l'élément ε_K est donné par la formule :

$$\varepsilon_K = \max\left(\max_{j=1,6}(\varepsilon_{K,e_j}), \varepsilon_{K,g}, \max_{k=1,4}(\varepsilon_{K,f_k})\right),$$

où $\varepsilon_{K,g}$ (resp. $\varepsilon_{K,e_j}, \varepsilon_{K,f_k}$) est l'écart du barycentre (resp. du milieu de l'arête e_j , du milieu de la face f_k) de K avec l'hypersurface, qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{K,g} &= \left|f(x_g, y_g, z_g) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 f(x_i, y_i, z_i)\right|, \\ \varepsilon_{K,e_j} &= \left|f(x_{e_j}, y_{e_j}, z_{e_j}) - \frac{1}{2}(f(x_{i_1}, y_{i_1}, z_{i_1}) + f(x_{i_2}, y_{i_2}, z_{i_2}))\right| \quad \text{avec } i_1, i_2 \in \{1..4\}, \\ \varepsilon_{K,f_k} &= \left|f(x_{f_k}, y_{f_k}, z_{f_k}) - \frac{1}{3} \sum_{i \neq k} f(x_i, y_i, z_i)\right|.\end{aligned}$$

Pour résumer, on s'attend à trouver une valeur moyenne (resp. maximale) de l'écart calculé sur un maillage adapté (convergé) inférieure ou égale au seuil ε donné. Un tel résultat permet de valider l'estimateur d'erreur proposé, c'est-à-dire le fait que cet estimateur contrôle effectivement l'écart à la surface.

2.2 Une fonction simple 2D : un sinus

On considère la surface cartésienne suivante, définie sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$f_1(x, y) = \sin(5(x - 0.2)^3(y^2 - y + 1)),$$

qui présente une série d'oscillations anisotropes (Figure 1, en bas à droite). Cet exemple va servir, d'une part, à démontrer que l'estimateur d'erreur basé sur le hessien de la solution contrôle l'écart à la surface cartésienne (ceci est possible car le hessien analytique est connu) et, d'autre part, à valider l'évaluation discrète du hessien par une méthode de moindres carrés. On a donc effectué deux séries d'adaptations de maillages correspondant à ces deux situations.

Pour chaque série d'adaptations, on a arbitrairement fixé le nombre maximal d'adaptations de maillages à 7, le seuil d'erreur toléré est $\varepsilon = 0.0033$ et la taille minimale (resp. maximale) des éléments du maillage est fixée à $h_{min} = 0.001$ (resp. $h_{max} = 1.$). Le maillage initial est un maillage du domaine de calcul très grossier (52 sommets, Figure 1, en haut à gauche).

Dans la première série d'adaptations de maillage, on calcule le hessien de la solution de manière exacte (en utilisant les dérivées analytiques). Le Tableau 1 reporte les statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés. On peut remarquer qu'à la fin des 7 itérations d'adaptation, l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0021$ est inférieure au seuil $\varepsilon = 0.0033$ fixé, sur le maillage final (3 323 sommets) et que 94 % des éléments ont un écart calculé inférieur ou égal à ε . Ce résultat, qui indique qu'environ 6 % des triangles sont mal contrôlés, appelle une remarque.

Remarque 2.1 Rappelons que la métrique \mathcal{M} , fournie par l'estimateur d'erreur, prescrit des informations relatives à la taille et à l'étirement des triangles pour les algorithmes de maillage. Ceux-ci, qui visent à créer des maillages unités, utilisent une formule de longueur moyenne pour calculer la longueur des arêtes dans la métrique [1]. En pratique, toute arête AB du maillage unité est de longueur proche de un, plus précisément elle satisfait la relation suivante [4] :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l_{\mathcal{M}}(AB) \leq \sqrt{2}.$$

Dans le cas limite $l_{\mathcal{M}}(AB) = \sqrt{2}$, l'erreur commise correspond à deux fois l'erreur tolérée (cf. Relation (17) dans [1]). Ainsi, pour qu'un élément soit unité (c'est-à-dire que ses arêtes sont toutes de longueur proche de un), il faut que l'écart relatif soit inférieur à 2ε .

Compte tenu de cette remarque, l'erreur maximale mesurée sur un triangle étant de 0.0044, donc inférieure à $2\varepsilon = 0.0066$, le maillage adapté à l'itération 7 est donc un maillage unité. Ce résultat confirme que l'estimateur d'erreur contrôle effectivement l'écart à la surface. Il est à noter que dans cet exemple, 3 adaptations de maillage ont suffi pour obtenir un maillage unité, ce qui indique que la convergence du couple maillage-solution est atteinte. La Figure 3 (en haut) montre le maillage final adapté (itération 7) et la carte d'erreurs aux triangles associée.

Itération	np	ne	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	52	81	-	0.5073	1.8094	0.	0.
2	3 367	6 218	2.83	0.0021	0.0175	92.2	99.9
3	3 341	6 153	1.91	0.0021	0.0045	93.6	100.
5	3 325	6 119	1.73	0.0021	0.0044	94.2	100.
7	3 323	6 115	1.51	0.0021	0.0044	94.	100.

TAB. 1 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour la surface définie par $f_1(x, y)$, dans le cas où le hessien est donné par la formule analytique.

Dans la seconde série d'adaptations, l'évaluation du hessien de la solution est effectuée par une méthode de moindres carrés. Le Tableau 2 reporte les statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés. La Figure 2 illustre les maillages adaptés aux itérations 2, 3 et 5, ainsi que les cartes d'erreurs aux triangles correspondantes. La Figure 3 (au milieu) illustre le maillage final et la carte d'erreur associée. On peut remarquer qu'à la fin des 7 itérations d'adaptation, l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0025$ est inférieure au seuil $\varepsilon = 0.0033$ fixé, sur le maillage final (2817 sommets). De plus, le maillage 7 est un maillage unité ($\varepsilon_{max} < 2\varepsilon$) et 84.3 % des triangles satisfont l'erreur ε . Il est à noter que dans cette série, contrairement au cas précédent, les 7 adaptations de maillage ont été nécessaires pour obtenir un maillage unité.

Itération	np	ne	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	52	81	-	0.5073	1.8094	0.	0.
2	5 100	9 786	3.4	0.0055	0.1150	50.3	79.1
3	4 289	8 070	3.75	0.0023	0.0188	84.1	99.3
5	2 825	5 156	2.22	0.0025	0.0074	80.3	99.9
7	2 817	5 129	1.72	0.0025	0.0063	84.3	100

TAB. 2 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour la surface définie par $f_1(x, y)$, dans le cas où le hessien est calculé par moindres carrés.

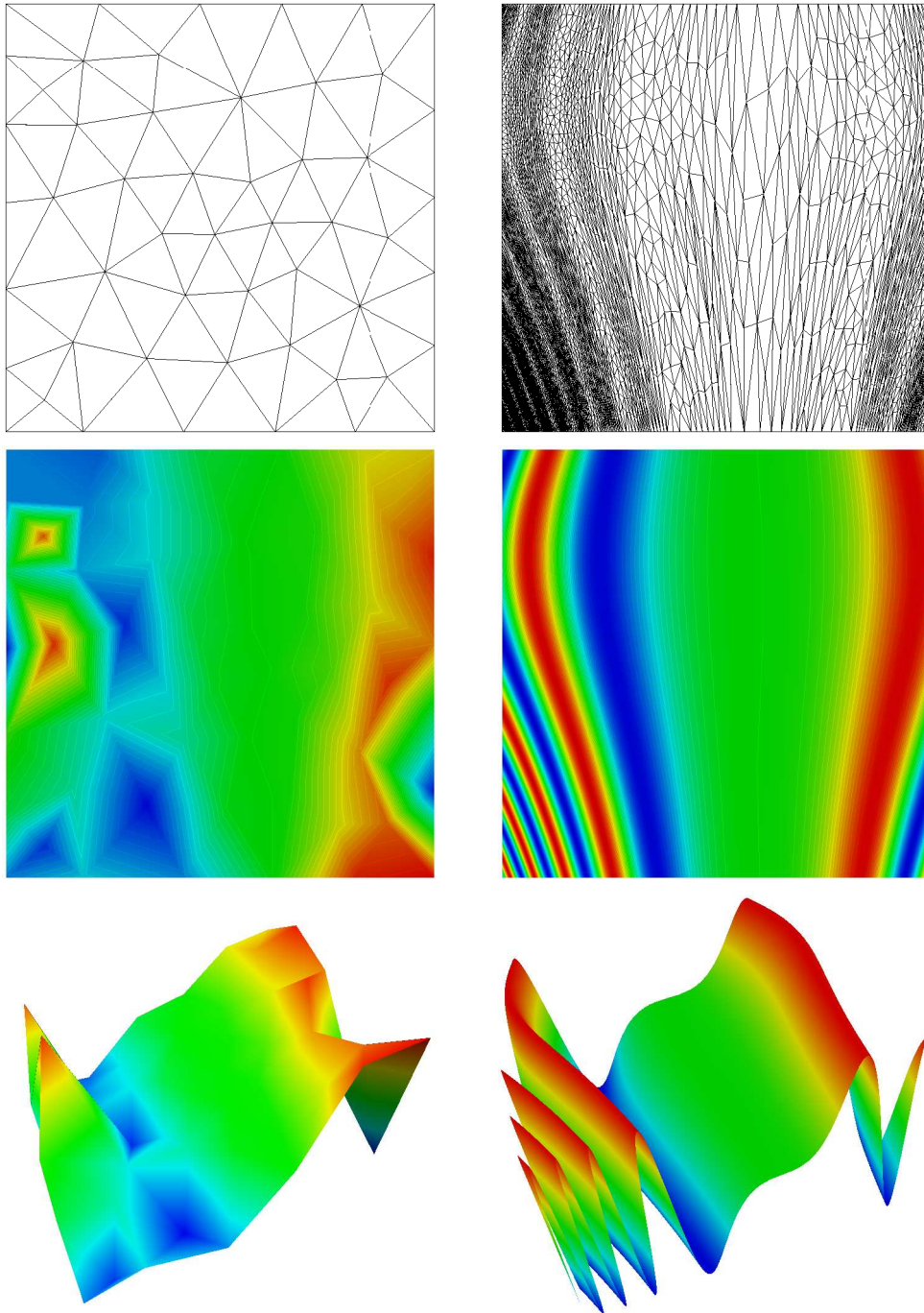


FIG. 1 – Capture d'une surface analytique simple. À gauche, maillage initial, iso-valeurs de la solution et surface correspondante. À droite, maillage final (itération 7), iso-valeurs de la solution et surface correspondante dans le cas du schéma d'adaptation avec une évaluation du hessien par moindres carrés.

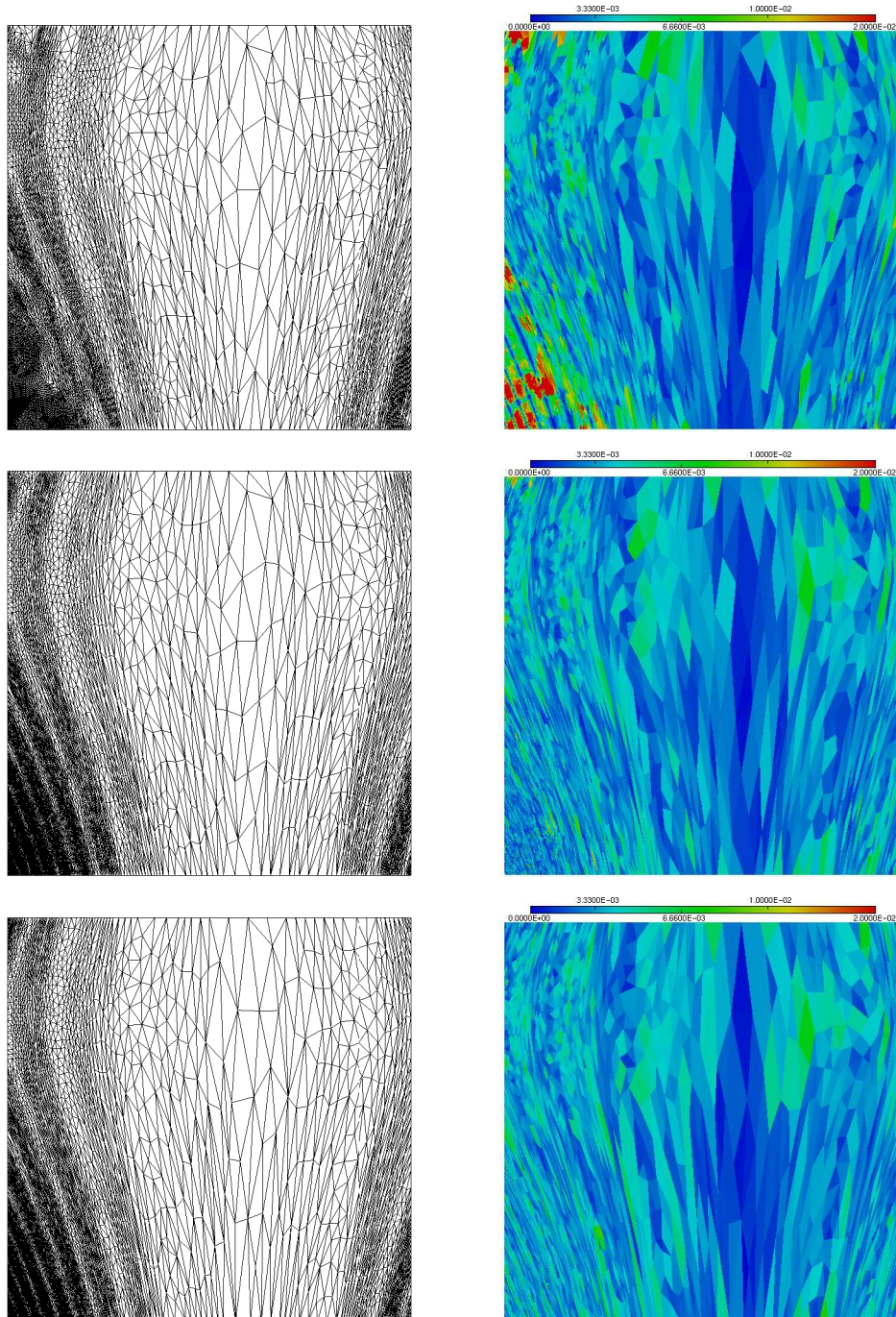


FIG. 2 – *Maillages adaptés (à gauche) et cartes des écarts aux triangles à la surface analytique (à droite) aux itérations 2, 3 et 5 (de haut en bas).*

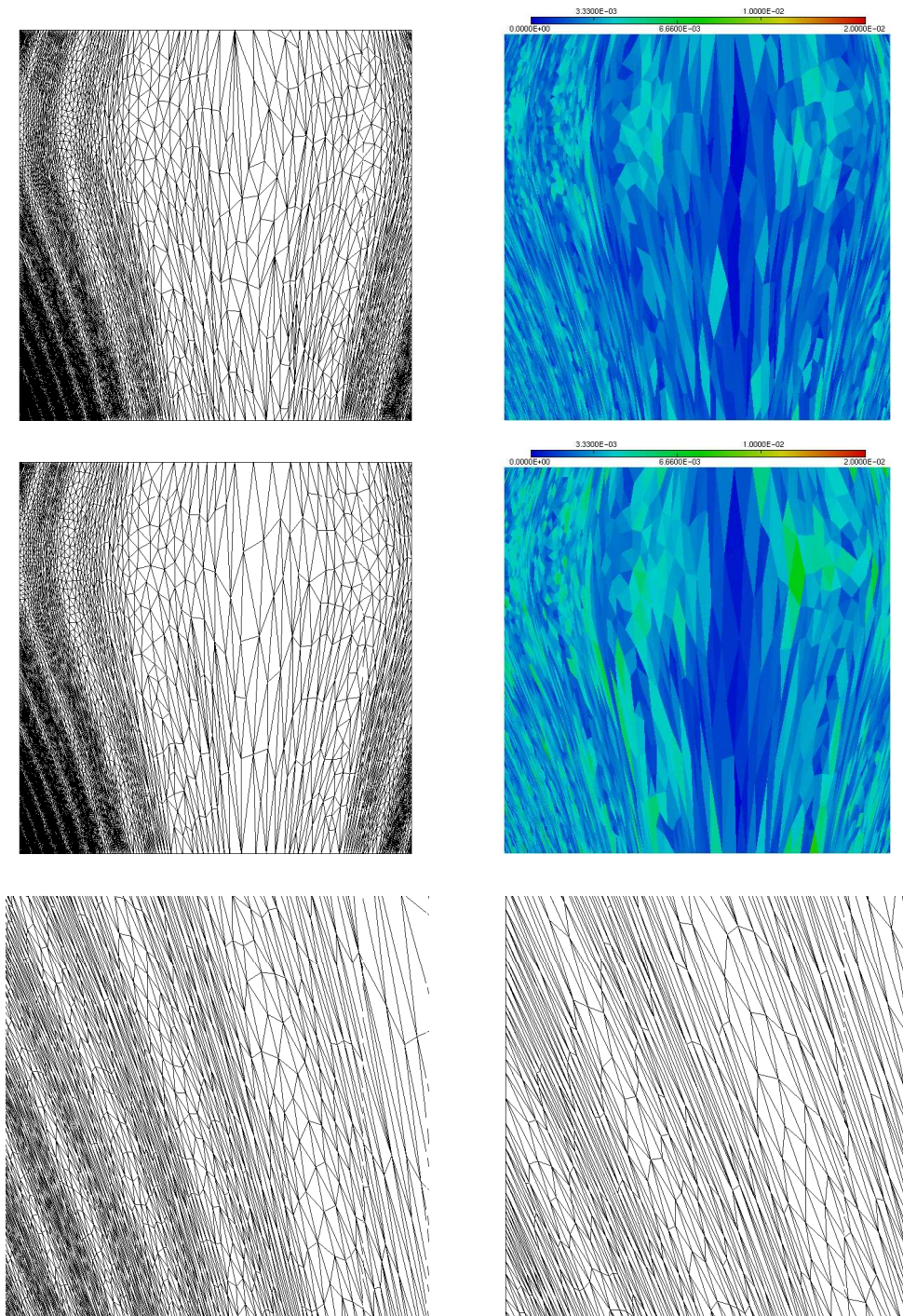


FIG. 3 – Comparaison des maillages adaptés à l'itération 7 et des cartes d'erreur aux triangles correspondantes dans le cas du hessien analytique (en haut) et celui calculé aux moindres carrés (au milieu). En bas, deux zooms partiels sur le maillage final (méthode des moindres carrés).

Comparaison des résultats. La comparaison des résultats obtenus sur les deux séries d'adaptations indique que :

1. l'approximation de la solution est légèrement moins bonne dans la série 2 que dans la série 1 à convergence,
2. la convergence du couple maillage-solution est moins rapide dans la série 2.

Le premier constat s'explique par le fait que l'évaluation du hessien par la méthode des moindres carrés prescrit des tailles d'éléments plus grandes que celles fournies par le calcul analytique; la méthode des moindres carrés lissant le champ de solution. En revanche, les directions principales sont correctement évaluées. Ce qui revient à dire que dans cette approche, le seuil d'erreur ε a été implicitement augmenté. Par conséquent, en majorant légèrement l'erreur tolérée dans la série 1, on s'attend à retrouver un résultat proche de celui obtenu dans la série 2. En effet, en considérant $\varepsilon = 0.004$, on obtient sur le maillage final ($np = 2788$), une erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0025$ et une erreur maximale $\varepsilon_{max} = 0.0057$. Le maillage final est unité et 80.4 % des triangles ont une erreur inférieure à ε .

Le deuxième constat repose sur le fait que l'évaluation du hessien aux moindres carrés est intimement liée à la discrétisation. Le maillage initial étant grossier, la solution discrète (resp. le hessien calculé) sur ce maillage n'est pas suffisamment représentative du champ (resp. du hessien) analytique prescrit. Par conséquent, le maillage à l'itération 1 est un maillage unité pour un champ de métrique qui ne correspond pas à celui attendu. Au fil des adaptations successives, la convergence s'accélère et on obtient finalement le maillage optimal (unité) désiré.

Compte tenu de ces résultats, l'approche de calcul du hessien par moindres carrés semble satisfaisante; il reste encore à la valider dans le cas de solutions numériques (cf. Section 3).

2.3 Intersection de deux champs 2D anisotropes

Dans cet exemple, on veut illustrer l'intersection de métriques relatives à plusieurs champs. On reprend le champ donné dans l'exemple précédent et on lui adjoint un deuxième champ qui représente une marche oscillant dans le domaine de calcul (Figure 4, en bas à droite). Plus précisément, on considère les deux surfaces cartésiennes définies sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$, par les fonctions :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \sin(5(x - 0.2)^3(y^2 - y + 1)), \\ f_2(x, y) &= \tanh(50y + 20 \sin(-2x)). \end{aligned}$$

Le but est de montrer qu'on contrôle, avec le champ de métrique résultant de l'intersection, simultanément l'écart aux deux surfaces. Pour cela, on va, comme dans l'exemple précédent, comparer l'écart à chaque surface sur chaque triangle au seuil ε fixé. Pour cet exemple, on reprend les mêmes paramètres d'adaptation que dans l'exemple précédent ($\varepsilon = 0.0033$, $h_{min} = 0.001$, $h_{max} = 1$ et 7 itérations d'adaptation), ainsi que le même maillage initial. Toutefois, à la différence de l'exemple 1, seule l'approche par moindres carrés est utilisée.

Les statistiques relatives aux maillages adaptés sont données dans les deux Tableaux 3 et 4, correspondant aux surfaces définies par les fonctions f_1 et f_2 . On constate que la convergence du couple maillage-solution pour les deux champs est atteinte au bout de 7 itérations, *i.e.*, le maillage est unité pour les deux champs prescrits. À convergence, pour le champ donné par $f_1(x, y)$ (resp. $f_2(x, y)$) on peut remarquer que l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0018$ (resp. $\tilde{\varepsilon} = 0.0012$) est inférieure au seuil ε sur le maillage final (6 794 sommets). Comme on a une erreur maximale $\varepsilon_{max} = 0.0063$ (resp. $\varepsilon_{max} = 0.0061$), le maillage est bien unité et 92.2 % (resp. 94.8 %) des triangles satisfont l'erreur ε .

La Figure 5 illustre les maillages adaptés aux itérations 2 et 5 ainsi que les cartes des écarts (à la surface) aux triangles correspondantes pour les deux champs. La Figure 6 montre le maillage final adapté ainsi que les cartes d'erreurs aux triangles pour chaque champ.

Sur les Tableaux 3 et 4, on peut remarquer que l'intersection de métriques a permis la construction de maillages unités vis-à-vis de chacun des champs analytiques. En comparant les Tableaux 2 et 3, on note également que le maillage adapté final pour le champ f_1 (de l'exemple 2) donne une meilleure approximation de la surface que dans l'exemple 1. Ce résultat est cohérent avec la définition de l'intersection de métrique donnée [1]. Toutefois, dans cet exemple, le maillage final obtenu n'est pas optimal, l'erreur est moins bien équilibrée que dans le cas 1 (il comporte notamment trop de sommets). Par contre, ce maillage est optimal pour la capture des deux champs. Un zoom partiel du maillage (Figure 6, en haut à droite) illustre l'intersection des deux métriques, (les deux champs anisotropes avec des directions antagonistes s'intersectent).

Itération	np	ne	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	52	81	-	0.5073	1.8094	0.	0.
2	10 217	19 992	6.20	0.0036	0.1010	69.0	88.0
3	10 232	19 923	7.56	0.0016	0.0162	91.7	99.7
5	6 969	13 392	4.32	0.0018	0.0118	91.6	99.9
7	6 794	13 034	2.95	0.0018	0.0063	92.2	100.

TAB. 3 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour la première surface définie par $f_1(x, y)$.

Itération	np	ne	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	52	81	-	0.1981	1.0723	74.1	75.3
2	10 217	19 992	6.20	0.0025	0.2444	81.2	89.8
3	10 232	19 923	7.56	0.0016	0.0277	92.3	98.9
5	6 969	13 392	4.32	0.0012	0.0074	94.3	99.9
7	6 794	13 034	2.95	0.0012	0.0061	94.8	100.

TAB. 4 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour la deuxième surface définie par $f_2(x, y)$.

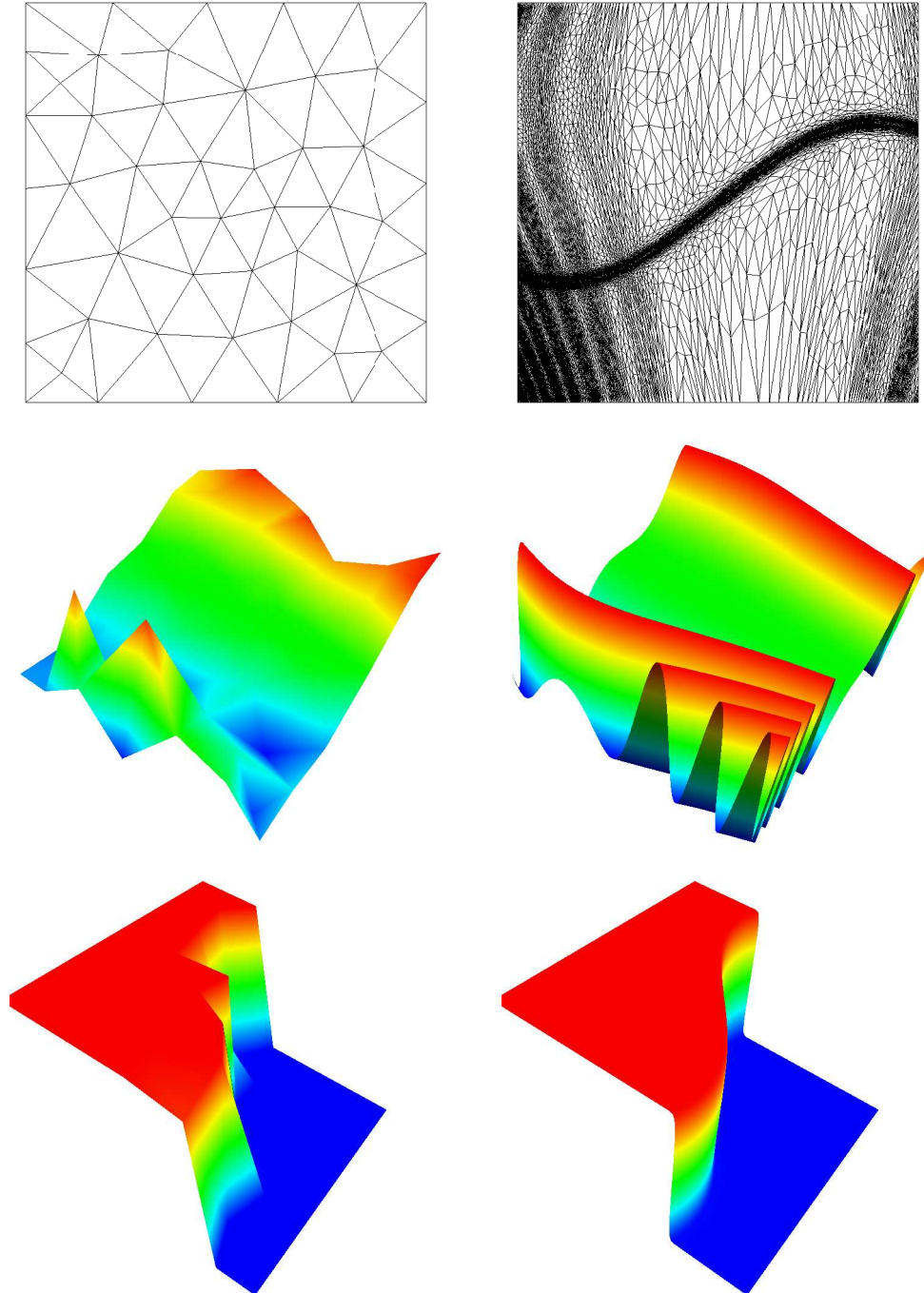


FIG. 4 – Capture simultanée de deux surfaces analytiques. À gauche, le maillage initial ainsi que la première et la deuxième surface lui correspondant. À droite, les mêmes informations obtenues avec le schéma d'adaptation à l'itération 7 (finale).

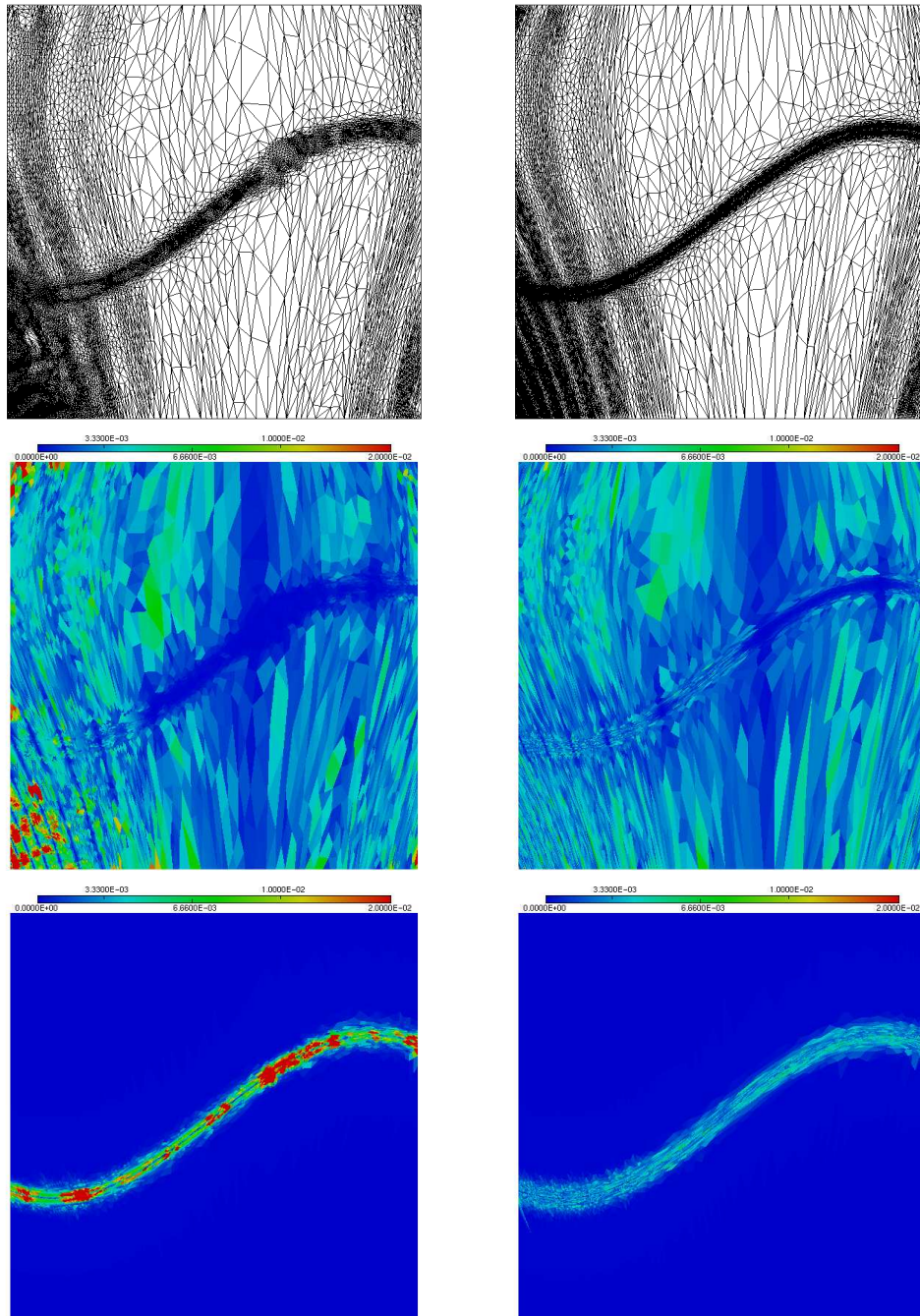


FIG. 5 – Maillages adaptés (en haut) et cartes des écarts aux triangles aux surfaces analytiques définies par $f_1(x, y)$ et par $f_2(x, y)$ (au milieu et en bas respectivement) aux itérations 2 (à gauche) et 5 (à droite).

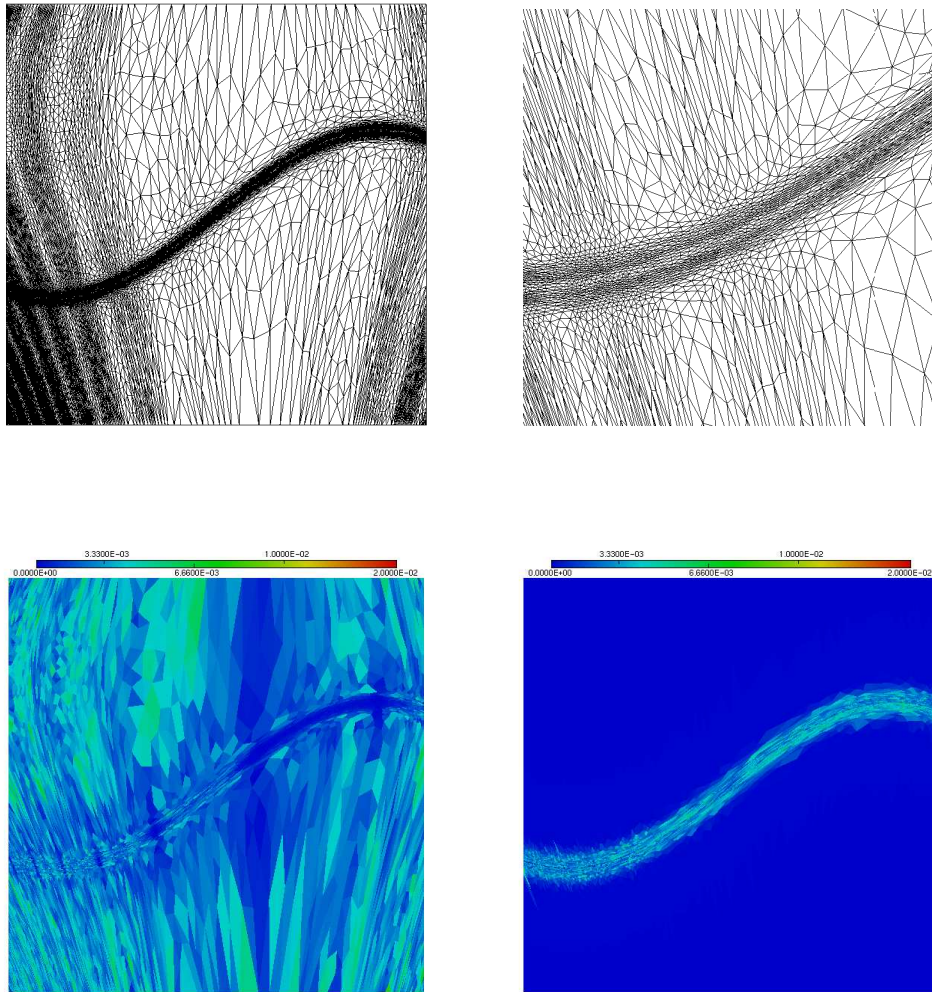


FIG. 6 – Résultat final de l'adaptation de maillage (itération 7). En haut, maillages final adaptés avec un zoom partiel illustrant l'intersection des deux métriques données par les deux champs analytiques. En bas, cartes des écarts aux triangles aux surfaces analytiques définies par $f_1(x, y)$ et par $f_2(x, y)$ (à gauche et à droite respectivement).

2.4 Un exemple simple en dimension trois

L'objectif est de voir si les résultats obtenus en dimension deux s'étendent à la dimension trois. Comme dans l'exemple 1 (Section 2.2), on cherche, d'une part, à démontrer que l'estimateur basé sur le hessien de la solution contrôle effectivement un écart à l'hypersurface et, d'autre part, à valider l'évaluation discrète du hessien par moindres carrés.

On considère à présent l'hypersurface cartésienne de \mathbb{R}^4 , définie sur $[-1, 1]^3$ par :

$$f_1(x, y, z) = \tanh((x + 1.3)^{20} (y - 0.3)^9 z) ,$$

qui présente plusieurs marches courbes dans le domaine, (Figure 8, en bas à droite). Dans cet exemple, on a fixé arbitrairement le nombre maximal d'adaptations de maillages à 10, le seuil d'erreur toléré à $\varepsilon = 0.0084$ et la taille minimale (resp. maximale) des éléments du maillage à $h_{min} = 0.005$ (resp. $h_{max} = 0.5$). Le maillage initial est un maillage du domaine de calcul très grossier (417 sommets, 1 691 tétraèdres, Figure 8, à gauche). Comme pour le premier exemple analytique, deux séries d'adaptations de maillages ont été réalisées, l'une dans le but de valider l'estimateur d'erreur basé sur le hessien, l'autre afin de discuter l'évaluation du hessien par une méthode de moindres carrés en dimension trois.

Dans la première série d'adaptations de maillage, le hessien de la solution est calculé de manière exacte (en utilisant les dérivées analytiques). Le Tableau 5 reporte les statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés (le temps cpu correspond au temps total de maillage, surface + volume, le volume représentant environ 80 % de ce temps). On constate qu'au bout de 5 adaptations, l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0048$ est inférieure au seuil $\varepsilon = 0.0084$ fixé, sur le maillage adapté comportant 20 711 sommets. Le maillage obtenu est quasiment un maillage unité (au sens de la Remarque 2.1), puisque 99.9 % des tétraèdres ont une erreur associée inférieure à 2ε , 96.5 % d'entre eux satisfaisant même l'erreur ε . Toutefois, la capture d'un champ en dimension trois semble intrinsèquement plus difficile qu'en dimension deux, ce qui explique le fait qu'on n'a pas réussi à construire un maillage totalement unité. Ce résultat (obtenu avec une version préliminaire du mailleur tétraédrique anisotrope) peut néanmoins être considéré comme un bon résultat.

La Figure 10 (à droite) montre le maillage final de surface adapté (à l'itération 5) et la carte d'erreurs de surface associée, ainsi que le maillage final de volume adapté avec la carte d'erreurs aux tétraèdres.

Itération	np	ne	nf	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	% $\leq \varepsilon$	% $\leq 2\varepsilon$
0	417	1 691	474	-	0.1206	1.0000	62.4	63.8
2	19 687	110 177	5 606	21.8	0.0051	0.3591	91.9	98.3
4	20 461	110 219	9 118	35.5	0.0050	0.0328	94.7	99.8
5	20 711	111 432	9 242	24.1	0.0048	0.0289	96.5	99.9

TAB. 5 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour l'hypersurface définie par $f_1(x, y, z)$, dans le cas où le hessien est donné par la formule analytique.

Dans la seconde série d'adaptations, l'évaluation du hessien de la solution est effectuée par une méthode de moindres carrés. Le Tableau 6 reporte les statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés. Les Figures 9 et 10 illustrent, aux itérations 2, 4 et 8, les maillages de surfaces (resp. de volumes) adaptés et les cartes des écarts aux triangles (resp. tétraèdres) à l'hypersurface correspondante.

Itération	np	ne	nf	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	417	1 691	474	-	0.1206	1.0000	62.4	63.8
2	41 773	245 082	5 684	19.4	0.0096	0.3532	66.0	85.1
4	22 527	122 834	9 124	30.9	0.0058	0.0565	85.2	98.7
5	18 239	96 909	8 932	22.9	0.0060	0.0552	84.4	99.0
8	17 012	90 457	8 200	20.4	0.0059	0.0379	84.7	99.5
10	16 567	88 005	8 048	19.8	0.0059	0.0332	84.8	99.6

TAB. 6 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour l'hypersurface définie par $f_1(x, y, z)$, dans le cas où le hessien est calculé par les moindres carrés.

On peut remarquer qu'au bout de 10 adaptations, l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0059$ est inférieure à l'erreur fixée $\varepsilon = 0.0084$ et que 84.8 % des tétraèdres satisfont celle-ci sur le maillage adapté de 16 567 sommets. Comme pour le cas analytique, le maillage est quasiment unité (99.6 % des éléments ont une erreur associée inférieure à 2ε).

Globalement, les mêmes commentaires que dans le cas de la dimension deux s'appliquent pour l'approche par moindres carrés :

- l'approximation de la solution est un peu moins bonne car les moindres carrés ont tendance à lisser le champ de solution (maillage moins dense),
- la convergence du couple maillage-solution est moins rapide, car l'évaluation du hessien dépend fortement de la discrétisation.

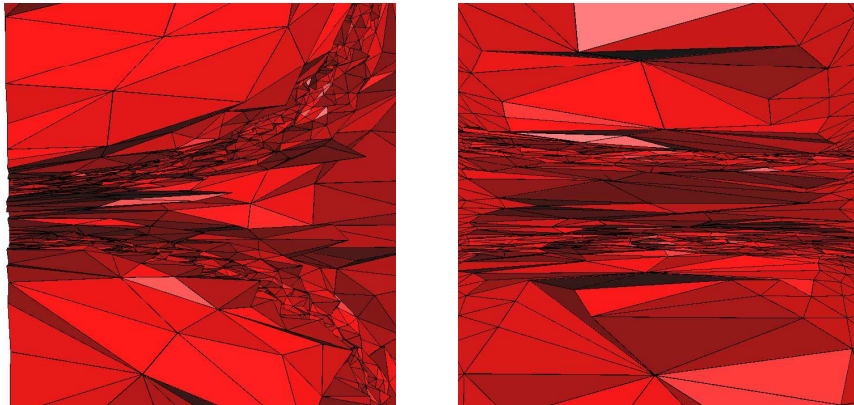


FIG. 7 – Zooms sur le maillage final (à l'itération 10) dans le cas de l'évaluation du hessien par une méthode de moindres carrés.

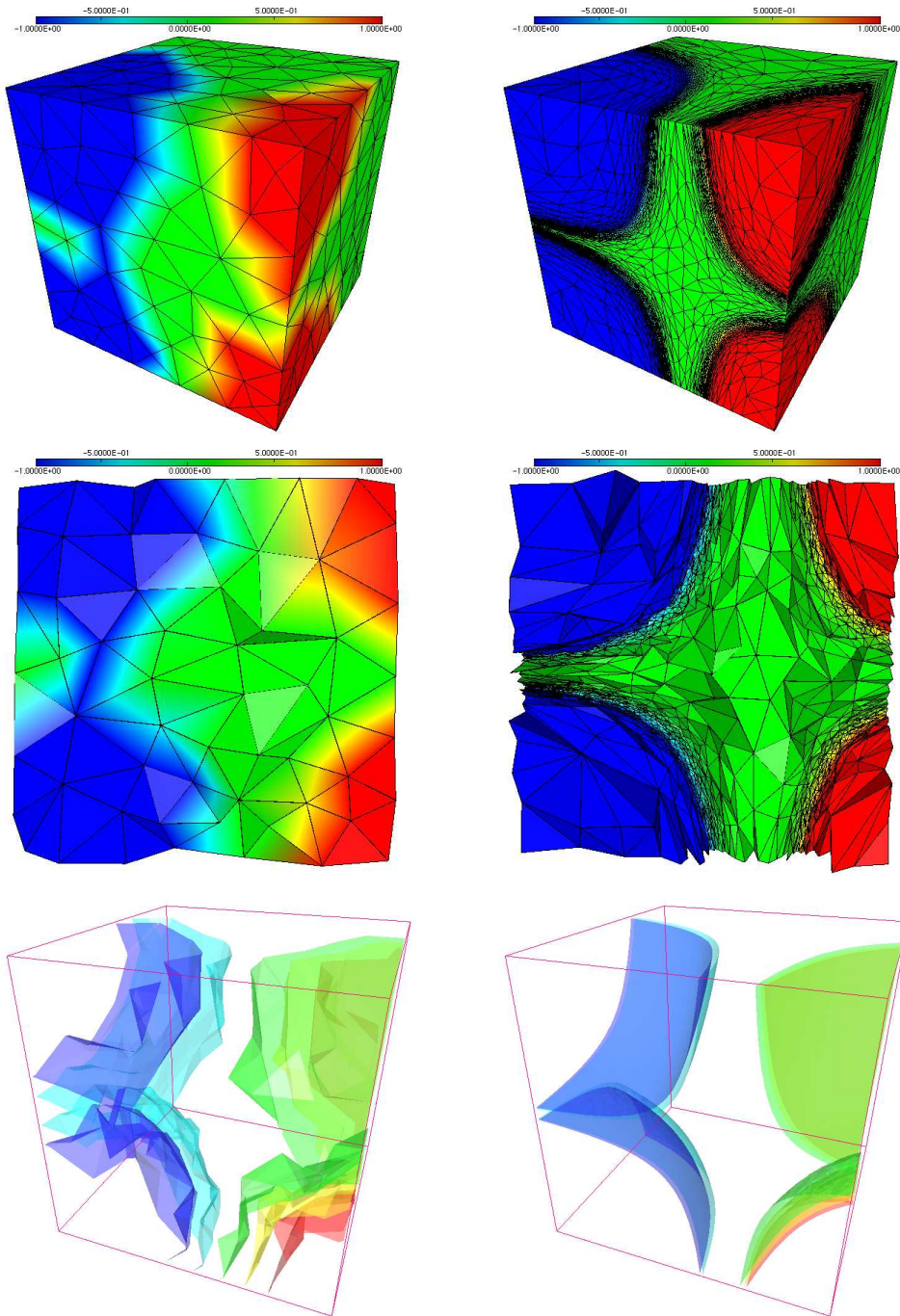


FIG. 8 – Capture d'une hypersurface analytique. À gauche, les maillages initiaux de surface et de volume (resp. finaux, itération 8) avec les iso-valeurs de la solution et les iso-surfaces de la solution. À droite, les mêmes illustrations obtenues avec l'adaptation à l'itération 8 où le hessien est calculé aux moindres carrés.

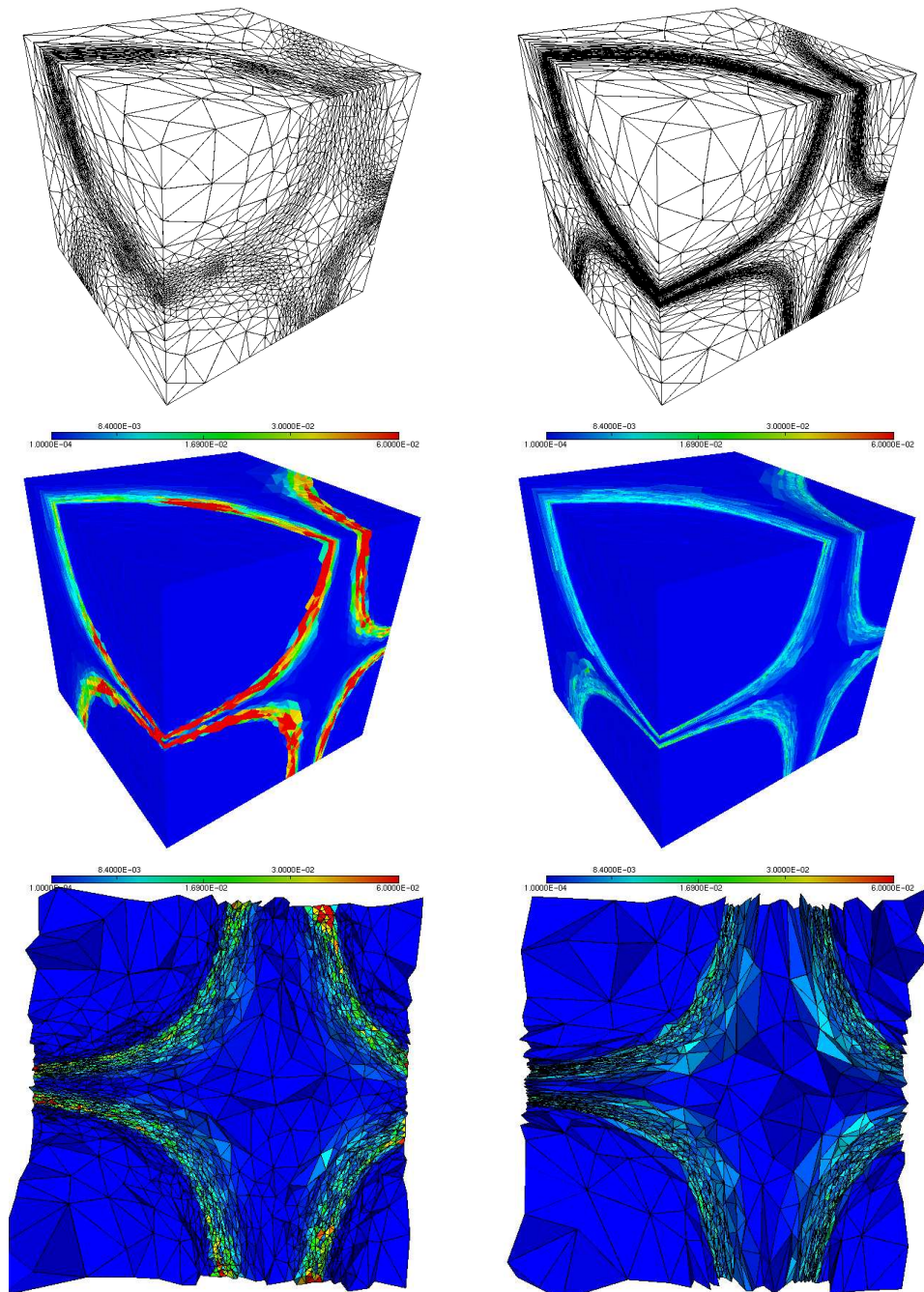


FIG. 9 – De haut en bas : maillages de surfaces adaptés, cartes des écarts aux éléments de la surface et maillage volumiques adaptés avec cartes d'erreurs associées aux tétraèdres, aux itérations 2 et 4.

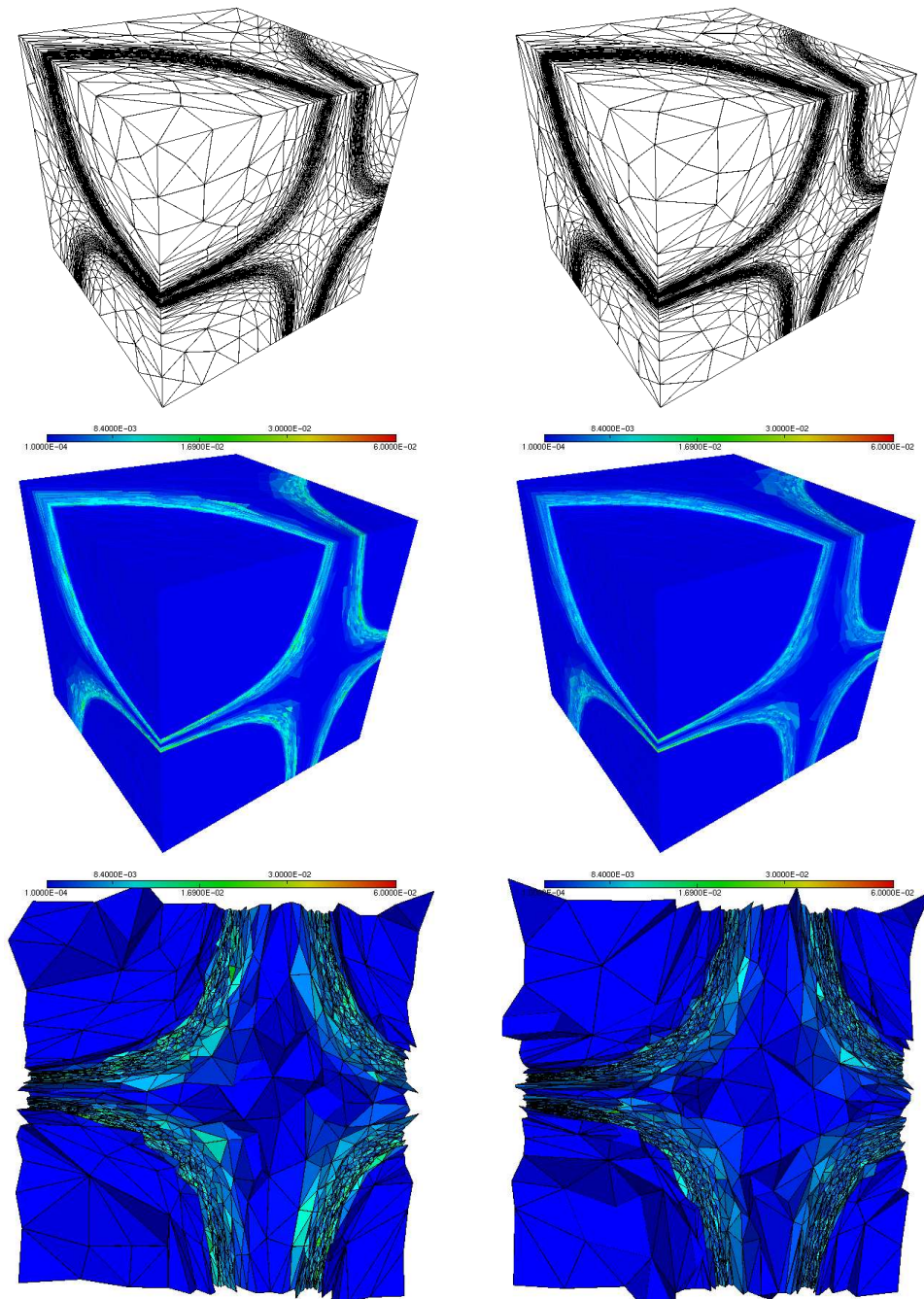


FIG. 10 – De haut en bas : maillages de surfaces adaptés fins, cartes des écarts aux éléments de la surface et maillage volumiques adaptés fins avec cartes d'erreurs associées aux tétraèdres. À gauche, évaluation du hessien aux moindres carrés et à droite, hessien analytique.

2.5 Intersection de deux champs en dimension trois

Comme en dimension deux, cet exemple est destiné à illustrer l'intersection de deux métriques en dimension trois. Pour cela, on reprend le champ donné dans l'exemple précédent et on lui adjoint un second champ qui présente une série d'oscillations dans le domaine (Figure 12, en bas à droite). Plus précisément, on considère les deux hypersurfaces cartésiennes de \mathbb{R}^4 , définies sur $[-1, 1]^3$:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= \tanh((x + 1.3)^{20} (y - 0.3)^9 z) , \\ f_2(x, y, z) &= \sin(0.5(x + 0.1)^3 (1 + y + y^2) (z + 1.4)^3) . \end{aligned}$$

À nouveau, l'objectif est de montrer qu'à l'aide de l'intersection de métriques, on contrôle simultanément l'écart aux deux hypersurfaces. On reprend les mêmes paramètres d'adaptation que dans l'exemple précédent (Section 2.4), ainsi que le même maillage initial. L'évaluation du hessien est faite de manière discrète par une méthode de moindres carrés.

Itération	np	ne	nf	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	417	1 691	474	-	0.2176	1.8852	10.8	20.9
2	139 617	814 254	23 776	99.5	0.0038	0.1407	91.7	98.5
4	60 543	326 422	27 422	132.3	0.0036	0.0546	94.9	99.6
5	52 646	280 737	25 664	154.4	0.0039	0.0489	93.9	99.6
8	50 142	267 513	24 474	116.0	0.0039	0.0346	94.4	99.7

TAB. 7 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour l'hypersurface définie par $f_1(x, y, z)$, dans le cas où le hessien est calculé par les moindres carrés.

Itération	np	ne	nf	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	417	1 691	474	-	0.1206	1.0000	62.4	63.8
2	139 617	814 254	23 776	99.5	0.0042	0.3893	85.0	94.4
4	60 543	326 422	27 422	132.3	0.0038	0.0569	93.0	99.4
5	52 646	280 737	25 664	154.4	0.0041	0.0489	91.1	99.5
8	50 142	267 513	24 474	116.0	0.0039	0.0425	92.5	99.7

TAB. 8 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour l'hypersurface définie par $f_2(x, y, z)$, dans le cas où le hessien est calculé par les moindres carrés.

Les statistiques relatives aux maillages adaptés sont données dans les Tableaux 7 et 8, correspondant aux deux hypersurfaces. On constate qu'au bout de 8 adaptations pour le champ donné par $f_1(x, y, z)$ (resp. $f_2(x, y, z)$), l'erreur moyenne $\tilde{\varepsilon} = 0.0039$ (resp. $\tilde{\varepsilon} = 0.0039$) est inférieure au seuil fixé $\varepsilon = 0.0084$ et que 94.4 % (resp. 92.5 %) des tétraèdres satisfont l'erreur, sur un maillage adapté comportant 50 142 sommets. Pour les

mêmes raisons que dans l'exemple précédent, le maillage final peut être légitimement qualifié de maillage unité, car 99.7 % de ses éléments ont une erreur associée inférieure à 2ε , pour les deux champs.

La Figure 13 illustre, de haut en bas, les maillages de surface et de volume adaptés à l'itération 4, les cartes d'erreurs des éléments de surface (au milieu) et de volume (en bas) pour les deux hypersurfaces. La Figure 14 montre les mêmes informations, à l'itération 8.

Au vue des résultats obtenus, on parvient aux mêmes conclusions qu'en dimension deux. En effet, sur les Tableaux 7 et 8, on peut remarquer que l'intersection de métriques a permis la construction d'un maillage (quasiment) unité vis-à-vis de chacun des champs analytiques. En comparant les Tableaux 6 et 7, on note également que le maillage adapté final pour le champ f_1 (de cet exemple) donne une meilleure approximation de l'hypersurface que dans l'exemple précédent. Toutefois, le maillage final obtenu n'est pas optimal, car l'erreur est moins bien équi-répartie. Par contre, ce maillage est optimal pour la capture de deux champs. Un zoom partiel du maillage final à l'itération 8 (Figure 11) illustre l'intersection des deux métriques sur la surface et dans le volume.

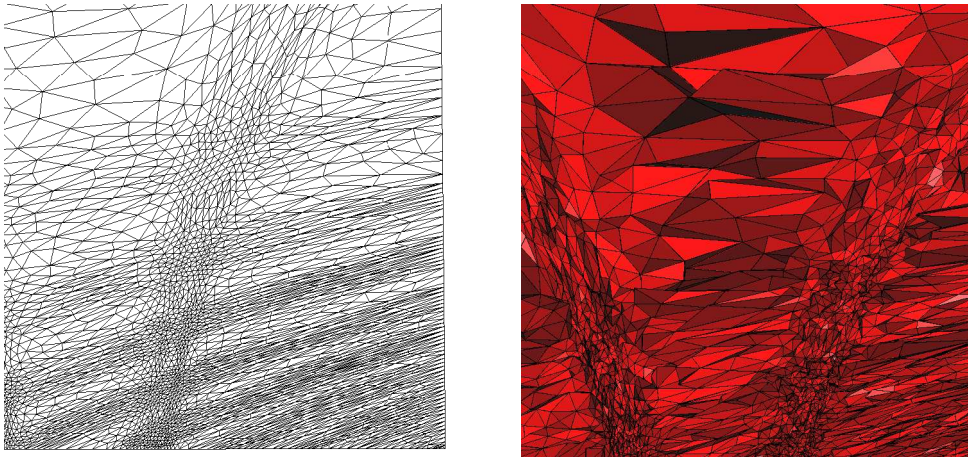


FIG. 11 – Zoom sur les maillages adaptés à l'itération 8 pour illustrer l'intersection de métrique en dimension trois, surface (à gauche) et volume (à droite).

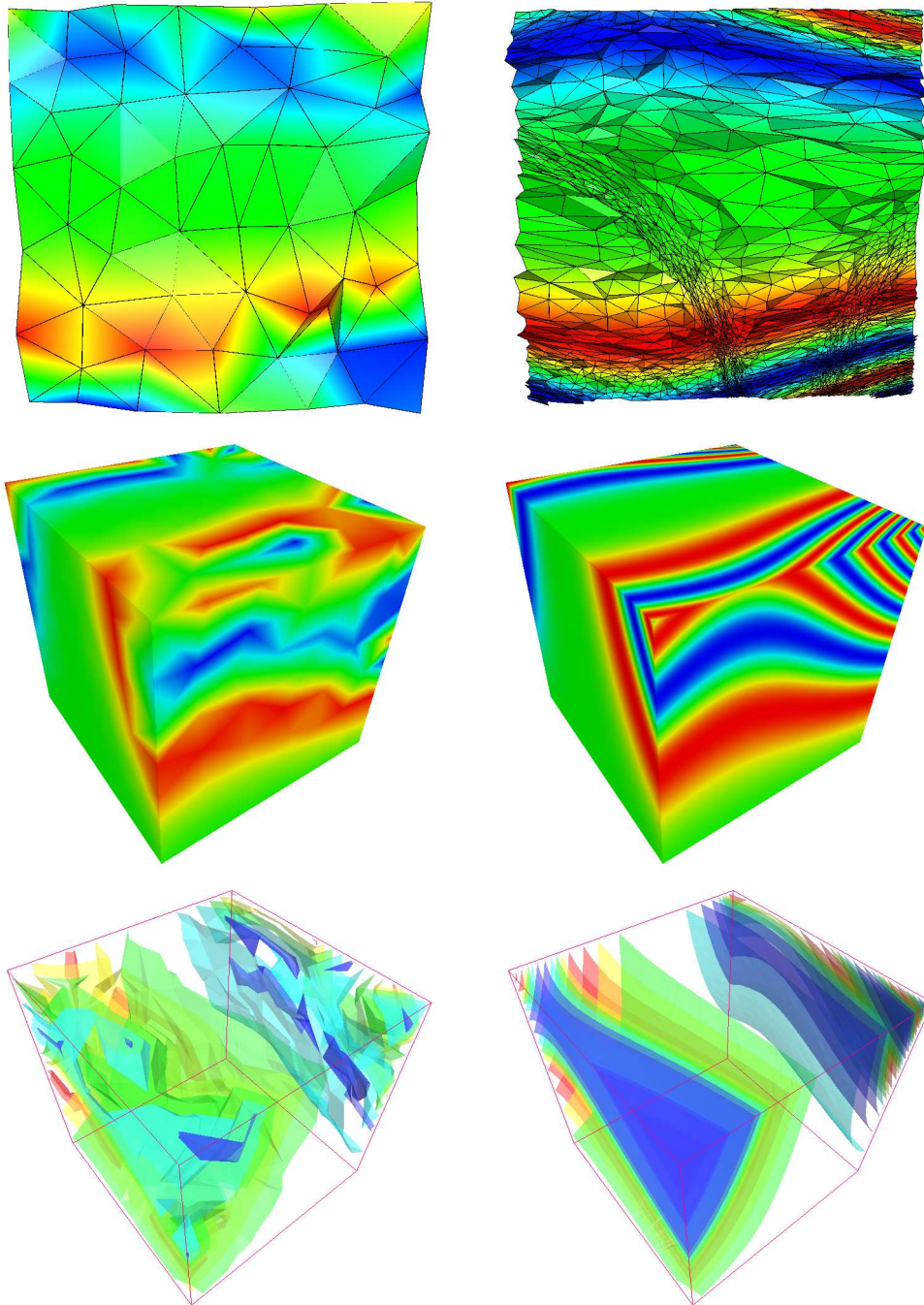


FIG. 12 – Capture de l'hypersurface analytique donnée par f_2 avec calcul du hessien par la méthode des moindres carrés. À gauche (resp. à droite), de haut en bas, maillages initiaux de volume et le champ de solution (resp. finaux, itération 8), les iso-valeurs de la solution sur la surface et les iso-surfaces de la solution.

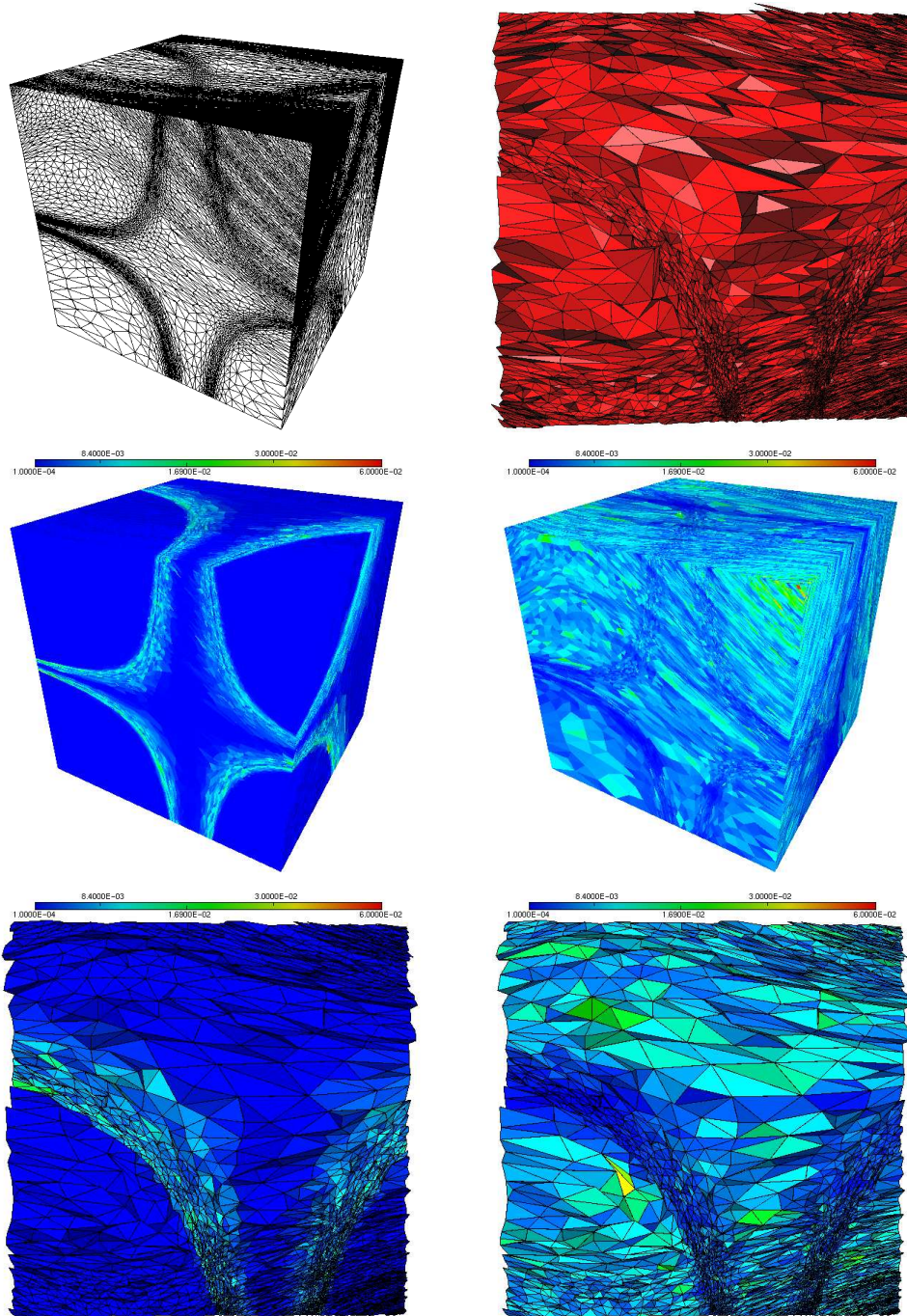


FIG. 13 – Maillages de surface et de volume adaptés à l'itération 4 (en haut), cartes d'erreurs des éléments de surface (au milieu) et de volume (en bas) pour les deux hypersurfaces (f_1 à gauche et f_2 à droite).

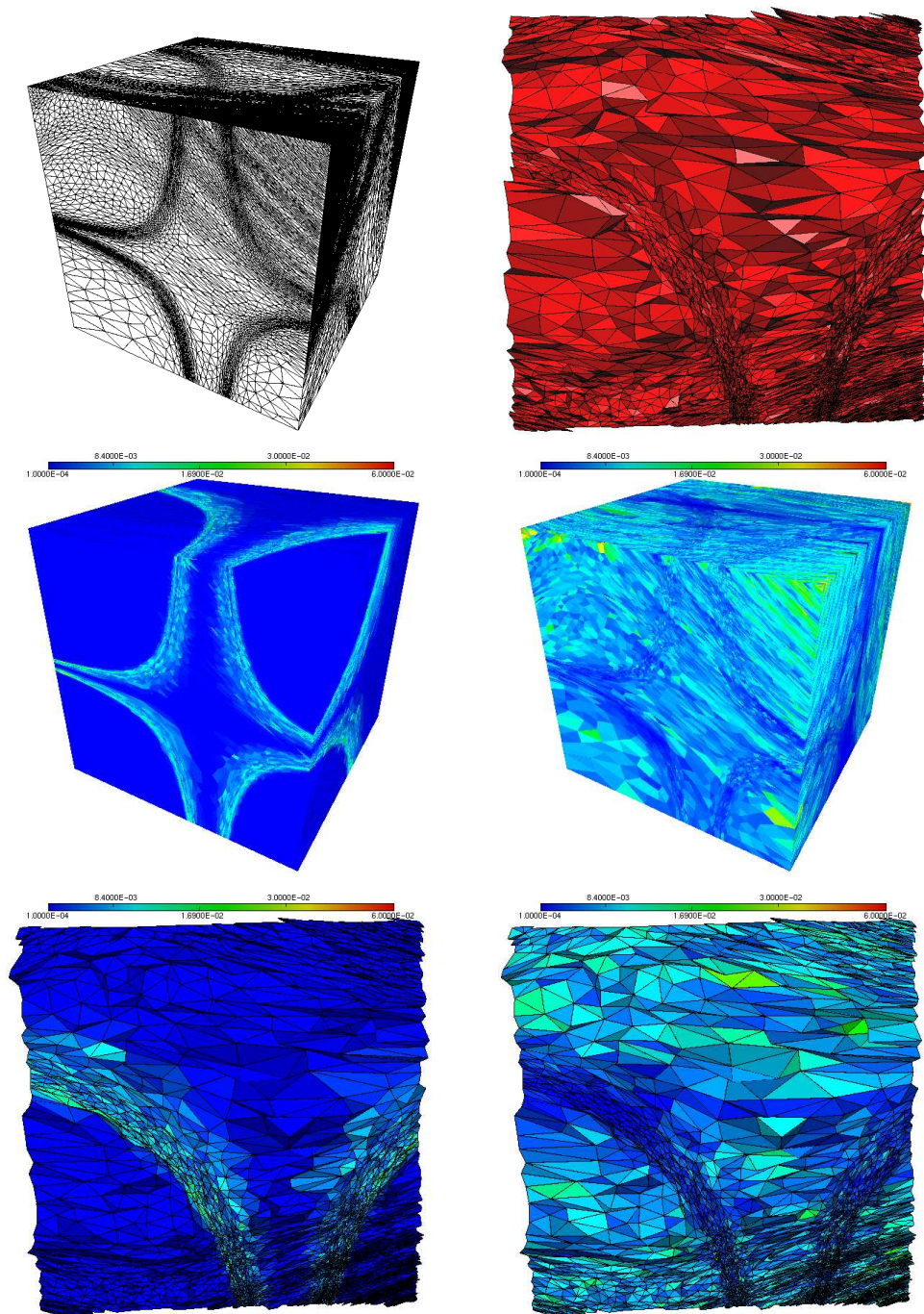


FIG. 14 – Maillages de surface et de volume adaptés à l'itération 8 (en haut), cartes d'erreurs des éléments de surface (au milieu) et de volume (en bas) pour les deux hypersurfaces (f_1 à gauche et f_2 à droite).

2.6 Un cas simple sur un supertoroïde

Pour conclure cette étude sur les cas analytiques, il reste encore à analyser l'impact de l'adaptation à un champ analytique sur une géométrie complexe. Conceptuellement, on retrouve ici un problème d'intersection de métriques, comme on va le voir ci-dessous. En effet, on considère comme champ analytique, à nouveau l'hypersurface cartésienne de \mathbb{R}^4 (Figure 16, en bas à droite), définie sur $[-1, 1]^3$:

$$f_1(x, y, z) = \tanh((x + 1.3)^{20} (y - 0.3)^9 z),$$

le domaine d'étude étant cette fois un supertoroïde défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x = \cos^{n_1}(\theta) (r_0 + r_1 \cos^{n_2}(\phi)), \\ y = \sin^{n_1}(\theta) (r_0 + r_1 \cos^{n_2}(\phi)), \\ z = (r_0 + r_1) \sin^{n_2}(\phi), \end{cases}$$

où θ et ϕ varient dans $[0, 2\pi]$ et $r_0 + r_1$ (resp. $r_0 - r_1$) représente le rayon externe (resp. interne) du tore. La Figure 16 (en haut) illustre le domaine d'étude dans le cas particulier où $n_1 = n_2 = 0.2$.

La particularité de ce cas, tient au fait que deux champs de métriques de natures différentes, sont mis en œuvre. Le premier champ provient, comme dans les exemples précédents, du champ de solution défini par la fonction f_1 . Le second champ, quant à lui, correspond à la métrique des propriétés intrinsèques (courbures et directions principales) de la surface [2]. Dans les exemples précédents, le domaine d'étude correspondait à une géométrie plane (un cube), la métrique de géométrie n'imposait donc aucune contrainte de taille et de direction (métrique isotrope). En revanche, dans cet exemple, le mailleur de surface analyse la géométrie du domaine uniquement à partir d'une approximation linéaire par morceaux de la surface (*i.e.*, un maillage), et en déduit une métrique de surface (on n'utilise évidemment pas la définition analytique du domaine). L'objectif est donc de construire un maillage de surface unité adapté à la métrique résultant de l'intersection des deux champs de métriques (solution et géométrie).

Dans cet exemple, on fixe arbitrairement le nombre maximal d'adaptations de maillages à 8, les autres paramètres d'adaptation étant identiques à ceux de la Section 2.4. Le hessien

Itération	np	ne	nf	t	$\tilde{\varepsilon}$	ε_{max}	$\% \leq \varepsilon$	$\% \leq 2\varepsilon$
0	3 850	15 460	4 884	-	0.0438	1.0000	81.2	82.4
2	72 090	416 124	14 548	68.8	0.0064	0.5673	78.7	92.3
4	29 651	154 763	17 076	74.7	0.0047	0.0555	90.2	99.4
5	22 782	114 637	16 190	49.6	0.0051	0.0454	88.4	99.4
8	21 063	105 268	15 474	44.3	0.0051	0.0345	88.1	99.6

TAB. 9 – Statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés pour l'hypersurface définie par $f_1(x, y, z)$ sur un supertoroïde, où le hessien est calculé par moindres carrés.

est toujours calculé par la méthode des moindres carrés. Pour accélérer un peu la convergence de l'adaptation, on part cette fois d'un maillage géométrique grossier du domaine, comportant 3 850 sommets et 15 460 tétraèdres (Figure 16, en haut à gauche).

Le Tableau 9 donne les statistiques sur le maillage initial et les maillages adaptés. On constate qu'après 8 adaptations, l'erreur moyenne $\bar{\varepsilon} = 0.0051$ est inférieure au seuil fixé ε et que 88.1 % des tétraèdres satisfont l'erreur, sur un maillage de 21 063 sommets. Comme précédemment, le maillage final adapté est quasiment unitaire (99.6 % des éléments ont une erreur associée inférieure à 2ε). La Figure 17 illustre les cartes d'erreurs sur la surface et dans le volume aux itérations 4 et 8. Par rapport au cas de l'intersection de deux champs sur une géométrie simple, on retrouve donc ici des résultats analogues. À nouveau, l'impact de l'intersection des deux métriques a été de réduire l'erreur moyenne. Les zooms partiels sur le maillage de surface (Figure 15) illustrent l'intersection des métriques de géométrie et de calcul sur la surface.

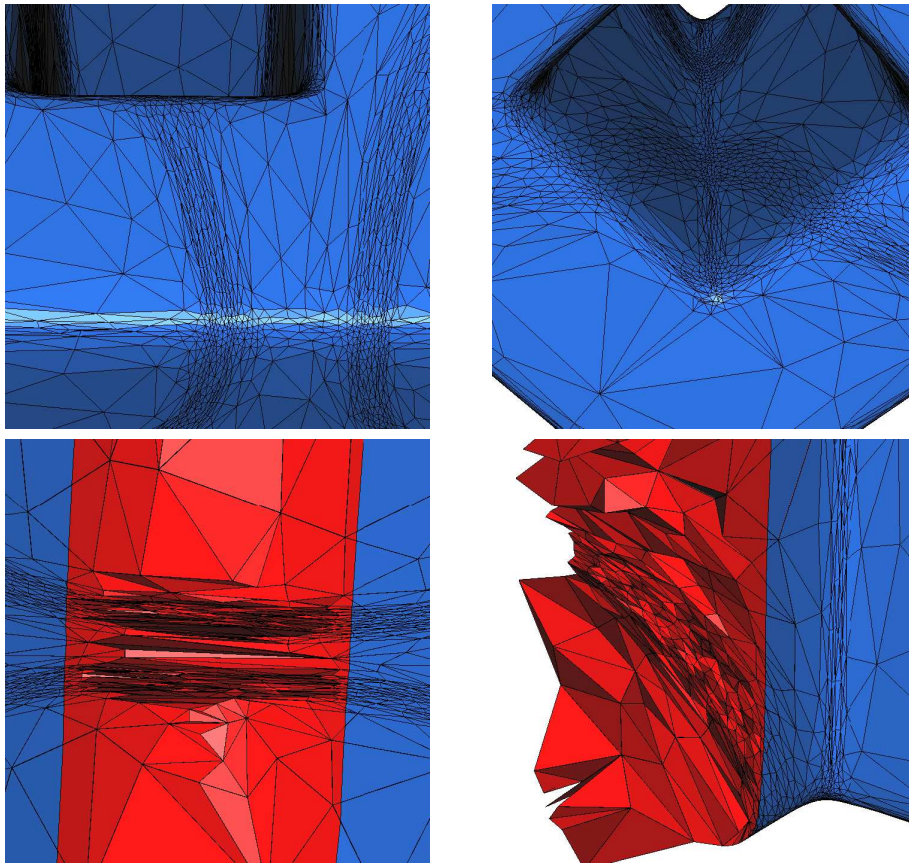


FIG. 15 – Illustration de l'impact de l'intersection de métriques (géométrie et solution) sur le maillage de surface (en haut). Illustration de la continuité du champ de métriques entre surface et volume (en bas).

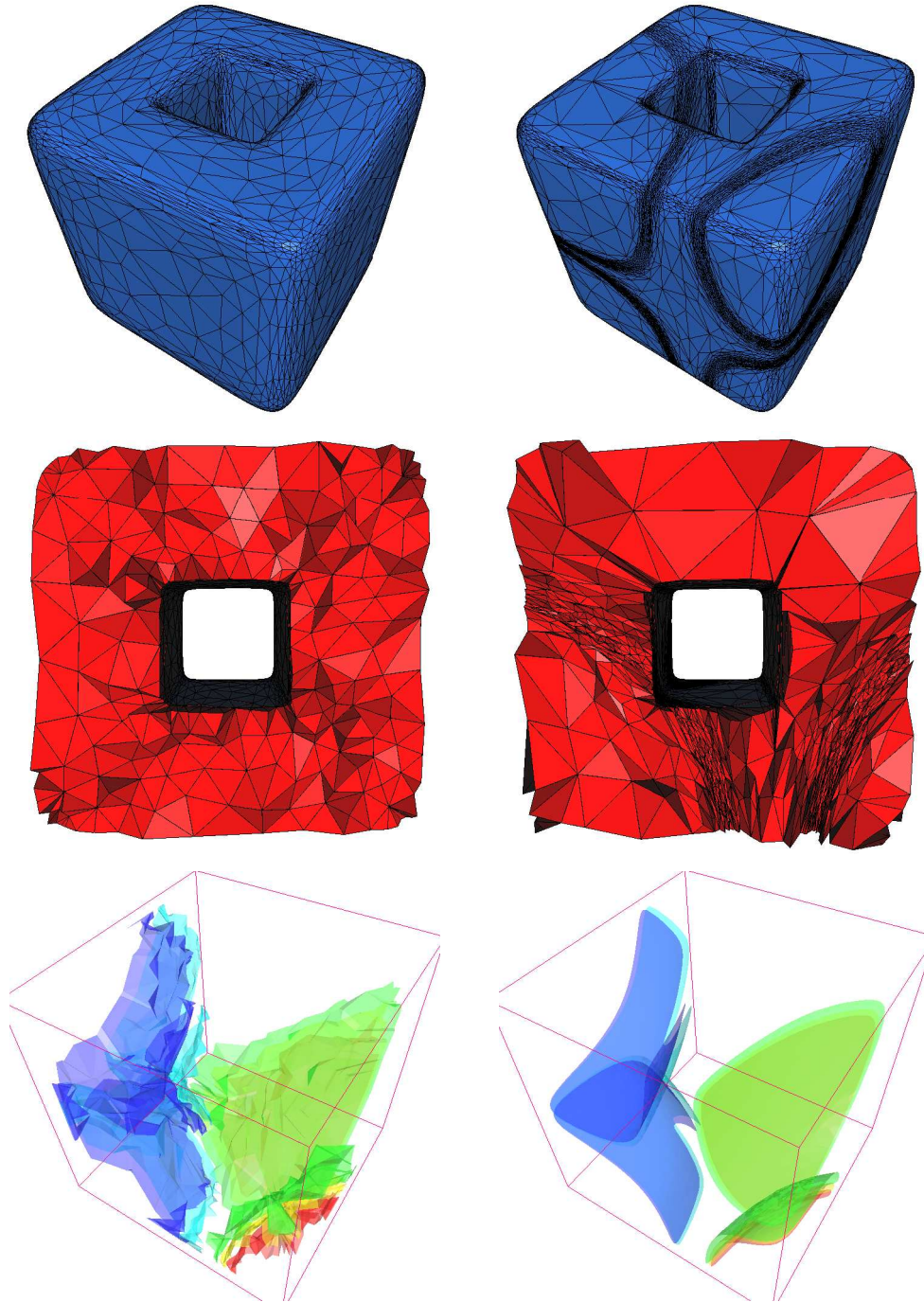


FIG. 16 – Maillage initial et maillage final adapté (itération 8) de surface (en haut), de volume (au milieu) et iso-surfaces initiale et finale du champ (en bas).

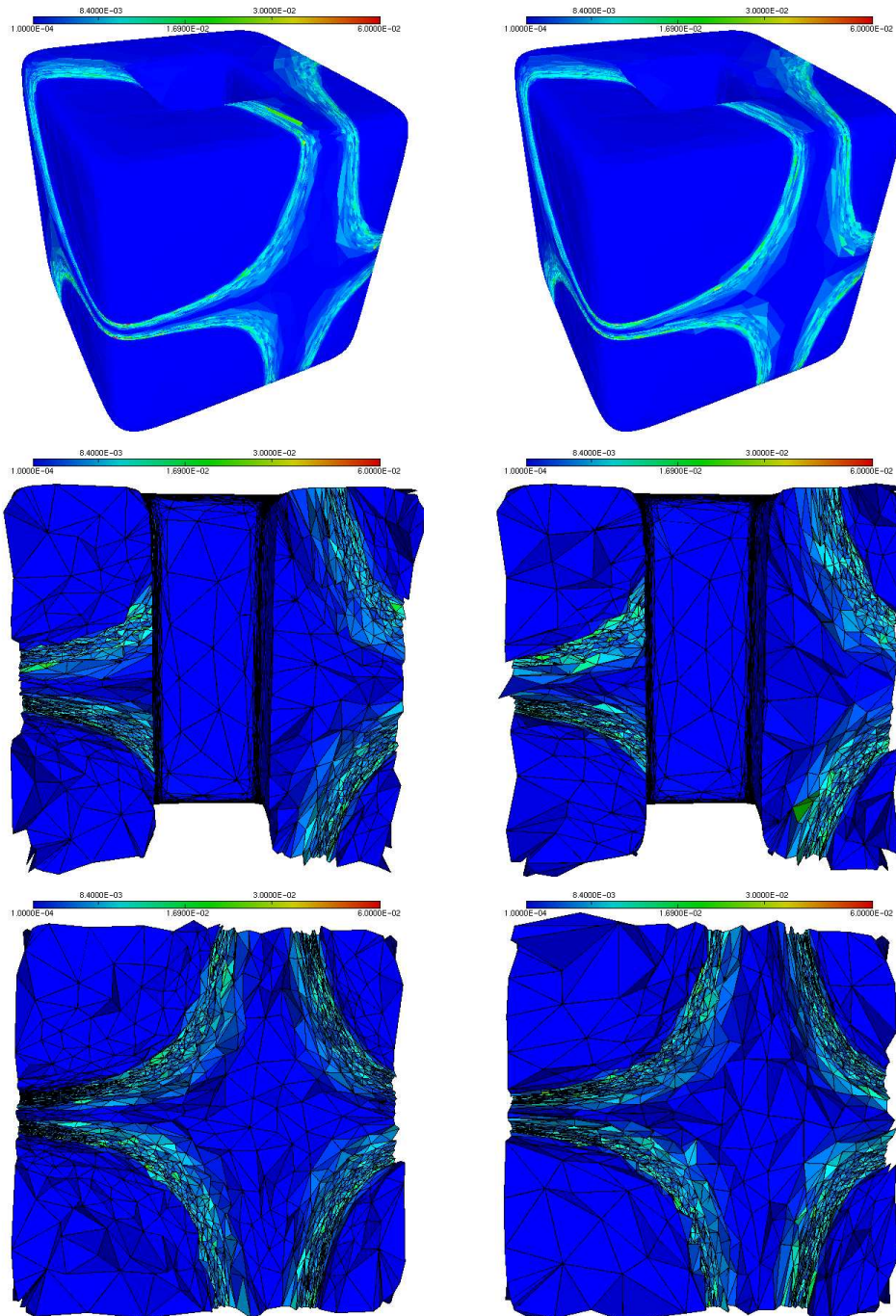


FIG. 17 – Cartes d'erreurs sur la surface et dans le volume aux itérations 4 et 8 (à gauche et à droite, respectivement).

3 Application en mécanique des fluides

Dans cette dernière section, on examine maintenant un cas d'adaptation de maillage pour une simulation numérique en mécanique des fluides, en dimension deux. Le même maillage que dans les exemples analytiques en dimension deux est utilisé ici. Pour la simulation, un solveur Euler basé sur une technique de volumes finis a été utilisé [6]. Les équations d'Euler sont résolues à l'aide du flux de Roe. L'algorithme utilisé est explicite en temps, un schéma de type Runge-Kutta d'ordre quatre est utilisé pour l'intégration en temps. L'objectif de cette application est de montrer, sur un cas concret, qu'on obtient également la convergence du couple maillage-solution au moyen de l'adaptation de maillage.

3.1 Scramjet en régime supersonique

Cet exemple d'application correspond à un calcul Euler dans un scramjet à Mach 3. Il est particulièrement représentatif des simulations en mécanique des fluides compressibles, faisant intervenir des phénomènes physiques de nature anisotrope (des chocs notamment). Il s'agit donc ici de capturer le comportement du phénomène physique ainsi que son anisotropie. On va en outre s'attacher à montrer le gain lié à l'anisotropie des maillages par rapport aux maillages isotropes.

Comme on peut le voir (Figure 19), la géométrie est symétrique, mais le calcul a été effectué sur le domaine global pour voir si une solution symétrique était obtenue avec l'adaptation de maillage non-structuré. Le domaine est défini de la manière suivante :

- la paroi supérieure est définie par 6 points de coordonnées (en mètres) :
(0, 3.5), (0.4, 3.5), (4.9, 2.9), (12.6, 2.12), (14.25, 1.92) et (16.9, 1.7),
- l'obstacle supérieur est défini par 5 points :
(4.9, 1.4), (12.6, 1.4), (14.25, 1.2), (9.4, 0.5) et (8.9, 0.5),
- l'axe de symétrie est définie par le segment joignant les points (0, 0) et (16.9, 0).

Dans cet exemple, on conduit deux séries d'adaptations, isotrope et anisotrope. Les paramètres sont les mêmes pour les deux calculs : 9 adaptations ont été effectuées toutes les 400 itérations du solveur Euler. On a choisi la densité comme variable pour l'adaptation et les paramètres suivants : $\varepsilon = 0.02$, $h_{min} = 0.01$ m. et $h_{max} = 2$ m.

La surface cartésienne associée à la solution (densité) numérique représente une série de marches (qui correspondent aux chocs) dans le domaine de calcul (Figure 22, en haut). L'estimateur d'erreur géométrique déduit de la géométrie de cette surface de \mathbb{R}^3 une métrique dans le domaine d'étude. Par conséquent, un maillage adapté à la solution est un maillage géométrique de la surface associée (Figure 22, en bas).

Le Tableau 10 reporte les statistiques relatives au maillage initial et aux maillages adaptés isotropes et anisotropes. Les Figures 19 et 20 présentent les maillages initial et adaptés aux itérations 2 et 9, ainsi que les iso-densités correspondantes. On peut ainsi apprécier la convergence du couple maillage-solution.

Itération	$n_{p_{aniso}}$	$n_{e_{aniso}}$	t_{aniso}	$n_{p_{iso}}$	$n_{e_{iso}}$	t_{iso}
0	8 012	15 275	-	8 012	15 275	-
2	5 783	11 055	3.84	76 565	151 558	25.62
5	9 292	17 983	6.25	75 997	150 532	23.99
9	15 110	29 569	8.59	78 702	155 951	23.30

TAB. 10 – Statistiques sur les maillages initial et adaptés dans le cas isotrope et anisotrope.

On peut remarquer que l'approche anisotrope conduit, au bout de 9 adaptations, à un maillage de 15 110 sommets (Figure 19, en bas) alors qu'avec l'approche isotrope le maillage final est de 78 702 sommets (Figure 21). Une telle différence de taille induit évidemment un rapport analogue au niveau du temps de calcul pour la simulation complète (14m30s vs. 2h13m). En outre, on constate qu'en alignant les éléments sur les discontinuités, on réduit notablement l'effet de la diffusion numérique due au solveur de Riemann (Figure 18).

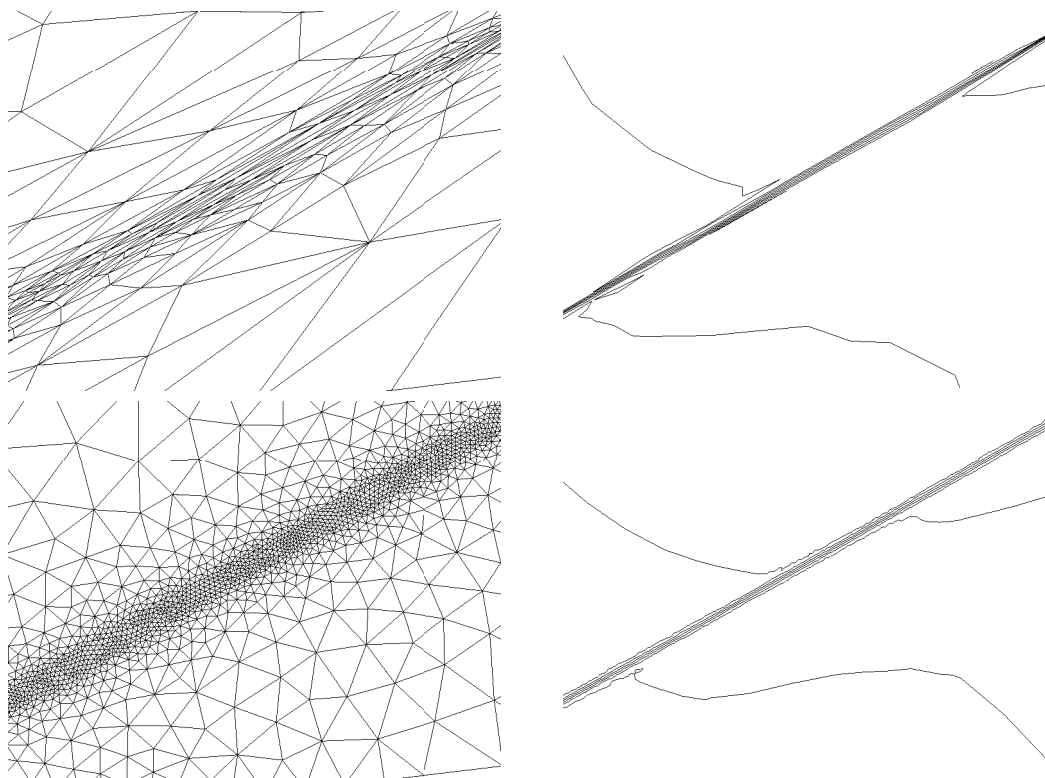


FIG. 18 – Impact du maillage anisotrope par rapport au maillage isotrope. Zooms sur la région d'un choc et iso-densités correspondantes.

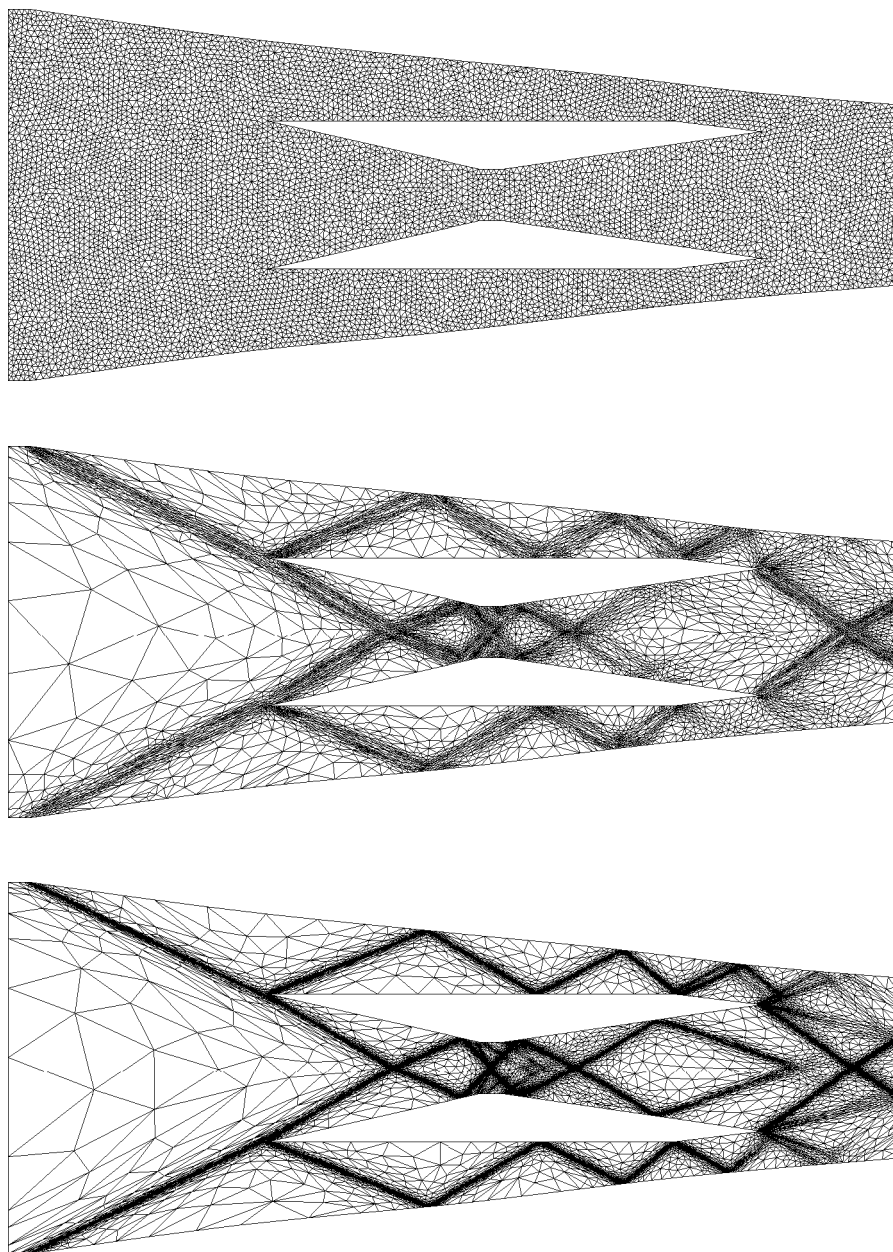


FIG. 19 – Maillage initial et maillages adaptés aux itérations 2 et 9 dans le cas de l'adaptation anisotrope.

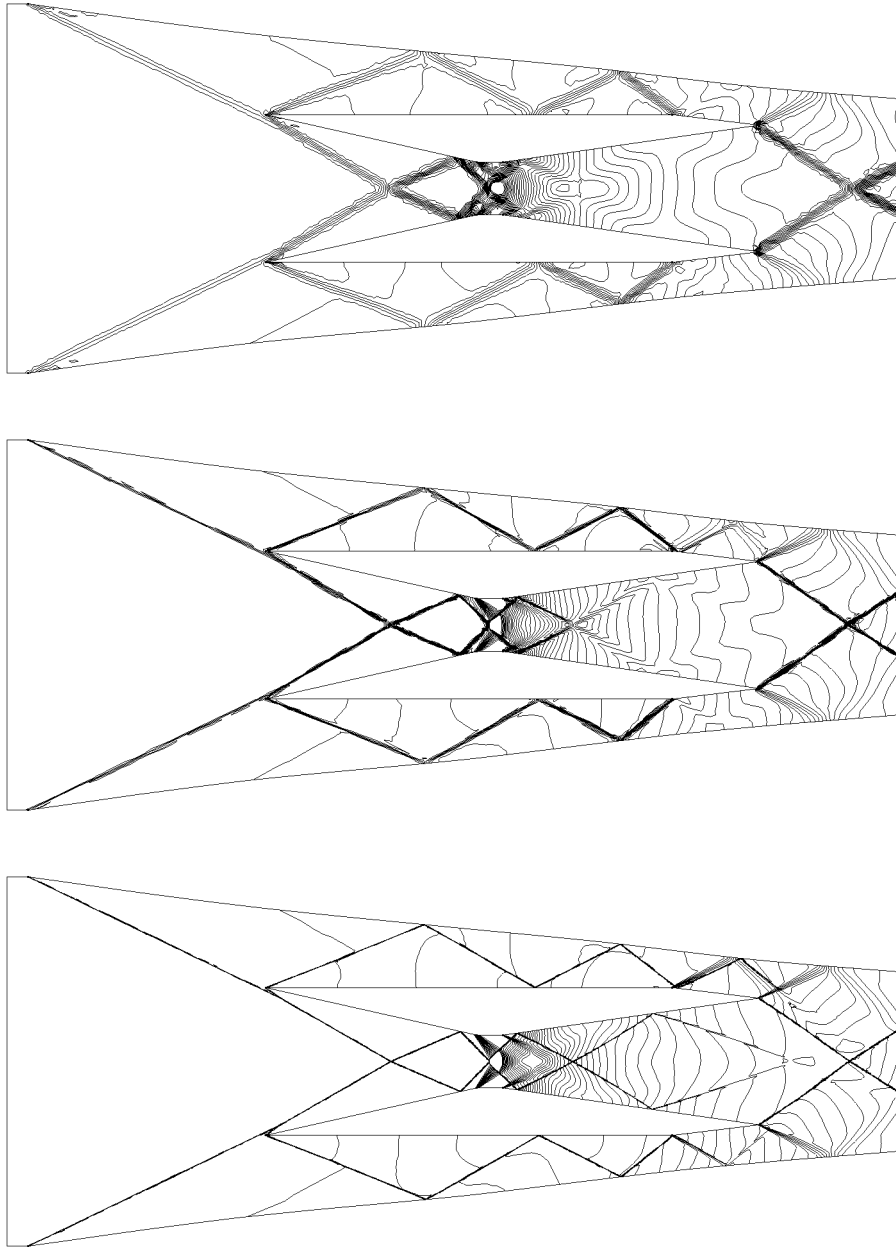


FIG. 20 – *Iso-densités initiale et adaptés aux itérations 2 et 9 dans le cas de l'adaptation anisotrope.*

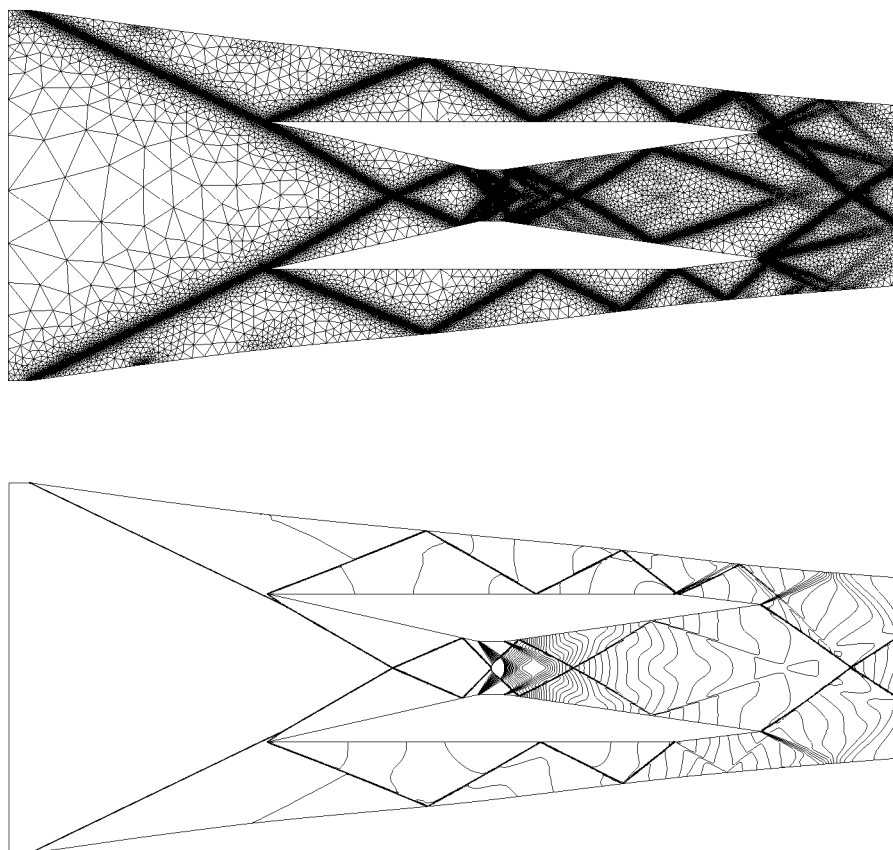


FIG. 21 – Maillage final adapté (itération 9) dans le cas de l'adaptation isotrope et iso-densités correspondantes.

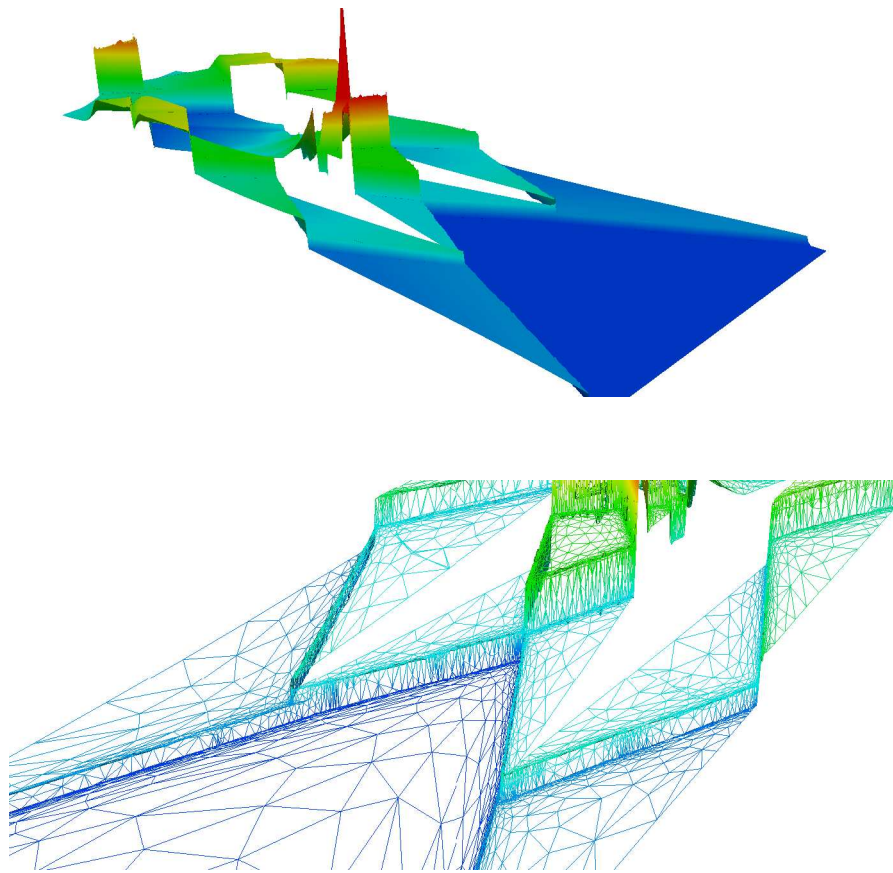


FIG. 22 – *En haut : surface cartésienne associée au champ de densité. En bas : zoom sur le maillage géométrique de cette surface.*

4 Une brève conclusion

Dans cette étude, nous avons montré la validité de l'approche consistant à construire un estimateur d'erreur d'interpolation géométrique, en dimension deux. Les exemples proposés dans la partie II de ce rapport, montrent l'efficacité de la méthode proposée. On peut donc conclure que le cas de la dimension deux est traité de manière satisfaisante. Il reste encore à valider cet estimateur d'erreur en dimension trois, dans le cas de simulations numériques, et notamment dans le cas de maillages anisotropes.

Références

- [1] F. ALAUZET ET P.J. FREY, Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques, *Rapport de Recherche INRIA*, 4759, mars 2003.
- [2] P.J. FREY, About surface remeshing, *Proc.of 9th Int. Meshing Roundtable*, New Orleans, LO, USA, oct., 2000
- [3] P.J. FREY, Yams : A fully Automatic Adaptive Isotropic Surface Remeshing Procedure, *Rapport Technique INRIA*, 0252, november 2001.
- [4] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages : applications aux éléments finis, *Hermès Science, Paris*, 1999.
- [5] P.L. GEORGE, Premières expériences de maillage automatique par une méthode de Delaunay anisotrope en trois dimensions, *Rapport technique INRIA*, 0272, novembre 2002.
- [6] B. MOHAMMADI, Fluid dynamics computation with NSC2KE an user-guide Release 1.0, *Rapport Technique INRIA*, RT-0164, 1994.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399