



# Raffinement et de déraffinement de paramétrisation pour l'estimation de transmissivité hydraulique

Hend Ben Ameer, Guy Chavent, Jérôme Jaffré

## ► To cite this version:

Hend Ben Ameer, Guy Chavent, Jérôme Jaffré. Raffinement et de déraffinement de paramétrisation pour l'estimation de transmissivité hydraulique. [Rapport de recherche] RR-3623, INRIA. 1999. inria-00073054

**HAL Id: inria-00073054**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073054>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Raffinement et de déraffinement de paramétrisation pour  
l'estimation de transmissivité hydraulique***

Hend BEN AMEUR, Guy CHAVENT, Jérôme JAFFRE

**N° 3623**

1999

THÈME 4



***rapport  
de recherche***



## Raffinement et de déraffinement de paramétrisation pour l'estimation de transmissivité hydraulique

Hend BEN AMEUR\*, Guy CHAVENT†, Jérôme JAFFRE‡

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Estime

Rapport de recherche n° 3623 — 1999 — 14 pages

**Résumé :** Nous considérons le problème de l'estimation de transmissivités hydrauliques formulé comme la minimisation au sens des moindres carrés d'une fonctionnelle évaluant l'écart entre les hauteurs piézométriques effectivement mesurées et celles calculées par le modèle pour un jeu de transmissivités donné. Dans cet article nous cherchons une paramétrisation optimale de la transmissivité supposée constante par morceaux, ce qui revient à déterminer une partition du domaine telle que la transmissivité est constante sur chaque partie de cette partition. Pour cela nous introduisons des indicateurs de raffinement et de déraffinement de la paramétrisation et nous montrons comment les utiliser.

**Mots-clé :** problème inverse, estimation de paramètre, paramétrisation, transmissivité hydraulique

*(Abstract: pto)*

\* ENIT. Hend Ben-Ameur@inria.fr

† INRIA-rocquencourt. Guy Chavent@inria.fr

‡ INRIA-rocquencourt. Jerome Jaffre@inria.fr

# Refinement and coarsening of parameterization for the estimation of hydraulic transmissivity

**Abstract:** We consider the problem of estimating hydraulic transmissivity as the least squares minimization of a function evaluating the misfit between measured piezometric heads and that calculated with the model for a given transmissivity. In this paper we seek an optimal parameterization of the hydraulic transmissivity assumed to be piecewise constant, which is equivalent to finding a partition of the domain such that the transmissivity is constant on each part of the partition. For this purpose we introduce indicators of refinement and coarsening of the parameterization and we show how to use them.

**Key-words:** inverse problem, parameter estimation, parameterization, zonation, hydraulic transmissivity

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications physiques, se pose le problème de l'estimation du coefficient d'une équation parabolique. On considère le cas où ce coefficient dépend de la variable d'espace, comme c'est le cas des transmissivités hydrauliques en hydrogéologie. Ce coefficient peut varier de façon régulière, mais dans de nombreux cas il peut aussi présenter de fortes discontinuités à l'interface entre deux formations géologiques différentes. Souvent on peut même considérer que ces transmissivités hydrauliques sont constantes dans certaines zones dont les frontières sont à déterminer.

L'estimation des transmissivités hydrauliques s'effectue par la résolution d'un problème inverse dans lequel les observations sont des mesures en certains points du domaine (puits). Ce problème inverse est posé comme un problème de minimisation moindres carrés dans lequel on minimise la différence entre les observations mesurées expérimentalement et celles calculées par le modèle pour un jeu de paramètres. Une des difficultés essentielles provient de ce que le nombre des points de mesures est très réduit, en tous cas tout à fait insuffisant pour pouvoir espérer estimer une valeur de la transmissivité par maille de calcul. Il est donc nécessaire de choisir une paramétrisation des transmissivités qui puisse tenir compte de la quantité de mesures disponibles. Si le nombre de paramètres est trop grand, alors le problème sera mal posé ; s'il est trop petit alors le modèle ne pourra pas rendre compte correctement des mesures. On renvoie le lecteur à [7, 10] pour une revue des paramétrisations les plus utilisées en hydrogéologie.

Ces dernières années une nouvelle approche a été proposée : la paramétrisation multiéchelle [9, 5]. Le problème d'estimation de paramètres est résolu de façon itérative en itérant des échelles les plus grossières vers les plus fines. Ce processus itératif est arrêté lorsque le changement d'échelle ne permet plus de faire diminuer la fonction moindres carrés. Cette méthode a apporté des améliorations importantes dans divers problèmes d'estimation de paramètres [2, 3]. Cependant elle présente l'inconvénient de conduire à des raffinements uniformes des paramètres alors que seuls des raffinements locaux seraient nécessaires.

La méthode que nous allons présenter ici et qui utilise des indicateurs de raffinement et de déraffinement a pour objet de remédier au défaut de la méthode multiéchelle (raffinement uniforme) tout en conservant les avantages (ajustement du nombre de paramètres à la quantité de données disponibles). L'idée est de passer de l'itération  $n$  à l'itération  $n + 1$  en ajoutant ou en enlevant un ou plusieurs degrés de liberté qui sont sélectionnés suivant ces indicateurs de raffinement de façon que l'optimisation à l'itération  $n + 1$  produise une diminution importante de la fonction moindres carrés. Une fois le gradient de cette fonction calculé (par la méthode de l'état adjoint), ces indicateurs s'obtiennent par des calculs simples et peu coûteux. Une variante de cette méthode a déjà été brièvement présentée dans [4].

Considérons l'équation

$$S \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} (-T \operatorname{grad} \Phi) = Q \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , et où la variable de temps  $t$  appartient à l'intervalle  $]0, t_f[$ . En hydrogéologie cette équation modélise les écoulements d'eau dans une nappe captive. Ici  $T$  représente la transmissivité hydraulique du milieu poreux,  $S$  le coefficient d'emmagasinement,  $Q$  un terme source, et  $\Phi$  est la hauteur piézométrique.

A cette équation on associe des conditions aux limites et des conditions initiales

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_d \text{ sur } \Gamma_D, & (-T \operatorname{grad} \Phi) \cdot n &= q_d \text{ sur } \Gamma_N, \\ \Phi(0) &= \Phi_0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\Omega$  et où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont les parties du bord de  $\Omega$  qui supportent des conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement. Sur  $\Gamma_D$  la hauteur piézométrique est donnée et sur  $\Gamma_N$  on connaît le débit d'eau.

Ces équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis mixtes-hybrides [6] qui est bien adaptée aux problèmes où le coefficient  $T$  varie beaucoup et de façon discontinue.

## 2 Problème inverse

La transmissivité hydraulique  $T$  et le coefficient d'emmagasinement  $S$  ne sont pas mesurables directement. Ils sont en général estimés en calant manuellement le modèle à des mesures de hauteurs piézométriques effectuées en différents puits. Dans la suite, pour simplifier la présentation de la méthode, on s'intéressera seulement à l'estimation de  $T$  en supposant  $S$  connu.

Le calage du modèle est effectué en minimisant une fonction moindres carrés  $J$  mesurant l'écart entre les hauteurs piézométriques  $\Phi_{i,j}^m$  mesurées aux points  $x_j$  et aux temps  $t_i$  et les quantités correspondantes calculées avec la valeur courante de la transmissivité hydraulique :

$$J(T) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\Phi(x_j, t_i) - \Phi_{i,j}^m|^2. \quad (3)$$

Afin d'avoir un coût de calcul dépendant le moins possible du nombre de transmissivités à estimer, nous utiliserons les méthodes d'optimisation les plus efficaces dans le cas d'un grand nombre de paramètres, soit celles utilisant le gradient de  $J$ . Ainsi nous utiliserons le programme M2QN1 basé sur la méthode de quasi-Newton dite de BFGS [1]. Le calcul du gradient de  $J$  s'effectue par la méthode de l'état adjoint. Nous rappelons ci-dessous ce calcul effectué formellement.

On introduit la fonctionnelle

$$e(\Phi, \Phi^*; T) = \int_{\Omega} S \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Phi^* - \int_{\Omega} \operatorname{div} (T \nabla \Phi) \Phi^* - \int_{\Omega} Q \Phi^*$$

et le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\Phi, \Phi^*; T) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |\Phi(x_j, t_i) - \Phi_{i,j}^m|^2 + \int_0^{t_f} e(\Phi, \Phi^*, T).$$

Toute solution  $\Phi$  de (1),(2) satisfait  $\mathcal{L}(\Phi, \Phi^*; T) = J(T)$ , quelque soit  $\Phi^*$  et on a donc, toujours pour tout  $\Phi^*$ ,

$$\frac{\partial J}{\partial T} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(\Phi, \Phi^*; T) \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}(\Phi, \Phi^*; T).$$

On choisit alors  $\Phi^*$  tel qu'il satisfasse les équations adjointes  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(\Phi, \Phi^*; T) = 0$ , c'est à dire

$$\begin{aligned} S \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \operatorname{div} (T \nabla \Phi^*) &= \sum_{i,j} (\Phi(x_j, t_i) - \Phi_{i,j}^m) \text{ dans } \Omega, \\ \Phi^* &= 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad (-T \operatorname{grad} \Phi^*) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ \Phi(t_f) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $t \in \times]0, t_f[$ . On en déduit alors l'expression du gradient

$$\frac{\partial J}{\partial T}(\Phi, \Phi^*; T) \delta T = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}(\Phi, \Phi^*; T) \delta T = \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_0^{t_f} e(\Phi, \Phi^*; T) \right) \delta T = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta T \nabla \Phi^* \nabla \Phi \, dx dt.$$

Ainsi le gradient  $\frac{\partial J}{\partial T}$  s'exprime aisément en fonction de  $\Phi$ , solution du problème direct (1),(2), et de  $\Phi^*$ , solution du problème adjoint (4). Le coût de son calcul est indépendant du nombre de paramètres

à estimer. Ce calcul est assuré par un programme fortran généré par Gradj, un générateur automatique de codes développé sous le logiciel de calcul formel Maple [8].

Vu le grand nombre d'inconnues (une valeur de transmissivité hydraulique par maille de calcul), l'optimisation de la fonction moindres carrés reste néanmoins coûteuse et souvent n'aboutit même pas. L'idée alors est de réduire le nombre de paramètres de sorte qu'il soit cohérent avec la quantité de données disponibles. La technique des indicateurs de raffinement et de déraffinement nous permet de déterminer un nombre de paramètres convenable.

### 3 Raffinement et de déraffinement de paramétrisation

Dans la plupart des problèmes d'estimation de coefficient dépendant de la variable d'espace dans des équations aux dérivées partielles paraboliques, il est illusoire de vouloir estimer une valeur de ce coefficient par maille du maillage de calcul  $\mathcal{T}_h$ . En effet les données mesurées sont en quantité insuffisante pour ce faire.

C'est pourquoi on est amené à introduire une partition  $\mathcal{Z}_p$  du domaine appelée partition de paramétrisation dont les parties de formes diverses correspondent à des zones où le coefficient à estimer est constant. Sur le plan pratique les bords des parties de  $\mathcal{Z}_p$  seront supportées par les arêtes du maillage de calcul  $\mathcal{T}_h$  ou par les diagonales de ses éléments (voir figure 1(c)).

Les degrés de liberté du paramètre transmissivité à estimer sont en nombre égal au nombre de parties de cette partition, et, on l'espère, en nombre très inférieur aux nombre de mailles de  $\mathcal{T}_h$ . Ainsi chacune des paramétrisation de la transmissivité que l'on considère correspond à une partition  $\mathcal{Z}_p$  du domaine de calcul sur lequel la transmissivité est constante par morceaux. La technique des indicateurs de raffinement et de déraffinement va nous permettre de construire une telle partition avec un nombre de parties aussi petit que possible.

#### 3.1 Indicateurs de raffinement de paramétrisation

Etant donné une paramétrisation initiale, c'est à dire une partition de paramétrisation, les indicateurs de raffinement nous permettront de localiser des discontinuités de transmissivité qui pourraient exister et qui n'ont pas encore été prises en considération avec cette partition, et de construire une nouvelle partition de paramétrisation. Précisément, à chaque paramètre ajouté à la paramétrisation initiale, correspond un indicateur de raffinement.

Nous allons procéder sur un exemple. Notons  $(\mathcal{P}_1)$  le problème où on suppose que la transmissivité hydraulique est constante dans tout le domaine (figure 1(b)). Nous avons alors un seul paramètre à estimer et soit  $T^*$  la solution du problème de minimisation correspondant. Supposons maintenant qu'on se place dans le cas de la figure 1(c), où notre domaine est supposé formé de deux zones de transmissivité différentes. Notons  $(\mathcal{P}_2)$  le problème associé à cette partition. La fonction moindres carrés à minimiser est maintenant une fonction de deux variables, et soit  $(T_1^*, T_2^*)$  la solution du problème de minimisation associé. Introduisons la discontinuité  $B = T_1^* - T_2^*$ . Si  $B$  est connu, la recherche du paramètre  $T^* = (T_1^*, T_2^*)$  correspond à la minimisation de la fonction moindres carrés  $J$  sous la contrainte  $T_1^* - T_2^* = B$ . On remarque alors que le problème  $(\mathcal{P}_1)$  équivaut à ce problème de minimisation avec la contrainte  $B = 0$ .

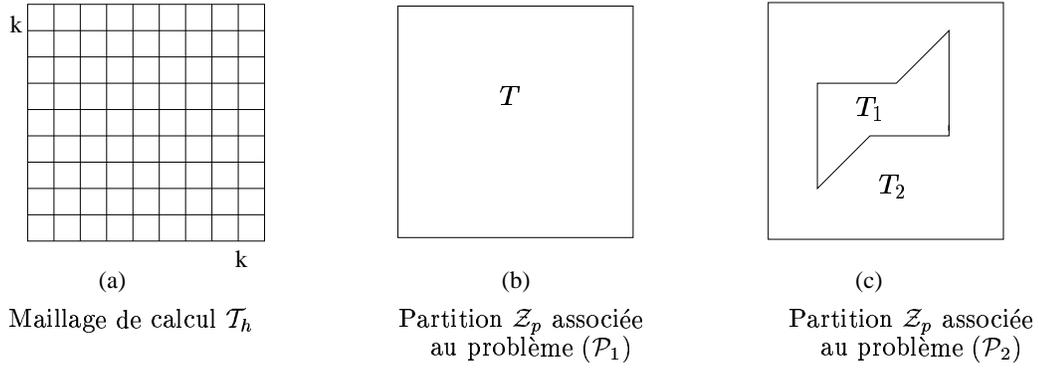


FIG. 1: *Exemple de raffinement de paramétrisation*

D'une façon générale, si on introduit  $n$  paramètres supplémentaires, la contrainte  $T_1^* - T_2^* = B$  se généralise en  $AT = B$  où  $B$  est le vecteur discontinuité  $(\sigma_{i,i+1})_{1 \leq i \leq n}$  et  $A$  est la matrice  $n \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$A$  est une matrice de rang  $n-1$  dont la dernière colonne est l'opposé de la somme des colonnes précédentes.

Pour résoudre le problème de minimisation sous contrainte:  $J(T^*) = \min_{AT=B} J(T)$  on introduit le Lagrangien défini par

$$\mathcal{L}(T, \lambda) = J(T) + \langle \lambda, AT - B \rangle \quad (5)$$

où  $\lambda$  est un vecteur de dimension  $n$ . Alors  $T^*$  satisfait les conditions d'optimalité

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T}(T^*, \lambda^*) &= \nabla J(T^*) + A^T \lambda^* = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(T^*, \lambda^*) &= AT^* - B = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

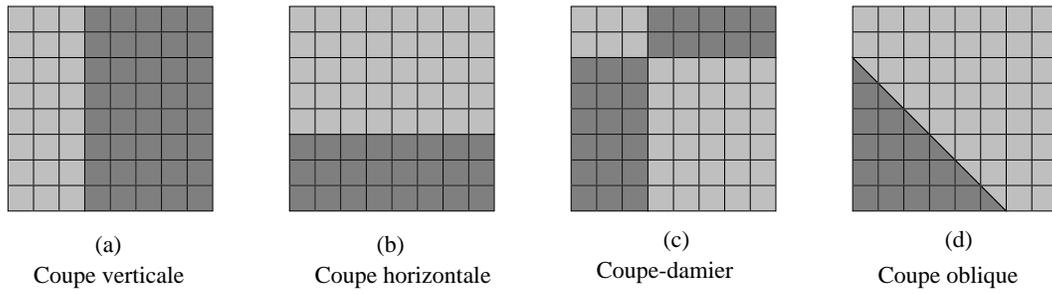
$\lambda^*$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $AT = B$ . En dérivant l'équation (5) et en tenant compte des équations (6), on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}(T^*, \lambda^*)|_{B=0} = \frac{\partial J}{\partial B}(T^*)|_{B=0} - \lambda^* = 0. \quad (7)$$

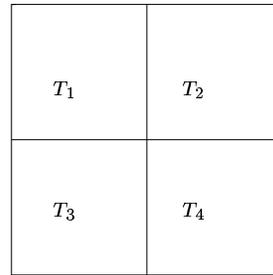
Cette expression montre que  $|\lambda^*|$  modélise la variation de la valeur optimale de la fonction moindres carrés qu'on obtient en raffinant la paramétrisation de la façon proposée. Ce multiplicateur de Lagrange, ou indicateur de raffinement, peut être déduit facilement à partir de la première équation (6). Dans le cas de l'exemple considéré, l'indicateur du raffinement proposé sur la figure 1(c) est

$$\lambda^* = \frac{\partial J}{\partial T_1}(T^*) = -\frac{\partial J}{\partial T_2}(T^*).$$

Ainsi sans résoudre le problème  $(\mathcal{P}_2)$ , le calcul de  $\lambda^*$  nous permet de dire si en introduisant une courbe qui partage notre domaine en deux zones de transmissivités différentes, nous pouvons obtenir une décroissance importante de la fonction moindres carrés. Dans toute la suite de ce travail, une telle courbe sera appelée "coupe".

FIG. 2: *Quatre coupes élémentaires.*

Un cas particulier est celui où l'on cherche à déterminer si la transmissivité hydraulique peut être paramétrisée par quatre valeurs qu'elle prend sur une partition du domaine en quatre parties telles que représentées dans la figure 3.

FIG. 3: *Partition de paramétrisation composée de quatre parties carrées.*

Les discontinuités entre les différentes zones de transmissivité s'écrivent:

$$\sigma_{1,2} = T_1 - T_2, \quad \sigma_{2,4} = T_2 - T_4, \quad \sigma_{3,4} = T_3 - T_4, \quad \sigma_{1,3} = T_1 - T_3.$$

Ces équations ne représentent en fait que trois contraintes indépendantes et il faut imposer  $\sigma_{1,2} - \sigma_{3,4} = \sigma_{1,3} - \sigma_{2,4}$ . Réécrivons ces trois contraintes sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma_V &= (T_1 + T_3) - (T_2 + T_4), \\ \sigma_H &= (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4), \\ \sigma_D &= (T_1 + T_4) - (T_2 + T_3). \end{aligned} \tag{8}$$

La matrice  $A$  s'écrit donc  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . La première équation (8) correspond à une coupe verticale ( $T_1 = T_3, T_2 = T_4$ ), la seconde à une coupe horizontale ( $T_1 = T_2, T_3 = T_4$ ) et la troisième à une coupe-damier ( $T_1 = T_4, T_2 = T_3$ ).

La première équation (6) qui permet de calculer le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  associé au système de contraintes (8) s'écrit

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{\partial J}{\partial T_1}(T^*), \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= -\frac{\partial J}{\partial T_2}(T^*), \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= -\frac{\partial J}{\partial T_3}(T^*), \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{\partial J}{\partial T_4}(T^*). \end{aligned} \tag{9}$$

Les composantes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  du vecteur multiplicateur de Lagrange sont les indicateurs de raffinement qui correspondent respectivement aux coupes verticale, horizontale et au damier créé par le croisement de ces coupes.

En pratique, à une itération  $n$  la valeur de la fonction moindres carrés nous indique si la paramétrisation à cette itération est satisfaisante. Si elle ne l'est pas, à partir du gradient de la fonction moindres carrés déjà calculé, nous déduisons des indicateurs de raffinement correspondant à différentes formes et positions de coupes. Ces indicateurs nous montrent si parmi ces coupes il peut y avoir une ou plusieurs qui vont donner une décroissance significative de la fonction moindres carrées. Ceci nous permet de choisir le meilleur raffinement à utiliser à l'itération  $n + 1$ , soit celui qui correspond à des indicateurs de raffinement dont les valeurs absolues sont relativement importantes.

### 3.2 Indicateurs de déraffinement de paramétrisation

Etant donnée une partition  $\mathcal{Z}_p$ , on étudie dans ce paragraphe l'éventualité où cette partition est trop fine et où on souhaite donc réunir certaines de ses parties.

Reprenons l'exemple considéré précédemment (figure 1) et supposons qu'à une première étape on a retenu la coupe de la figure 1(c) de sorte que la partition  $\mathcal{Z}_p$  soit formée par deux parties: une zone intérieure et une autre extérieure. Notons  $T_1^*$  et  $T_2^*$  les valeurs optimales de la transmissivité obtenues après minimisation de la fonction moindres carrés en considérant cette partition à deux zones. Pour raffiner plus avant on étudie diverses coupes et on suppose que deux d'entre elles ont les indicateurs de raffinement les plus importants. On retient donc ces deux coupes que l'on note  $C_1$  et  $C_2$  (figure 4).

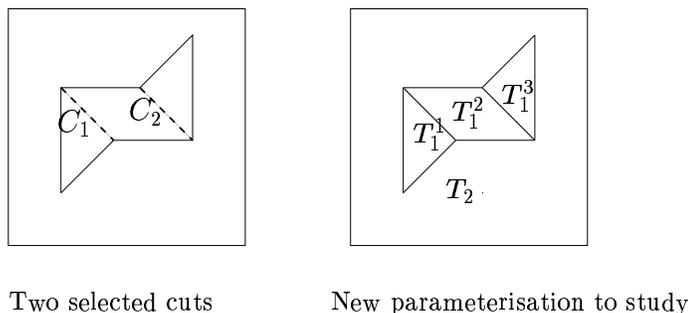


FIG. 4: Quelques raffinements possibles pour la figure 1(c)

La partition obtenue à l'étape précédente étant alors divisée en plusieurs parties, la question est maintenant: "doit-on retenir toute cette partition ou doit-on regrouper quelques sous-parties intérieures avec la partie extérieure de la partition?". Il nous faut étudier l'influence de la suppression

de la discontinuité de transmissivité entre une sous-partie intérieure et la partie extérieure de la partition, sur la valeur optimale de la fonction moindres carrés. Le problème d'optimisation à deux zones, dont la solution est  $T_1^*$  et  $T_2^*$ , est équivalent à celui consistant à minimiser  $J(T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_2)$  sous les contraintes

$$\begin{aligned} T_1^1 - T_2 &= T_1^* - T_2^*, \\ T_1^2 - T_2 &= T_1^* - T_2^*, \\ T_1^3 - T_2 &= T_1^* - T_2^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Ces contraintes s'écrivent sous la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_1^3 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^* - T_2^* \\ T_1^* - T_2^* \\ T_1^* - T_2^* \end{bmatrix}.$$

Supprimer la partie de coupe séparant les deux zones de transmissivité  $T_1^1$  et  $T_2$ , par exemple, revient à minimiser  $J(T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_2)$  sous les nouvelles contraintes

$$\begin{aligned} T_1^1 - T_2 &= 0, \\ T_1^2 - T_2 &= T_1^* - T_2^*, \\ T_1^3 - T_2 &= T_1^* - T_2^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Le vecteur multiplicateur de Lagrange  $\lambda = (\lambda_{1,1}^2, \lambda_{1,2}^2, \lambda_{1,3}^2)$  associé au système de contraintes (10) vérifie l'équation (6) qui s'écrit

$$\begin{aligned} -\lambda_{1,2}^1 &= \frac{\partial J}{\partial T_1^1}(T_1^*, T_2^*), \\ -\lambda_{1,2}^2 &= \frac{\partial J}{\partial T_1^2}(T_1^*, T_2^*), \\ -\lambda_{1,2}^3 &= \frac{\partial J}{\partial T_1^3}(T_1^*, T_2^*), \\ \lambda_{1,2}^1 + \lambda_{1,2}^2 + \lambda_{1,2}^3 &= \frac{\partial J}{\partial T_2}(T_1^*, T_2^*). \end{aligned} \quad (12)$$

Les  $\lambda_{1,2}^i, i = 1, 2, 3$  sont alors les indicateurs de raffinement qui correspondent aux coupes associées aux sous-parties de la zone intérieure. Connaissant le signe de la discontinuité  $T_1^* - T_2^*$  le long de ces coupes, d'après (7) le calcul des indicateurs de raffinement correspondant à ces coupes nous permet de déterminer, suivant leurs signes et leurs valeurs, l'influence de l'aggrégation d'une sous-partie intérieure avec la partie extérieure de la partition. Pour cette raison nous appelons ces indicateurs "indicateurs de déraffinement".

### 3.3 Algorithme

Les différents indicateurs que nous venons de définir peuvent être utilisés comme dans l'algorithme ci-dessous qui a été mis en œuvre dans les expériences numériques.

1. Initialisation: choisir un maillage de paramétrisation  $\mathcal{Z}_p$ .
2. **Pour**  $k = 1, 2, \dots$  **Faire** jusqu'à convergence
3.     Minimiser la fonction moindres carrés pour des transmissivités paramétrisées sur  $\mathcal{Z}_p$  en calculant son gradient.
4.     **Pour** chaque partie de  $\mathcal{Z}_p$  **Faire**

5. Calculer les indicateurs de raffinement qui correspondent à toutes les coupes verticales et horizontales supportées par les arêtes du maillage de calcul  $\mathcal{T}_h$ , à toutes les coupes-damier qu'elles induisent, et à toutes les coupes obliques supportées par les diagonales des éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$ .
6. **Fin de Pour**
7. Calculer  $I_{max}$  la plus grande valeur absolue de tous les indicateurs de raffinement calculés. Extraire les coupes dont les indicateurs correspondants sont de valeurs absolues supérieures ou égales à  $80\% * I_{max}$  (ce pourcentage peut être ajusté).
8. **Si** dans une partie de  $\mathcal{Z}_p$  une ou plusieurs de ces coupes induisent une partition de cette partie en plusieurs composantes connexes, **Faire**
9. Calculer les indicateurs qui correspondent aux parties de ces coupes associées à chacune de ces composantes connexes.
10. Calculer  $I_{max}$  la plus grande valeur absolue de tous les indicateurs de raffinement calculés. Extraire les coupes dont les indicateurs correspondants sont de valeurs absolues supérieures ou égales à  $80\% * I_{max}$ .
11. **Fin de Si**
12. **Si** ces coupes suggèrent à l'utilisateur de nouvelles coupes, **Faire**
13. Calculer les indicateurs de raffinement correspondant à ces coupes.
14. Calculer  $I_{max}$  la plus grande valeur absolue de tous les indicateurs de raffinement calculés. Extraire les coupes dont les indicateurs correspondants sont de valeurs absolues supérieures ou égales à  $80\% * I_{max}$ .
15. **Fin de Si**
16. Minimiser la fonction moindres carrés pour chacune des partitions associées aux coupes extraites.
17. Retenir les coupes qui donnent la décroissance la plus forte de la fonction moindres carrés.
18. **Si**  $k > 1$  ou si  $\mathcal{Z}_p$  contient plus d'une partie, et si par partie de  $\mathcal{Z}_p$  plusieurs coupes sont retenues, alors cela signifie que la partie correspondante de  $\mathcal{Z}_p$  est divisée en plusieurs sous-parties, il faut alors **Faire**
19. Calculer les indicateurs de déraffinement qui correspondent aux coupes associées à ces sous-parties.
20. Retenir la partie de coupe qui correspond à l'indicateur de déraffinement de plus grande valeur absolue.
21. **Fin de Si**
22. Mise à jour de  $\mathcal{Z}_p$ .
23. **Fin de Pour**

## 4 Etude numérique

Les expériences numériques que nous présentons ci-dessous portent sur quelques situations simples qui nous ont permis de tester les techniques de raffinement et de déraffinement de paramétrisation que nous avons présentées au paragraphe précédent. Il s'agit d'exemples synthétiques dans lesquels il s'agit de retrouver deux ou trois valeurs de la transmissivité hydraulique et les zones dans lesquelles elle prend ces valeurs.

Dans tous les exemples on a supposé que les fonctions  $\Phi_d, q_d$  et  $\Phi_0$  définissant respectivement les conditions sur le bord  $\Gamma_D$  et la condition initiale (2) sont nulles alors que le second membre  $Q$  de l'équation (1) a été supposé constant en espace et en temps.

### 4.1 Cas d'une inclusion centrale

Le premier cas étudié est celui de deux zones dont l'une est incluse dans l'autre de manière qu'elle soit au centre du domaine (figure 5). Nous initialisons l'optimisation en supposant la transmissivité constante dans tout le domaine (figure 6) et nous commençons par minimiser la fonction moindres carrés avec cette paramétrisation.

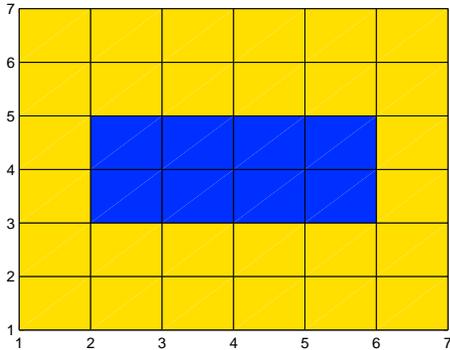


FIG. 5: *Transmissivité exacte, l'inconnue du problème inverse*

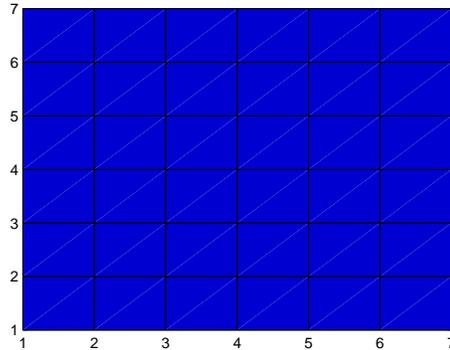


FIG. 6: *Transmissivité initiale*

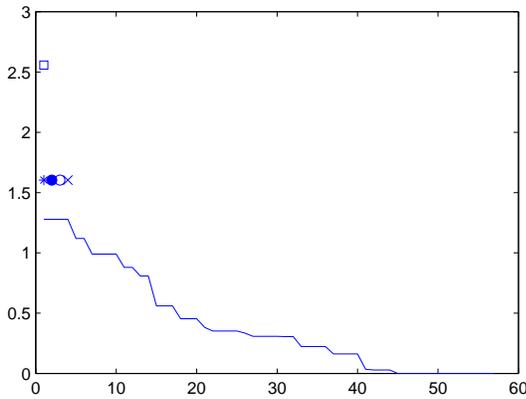


FIG. 7: *Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement*

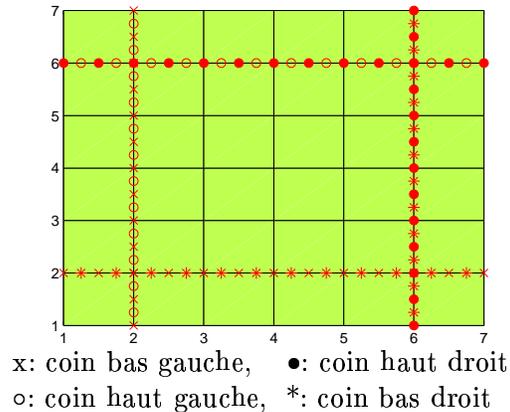
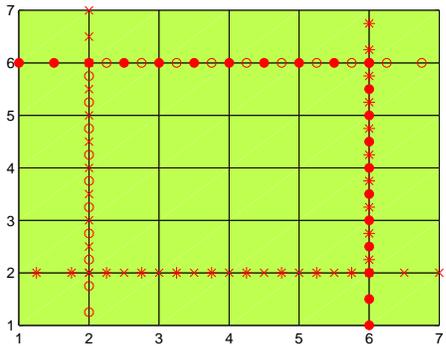


FIG. 8: *Les 4 coupes-damier correspondant aux plus forts indicateurs*

Sur la figure 7 on présente la valeur des indicateurs de raffinement en fonction des diverses coupes (étape 5 de l'algorithme). Ces valeurs sont représentées comme une courbe continue. Les coupes qui correspondent aux indicateurs les plus élevés (plateau initial de la courbe sur la figure 7), sont des coupes-damier proches des sommets du domaine de calcul (étape 7 de l'algorithme), voir figure 8.

On passe donc à l'étape 8 de l'algorithme (déraffinement): les indicateurs correspondant aux quatre coupes-coin associées à chacune des quatre coupes-damier sont alors calculés. Quatre de ces indicateurs sont plus forts que ceux des coupes-damier et leurs valeurs sont indiquées sur la figure 7 par les symboles x, •, o et \*. Sur la figure 9 on a représenté les quatre coupes-coin correspondant à ces indicateurs.



x: coin bas gauche, •: coin haut droit  
o: coin haut gauche, \*: coin bas droit

FIG. 9: Les 4 coupes-coin correspondant aux plus forts indicateurs

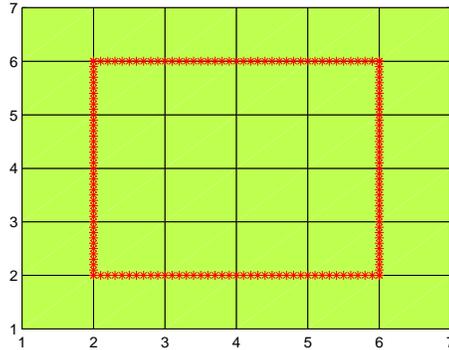


FIG. 10: Partition retenue à la fin de la première itération

L'agrégation de ces quatre coupes-coin suggère (étape 12 de l'algorithme) de considérer une coupe rectangulaire au centre du domaine formée par des parties des coupes retenues à l'itération précédente (voir figure 10). Le calcul de l'indicateur associé à cette coupe montre qu'il est le plus fort parmi ceux qui ont été calculés (symbole  $\square$  sur la figure 7). Nous retenons donc cette coupe.

Nous passons ensuite à la deuxième itération et nous commençons par minimiser  $J$  avec la paramétrisation correspondant à la partition calculée à l'itération précédente, puis nous reprenons pour chacune des zones de transmissivité les mêmes étapes que dans la première itération.

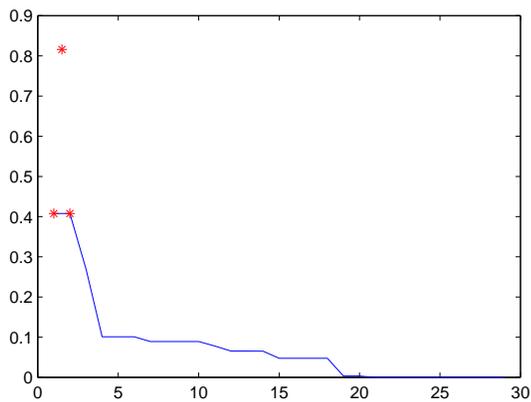


FIG. 11: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement et trois indicateurs de déraffinement (symbole \*)

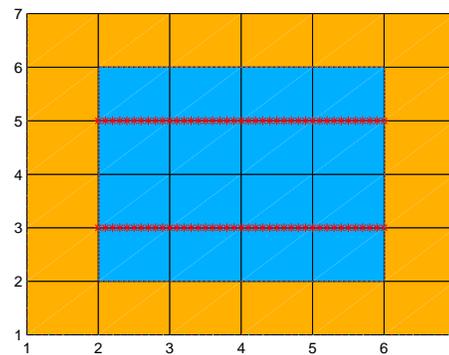


FIG. 12: Transmissivité calculée à la 2ème itération et coupes correspondant aux indicateurs les plus forts

La valeur la plus élevée des indicateurs de raffinement calculés correspond à deux coupes (figure 12). La partie au centre du domaine retenue à la première itération est alors partagée en trois parties, ce qui nous amène à étudier les déraffinements possibles. Un calcul des trois indicateurs de déraffinement (étape 19 de l'algorithme) dont les valeurs sont représentées sur la figure 11 (symbole \*) montre que seule la sous-partie centrale de la partie intérieure est à retenir (figure 13) car c'est celle qui correspond à l'indicateur le plus élevé.

Dans une troisième et dernière itération on calcule la transmissivité sur la partition trouvée à l'itération précédente en minimisant la fonction moindres carrés. Lorsque le minimum est atteint, cette fonction est nulle à la précision machine près et nous avons retrouvé les transmissibilités exactes (figure 14).

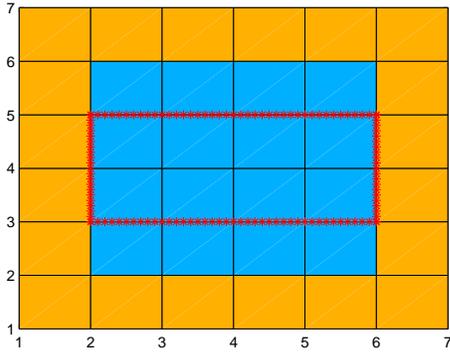


FIG. 13: *Partition retenue à la fin de la deuxième itération*

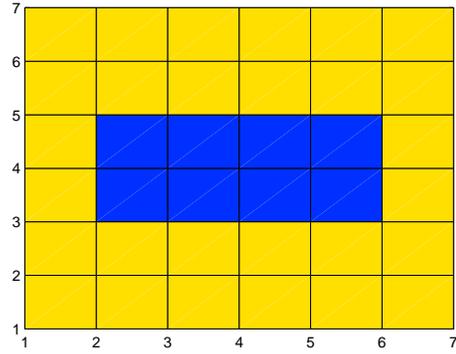


FIG. 14: *Transmissivité optimale calculée à la 3ème itération et égale à la transmissivité exacte cherchée*

## 4.2 Cas d'une inclusion excentrée

Le deuxième cas que nous allons présenter est celui d'une inclusion dont la position n'est pas au centre du domaine.

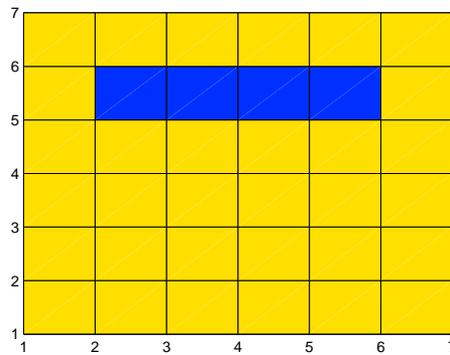


FIG. 15: *La transmissivité exacte, l'inconnue du problème inverse*

La transmissivité est initialisée à une constante sur tout le domaine. Après avoir minimisé par rapport à cette constante, on étudie les diverses coupes considérées à l'étape 5 de l'algorithme et on observe que trois coupes correspondent à des indicateurs de valeurs supérieures à 80% de la valeur maximale des indicateurs calculés (figure 16, symboles \*, ×, ○). Ces coupes sont représentées sur la figure 17. La figure 18 montre que par rapport à la valeur de la fonction moindres carrés obtenue à la première itération, la coupe centrale donne une plus grande décroissance de cette fonction. C'est cette coupe qu'on conserve pour l'itération suivante d'optimisation (figure 19).

À la deuxième itération, on commence par minimiser  $J$  avec la paramétrisation correspondant à la partition calculée à l'itération précédente, puis on calcule les indicateurs de raffinement dans chacune des deux zones de transmissivité. Deux coupes correspondent au plus fort indicateur, les autres indicateurs étant inférieurs à 80% de cette valeur maximale. La coupe retenue à la première itération est partagée en trois parties, et des indicateurs de déraffinement correspondant à chacune de ces parties sont calculés (symbole \* sur la figure 20). Seule la partie du milieu est à retenir car elle correspond à l'indicateur le plus fort (figure 21).

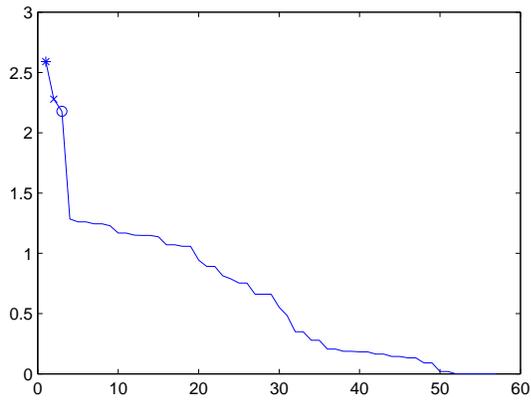


FIG. 16: *Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement*

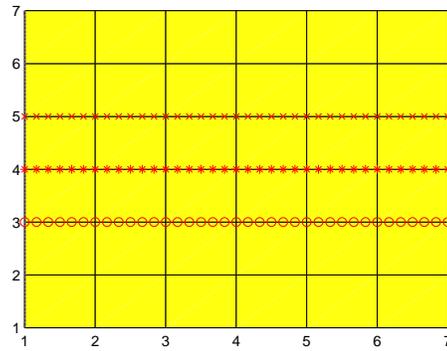
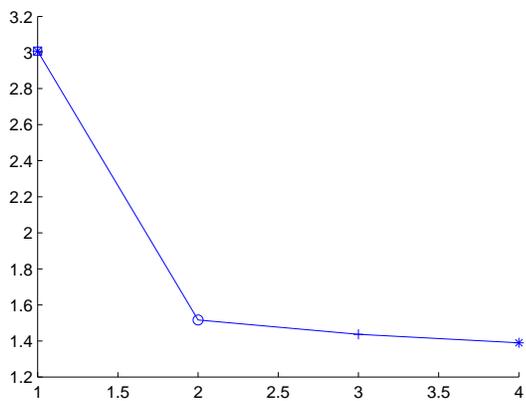


FIG. 17: *Coupes correspondant aux plus forts indicateurs*



:□: valeur de  $J$  à l'itération précédente.  
 o,x,\*: valeurs de  $J$  correspondant aux coupes de la figure 17.

FIG. 18: *Décroissance de la fonction moindres carrés pour les coupes retenues*

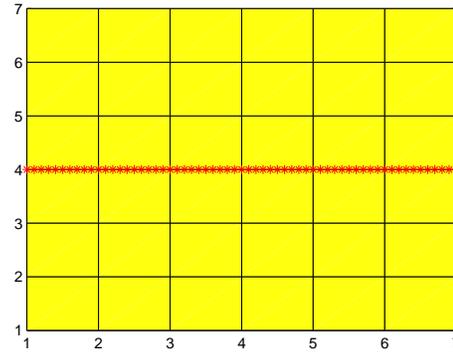


FIG. 19: *Coupe retenue à la première itération*

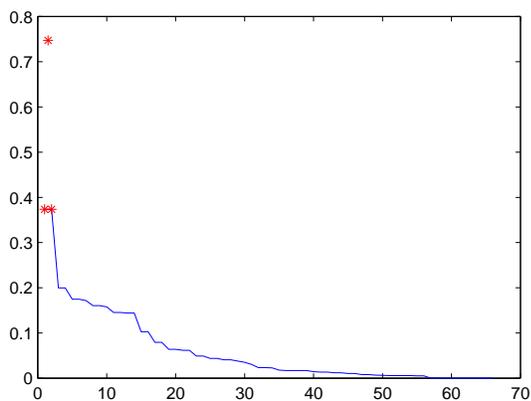


FIG. 20: *Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement et indicateurs de déraffinement (symbole \*)*

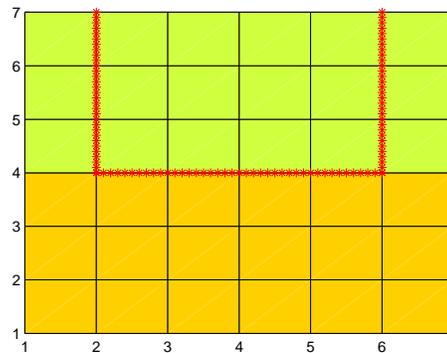


FIG. 21: *Transmissivité calculée sur la partition trouvée à la 1ère itération et coupe retenue à la 2ème itération*

A la troisième itération, une fois la minimisation effectuée, un calcul d'indicateurs similaire à celui des itérations précédentes, nous permet de conclure que deux coupes sont à tester (figures 22 et 23). La coupe marquée par le symbole  $\circ$  donne la décroissance la plus importante de la fonction moindres carrés; c'est donc celle qu'on va conserver (figures 24 et 25).

A la quatrième itération on débute donc avec trois zones de transmissivité pour lesquelles on minimise la fonction moindres carrés. Le calcul des indicateurs de raffinement dans chacune de ces zones montre que six coupes correspondent à des indicateurs supérieurs à 80% de l'indicateur de valeur maximale (figures 26 et 27). Le calcul de la fonction moindres carrés pour les partitions incluant ces coupes nous amènent à conserver celle qui produit la décroissance maximale de  $J$  (figure 28), ce qui donne la partition représentée sur la figure 29.

Nous sommes donc conduits à optimiser sur quatre zones de transmissivité. Le résultat de l'optimisation donne la transmissivité représentée sur la figure 30 qui est la solution exacte. On constate que dans ce cas les indicateurs de raffinement et de déraffinement n'ont pas réussi à retrouver la partition exacte, mais ils ont trouvé une partition qui contient la partition exacte et qui nous a permis de retrouver les paramètres exacts.

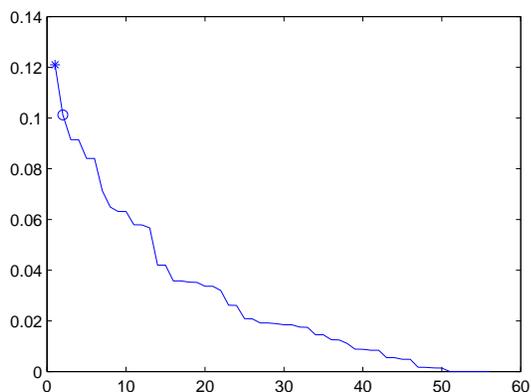


FIG. 22: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

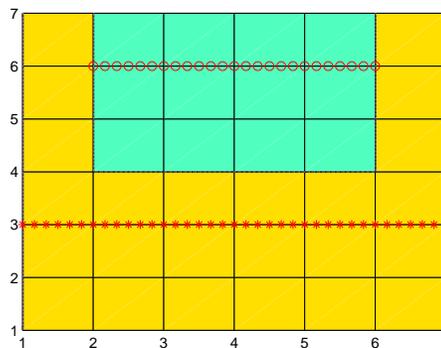
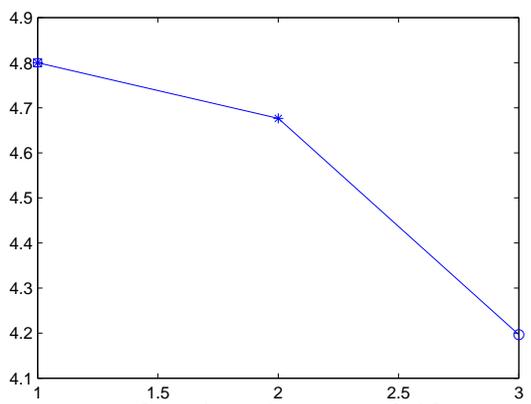


FIG. 23: Transmissivité calculée sur la partition obtenue à la 2ème itération et coupes correspondant aux plus forts indicateurs



$\square$ : valeur de  $J$  à l'itération précédente.  
 $\circ, *$ : valeurs de  $J$  correspondant aux coupes de la figure 23.

FIG. 24: Décroissance de la fonction moindres carrés pour les coupes retenues

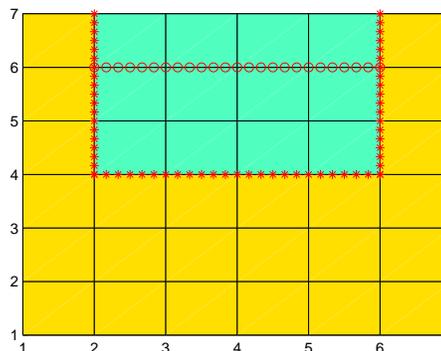


FIG. 25: Partition retenue à la troisième itération

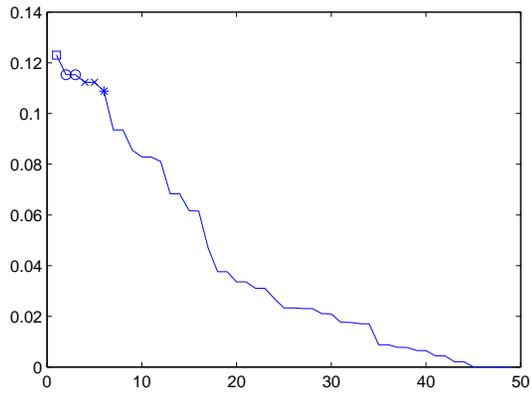


FIG. 26: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

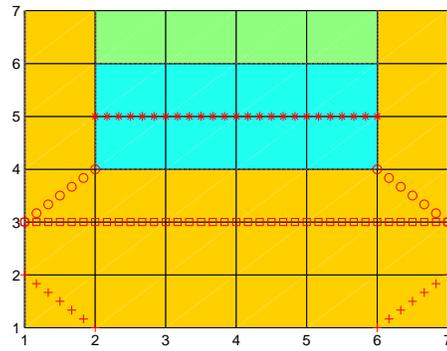


FIG. 27: Transmissivité calculée sur la partition obtenue à la 3ème itération et coupes correspondant aux plus forts indicateurs

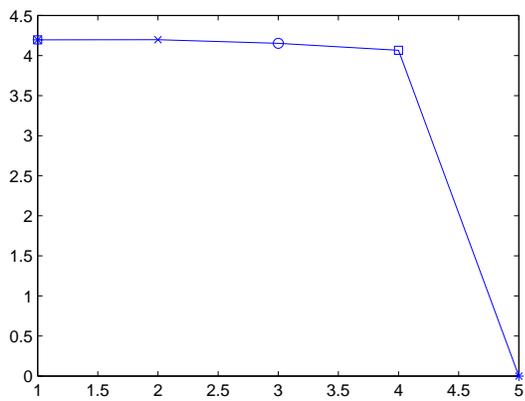


FIG. 28: Valeurs de la fonction moindres carrés à la troisième itération et pour les coupes retenues au cours de la quatrième itération

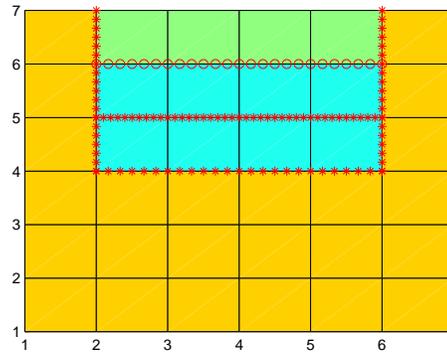


FIG. 29: Partition retenue à la quatrième itération

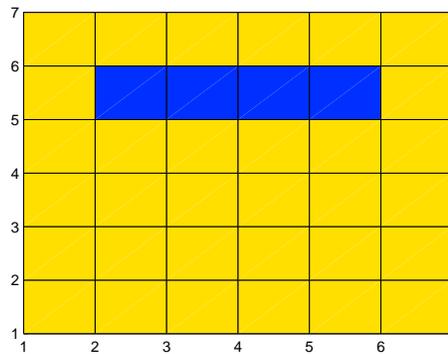


FIG. 30: La transmissivité optimale, solution du problème inverse

Une autre manière de conduire l'algorithme à partir de la troisième itération est de considérer une nouvelle répartition des zones de transmissivité faisant intervenir la coupe retenue. En plus du cas étudié précédemment (figure 25), deux partitions, représentées sur la figure 31, peuvent aussi être étudiées. Le calcul du minimum de la fonction moindres carrés pour ces deux dernières partitions donnent une valeur plus élevée que celle obtenue à la deuxième itération (figure 32), mais la valeur obtenue pour la partition de la figure 31(b) ne correspond pas à une augmentation très importante.

En poursuivant l'optimisation à partir de cette dernière partition, nous avons calculé les indicateurs de raffinement dans chacune des zones de transmissivité. Deux coupes sont alors retenues (figures 33 et 34). Le calcul du minimum de  $J$  pour des partitions contenant ces coupes montre que ce minimum est très petit dans le cas de la coupe du haut sur la figure 34. On obtient alors une partition à trois parties, au lieu de quatre dans la variante précédente, sur laquelle on minimise  $J$ . La transmissivité optimale obtenue est alors la solution du problème inverse (figure 15).

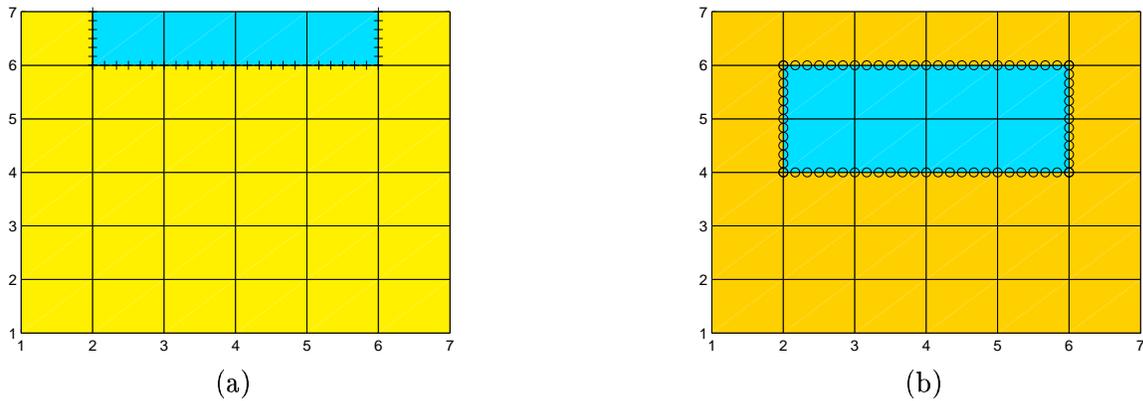


FIG. 31: *Nouvelles répartitions possibles des zones de transmissivité*

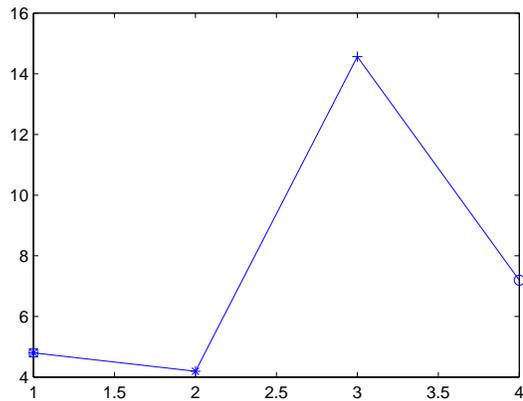


FIG. 32: *Les valeurs de la fonction moindres carrés calculées à la 2ème itération et pour les partitions des figures 25 et 31*

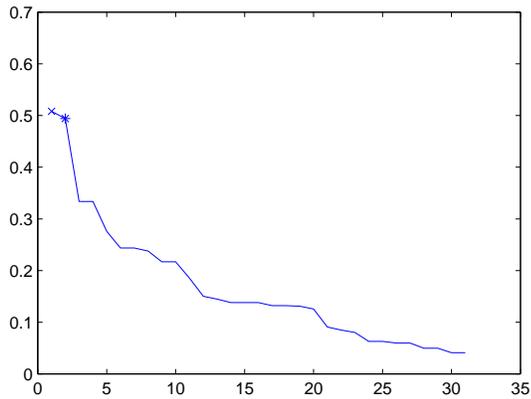


FIG. 33: *Décroissance des indicateurs de raffinement*

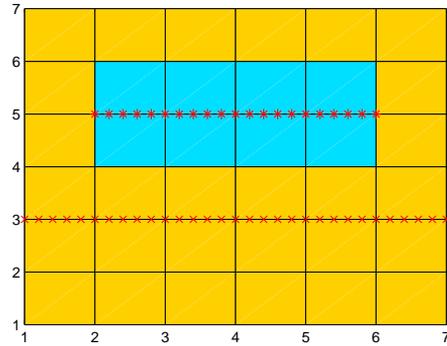


FIG. 34: *Coupes correspondantes aux indicateurs les plus forts*

Ainsi, comme le montre cet exemple, on constate que différentes mises en œuvre, conduisant toutes à la solution optimale, peuvent utiliser des partitions de cardinalités différentes. Dans l'exemple considéré ces cardinalités sont faibles par rapport au nombre de mailles de calcul, mais elles ne sont pas optimales.

#### 4.3 Cas d'une inclusion en contact avec le bord du domaine

Le troisième cas étudié est celui d'une inclusion en contact avec le bord du domaine (figure 35).

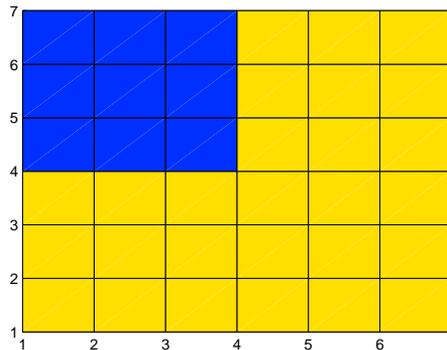


FIG. 35: *La transmissivité exacte, l'inconnue du problème inverse*

Comme précédemment, on a calculé d'abord les indicateurs de raffinement (figure 36). Trois coupes correspondent à des indicateurs supérieurs à 80% de la valeur maximale des indicateurs calculés. En considérant ces trois coupes (figure 37) une par une, le calcul de la fonction moindres carrés dans chacun de ces cas (figure 38) montre que la coupe centrale est celle à retenir (figure 39).

A la deuxième itération le calcul des indicateurs de raffinement dans chacune des deux zones de transmissivité (figure 40) nous conduit à tester 9 coupes correspondant aux plus forts indicateurs (figure 41). Nous considérons ces coupes une par une et, pour chacune des partitions qu'elles créent, nous calculons la transmissivité optimale et la fonction moindres carrés. Une d'entre elles, marquée par le symbole \* sur la figure 42 et produisant une partition à trois zones, conduit à une fonction moindres carrés nulle (figure 42) et à la solution optimale (figure 43). De nouveau on constate que dans ce cas la solution optimale est retrouvée sur une partition qui n'est pas optimale.

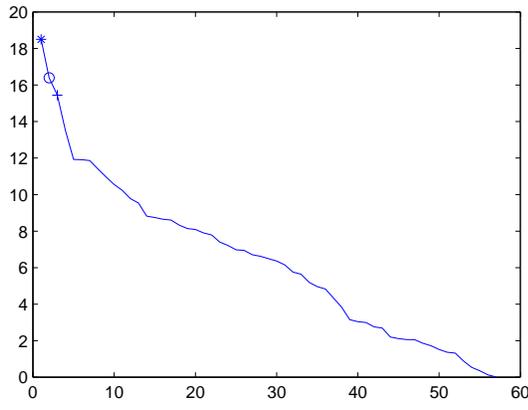


FIG. 36: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

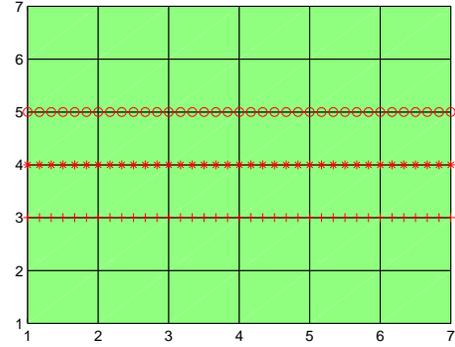


FIG. 37: Coupes correspondant aux plus forts indicateurs

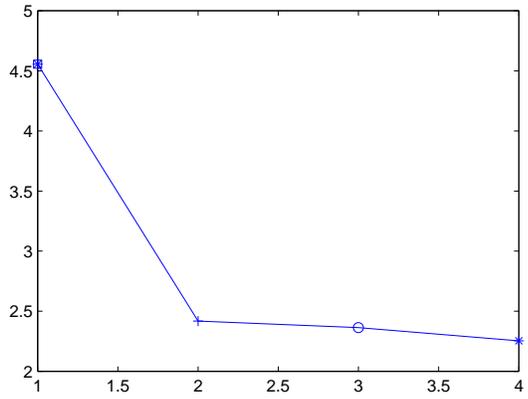


FIG. 38: Valeurs de la fonction moindres carrés initiale et pour les partitions associées aux 3 coupes de la fig. 37

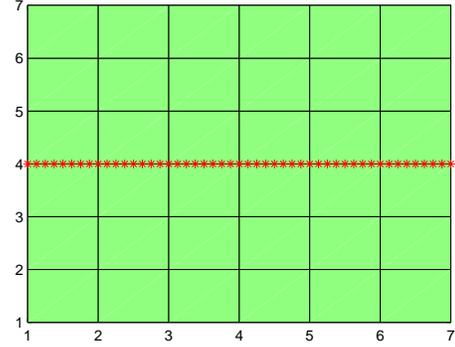


FIG. 39: Partition retenue à la fin de la 1ère itération

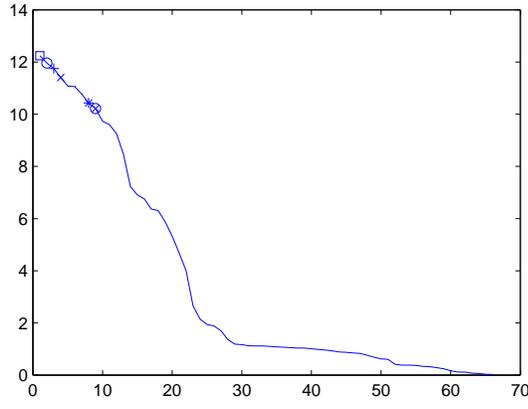


FIG. 40: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

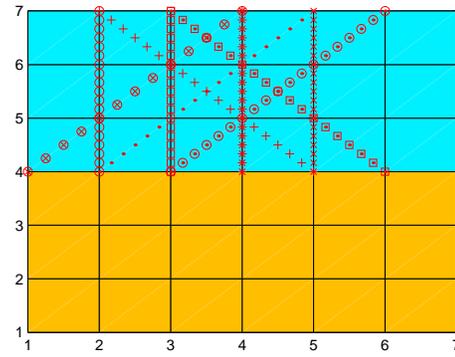


FIG. 41: Transmissivité calculée sur la partition de la fig. 39 et coupes correspondant aux plus forts indicateurs

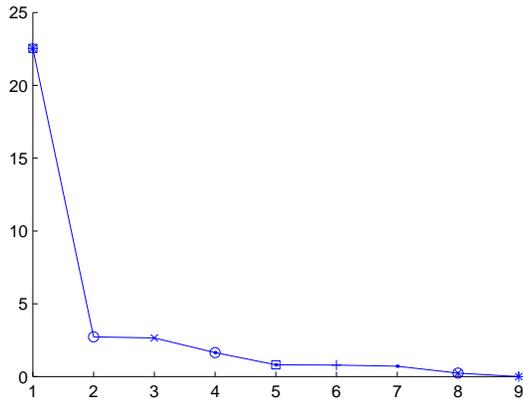


FIG. 42: Valeurs de la fonction moindres carrés calculée à la 2ème itération et pour les partitions associées aux 9 coupes de la fig. 41

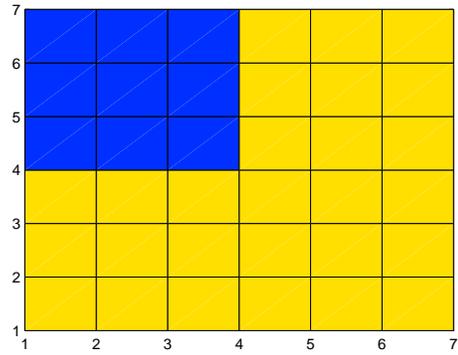


FIG. 43: La transmissivité optimale, solution du problème inverse

#### 4.4 Cas du croisement de deux zones de transmissivités différentes

Considérons maintenant le cas où deux zones de transmissivités différentes se croisent (figure 44).

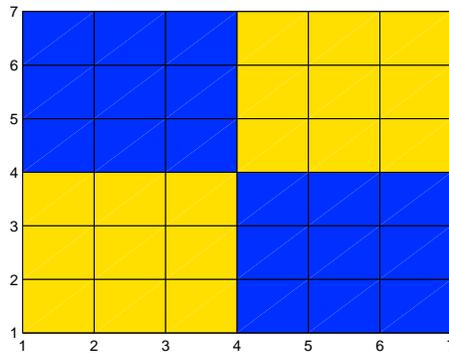


FIG. 44: La transmissivité exacte, l'inconnue du problème inverse

Le calcul des indicateurs de raffinement (figure 45) nous permet de conclure qu'il y a 11 coupes à tester (figure 46). Toutes ces coupes sont des coupes-damier, ce qui montre encore l'importance de l'introduction d'un indicateur pour ces coupes. Nous avons calculé les indicateurs qui correspondent aux coins qui composent chacune de ces coupes, mais aucun de ces indicateurs n'est assez fort pour nous permettre un déraffinement. Nous avons ensuite optimisé la fonction moindres carrés pour chaque partition associée aux coupes-damier et pour une de ces partitions la fonction moindres carrés obtenue est nulle (figure 47). Elle nous permet donc d'obtenir la solution de notre problème inverse (figure 48).

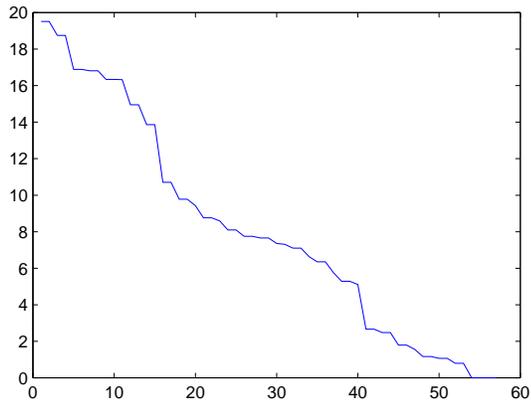


FIG. 45: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

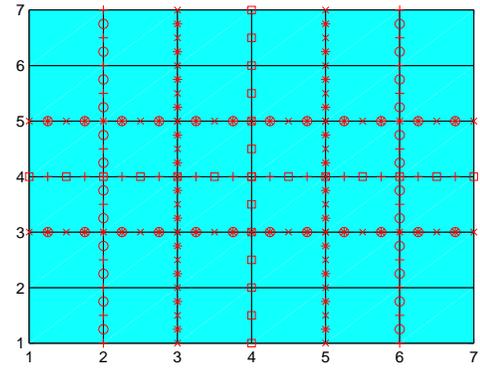


FIG. 46: Coupes correspondant aux plus forts indicateurs

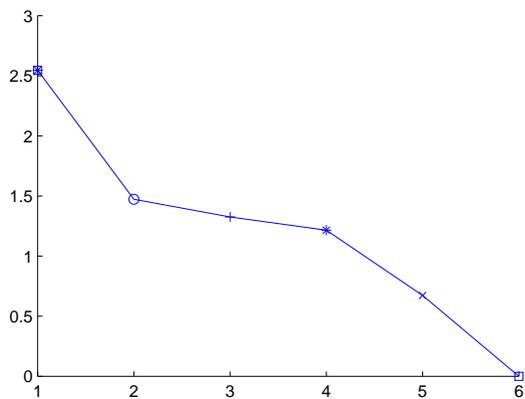


FIG. 47: Valeurs de la fonction moindres carrés initiale et pour les partitions associées aux coupes de la fig. 46

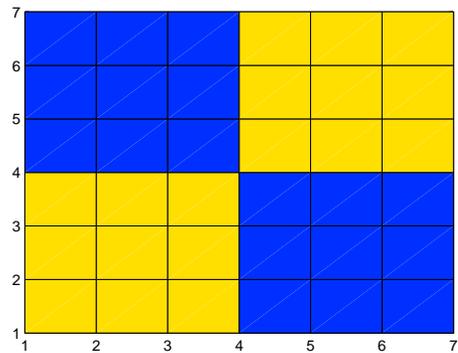


FIG. 48: La transmissivités calculée, solution du problème inverse

#### 4.5 Cas de trois zones de transmissivité en couronne

Pour terminer nous considérons le cas de trois zones de transmissivité disposées en couronne (figure 49).

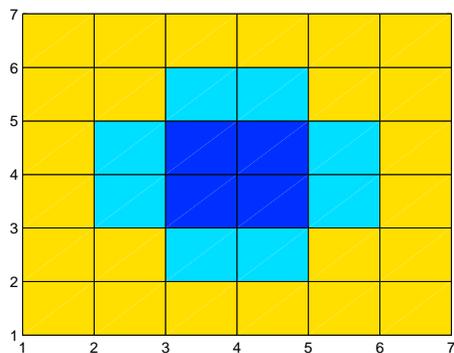


FIG. 49: La transmissivité exacte, l'inconnue du problème inverse

Nous procédons comme dans les cas précédents. A la première itération 4 coupes-damier ont été retenues, puis, comme dans le cas de l'inclusion centrale (section 4.1), on a déraffiné et obtenu les 4 coupes-coin de la figure 51. Par agrégation on a ensuite obtenu la partition de la figure 52. Les valeurs des indicateurs de raffinement sont montrés sur la figure 50, le symbole  $\square$  correspondant à l'indicateur de la coupe définissant la partition retenue.

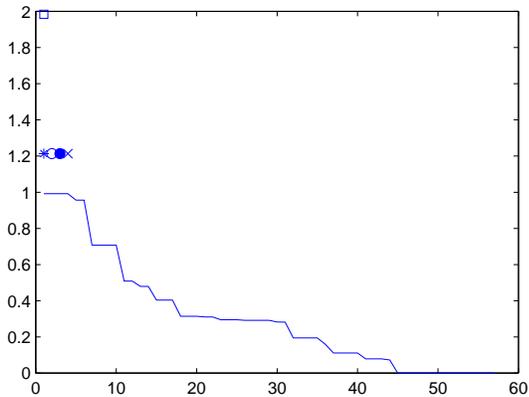


FIG. 50: *Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement*

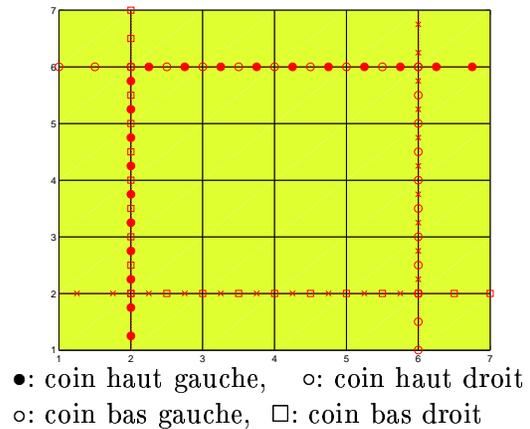


FIG. 51: *Les 4 coupes-coin correspondant aux plus forts indicateurs*

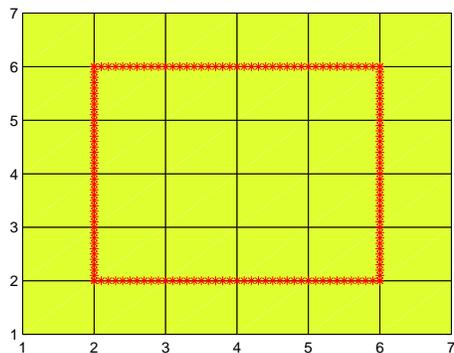


FIG. 52: *Partition retenue à la fin de la 1ère itération*

A la deuxième itération, le calcul des indicateurs de raffinement (figure 53) permet de retenir deux coupes, découpant celle obtenue à l'itération précédente en plusieurs morceaux. Des indicateurs de déraffinement sont alors calculés et la partition retenue à la fin de l'itération est montrée sur la figure 54.

La troisième itération est analogue à la seconde. On calcule les indicateurs de raffinement (figure 55), on en retient deux coupes, on déraffine et on obtient la partition de la figure 56.

La quatrième itération est aussi semblable aux précédentes et elle réintroduit la coupe obtenue à la première itération. La figure 57 montrent les valeurs des indicateurs de raffinement dont on déduit les coupes représentées sur la figure 57. Après déraffinement et agrégation on obtient la partition de la figure 59 sur laquelle on calcule la transmissivité de la figure 60.

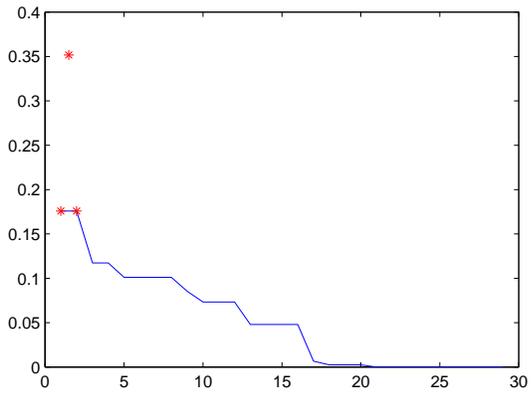


FIG. 53: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement et indicateurs de déraffinement (symbole \*)

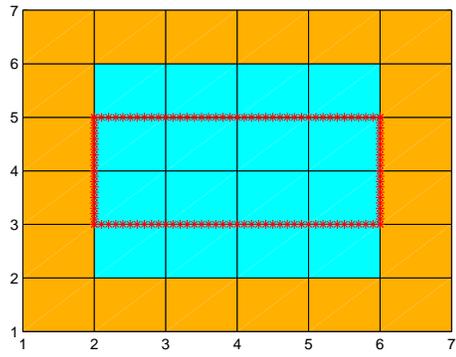


FIG. 54: Transmissivité calculée sur la partition de la fig. 52 et coupe retenue à la 2ème itération

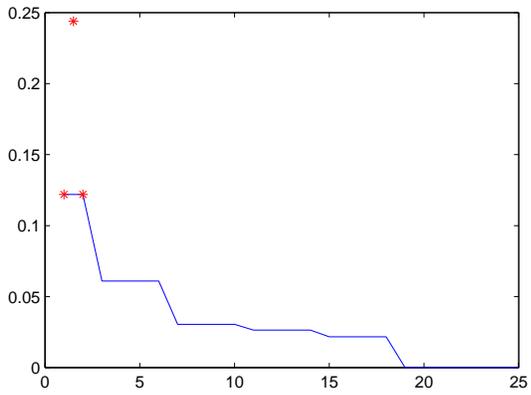


FIG. 55: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement et indicateurs de déraffinement (symbole \*)

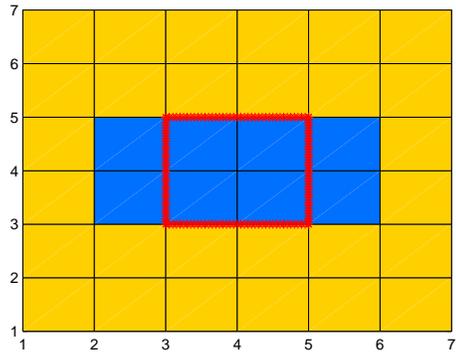


FIG. 56: Transmissivité calculée sur la partition de la fig. 54 et partition retenue à la fin de la 3ème itération

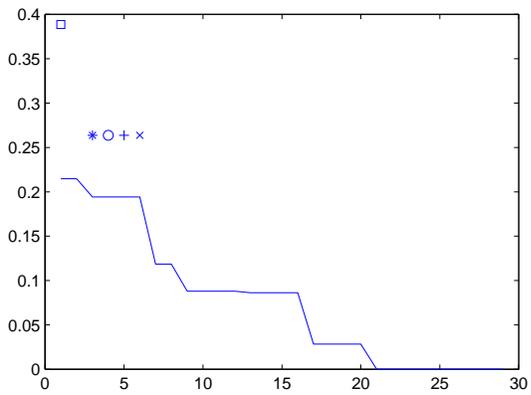


FIG. 57: Courbe de décroissance des indicateurs de raffinement

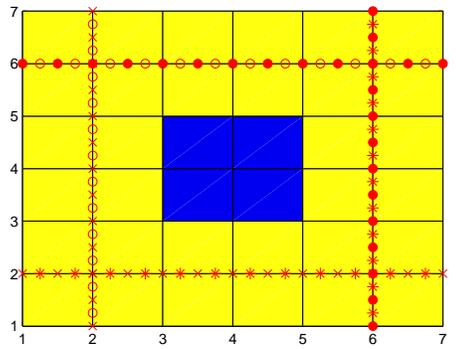


FIG. 58: Transmissivité calculée sur la partition de la fig. 56 et coupes correspondant aux plus forts indicateurs

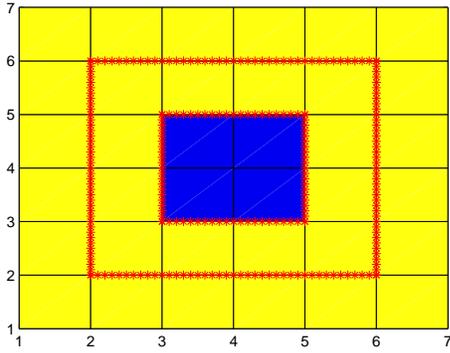


FIG. 59: *Partition retenue à la fin de la quatrième itération*

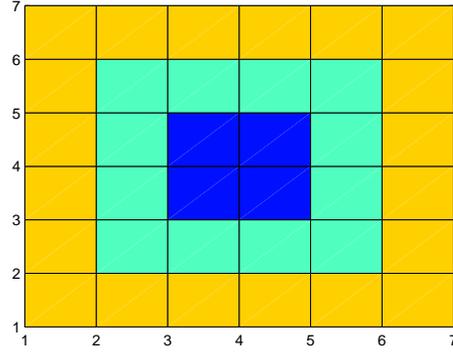


FIG. 60: *La transmissivité calculée, solution du problème inverse*

En calculant la transmissivité hydraulique sur cette partition on obtient une faible valeur de la fonction moindres carrés ( $10^{-6}$ ). En poursuivant la cinquième itération on calcule les indicateurs de raffinement et on les trouve de l'ordre de  $10^{-2}$ . Utilisant la formule approchée  $\lambda \simeq \frac{\Delta J}{\Delta T}$  on ne peut donc espérer qu'une variation du paramètre de l'ordre de  $10^{-4}$  alors que le paramètre varie entre 5 et 20. Nous estimons donc que l'optimisation est terminée.

Dans ce cas nous constatons donc que nous n'avons pas pu retrouver la partition exacte, mais nous avons trouvé une partition qui en est proche.

#### 4.6 Utilisation de l'indicateur de raffinement le plus fort

Dans ce qui précède nous n'avons pas sélectionné la coupe correspondant à l'indicateur de raffinement le plus fort, mais nous avons sélectionné les coupes dont l'indicateur de raffinement avait une valeur au moins égale à 80% de la plus grande valeur absolue de tous les indicateurs de raffinement. Ceci afin de conserver un peu de liberté de choix dans l'algorithme.

Une manière différente de procéder consiste à construire directement la coupe correspondant au plus fort indicateur. Rappelons d'abord qu'un indicateur de raffinement dans une partie de la partition n'est autre que la somme des dérivées de la fonction moindres carrés par rapport à la valeur du paramètre dans chaque maille de calcul dont l'intersection avec la partie considérée est de mesure non nulle. C'est pourquoi le plus fort indicateur est égal à la somme des dérivées positives, et la coupe qui lui correspond sépare la zone où les dérivées sont positives de celle où elles sont négatives. C'est cette façon de procéder qui a été utilisée dans [4], et nous allons voir maintenant les résultats qu'elle donne pour les cas que nous avons considérés dans la section précédente.

Dans le cas d'une inclusion centrale, le résultat de la première itération est le même que celui trouvé précédemment (figure 10), mais le calcul est plus rapide. A la deuxième itération nous calculons le plus fort indicateur dans chacune des deux zones de la partition et nous les comparons pour retenir les deux plus grands d'entre eux (ils sont égaux). Ce calcul nous ramène au cas de la figure 12. Nous calculons alors les indicateurs de déraffinement et nous obtenons le résultat de la figure 13. On conclut que pour ce premier cas cette deuxième méthode est plus rapide que celle utilisée précédemment.

Dans le cas d'une inclusion excentrée, à la première et deuxième itérations, nous retrouvons les mêmes résultats (figures 19, 21) que dans la section 4.2. A la troisième itération les deux coupes retrouvées dans chacune des zones, correspondent à deux indicateurs peu différents, et nous avons alors à les tester toutes les deux (figure 61). Une décroissance plus importante de la fonction moindres carrés est obtenue dans le cas où on considère la coupe indexée par 0. C'est donc cette coupe qu'il faut retenir. A l'itération suivante deux coupes sont à tester (figure 62). Nous retenons la coupe indexée par \* parce qu'elle conduit à une décroissance plus importante de la fonction moindres carrés. A la dernière itération, le calcul des plus forts indicateurs, puis celui d'indicateurs de déraffinement, nous

amènent à une optimisation avec 4 zones de transmissivités différentes, ce qui est comparable au résultat de la figure 29. Nous remarquons clairement que pour cet exemple, cette façon de procéder n'est pas meilleure que la précédente.

Pour ce qui concerne le cas du croisement de deux zones de transmissivités différentes, à la première itération la partition trouvée est déjà complexe (figure 63) et à la deuxième itération elle l'est encore plus (figure 64). Dans ce cas cette deuxième méthode ne mène nulle part.

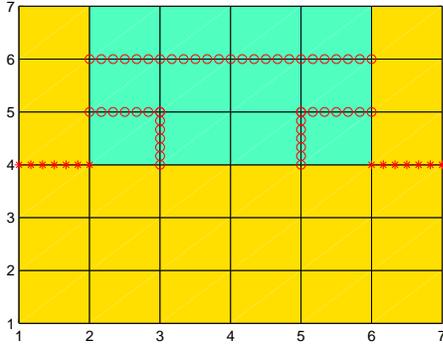


FIG. 61: Cas d'une inclusion excentrée : transmissivité calculée sur la partition trouvée à la 2ème itération et coupes à tester

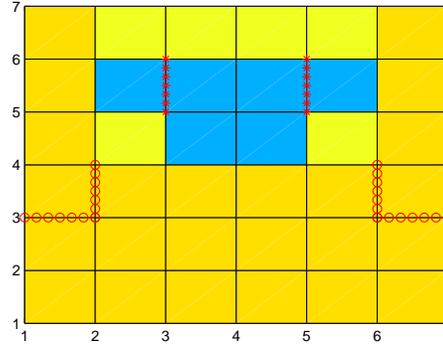


FIG. 62: Cas d'une inclusion excentrée : transmissivité calculée sur la partition trouvée à la 3ème itération et coupes à tester

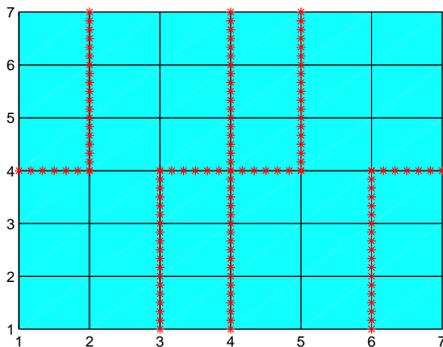


FIG. 63: Cas du croisement de 2 zones : partition obtenue à la 1ère itération

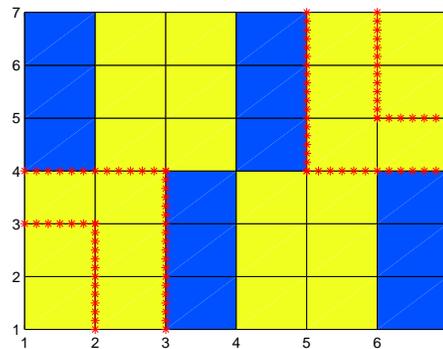


FIG. 64: Cas du croisement de 2 zones : transmissivité calculée sur la partition de la fig. 63 et coupes à tester

En conclusion cette deuxième méthode n'apporte pas d'amélioration dès qu'on sort du cas le plus simple, et ne permet pas de retrouver la solution quand la géométrie se complique.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une procédure de recherche de la transmissivité hydraulique dont la paramétrisation est construite pas à pas au cours des itérations. Ces transmissivités sont représentées par des fonctions constantes par morceaux sur une partition du domaine qui est aussi une inconnue du problème.

Un algorithme basé sur la construction d'indicateurs de raffinement et de déraffinement a été présenté et testé avec succès sur quelques configurations simples. Les travaux suivants porteront sur des tests plus réalistes.

## Références

- [1] J. BONNANS, J.-C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL, AND C. SAGASTIZABAL, *Optimisation Numérique Aspects théoriques et pratiques*, Springer-Verlag, 1997.
- [2] C. CHARDAIRE-RIVIÈRE, G. CHAVENT, J. JAFFRÉ, AND J. LIU, *Multiscale representation for simultaneous estimation of relative permeabilities and capillary pressure, paper SPE 20501*, in 65th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers, New Orleans, Louisiana, September 23-26, 1990, Society of Petroleum Engineers, Richardson, Texas, pp. 303–312.
- [3] E. CHARDIGNY, P. SIEGEL, R. MOSÉ, AND P. ACKERER, *Parameter identification for complex groundwater systems*, in Computational Methods in Water Resources XI, Cancun, Mexico, July 22-26, 1996, A. Aldama and al., eds., Computational mechanics Publications, pp. 305–312.
- [4] G. CHAVENT AND R. BISSELL, *Indicator for the refinement of parametrization*, in Proceedings of the International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Nagano, Japan, March 1998, pp. 185–190.
- [5] G. CHAVENT AND J. LIU, *Multiscale parametrization for the estimation of a diffusion coefficient in elliptic and parabolic problems*, in 5th IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Perpignan, June 26-29, 1989, A. El Jai and M. Amouroux, eds., Université de Perpignan, France, pp. 315–324.
- [6] G. CHAVENT AND J. ROBERTS, *A unified physical presentation of mixed, mixed hybrid finite elements and standard finite differences approximations of the determination of velocities in waterflow problems*, Advances in Water Ressources, 14 (1997), pp. 326–348.
- [7] M. EPPSTEIN AND D. DOUGHERTY, *Simultaneous estimation of transmissivity values and zonation*, Water Resources Research, 32 (1996), pp. 3321–3336.
- [8] S. JEGOU, *Using Maple for symbolic differentiation to solve inverse problems*, Maple Tech, 4 (1997), pp. 32–40.
- [9] J. LIU, *A multiresolution method for distributed parameter estimation*, SIAM J. Sci. Comput, 14 (1993), pp. 389–405.
- [10] N. SUN, *Inverse problems in groundwater modeling*, Kluwer Academic Publishers, 1994.



---

Unit e de recherche INRIA Lorraine, Technop le de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399