

Conditions absorbantes d'ordre eleve pour les equations de Maxwell dans des domaines rectangulaires

Francis Collino

► **To cite this version:**

Francis Collino. Conditions absorbantes d'ordre eleve pour les equations de Maxwell dans des domaines rectangulaires. [Rapport de recherche] RR-1991, INRIA. 1993. inria-00074681

HAL Id: inria-00074681

<https://hal.inria.fr/inria-00074681>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Conditions absorbantes
d'ordre élevé pour les équations
de Maxwell dans des
domaines rectangulaires*

Francis COLLINO

N° 1991
Juillet 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

**Conditions absorbantes d'ordre
élevé pour les
équations de Maxwell dans des
domaines rectangulaires**

**High Order Absorbing Boundary
Conditions for Maxwell Equations
in Rectangular Domains**

Francis Collino

Résumé

La résolution numérique des équations de Maxwell en régime transitoire dans un milieu de propagation infini nécessite l'adjonction de conditions aux limites absorbantes (CLA) sur les bords du domaine de calcul. Dans ce rapport, on propose d'étendre les CLA dites d'ordre élevé établies dans un travail précédent pour l'équation des ondes scalaires, au système de Maxwell. Ces conditions s'appliquent pour des domaines de calcul parallélépipédiques et consistent à imposer sur chaque face des CLA d'ordre élevé à chacune des deux composantes tangentielles du champ électrique. Le long des arêtes et aux coins, on impose des conditions qui sont déterminées par des exigences de régularité de la solution recherchée. On montre que ces CLA se prêtent bien à un traitement par différences finies. Des exemples numériques montrent l'efficacité de la méthode.

Abstract

The numerical solution of transient Maxwell equations in infinite domains of propagation requires the adjunction of artificial conditions on the boundaries of the computational domain. In this report, an extension of the so-called high order absorbing boundary conditions (ABC) for the scalar wave equation to the Maxwell system of equations is presented. These ABC apply to the case of parallelipipedic computational boxes and consist in imposing on each face high order ABC for each tangential component of the electric field. Along ridges and at corners, special conditions, determined by a regularity argument for the sought solution, are imposed. A numerical scheme adapted to these conditions is proposed and its efficiency is demonstrated on numerical experiments.

Mots clés

Conditions aux Limites Absorbantes - Conditions d'arête et de coin - Equation de Maxwell - Schémas numériques

Keywords

Absorbant Boundary Conditions - Corner and edge conditions - Maxwell equations - Numerical schemes

Introduction

Dans un précédent rapport ([2]) ont été proposées et analysées des conditions aux limites absorbantes (CLA) adaptées aux modèles de propagation d'ondes scalaires (équation des ondes 2D ou 3D avec ou sans amortissement). L'objet de ce travail est de présenter une extension formelle de ces conditions au système de Maxwell.

Le contexte d'application des CLA est le calcul de solutions d'équations de propagations linéaires instationnaires en milieu non borné. Il intéresse de nombreux domaines de la Physique, notamment ceux où existent des phénomènes de diffraction.

La recherche de solutions approchées par des méthodes numériques de type différences finies ou éléments finis impose l'introduction d'une frontière artificielle entourant le domaine d'intérêt et délimitant un domaine de calcul. Se pose alors le problème du choix de la condition à la limite que l'on impose sur le bord fictif. Ce choix est guidé par un triple impératif de qualité, de stabilité et de maniabilité. Le critère de qualité est lié à la mesure de la modification sur la solution que provoque l'existence du bord artificiel, le critère de stabilité demande à ce que le couplage entre l'équation modélisant l'onde à l'intérieur du domaine et la condition à la limite conduise à un problème mathématique bien posé. Enfin, la maniabilité est une exigence à caractère pratique: on veut que la solution numérique soit "facile" à calculer et "peu onéreuse" en temps de calcul, une fois le problème discrétisé.

Ce sujet a suscité une recherche importante ces vingt dernières années. Nous renvoyons à [4] et [5] pour un descriptif exhaustif des méthodes employées. De façon générale, ces conditions aux limites, dénommées conditions aux limites absorbantes ou C.L.A., sont construites comme des approximations à l'aide d'opérateurs différentiels de la condition transparente, ou condition exacte, qui est en général non locale en espace et en temps et qui, par conséquent, répond très mal au critère de maniabilité.

Cette démarche a été introduite par Engquist Majda, [3] (voir aussi Bayliss-Turkel, [1], dans un contexte légèrement différent) pour l'équation des ondes acoustiques:

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

Lorsque la frontière artificielle est une droite $x_2 = 0$ (on se place ici dans \mathbb{R}^2), la

condition transparente s'écrit:

$$(0.2) \quad \begin{cases} \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + i\omega \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{\omega^2}} \mathcal{F}u = 0 \text{ en } x_2 = 0 \\ \text{avec } \mathcal{F}(v)(k_1, x_2, \omega) = \int \int v(x_1, x_2, t) \exp^{i(k_1 x_1 - \omega t)} dx_1 dt \end{cases}$$

Engquist et Majda proposent toute une famille de conditions absorbantes basées sur les approximations de Padé de la fonction $z \rightarrow \sqrt{1-z}$ dont les deux plus simples sont:

$$(0.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 && \text{(ordre 1)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= 0 && \text{(ordre 2)} \end{aligned}$$

Toutefois ces conditions ne donnent pas toujours de solutions satisfaisantes et il convient d'augmenter l'ordre de l'approximation. On parlera de conditions d'ordre élevé. La C.L.A. est alors construite à partir de l'approximation:

$$(0.4) \quad \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + i\omega \left(1 - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{k_1^2}{\omega^2 - \alpha_m k_1^2} \right) \mathcal{F}u = 0 \text{ en } x_2 = 0$$

où les $2L$ nombres positifs α_m et β_m sont choisis de telles sortes que l'on ait :

$$(0.5) \quad \sqrt{1-z} \approx \left(1 - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{z}{1 - \alpha_m z} \right) \text{ pour } z \in [0, 1]$$

L'intérêt d'une telle approximation est qu'elle correspond (comme on peut le voir en appliquant la transformée de Fourier inverse sur (0.4)) à une équation locale en espace et en temps sur le bord $x_2 = 0$ et que, sous l'hypothèse (0.6) portant sur les coefficients α_m et β_m , elle conduit à des problèmes stables (cf. [8] et [5]).

$$(0.6) \quad \begin{cases} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_L < 1 \\ \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} < 1 ; \beta_l > 0. \end{cases}$$

Un choix possible de coefficients vérifiant (0.5) et (0.6) est obtenu à l'aide de développements de Padé:

$$(0.7) \quad \begin{cases} \beta_l = \frac{2}{2L+1} \sin^2 \left(\frac{l\pi}{2L+1} \right) \\ \alpha_l = \cos^2 \left(\frac{l\pi}{2L+1} \right) \end{cases}$$

Dans ([2]), la formulation en (x_1, t) de ces CLA est directement inspirée du domaine des équations paraxiales. Elle fait appel à L fonctions auxiliaires définies sur la frontière. et s'écrit :

$$(0.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{/(x_2=0)} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, \dots, L, \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ avec } \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(2)} + u_{/(x_2=0)} \end{array} \right.$$

Un tel système apparaît comme le couplage entre une équation de transport de vitesse 1 dans la direction x_2 avec L équations des ondes 1D le long de la frontière et de vitesse de propagation égale à $\sqrt{\alpha_l}$.

On obtient ainsi des conditions stables, maniables (elles sont locales en espace et en temps), et de qualité ajustable (on dispose de $2L$ degrés de liberté).

Dans le cas où la frontière artificielle délimite un quart d'espace, la situation est compliquée par rapport au cas précédent du demi-espace par la présence d'un coin. Les C.L.A. retenues consistent à imposer à la solution cherchée u de vérifier l'équation des ondes (0.1) sur le domaine $x_1 < 0, x_2 < 0$, de satisfaire (0.8) sur la demi-droite frontière $x_2 = 0, x_1 < 0$ et enfin (0.9) sur l'autre demi-droite $x_1 = 0, x_2 < 0$, avec

$$(0.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{/(x_1=0)} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(1)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, \dots, L, \frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(1)}}{\partial x_2^2} = 0 \text{ avec } \psi_l^{(1)} = \alpha_l \varphi_l^{(1)} + u_{/(x_1=0)} \end{array} \right.$$

Le problème qui se pose alors est de déterminer les conditions de raccordement que doit satisfaire au coin $x_1 = 0, x_2 = 0$ toute solution régulière de notre système d'équation (cf [6] pages 197-271). L'idée étant que la présence du bord artificiel ne doit pas générer de singularité sur la solution. Ces conditions sont cruciales pour toute implémentation numérique, car il est impossible d'évaluer au coin les dérivées secondes des fonctions auxiliaires intervenant dans les C.L.A le long de chaque bord sans l'adjonction de conditions portant, par exemple, sur les dérivées premières de ces fonctions.

Dans ([2]) est présentée une démarche permettant de dériver très simplement ces conditions, au nombre de $2L$. Elle consiste à construire tout d'abord une famille de solutions particulières satisfaisant l'équation des ondes et les conditions aux limites sur les deux bords (Il s'agit en l'espèce de superpositions de quatre ondes planes indexées par un cosinus directeur ou angle d'incidence). Une fois cette famille construite, on détermine des conditions aux coins qui sont vérifiées pour chaque élément de la famille. Le résultat obtenu peut s'exprimer sous la forme:

Chaque élément de la famille de solutions particulières satisfait les $2L$ conditions de

coin:

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall l = 1, \dots, L \\ \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial x_1}(0, t) + A_l \cdot \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t}(0, t) - \sum_{m=1}^L C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(1)}}{\partial t}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial x_2}(0, t) + A_l \cdot \frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial t}(0, t) - \sum_{m=1}^L C_{l,m} \cdot \frac{\partial \psi_m^{(2)}}{\partial t}(0, t) = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$(0.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_l = 1 + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \\ C_{l,m} = \frac{\beta_m}{\alpha_m} \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_l - \alpha_m \alpha_l} \end{array} \right.$$

La question qui se pose est de savoir si toute solution régulière satisfait ces conditions. L'espoir étant que la famille retenue soit suffisamment riche pour que par un argument de densité et de linéarité on puisse conclure par l'affirmative. Cette question reste ouverte et n'a pas reçu de réponse définitive. Toutefois de nombreux éléments font penser que cette conjecture est vraie (elle est vraie pour $L=1$).

Les conditions de coin étant déterminées, il est facile de construire des schémas numériques par différences finies pour le problème du quart d'espace et plus généralement de celui d'un rectangle. Dans ([2]), un schéma très simple utilisant des différences finies centrées est proposé, analysé et validé sur des exemples numériques.

Dans ([2]) sont également proposées des extensions de ces C.L.A. à d'autres modèles d'ondes scalaires.

Par exemple, pour l'équation des ondes amorties ($\sigma \geq 0$):

$$(0.12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

posée dans le domaine $\{x_2 < 0\}$, la C.L.A. en $x_2 = 0$ s'écrit :

$$(0.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{/(x_2=0)} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, \dots, L, \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \psi_l^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ avec } \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(1)} + u_{/(x_2=0)} \end{array} \right.$$

Cette condition conduit à un problème stable sous les conditions (0.6). Pour le problème posé dans le quart d'espace, des équations de coins sont déterminées toujours à l'aide de solutions particulières composées de quatre ondes planes. Elles sont très semblables aux équations du système (0.10), à ceci près qu'elles font intervenir $2L$ nouvelles fonctions

auxiliaires, uniquement définies au coin et vérifiant des équations différentielles ordinaires en temps.

Dans le cas de l'équation des ondes 3D, la généralisation consiste à substituer à la dérivée seconde par rapport à la variable tangentielle de la ligne frontière le laplacien tangentiel de la face frontière. La C.L.A. utilise des fonctions auxiliaires de face définie sur la frontière et vérifiant des équations des ondes 2D. Le cas du huitième d'espace requiert la détermination de conditions d'arête et de coin. Celles-ci sont déterminées à l'aide de solutions particulières, composition de huit ondes planes. Les conditions d'arête font intervenir de nouvelles fonctions auxiliaires définies le long des arêtes, au nombre de L par fonction auxiliaire de face. Ces fonctions d'arête vérifient des équations des ondes 1D le long de leur demi-droite de définition. $6 L^2$ conditions de coin, système d'EDPs du premier ordre couplant l'ensemble des fonctions d'arête permettent de clore le système.

C'est ici que commence le sujet proprement dit du présent rapport. Il s'agit de généraliser ce qui précède au cas des équations de Maxwell.

L'idée la plus simple et qui est envisagée ici consiste à imposer les CLA d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D à chacune des deux composantes tangentielles du champ électrique. Ces conditions nécessitent $2L$ (L par composante) fonctions auxiliaires de face par face. Pour poser le problème dans un huitième d'espace, il faut de la même façon que précédemment, déterminer des conditions d'arête et de coin. Cette détermination, basée sur la construction d'une famille de solutions particulières composées de huit ondes planes vectorielles à divergence nulle, fait l'objet du premier chapitre. Ces conditions font intervenir L fonctions d'arête associées à chacune des $2L$ fonctions de face (au total on a donc $4 L^2$ fonctions d'arête par arête). Lorsque le système de Maxwell comporte un terme de conduction ($\sigma \neq 0$), on est amené à définir également des fonctions de coin, définies uniquement au coin et au nombre de $12 L^3$ par coin.

L'ensemble des équations obtenues est ensuite discrétisé par différences finies. Le chapitre 2 présente cette discrétisation et explicite les relations de récurrence en temps utiles pour une mise en œuvre sur ordinateur.

Dans le chapitre 3, après avoir analysé le coût de la méthode (nombre d'opérations, occupation mémoire), on valide sur des cas réputés difficiles (diffraction d'un signal de moyenne temporelle non nulle se propageant dans une boîte de calcul petite par rapport à la longueur d'onde du signal incident). Sur ces exemples, le schéma proposé apparaît stable et les solutions numériques calculées sont très nettement améliorées par rapport à celles obtenues par des CLA plus classiques.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un contrat de recherche avec le Centre d'Etudes de Gramat (DRET).

Chapitre 1

Dérivation des C.L.A. pour le problème continu.

On décrit ici un processus constructif pour l'obtention de C.L.A. d'ordre élevé pour le système de Maxwell 3D en milieu conducteur ou non conducteur et posé dans le domaine $\Omega = \{x < 0, y < 0, z < 0\}$. Après avoir rappelé les équations constituant le système de Maxwell et posé un certain nombre de notations, on commence par écrire un ensemble d'équations sur chaque face frontière de Ω qui constitue une généralisation des C.L.A. d'ordre élevé pour l'équation des ondes scalaires 2D amorties. Puis, on construit un ensemble de relations de compatibilité, posées sur les intersections des faces (conditions d'arêtes) ou au coin (conditions de coin) et que doivent satisfaire certaines solutions régulières du problème "système de Maxwell dans Ω + Equations des faces sur chaque face". Le système d'équations que nous proposons est alors constitué du système de Maxwell posé sur Ω auquel on adjoint les équations de face sur chaque face du domaine complétées par les équations d'arête pour chacune des 3 arêtes et les équation de coin pour le coin.

1.1 Les équations de Maxwell en milieu homogène

On définit :

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x < 0, y < 0, z < 0 \right\}$$

ainsi que les faces et les arêtes :

$$\partial\Omega = F^{(x)} \cup F^{(y)} \cup F^{(z)}$$

$$\Gamma^{(x)} = F^{(y)} \cap F^{(z)}, \quad \Gamma^{(y)} = F^{(z)} \cap F^{(x)}, \quad \Gamma^{(z)} = F^{(x)} \cap F^{(y)}$$

Chaque face est donc indiquée par son vecteur normal tandis que chaque arête est indiquée par son vecteur tangent (voir figure 1.1).

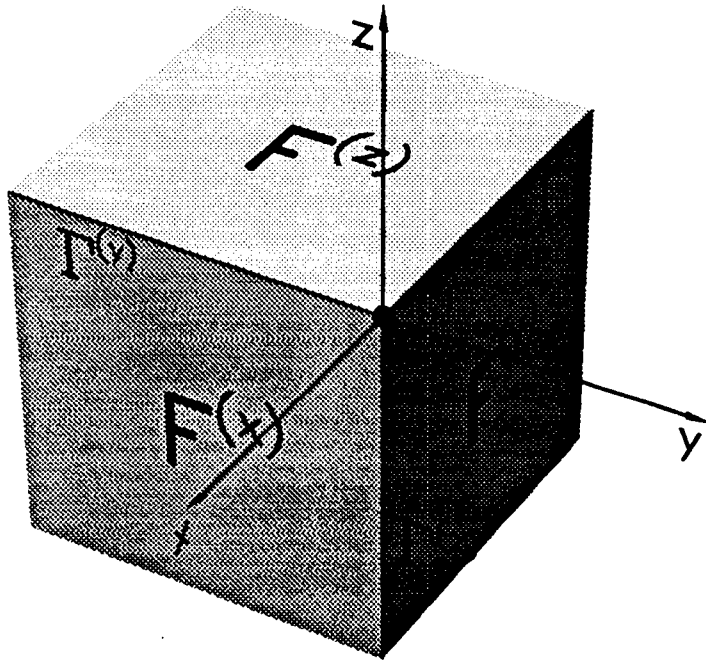


Figure 1.1 : Géométrie du problème

Dans un système d'unité où ϵ et μ valent 1 le système de Maxwell s'écrit :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & ; & \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & ; & \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & ; & \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

On distingue deux cas suivant que σ est positif (milieux conducteurs) ou nul (cas du vide ou d'un milieu non conducteur).

On peut éliminer le champ magnétique de ces équations pour obtenir le système équivalent,

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \Delta \vec{E} = 0 \\ \text{div}(\vec{E}) = 0 \end{cases}$$

(En fait, on a : $\frac{\partial \text{div}(\vec{E})}{\partial t} + \sigma \text{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{E}) = 0 \forall t$ dès que cette dernière égalité est vraie en $t = 0$)

1.2 Equations sur les faces

On décrit les conditions aux limites sur la face $F^{(z)} = \{(x, y, z = 0), x < 0, y < 0\}$. La généralisation annoncée s'écrit :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_x}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial (\varphi_m^{(z)})_x}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial (\varphi_m^{(z)})_y}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0 \\ \text{et, } \forall l = 1, \dots, L \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (\varphi_l^{(z)})_x}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial (\psi_l^{(z)})_x}{\partial t} - \Delta_T (\psi_l^{(z)})_x = 0 \\ \frac{\partial^2 (\varphi_l^{(z)})_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial (\psi_l^{(z)})_y}{\partial t} - \Delta_T (\psi_l^{(z)})_y = 0 \\ (\psi_l^{(z)})_x = \alpha_l (\varphi_l^{(z)})_x + E_x /_{z=0} \\ (\psi_l^{(z)})_y = \alpha_l (\varphi_l^{(z)})_y + E_y /_{z=0} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où Δ_T est le Laplacien tangentiel:

$$\Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{sur } F^{(z)}$$

et où on rappelle que les $2L$ nombres réels α_l et β_l sont choisis tels que :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_L < 1 \\ \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} < 1 ; \beta_l > 0 \end{array} \right.$$

Cette généralisation est très naturelle et consiste à imposer une C.L.A. à chaque composante tangentielle du champ électrique, celle-ci étant obtenue en substituant le Laplacien tangentiel à la dérivée seconde tangentielle du cas 2D amorti.

On construit de manière analogue les C.L.A. pour les deux autres faces. Au total, les C.L.A. pour les faces font donc intervenir $3 \times 2L$ fonctions auxiliaires.

A ce stade de la construction, une analyse élémentaire (écriture d'une formulation faible ou plus simplement d'un schéma numérique par différences finies) montre qu'un certain

nombre de quantités sont indéterminées le long de chaque arête. Ce sont, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur l'arête } \Gamma^{(z)} = F^{(x)} \cap F^{(y)} \\ \frac{\partial (\psi_l^{(y)})_x}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\psi_l^{(y)})_z}{\partial x} \quad l = 1, \dots, L \\ \frac{\partial (\psi_l^{(x)})_y}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\psi_l^{(x)})_z}{\partial y} \quad l = 1, \dots, L \end{array} \right.$$

et les expressions analogues pour les deux autres arêtes. Au total, il manque donc $3 \times 4 L$ conditions d'arêtes pour clore le système. On retrouve là une situation analogue à celle du cas de l'équation des ondes scalaire. La détermination de "bonnes" conditions est basée sur la recherche d'équations aux dérivées partielles que satisfont sur les arêtes les solutions très régulières du problème (P) : "système de Maxwell sur Ω + équations de face sur chaque face". Cette détermination conduit à un problème algébrique difficile. Il est toutefois possible de contourner cette difficulté en opérant de la manière suivante : dans une première étape, on commence par construire une famille de solutions particulières de (P) très régulières, puis, on cherche des relations, impliquant les quantités manquantes écrites ci-dessus, satisfaites par chacune des solutions de la famille et qui ne dépendent pas de la solution particulière choisie. On obtient ainsi des relations qui sont satisfaites par toute une famille de solutions régulières. Ce sont ces conditions qui fournissent les relations recherchées.

1.3 Construction d'une famille de solutions particulières régulières

On construit ces solutions a l'aide de huit ondes planes vectorielles à divergence nulle. On pose :

$$\begin{aligned} \vec{E} = \exp^{i\omega t} & \left(\begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} + R^{(x)} \begin{bmatrix} -E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(-k_x x + k_y y + k_z z)} + \right. \\ & + R^{(y)} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ -E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(k_x x - k_y y + k_z z)} + R^{(z)} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ -E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(k_x x + k_y y - k_z z)} + \\ & + R^{(x)} R^{(y)} \begin{bmatrix} -E_x^0 \\ -E_y^0 \\ E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(-k_x x - k_y y + k_z z)} + R^{(x)} R^{(z)} \begin{bmatrix} -E_x^0 \\ E_y^0 \\ -E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(-k_x x + k_y y - k_z z)} + \\ & \left. + R^{(y)} R^{(z)} \begin{bmatrix} E_x^0 \\ -E_y^0 \\ -E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(k_x x - k_y y - k_z z)} + R^{(x)} R^{(y)} R^{(z)} \begin{bmatrix} -E_x^0 \\ -E_y^0 \\ -E_z^0 \end{bmatrix} \exp^{i(-k_x x - k_y y - k_z z)} \right) \end{aligned}$$

avec

$$(1.5) \quad \omega^2 + i\omega\sigma = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

et

$$(1.6) \quad ik_x E_x^0 + ik_y E_y^0 + ik_z E_z^0 = 0$$

Les fonctions auxiliaires sont recherchées proportionnelles aux composantes des champs qui leurs sont associées :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} (\varphi_l^{(z)})_{xoy} (x, y, t) &= \Phi_l^{(z)} \cdot E_{xoy} (x, y, z = 0, t) \\ (\psi_l^{(z)})_{xoy} (x, y, t) &= \Psi_l^{(z)} \cdot E_{xoy} (x, y, z = 0, t) \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les fonctions auxiliaires attachées aux deux autres faces.

On a, bien entendu :

$$(1.8) \quad \Psi_l^{(a)} = \alpha_l \Phi_l^{(a)} + 1 \quad a = x, y \text{ ou } z$$

Les équations (1.5) et (1.6) étant satisfaites, Le champ vectoriel \vec{E} vérifie les équations du système de Maxwell. De plus, les équations des ondes 2D relatives aux fonctions auxiliaires seront vérifiées dès que :

$$\forall l = 1, \dots, L$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \Psi_l^{(x)} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 + \alpha_l(i\sigma\omega - k_y^2 - k_z^2)}, & \Phi_l^{(x)} &= \frac{\Psi_l^{(x)} - 1}{\alpha_l} \\ \Psi_l^{(y)} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 + \alpha_l(i\sigma\omega - k_x^2 - k_z^2)}, & \Phi_l^{(y)} &= \frac{\Psi_l^{(y)} - 1}{\alpha_l} \\ \Psi_l^{(z)} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 + \alpha_l(i\sigma\omega - k_x^2 - k_y^2)}, & \Phi_l^{(z)} &= \frac{\Psi_l^{(z)} - 1}{\alpha_l} \end{aligned}$$

Ne restent donc plus à satisfaire que les équations couplant les fonctions auxiliaires et les composantes tangentielle du champ électrique. On montre facilement qu'il suffit pour cela d'imposer les valeurs des coefficients de réflexion $R^{(a)}$, $a = x, y, z$ telles que:

$$(1.10) \quad \frac{k_a(1 - R^{(a)})}{(1 + R^{(a)})} = \omega \left(1 - \sum_{l=1}^L \beta_l \Phi_l^{(a)} \right) = \omega \left(\gamma - \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l} \Psi_l^{(a)} \right) \quad a = x, y, \text{ ou } z$$

avec

$$(1.11) \quad \gamma = 1 + \sum_{l=1}^L \frac{\beta_l}{\alpha_l}$$

A ce stade, nous avons donc rempli la première partie du programme annoncé : on a construit une famille de solutions (indiquées par k_x, k_y, k_z et E_x^0, E_y^0), vérifiant le système de Maxwell et les équations de face sur chaque face. On peut alors passer à la

1.4 Détermination des conditions d'arêtes

On s'intéresse à l'arête $x = 0, y = 0$ et $z < 0$. On cherche à raccorder les 4 familles de fonctions :

$$\left(\psi_l^{(y)} \right)_z (z, x = 0, t) \text{ et } \left(\psi_l^{(y)} \right)_x (z, x = 0, t) \quad (\text{relatives à la face } y = 0)$$

$$\left(\psi_l^{(x)} \right)_y (y = 0, z, t) \text{ et } \left(\psi_l^{(x)} \right)_z (y = 0, z, t) \quad (\text{relatives à la face } x = 0)$$

On va distinguer deux cas suivant que les composantes sont communes aux deux faces (les composantes suivant z) ou non (les composantes suivant x ou y sont tangentes à l'une des faces et normale à l'autre).

1.4 Détermination des conditions d'arêtes

1.4.1 Détermination d'une première famille de conditions

On commence par la composante commune aux deux faces. On forme

$$\frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} \Big|_{z=y=0, z, t} = \Psi_l^{(x)} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} (x=0, y=0, z, t)$$

Soit

$$\frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} \Big|_{z=y=0, z, t} = \Psi_l^{(x)} \imath k_y (1 + R^{(x)}) (1 - R^{(y)}) A(z, t) E_z^0$$

avec

$$A(z, t) = (\exp^{\imath k_z z} - R^{(z)} \exp^{-\imath k_z z}) \exp^{-\imath \omega t}$$

D'où (voir 1.10 avec $a = y$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} \Big|_{z=y=0, z, t} &= \left(\imath k_y \frac{1 - R^{(y)}}{1 + R^{(y)}} \right) \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_z^0 \\ &= \imath \omega \left(\gamma - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(y)} \right) \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_z^0 \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} \Big|_{z=y=0, z, t} &= -\gamma \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial t} \Big|_{z=y=0, z, t} - \\ &\quad - \sum_{m=1}^L \imath \omega \frac{\beta_m}{\alpha_m} \Psi_m^{(y)} \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_z^0 \end{aligned}$$

Pour se débarrasser du terme non linéaire, on va utiliser la décomposition :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_l^{(x)} \cdot \Psi_m^{(y)} = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \left(\frac{\gamma_{l,m}}{\alpha_m} \Psi_l^{(x)} + \frac{\gamma_{l,m}}{\alpha_l} \Psi_m^{(y)} \right) \\ \text{avec } \Psi_{l,m}^{(z)} = \frac{1}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(\imath \sigma \omega - k_z^2)} \\ \text{et } \gamma_{l,m} = \frac{\alpha_l \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} \end{array} \right.$$

(Utiliser $1 - \alpha_m(\omega^2 + \imath \sigma \omega - k_x^2 - k_z^2) = (1 - \alpha_m)\omega^2 + \alpha_m k_y^2$ et faire la décomposition en éléments simples du produit $\Psi_l^{(x)} \cdot \Psi_m^{(y)}$ suivant k_y, k_z et ω étant des paramètres.)

On a donc

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} (\imath \omega) \Psi_l^{(x)} \Psi_m^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) = \\ &= \imath \omega \left(\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} (\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t)) \right) + \\ &\quad + \imath \omega \left(\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} (\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_m^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t)) \right) \end{aligned}$$

On vérifie alors que si l'on définit les deux familles de fonctions d'arête :

$$\psi_{l,m}^{(y,z)}(z,t) \text{ relative à la face } y \text{ et } \psi_{l,m}^{(x,z)}(z,t) \text{ relative à la face } x$$

comme les solutions des équations des ondes 1D le long de l'arête :

$$(1.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial t^2} z(z, x=0, t) \\ \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial t^2} z(y=0, z, t), \end{cases}$$

celles-ci sont données par

$$\psi_{l,m}^{(y,z)}(z,t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \psi_l^{(y)}(z, x=0, t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(y)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_z^0$$

$$\psi_{l,m}^{(x,z)}(z,t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \psi_l^{(x)}(z, x=0, t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_z^0$$

et on a donc

$$(1.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} z(z, y=0, t) = -\gamma \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial t} z(z, x=0, t) + \\ + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(z, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t}(z, t). \end{cases}$$

Ceci constitue les L premières conditions d'arête (l varie de 1 à L). On en obtient L autres en intervertissant les rôles de x et de y. On obtient :

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial (\psi_l^{(y)})}{\partial x} z(z, x=0, t) = -\gamma \frac{\partial (\psi_l^{(y)})}{\partial t} z(z, x=0, t) + \\ + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t}(z, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t}(z, t) \end{cases}$$

On remarquera que tous les calculs précédents sont très analogues à ceux que nous avons faits lors de l'étude des C.L.A. d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D. Il s'agit de trouver des conditions de raccord entre des fonctions auxiliaires associées à un même champ scalaire, ici le champ E_z .

Les calculs qui suivent sont plus originaux puisqu'ils permettent de dériver des relations entre des fonctions auxiliaires associées à des composantes différentes des champs: par exemple, la famille de fonctions auxiliaires associée à la face x n'a pas de composante selon x alors que celle relative à la face y en a une. C'est la condition de divergence nulle qui va permettre de trouver ces relations.

1.4 Détermination des conditions d'arêtes

1.4.2 Détermination d'une seconde famille de conditions d'arête

On forme la quantité :

$$\frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} (z, x = 0, t) = \Psi_l^{(y)} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} (x = 0, y = 0, z, t)$$

Soit

$$\frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} (z, x = 0, t) = \Psi_l^{(y)} (\imath k_x)^2 (1 - R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t) E_x^0$$

avec cette fois-ci

$$A(z, t) = (\exp^{\imath k_x z} + R^{(z)} \exp^{-\imath k_x z}) \exp^{-\imath \omega t}$$

D'où (toujours d'après (1.10) avec $a = x$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} (z, x = 0, t) &= \Psi_l^{(y)} (\imath k_x) \left(\imath k_x \frac{1 - R^{(x)}}{1 + R^{(x)}} \right) B(z, t) E_x^0 \\ &= \Psi_l^{(y)} (\imath k_x) (\imath \omega) \left(\gamma - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \Psi_m^{(x)}}{\alpha_m} \right) B(z, t) E_x^0 \end{aligned}$$

$$(\text{on a posé : } B(z, t) = (1 + R^{(x)}) (1 + R^{(y)}) A(z, t))$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} (z, x = 0, t) &= \gamma \Psi_l^{(y)} (\imath k_x E_x^0) (\imath \omega) B(z, t) - \\ &- (\imath \omega) (\imath k_x E_x^0) \left(\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} (\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(y)} B(z, t)) \right) + \\ &+ (\imath \omega) (\imath k_y E_y^0) \left(\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} (\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_m^{(x)} B(z, t)) \right) + \\ &+ (\imath \omega) (\imath k_z E_z^0) \left(\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} (\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_m^{(x)} B(z, t)) \right) \end{aligned}$$

(On a utilisé ici la décomposition (1.12) ainsi que la propriété de divergence nulle pour le champs \vec{E}_0).

On définit alors $2 \times 2 L^2$ nouvelles fonctions d'arêtes, soient :

$$\eta_{l,m}^{(x,z)}(z, t) \text{ et } \eta_{l,m}^{(y,z)}(z, t),$$

vérifiant les équations suivantes le long de l'arête $x = 0, y = 0$:

$$(1.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial t \partial x} (z, x = 0, t) \\ \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial t \partial y} (y = 0, z, t) \end{cases}$$

On vérifie que l'on a :

$$\begin{aligned}\eta_{l,m}^{(x,z)} &= \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(i\omega)(ik_y E_y^0)B(z, t) \\ \eta_{l,m}^{(y,z)} &= \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(y)}(i\omega)(ik_x E_x^0)B(z, t)\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$(1.17) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} \Big|_x(z, x=0, t) = -\gamma \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x \partial t} \Big|_x(z, x=0, t) + \\ & + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{m,l}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(z, t) \end{aligned}$$

En rapprochant cette égalité avec l'équation des ondes 2D que vérifie la composante selon x de la fonction auxiliaire $\psi_l^{(y)}$, on arrive à :

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial t^2} \Big|_x + \sigma \frac{\partial (\psi_l^{(y)})}{\partial t} \Big|_x - \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial z^2} \Big|_x \right) (z, y=0, t) = \\ & -\gamma \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x \partial t} \Big|_x(z, x=0, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(z, t) \end{aligned} \right.$$

Ces L équations sont bien du premier ordre en x et constituent la troisième famille de conditions. La quatrième et dernière est bien sûr obtenue en échangeant le rôle de x et de y . On obtient :

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial t^2} \Big|_y + \sigma \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial t} \Big|_y - \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial z^2} \Big|_y \right) (y=0, z, t) = \\ & -\gamma \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial y \partial t} \Big|_y(z, y=0, t) + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t^2}(z, t) - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l} \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t \partial z}(z, t) \end{aligned} \right.$$

1.5 Détermination des conditions de coin

Les conditions d'arêtes écrites précédemment font intervenir des dérivées secondes en la variable tangente à l'arête. Lorsque l'on se place au coin du domaine, il est impossible

1.5 Détermination des conditions de coin

numériquement d'évaluer ces dérivées. On se retrouve donc dans une situation analogue à la précédente, substituant à l'ancienne situation (faces, arêtes) la nouvelle (arêtes, coin). En dressant une liste exhaustive des équations d'arête, on peut dénombrer $12L^2$ quantités manquantes qui sont (par exemple) :

$$\frac{\partial \eta_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(0,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(0,t) \quad a, b = x, y \text{ ou } z, a \neq b \quad l, m = 1, \dots, L$$

L'objet de ce qui va suivre est donc de dériver $12L^2$ relations satisfaites au coin par la famille de solutions particulières et de lever ainsi l'indétermination. Là encore, on sera amené à distinguer deux cas suivant la nature de la fonction auxiliaire considérée.

1.5.1 Détermination d'une première famille de conditions de coin

$$\text{(On note } B(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 - R^{(z)}) \exp^{-i\omega t}$$

$$\text{et } A(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 + R^{(z)}) \exp^{-i\omega t} .)$$

On fixe l, m et on s'intéresse à la composante z , on va relier

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0,t) &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})_z}{\partial z^2}(0,0,t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(0,0,0,t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (\imath k_z)^2 E_z^0 B(t) \end{aligned} \right.$$

avec

$$\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z \partial t}(0,t) = -\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (\imath k_z) (\imath \omega) E_z^0 A(t)$$

et ($n = 1, \dots, L$)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{l,n}^{(x,y)}}{\partial t^2}(0,t) &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(z)})_z}{\partial t \partial z}(0,0,t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_l^{(x)} (-i\omega) (\imath k_z) E_z^0 A(t) \end{aligned} \right.$$

et encore ($\Psi_{l,n}^{(y)} = \Psi_{n,l}^{(y)}$)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_{n,l}^{(z,y)}}{\partial t^2}(0,t) &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \frac{\partial^2 (\psi_n^{(z)})_x}{\partial t \partial x}(0,0,t) \\ &= \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_n^{(z)} (-i\omega) (\imath k_x) E_x^0 A(t) \end{aligned} \right.$$

et enfin

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial y \partial t}(0, t) = \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \frac{\partial^2 (\psi_n^{(z)})}{\partial t \partial y}(0, 0, t) \\ = \omega^2 \Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_n^{(z)} (-i\omega) (ik_y) E_y^0 A(t) \end{cases}$$

Pour cela, on commence par écrire :

$$(1.20) \quad \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0, t) = \omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(i\omega) \left(\gamma - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Psi_n^{(z)} \right) (ik_z E_z^0) A(t)$$

car, d'après (1.10) :

$$(1.21) \quad k_z B(t) = \frac{k_z(1 - R^{(z)})}{(1 + R^{(z)})} A(t) = \omega \left(\gamma - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Psi_n^{(z)} \right) A(t).$$

On est donc amené à décomposer des expressions de la forme $\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \Psi_n^{(z)}$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.1 *On a*

$$\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \Psi_n^{(z)} = \zeta_{l,m,n}(\omega) \left(\frac{\gamma_{l,m,n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}}{\alpha_n} + \frac{\gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l} \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_n^{(z)}}{\gamma_{l,m} \alpha_l} + \frac{\gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l} \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_l^{(x)}}{\gamma_{l,m} \alpha_n} \right)$$

avec

$$\begin{cases} \zeta_{l,m,n}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + i\gamma_{l,m,n} \sigma \omega} \\ \gamma_{l,m,n} = \frac{\gamma_{l,m} \alpha_n}{\alpha_n + \gamma_{l,m} - \alpha_n \gamma_{l,m}} = \frac{\alpha_l \alpha_n \alpha_m}{\alpha_n \alpha_m + \alpha_m \alpha_l + \alpha_m \alpha_n - 2\alpha_n \alpha_m \alpha_l} \end{cases}$$

Vérification : On a :

$$\Psi_{l,m}^{(z)} = \frac{1}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(i\sigma\omega - k_z^2)}, \quad \Psi_n^{(z)} = \frac{\omega^2}{(1 - \alpha_n)\omega^2 + \alpha_n k_z^2}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_n^{(z)} &= \frac{\omega^2}{((1 - \alpha_n)\omega^2 + \alpha_n k_z^2) (\omega^2 + \gamma_{l,m}(i\sigma\omega - k_z^2))} \\ &= \alpha_n C \Psi_n^{(z)} \omega^{-2} + \gamma_{l,m} C \Psi_{l,m}^{(x)} \quad (C \text{ à déterminer}) \\ &= \frac{\alpha_n C}{(1 - \alpha_n)\omega^2 + \alpha_n k_z^2} + \frac{\gamma_{l,m} C}{\omega^2 + \gamma_{l,m}(i\sigma\omega - k_z^2)} \\ &= C \cdot \frac{\omega^2(\alpha_n + \gamma_{l,m} - \alpha_n \gamma_{l,m}) + i\sigma\omega \gamma_{l,m} \alpha_n}{((1 - \alpha_n)\omega^2 + \alpha_n k_z^2) (\omega^2 + \gamma_{l,m}(i\sigma\omega - k_z^2))} \\ &\Rightarrow C = \frac{\omega^2}{\alpha_n \gamma_{l,m}} \cdot \frac{\gamma_{l,m,n}}{(\omega^2 + i\sigma\omega \gamma_{l,m,n})} = \frac{\gamma_{l,m,n}}{\alpha_n \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \end{aligned}$$

1.5 Détermination des conditions de coin

d'où, en utilisant une relation analogue à (1.12)

$$\begin{aligned}\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_n^{(z)} \Psi_l^{(x)} &= \left[\frac{\gamma_{l,m,n}}{\alpha_n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} + \frac{\gamma_{l,m,n}}{\gamma_{l,m} \omega^2} \Psi_n^{(z)} \Psi_l^{(x)} \right] \zeta_{l,m,n}(\omega) \\ &= \left[\frac{\gamma_{l,m,n}}{\alpha_n} \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} + \frac{\gamma_{l,m,n}}{\gamma_{l,m}} \Psi_{l,n}^{(y)} \left(\frac{\gamma_{n,l}}{\alpha_l} \Psi_n^{(z)} + \frac{\gamma_{n,l}}{\alpha_n} \Psi_l^{(x)} \right) \right] \zeta_{l,m,n}(\omega)\end{aligned}$$

D' où le résultat.

On a donc (on reprend (1.20)) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0, t) &= \gamma \left(\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(i\omega)(ik_z) E_z^0 A(t) \right) - \\ &- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n} \left(\omega^2 \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)}(i\omega)(ik_z) E_z^0 A(t) \right) - \\ &- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n} \left(\omega^2 \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_n^{(z)}(i\omega)(-ik_x E_x^0 - ik_y E_y^0) A(t) \right) - \\ &- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n} \left(\omega^2 \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_l^{(x)}(i\omega)(ik_z E_z^0) A(t) \right).\end{aligned}$$

En rapprochant cette égalité avec les expressions données plus haut, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0, t) &= -\gamma \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z \partial t}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z \partial t}(0, t) - \\ (1.22) \quad &- \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \left(\frac{\partial^2 \eta_{n,l}^{(z,y)}}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial t \partial y}(0, t) \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial^2 \eta_{l,n}^{(x,y)}}{\partial t^2}(0, t)\end{aligned}$$

On est ainsi amené à distinguer deux cas suivant que σ est nul ou non. En effet, dans le premier cas $\zeta_{l,m,n}(\omega)$ est identique à un et la relation ci-dessus est bien une relation indépendante de la famille de solutions vérifiée au coin. Si σ est non nul il faut définir de nouvelles fonctions auxiliaires, soient :

$$\psi_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \left(\frac{k_b}{\omega} \zeta_{l,m,n}(\omega) \right) \psi_{l,m}^{(a,b)}(b=0, t),$$

$$\eta_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \zeta_{l,m,n}(\omega) \eta_{l,m}^{(a,b)}(b=0, t)$$

$$a, b = x, y, \text{ ou } z, a \neq b, l, m = 1, \dots, L$$

qui sont solutions des équations différentielles ordinaires :

$$(1.23) \quad \begin{cases} \frac{d\psi_{l,m,n}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,n} \sigma \psi_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(b=0, t) \\ \frac{d\eta_{l,m,n}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,n} \sigma \eta_{l,m,n}^{(a,b)}(t) = \frac{\partial \eta_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b=0, t) \end{cases}$$

(1.22) se réécrit alors:

$$(1.24) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0, t) = -\gamma \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial^2 \psi_{l,m,n}^{(x,z)}}{\partial t^2}(t) - \\ - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{\partial^2 \eta_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t^2}(t) + \frac{\partial^2 \psi_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t^2}(t) \right) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial^2 \eta_{l,n,m}^{(x,y)}}{\partial t^2}(t) \end{cases}$$

Si l'on relie cette égalité avec l'équation satisfaite par $\psi_{l,m}^{(x,z)}$ on aboutit à l'équation du premier ordre :

$$(1.25) \quad \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{l,m}} \left[\left(\frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} + \gamma_{l,m} \sigma \psi_{l,m}^{(x,z)} \right) (z=0, t) - \frac{\partial (\psi_{l,m}^{(x)})}{\partial t} (y=0, z=0, t) \right] = \\ = -\gamma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(z=0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial \psi_{l,m,n}^{(x,z)}}{\partial t}(t) - \\ - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{\partial \eta_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t}(t) + \frac{\partial \psi_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t}(t) \right) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial \eta_{l,n,m}^{(x,y)}}{\partial t}(t) \end{cases}$$

Ceci fournit une première famille de L^2 conditions de coin. Une deuxième est obtenue en échangeant le rôle de x et de y :

$$(1.26) \quad \begin{cases} \frac{1}{\gamma_{l,m}} \left[\left(\frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} + \gamma_{l,m} \sigma \psi_{l,m}^{(y,z)} \right) (z=0, t) - \frac{\partial (\psi_{l,m}^{(y)})}{\partial t} (x=0, z=0, t) \right] = \\ = -\gamma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z}(z=0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial \psi_{l,m,n}^{(y,z)}}{\partial t}(t) - \\ - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{\partial \eta_{n,l,m}^{(z,x)}}{\partial t}(t) + \frac{\partial \psi_{n,l,m}^{(z,x)}}{\partial t}(t) \right) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial \eta_{l,n,m}^{(y,x)}}{\partial t}(t) \end{cases}$$

En faisant tourner les indices x, y et z , on arrive finalement par ce calcul à obtenir 6 L^2 relations, soit la moitié de ce qui nous est nécessaire. On passe alors à la

1.5 Détermination des conditions de coin

1.5.2 Détermination de la seconde famille de conditions de coin

(On note $B(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 - R^{(z)}) \exp^{-i\omega t}$

et $A(t) = (1 + R^{(x)})(1 + R^{(y)})(1 + R^{(z)}) \exp^{-i\omega t}$.)

On fixe l, m et on s'intéresse à la composante z , on va relier

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= i\omega \Psi_{l,m}^{(z)} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})_y}{\partial z \partial y}(0, 0, t) \\ &= i\omega \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial y}(0, 0, 0, t) \\ &= (i\omega) \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (ik_z)(ik_y) E_y^0 B(t) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) = -\Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} (i\omega)^2 (ik_y E_y^0) A(t)$$

et

$$\frac{\partial \psi_{l,n}^{(x,y)}}{\partial y}(0, t) = -\Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_l^{(x)} (i\omega)^2 (ik_y E_y^0) A(t)$$

et enfin

$$\frac{\partial \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial y}(0, t) = -\Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_n^{(z)} (i\omega)^2 (ik_y E_y^0) A(t)$$

Le calculs sont très analogues aux précédents. En réutilisant la décomposition de la proposition (1.1) et l'égalité (1.21), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= (i\omega)^2 (ik_y E_y^0) \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} \left(\gamma - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n}{\alpha_n} \Psi_n^{(z)} \right) A(t) \\ &= \gamma \left((i\omega)^2 (ik_y E_y^0) \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} A(t) \right) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n}(\omega) \left((i\omega)^2 (ik_y E_y^0) \Psi_{l,m}^{(z)} \Psi_l^{(x)} A(t) \right) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \left((i\omega)^2 (ik_y E_y^0) \Psi_{n,l}^{(y)} \Psi_n^{(z)} A(t) \right) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \left((i\omega)^2 (ik_y E_y^0) \Psi_{l,n}^{(y)} \Psi_l^{(x)} A(t) \right) \end{aligned}$$

En rapprochant cette égalité aux expressions des fonctions auxiliaires données plus haut, on a :

$$(1.27) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= -\gamma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) + \\ &+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \psi_{n,l}^{(z,y)}}{\partial y}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \zeta_{l,m,n}(\omega) \frac{\partial \psi_{l,n}^{(x,y)}}{\partial y}(0, t) \end{aligned} \right.$$

Si σ est nul $\zeta_{l,m,n}$ est égal à 1 et l'équation ci-dessus est la condition recherchée. Si σ est non nul, on réutilise les fonctions auxiliaires données par (1.23), pour écrire:

$$(1.28) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) &= -\gamma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial \eta_{l,m,n}^{(x,z)}}{\partial t}(t) + \\ &+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{n,l,m}^{(z,y)}}{\partial t}(t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{l,n,m}^{(x,y)}}{\partial t}(t) \end{aligned} \right.$$

C'est la troisième famille de conditions, la dernière est obtenue en intervertissant les rôles de x et de y . On obtient :

$$(1.29) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z}(0, t) &= -\gamma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t}(0, t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n}}{\alpha_n^2} \frac{\partial \eta_{l,m,n}^{(y,z)}}{\partial t}(t) + \\ &+ \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{n,l,m}^{(z,x)}}{\partial t}(t) + \sum_{n=1}^L \frac{\beta_n \gamma_{l,m,n} \gamma_{n,l}}{\alpha_n^2 \gamma_{l,m}} \frac{\partial \psi_{l,n,m}^{(y,x)}}{\partial t}(t) \end{aligned} \right.$$

En faisant tourner les indices $x y$ et z , on obtient bien ainsi 6 L^2 conditions qui additionnées aux 6 L^2 du paragraphe précédent fournissent bien les 12 L^2 conditions recherchées.

Chapitre 2

Discrétisation du problème

On présente un schéma numérique aux différences finies discrétisant le système de Maxwell posé dans le secteur $\{x < 0, y < 0, z < 0\}$ et couplé avec les CLA décrites précédemment. Les équations de Maxwell sont discrétisées à l'aide du schéma de Yee, [?], ou schéma saute-mouton tandis que les CLA sont approchées par des équations centrées. Le schéma obtenu est d'ordre deux en espace et en temps. Il s'applique aussi bien aux milieux conducteurs ($\sigma > 0$) qu'aux milieux isolants ou au vide ($\sigma = 0$).

2.1 Schéma pour les nœuds intérieurs au domaine

Le schéma de discrétisation le plus simple pour le système de Maxwell a été proposé par Yee en 1966. Il utilise des maillages espace-temps décalés les uns par rapport aux autres pour chacune des six composantes du champ électromagnétique. Le décalage de chaque grille de calcul est adapté à l'écriture de schémas de type saute-mouton pour chacune des équations du système. Plus précisément, on définit

$\Delta x, \Delta y, \Delta z,$ les pas d'espace,

$\Delta t,$ le pas de temps.

On note,

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_i & = & i\Delta x, \quad y_j & = & j\Delta y, \quad z_k & = & k\Delta z, \\ x_{i+\frac{1}{2}} & = & (i + \frac{1}{2})\Delta x, \quad y_{j+\frac{1}{2}} & = & (j + \frac{1}{2})\Delta y, \quad z_{k+\frac{1}{2}} & = & (k + \frac{1}{2})\Delta z. \\ t_n & = & n\Delta t, \quad t_{n+\frac{1}{2}} & = & (n + \frac{1}{2})\Delta t \end{array} \right.$$

(On a adopté la convention: i est l'indice en x , j celui en y , k celui en z et enfin n celui en temps)

Le schéma permet d'évaluer des approximations des champs \vec{E} et \vec{H} en certains points du réseau de maille moitiée dans chaque direction, si l'on note:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n \approx E_z(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, z_k, t_n) & (H_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \approx H_z(x_i, y_j, z_{k+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \\ (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \approx E_x(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) & (H_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} \approx H_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, z_k, t_{n+\frac{1}{2}}) \\ (E_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n \approx E_y(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) & (H_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \approx H_y(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z_k, t_{n+\frac{1}{2}}) \end{array} \right.$$

le schéma s'écrit:

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{(E_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} - \\ \quad \frac{(E_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \end{array} \right.$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta t} + \sigma \frac{(E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+1} + (E_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n}{2} = \\ \quad = \frac{(H_y)_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{(H_x)_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \end{array} \right.$$

et des expressions analogues, obtenues par rotation d'indice, pour les autres composantes des champs.

On utilise ce schéma pour évaluer itérativement en temps (c'est à dire en n) toutes les composantes des champs aux nœuds situés à l'intérieur du secteur $\{x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$. Restent à définir des relations permettant d'évaluer les composantes du champ électrique situé à l'extérieur de ce secteur à savoir, sur la face :

$$F_{\frac{1}{2}}^{(z)} = \left\{ z = z_{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z}{2} \right\},$$

les composantes tangentielles :

$$(E_y)_{i+\frac{1}{2},j,\frac{1}{2}}^n \text{ et } (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n,$$

et pareillement pour les faces $F_{\frac{1}{2}}^{(y)}$ et $F_{\frac{1}{2}}^{(x)}$.

La discrétisation des CLA va fournir les équations nécessaires à leur évaluation. Elle utilise bien sûr les valeurs des fonctions de face, d'arête et de coin en certains points préalablement choisis.

Concernant les fonctions de face, on a convenu, pour chacune des deux composantes, de placer un nœud au milieu du segment joignant les deux derniers points où sont évalués les composantes correspondantes du champ électrique. On définit ainsi:

$$\left(\psi_{l,y}^{(x)} \right)_{j,k+\frac{1}{2}}^n \approx \left(\psi_l^{(x)} \right)_y(y_j, z_{k+\frac{1}{2}}, t_n), \quad \left(\psi_{l,z}^{(x)} \right)_{j+\frac{1}{2},k}^n \approx \left(\psi_l^{(x)} \right)_z(y_{j+\frac{1}{2}}, z_k, t_n),$$

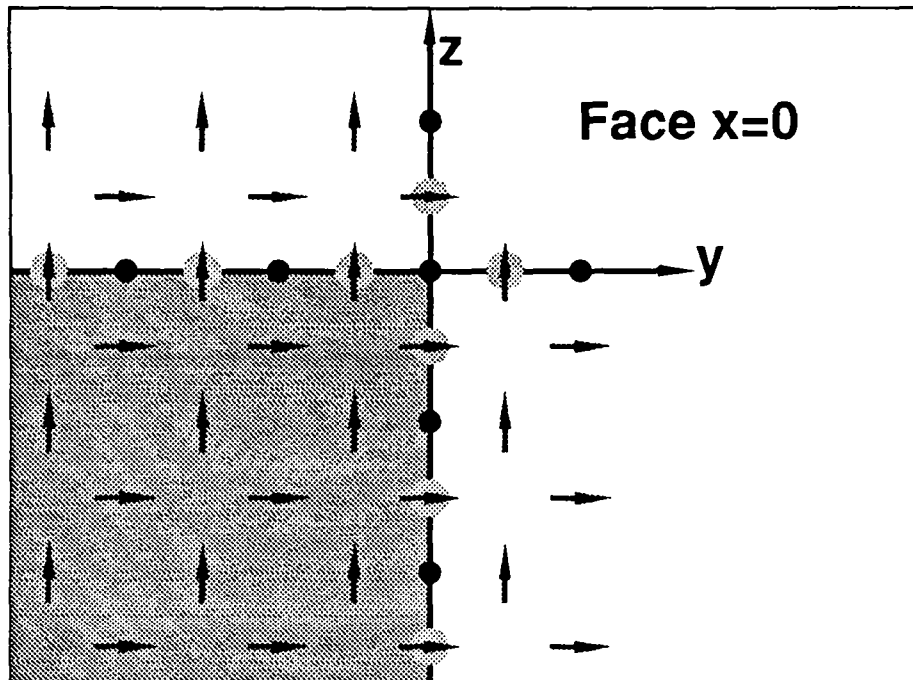


Figure 2.1 : Maillage pour les fonctions auxiliaires $\vec{\psi}_l^{(x)}$: La composante en y est représentée par une flèche horizontale tandis que la la composante en z est représentée par une flèche verticale. Maillage pour chaque arête : le long des arêtes les fonctions auxiliaires $\psi_{l,m}^{(x,z)}$ sur $z = 0$ et $\psi_{l,m}^{(x,y)}$ sur $y = 0$ sont représentées par des petits points sombres tandis que $\eta_{l,m}^{(x,z)}$ sur $z = 0$ et $\eta_{l,m}^{(x,y)}$ sur $y = 0$ sont représentées par des gros points clairs.

$$\begin{aligned} (\psi_{l,z}^{(y)})^n_{k,i+\frac{1}{2}} &\approx (\psi_l^{(y)})_z(z_k, x_{i+\frac{1}{2}}, t_n), & (\psi_{l,x}^{(y)})^n_{k+\frac{1}{2},i} &\approx (\psi_l^{(y)})_x(z_{k+\frac{1}{2}}, x_i, t_n), \\ (\psi_{l,x}^{(z)})^n_{i,j+\frac{1}{2}} &\approx (\psi_l^{(z)})_x(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n), & (\psi_{l,y}^{(z)})^n_{i+\frac{1}{2},j} &\approx (\psi_l^{(z)})_y(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_n). \end{aligned}$$

Concernant, les fonctions d'arête, on a choisi de distinguer les fonctions de type $\eta_{l,m}^{(\dots)}$ des fonctions de type $\psi_{l,m}^{(\dots)}$. Les premières seront positionnées sur des nœuds demi-entier contrairement aux secondes placées sur des nœuds à coordonnées entières.

On pose donc ($a = y$ ou z)

$$\begin{aligned} (\psi_{l,m}^{(a,x)})^n_i &\approx (\psi_{l,m}^{(a,x)})(x_i, t_n), & (\eta_{l,m}^{(a,x)})^n_{i+\frac{1}{2}} &\approx (\eta_{l,m}^{(a,x)})(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n), \\ (\psi_{l,m}^{(a,y)})^n_j &\approx (\psi_{l,m}^{(a,y)})(y_j, t_n), & (\eta_{l,m}^{(a,y)})^n_{j+\frac{1}{2}} &\approx (\eta_{l,m}^{(a,y)})(y_{j+\frac{1}{2}}, t_n), \\ (\psi_{l,m}^{(a,z)})^n_k &\approx (\psi_{l,m}^{(a,z)})(z_k, t_n), & (\eta_{l,m}^{(a,z)})^n_{k+\frac{1}{2}} &\approx (\eta_{l,m}^{(a,z)})(z_{k+\frac{1}{2}}, t_n), \end{aligned}$$

Enfin, les fonctions de coin sont calculées aux instants de type entier ,

Pour $a, b = x, y$ ou z , $a \neq b$:

$$(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n \approx (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})(t_n), \quad (\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^n \approx (\eta_{l,m,p}^{(a,b)})(t_n),$$

La figure 2.1 visualise le maillage ainsi obtenu.

L'objet de se qui va suivre est de construire progressivement sur les faces puis les arêtes et enfin le coin un schéma s'appuyant sur ce maillage.

2.2 Schéma pour les équations de face

On décrit un schéma de discrétisation par différences finies pour les équations de face. Puis, on montre que ce schéma permet le calcul des inconnues de face. Le schéma est présenté pour la face dont la normale est \hat{z} .

2.2.1 Description du schéma

On commence par réécrire (1.3) en éliminant les fonctions φ : il vient

$$(2.3) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \gamma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\partial (\psi_m^{(z)})}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 (\psi_l^{(z)})}{\partial t^2} + \alpha_l \left(\sigma \frac{\partial (\psi_l^{(z)})}{\partial t} - \Delta_T (\psi_l^{(z)}) \right) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} /_{z=0} \quad (l = 1, \dots, L).$$

2.2 Schéma pour les équations de face

pour les équations projetées sur x et

$$(2.5) \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\partial (\psi_m^{(z)})_y}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0,$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 (\psi_l^{(z)})_y}{\partial t^2} + \alpha_l \left(\sigma \frac{\partial (\psi_l^{(z)})_y}{\partial t} - \Delta_T (\psi_l^{(z)})_y \right) = \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} /_{z=0} \quad (l = 1, \dots, L),$$

pour les équations projetées sur y .

En prenant en compte le maillage que nous avons retenu, on va écrire un schéma centré en :

- $x_i = i\Delta x$, $y_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta y$, $z = 0$, $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ pour l'équation (2.3),
- $x_i = i\Delta x$, $y_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta y$, $z = 0$, $t_n = n\Delta t$ pour les L équations (2.4),
- $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, $z = 0$, $t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ pour l'équation (2.5),
- $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, $z = 0$, $t_n = n\Delta t$ pour les L équations (2.6).

Commençons par (2.3), on fait les approximations :

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial E_x}{\partial z} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z = 0, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \\ & \approx \frac{((E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^n)}{2\Delta z} \end{aligned} \right.$$

et

$$\left| \begin{aligned} & \frac{\partial E_x}{\partial t} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, z = 0, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \\ & \approx \frac{((E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^n)}{2\Delta t} \end{aligned} \right.$$

et enfin

$$\frac{\partial (\psi_m^{(z)})_x}{\partial t} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{\Delta t} \left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right)$$

A l'aide de ces approximations, (2.3) s'écrit :

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left((E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^n \right)}{2\Delta z} + \\ & + \gamma \frac{\left((E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n - (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^n \right)}{2\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \right.$$

Traisons ensuite les L équations des ondes 2D (2.4), on fait les approximations :

$$\frac{\partial^2 (\psi_m^{(z)})_x}{\partial t^2} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

puis

$$\sigma \frac{\partial (\psi_m^{(z)})_x}{\partial t} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \sigma \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{2\Delta t}$$

et

$$\left| \begin{aligned} \Delta_T (\psi_m^{(z)})_x (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n) & \approx (\Delta_h^{(z)} \psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \\ & \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 2 (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{mx}^{(z)})_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j-\frac{1}{2}}^n - 2 (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{3}{2}}^n \right)}{\Delta y^2} \end{aligned} \right.$$

$(\Delta_h^{(z)})$ n'est autre que l'opérateur Laplacien discrétisé sur cinq points) et enfin

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} /_{z=0} (x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{\left((\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 (\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

Expression dans laquelle on utilise une approximation centrée pour évaluer la valeur en $z = 0$ de la composante en x du champ électrique :

$$(2.8) \quad (\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{(E_z)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n + (E_z)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^n}{2}$$

2.2 Schéma pour les équations de face

Utilisant ces approximations, (2.3) se réécrit :

$$(2.9) \quad \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2(\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{\Delta t^2} + \sigma \alpha_l \frac{\left((\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{2\Delta t} + \alpha_l \left(\Delta_h^{(z)} \psi_{mx}^{(z)} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\left((\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2(\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

2.2.2 Principe de résolution

Supposons les instants $n-1$ et n connus, comme le champ (E_x) est évalué à l'instant $n+1$ et sur le plan $z = -\Delta z/2$ à l'aide du schéma pour les nœuds internes au cube, (2.7) et (2.9) forme alors un système de $L+1$ équations en les inconnues :

$$(E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1}, (\psi_{1x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \dots, (\psi_{Lx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}.$$

Ce système s'inverse facilement : on commence par éliminer les fonctions auxiliaires explicitement selon

$$(2.10) \quad (\psi_{lx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{a_l^\sigma}{2} (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} + (F_l)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$$

où on a noté :

$$(2.11) \quad a_l^\sigma = \frac{1}{1 + \sigma \alpha_l \Delta t / 2}$$

et où $(F_l)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ se calcule explicitement à l'aide de quantités connues. Plus précisément, on a :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F_l)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = A_l^1 (\psi_{lx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + A_l^2 (\psi_{lx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} + \\ + A_l^3 \left((\psi_{lx}^{(z)})_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n + (\psi_{lx}^{(z)})_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \left((\psi_{lx}^{(z)})_{i,j+\frac{3}{2}}^n + (\psi_{lx}^{(z)})_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) \\ + A_l^4 \left((E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} - 2(2\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (2\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \end{array} \right.$$

avec

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_l^1 = a_l^\sigma \left(2 - 2\alpha_l \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) \right) \\ A_l^2 = a_l^\sigma \left(\alpha_l \sigma \frac{\Delta t}{2} - 1 \right) \\ A_l^3 = a_l^\sigma \alpha_l \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \\ A_l^4 = \frac{a_l^\sigma}{2} \end{array} \right.$$

On injecte l'expression (2.10) dans (2.7) et on résout, il vient :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{aligned} (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1} &= A^5 \cdot (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n + A^6 (2\psi_{0x}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n + A^7 (E_x)_{i,j+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{n+1} + \\ &+ \sum_{m=1}^L A_m^8 \left((F_l)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{mx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} A^5 &= \frac{-2\Delta t}{\Delta t + \gamma^* \Delta z} \\ A^6 &= \frac{\Delta t + \gamma \Delta z}{\Delta t + \gamma^* \Delta z} \\ A^7 &= \frac{\Delta t - \gamma \Delta z}{\Delta t + \gamma^* \Delta z} \\ A_l^8 &= \frac{2\beta_l}{\alpha_l} \frac{\Delta z}{\Delta t + \gamma^* \Delta z} \end{aligned} \right.$$

et

$$(2.16) \quad \gamma^* = 1 + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} (1 - a_m^\sigma) \quad (> 0 \text{ car } a_{l,m}^\sigma < 1)$$

$(E_x)_{i,j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{n+1}$ étant connu, il est alors facile de calculer les $L+1$ quantités $(\psi_{lx}^{(z)})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ pour $l = 0, \dots, L$ en utilisant (2.10) et (2.8) écrit à l'instant $n+1$.

2.3 Schéma pour les équations d'arête

On décrit un schéma de discrétisation par différences finies pour les équations d'arête. Puis, on montre que ce schéma permet le calcul des inconnues d'arête. Le schéma est présenté pour l'arête dont le vecteur tangent est \hat{z} .

2.3.1 Description du schéma

On commence par réécrire l'ensemble des équations satisfaites sur l'arête $\Gamma^{(z)} = F^{(x)} \cap F^{(y)}$. On a d'une part les 4 ($L \times L$) équations des ondes 1D définissant les fonctions auxiliaires d'arête : (pour $l, m = 1, \dots, L$)

$$(2.17) \quad \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial t^2} \Big|_z (y = 0, z, t)$$

$$(2.18) \quad \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial t^2} \Big|_z (z, x = 0, t)$$

2.3 Schéma pour les équations d'arête

$$(2.19) \quad \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial t \partial y} (y = 0, z, t)$$

$$(2.20) \quad \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \gamma_{l,m} \left(\sigma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial t \partial x} (z, x = 0, t)$$

et d'autre part, les 4 L équations reliant les fonctions d'arête à certaines dérivées de la trace sur l'arête des fonctions de face : (pour $l = 1, \dots, L$)

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial y} (y = 0, z, t) = -\gamma \frac{\partial (\psi_l^{(x)})}{\partial t} (y = 0, z, t) + \\ + \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} (z, t) + \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t} (z, t) \end{array} \right.$$

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\psi_l^{(y)})}{\partial x} (z, x = 0, t) = -\gamma \frac{\partial (\psi_l^{(y)})}{\partial t} (z, x = 0, t) + \\ + \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t} (z, t) + \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t} (z, t) \end{array} \right.$$

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial y^2} (y = 0, z, t) = -\gamma \frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})}{\partial y \partial t} (y = 0, z, t) + \\ + \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} (z, t) - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t^2} (z, t) - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t \partial z} (z, t) \end{array} \right.$$

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x^2} (z, x = 0, t) = -\gamma \frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})}{\partial x \partial t} (z, x = 0, t) + \\ + \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(y,z)}}{\partial t^2} (z, t) - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2} (z, t) - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z} (z, t) \end{array} \right.$$

où on a noté :

$$(2.25) \quad C_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m^2} \quad D_{l,m} = \frac{\beta_m \gamma_{l,m}}{\alpha_m \alpha_l}$$

En prenant en compte le maillage que nous avons retenu, on va écrire un schéma centré en:

- $x = 0, y = 0, z_k = k\Delta z, t_n = n\Delta t$ pour les 2 L^2 équations (2.17), (2.18)
- $x = 0, y = 0, z_{k+\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2})\Delta z, t_n = n\Delta t$ pour les 2 L^2 équations (2.19), (2.20)
- $x = 0, y = 0, z_k = k\Delta z, t_{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ pour les 2 L équations (2.21) et (2.22)

- $x = 0$, $y = 0$, $z_{k+\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2})\Delta z$, $t_n = n\Delta t$ pour les 2 L équations (2.23), (2.24)

Commençons par (2.17), on fait les approximations :

$$\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} (z_k, t_n) \approx \frac{\left((\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - 2 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

puis

$$\sigma \frac{\partial \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} (z_k, t_n) \approx \sigma \frac{\left((\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1} \right)}{2\Delta t}$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} (z_k, t_n) \approx \frac{\left((\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k+1}^n - 2 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k-1}^n \right)}{\Delta z^2}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 (\psi_{l,0}^{(x)})}{\partial t^2} (y = 0, z_k, t_n) \approx \frac{\left((\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^{n+1} - 2 (\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

où on a noté :

$$(\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^n = \frac{1}{2} \left((\psi_{l,z}^{(x)})_{j=\frac{1}{2},k}^n + (\psi_{l,z}^{(x)})_{j=-\frac{1}{2},k}^n \right)$$

Utilisant ces approximations, (2.17) se réécrit :

$$(2.26) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - 2 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1}}{\Delta t^2} + \sigma \gamma_{l,m} \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n-1}}{2\Delta t} - \\ - \gamma_{l,m} \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k+1}^n - 2 (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{k-1}^n}{\Delta z^2} = \\ = \frac{(\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^{n+1} - 2 (\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^n + (\psi_{l,0}^{(x,z)})_k^{n-1}}{\Delta t^2} \end{array} \right.$$

Les équations (2.18) se discrétisent de manière analogue. (il suffit d'échanger x en y).

On considère à présent (2.19). On écrit les approximations :

$$\frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t^2} (z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{\left((\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{\Delta t^2}$$

puis

$$\sigma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t} (z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \sigma \frac{\left((\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{2\Delta t}$$

2.3 Schéma pour les équations d'arête

et

$$\frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2} (z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{\left((\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{3}{2}}^n - 2 (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k-\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta z^2}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 (\psi_l^{(x)})_y}{\partial t \partial y} (y=0, z_{k+\frac{1}{2}}, t_n) \approx \frac{\left((\eta_{l,0}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,0}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right)}{4\Delta t \Delta y}$$

où on a noté :

$$(\eta_{l,0}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n = (\psi_{l,y}^{(x)})_{j=1,k+\frac{1}{2}}^n - (\psi_{l,y}^{(x)})_{j=-1,k+\frac{1}{2}}^n$$

Utilisant ces approximations, (2.19) se réécrit :

$$(2.27) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^2} + \sigma \gamma_{l,m} \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & - \gamma_{l,m} \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{3}{2}}^n - 2 (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z^2} = \\ & = \frac{(\eta_{l,0}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,0}^{(x,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{4\Delta t \Delta y} \end{aligned} \right.$$

Là encore, l'échange de x en y permet d'obtenir une version discrétisée de (2.20).

L'équation (2.21) est discrétisée selon un schéma centré en $z = k\Delta z$ et $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$:

$$(2.28) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\psi_{l,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^{n+1} + (\psi_{l,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^n - (\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^{n+1} - (\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^n}{2\Delta y} + \\ & + \gamma \frac{(\psi_{l,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^{n+1} + (\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^{n+1} - (\psi_{l,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^n - (\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^n}{2\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n}{\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{(\psi_{m,l}^{(y,z)})_k^{n+1} - (\psi_{m,l}^{(y,z)})_k^n}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \right.$$

et une équation analogue pour (2.22).

Reste la discrétisation des équations (2.23) et (2.24). Par exemple, pour (2.24), on commence par écrire l'approximation :

$$\frac{\partial^2 (\psi_l^{(y)})_x}{\partial x^2} (z_{k+\frac{1}{2}}, x=0, t_n) \approx \frac{\theta (\eta_{0,l}^{(y,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} + (1-2\theta) (\eta_{0,l}^{(y,z)})_{k+\frac{1}{2}}^n + \theta (\eta_{0,l}^{(y,z)})_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta x^2}$$

où on a noté :

$$(2.29) \quad \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^n = \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},j=1}^n - 2 \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},j=0}^n + \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},j=-1}^n$$

et où θ est un paramètre à notre disposition.

Les autres approximations utilisées sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \left(\psi_l^{(y)}\right)_x}{\partial x \partial t} \left(z_{k+\frac{1}{2}}, x=0, t_n\right) \approx \\ \approx \frac{\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},1}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},1}^{n-1} + \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n-1}}{4\Delta t \Delta x} \end{array} \right.$$

et ($a = x$ ou y)

$$\frac{\partial^2 \eta_{l,m}^{(a,z)}}{\partial t^2} \left(z_{k+\frac{1}{2}}, t_n\right) \approx \frac{\left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 \left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \left(\eta_{l,m}^{(a,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^2}$$

et, enfin

$$\frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z} \left(z_{k+\frac{1}{2}}, t_n\right) \approx \frac{\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n-1} + \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_k^{n-1}}{2\Delta t \Delta z}$$

Le schéma pour (2.24) s'écrit alors :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} + (1-2\theta) \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \theta \left(\eta_{0,l}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta x^2} \\ + \gamma \frac{\left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},1}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},1}^{n-1} + \left(\psi_{l,x}^{(y)}\right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n-1}}{4\Delta t \Delta x} \\ - \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \left(\eta_{l,m}^{(y,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^2} \\ + \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 \left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \left(\eta_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t^2} \\ + \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_{k+1}^{n-1} + \left(\psi_{m,l}^{(x,z)}\right)_k^{n-1}}{2\Delta t \Delta z} = 0 \end{array} \right.$$

2.3.2 Principe de résolution

Supposons les instants n et $n - 1$ connus, comme les nœuds internes aux faces sont évalués à l'aide des équations de face, l'ensemble des équations composant le schéma forme alors un système de $4 L \times L + 4 L$ équations en les inconnues :

$$\begin{aligned} & \left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1}, \left(\psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1}, \left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1}, \left(\eta_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ & \text{pour } l, m = 1, \dots, L \text{ et} \\ & \left(\psi_{l,z}^{(x)} \right)_{j=1, k+\frac{1}{2}}^{n+1}, \left(\psi_{l,z}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2}, i=1}^{n+1}, \left(\psi_{l,x}^{(x)} \right)_{j=\frac{1}{2}, k}^{n+1}, \left(\psi_{l,y}^{(y)} \right)_{k, i=\frac{1}{2}}^{n+1} \\ & \text{pour } l = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

Ce système s'inverse de la manière suivante, on commence par éliminer les inconnues d'arête :

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} &= \frac{a_{l,m}^\sigma}{2} \left(\psi_{l,z}^{(x)} \right)_{j=\frac{1}{2}, k}^{n+1} + \left(P_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} \\ \left(\psi_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} &= \frac{a_{l,m}^\sigma}{2} \left(\psi_{l,z}^{(y)} \right)_{k, i=\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(P_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1} \\ \left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{a_{l,m}^\sigma \Delta t}{4 \Delta y} \left(\psi_{l,y}^{(x)} \right)_{j=1, k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(E_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ \left(\eta_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{a_{l,m}^\sigma \Delta t}{4 \Delta x} \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2}, i=1}^{n+1} + \left(E_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{aligned} \right.$$

où on a noté

$$(2.32) \quad a_{l,m}^\sigma = \frac{1}{1 + \sigma \gamma_{l,m} \Delta t / 2}$$

et où $\left(P_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1}$, $\left(P_{l,m}^{(y,z)} \right)_k^{n+1}$, $\left(E_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ et $\left(E_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ se calculent en fonction de quantités connues. Par exemple, on a :

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(P_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} &= B_{l,m}^1 \left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^n + B_{l,m}^2 \left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_k^{n-1} + \\ &+ B_{l,m}^3 \left(\left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+1}^n + \left(\psi_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k-1}^n \right) + \\ &+ B_{l,m}^4 \left(\left(\psi_{l,z}^{(x)} \right)_{j=-\frac{1}{2}, k}^{n+1} - 2 \left(2 \psi_{l,0}^{(x,z)} \right)_k^n + \left(2 \psi_{l,0}^{(x,z)} \right)_k^{n-1} \right) \end{aligned} \right.$$

et

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(E_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= B_{l,m}^1 \left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^n + B_{l,m}^2 \left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} + \\ &+ B_{l,m}^3 \left(\left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{3}{2}}^n + \left(\eta_{l,m}^{(x,z)} \right)_{k-\frac{1}{2}}^n \right) + \\ &+ B_{l,m}^5 \left(\left(\psi_{l,y}^{(x)} \right)_{j=-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\eta_{l,0}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$(2.35) \quad \begin{aligned} B_{l,m}^1 &= a_{l,m}^\sigma \left(2 - 2\gamma_{l,m} \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} \right), & B_{l,m}^2 &= a_{l,m}^\sigma \left(\gamma_{l,m} \sigma \frac{\Delta t}{2} - 1 \right) \\ B_{l,m}^3 &= a_{l,m}^\sigma \gamma_{l,m} \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2}, & B_{l,m}^4 &= \frac{a_{l,m}^\sigma}{2} \\ B_{l,m}^5 &= -\frac{a_{l,m}^\sigma \Delta t}{4\Delta y} \end{aligned}$$

On est donc ramené à la détermination des inconnues de face. Le principe de résolution consiste à calculer d'abord les composantes communes aux deux faces (ici selon z) et ensuite les autres composantes. En effet, ces inconnues sont données par les deux systèmes :

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } l = 1, \dots, L \\ \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} B_l^6 \right) \cdot (\psi_{l,z}^{(x)})_{j=\frac{1}{2},k}^{n+1} - \frac{\Delta y}{\Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m}^7 \cdot (\psi_{m,z}^{(y)})_{k,i=\frac{1}{2}}^{n+1} = F_l^{(x)} \\ -\frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m}^7 \cdot (\psi_{m,z}^{(x)})_{j=\frac{1}{2},k}^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta t} B_l^6 \right) \cdot (\psi_{l,z}^{(y)})_{k,i=\frac{1}{2}}^{n+1} = F_l^{(y)} \end{array} \right.$$

et

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\theta + \frac{\Delta y}{4\Delta t} B_l^6 \right) \cdot (\psi_{l,y}^{(x)})_{j=1,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{\Delta y^2}{4\Delta x \Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m}^7 \cdot (\psi_{m,x}^{(y)})_{k+\frac{1}{2},i=1}^{n+1} = G_l^{(x)} \\ \frac{\Delta x^2}{4\Delta y \Delta t} \sum_{m=1}^L B_{l,m}^7 \cdot (\psi_{m,y}^{(x)})_{j=1,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\theta + \frac{\Delta x}{4\Delta t} B_l^6 \right) \cdot (\psi_{l,x}^{(y)})_{k+\frac{1}{2},i=1}^{n+1} = G_l^{(y)} \end{array} \right.$$

avec

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{l,m}^7 = a_{l,m}^\sigma D_{l,m} \\ B_l^6 = \gamma - \sum_{m=1}^L C_{l,m} a_{l,m}^\sigma \end{array} \right.$$

et où $F_l^{(x)}$, $F_l^{(y)}$ sont explicitement donnés à l'aide de quantités connues tandis que $G_l^{(x)}$ et $G_l^{(y)}$ sont des expressions algébriques qui peuvent être calculées dès que le système (2.36) est résolu. Plus explicitement, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_l^{(x)} = \left(1 + \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) (\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^n + \left(1 - \gamma \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \left((\psi_{l,z}^{(x)})_{-\frac{1}{2},k}^{n+1} - (\psi_{l,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^n \right) + \\ + \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{2\Delta y}{\Delta t} \left((P_{l,m}^{(x,z)})_k^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_k^n \right) + \\ + \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{2\Delta y}{\Delta t} \left((P_{m,l}^{(y,z)})_k^{n+1} - (\psi_{m,l}^{(y,z)})_k^n \right) \end{array} \right.$$

2.3 Schéma pour les équations d'arête

et

$$\left\{ \begin{aligned} G_l^{(y)} &= \theta \left(2 \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2},0}^{n+1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n+1} - \left(\eta_{0,l}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + (2\theta - 1) \left(\eta_{0,l}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \\ &+ \gamma \frac{\Delta x}{4\Delta t} \left(\left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n+1} + \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2},1}^{n-1} - \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2},-1}^{n-1} \right) + \\ &+ \sum_{m=1}^L C_{l,m} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \left(\left(E_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 \left(\eta_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \left(\eta_{l,m}^{(y,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\ &- \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \left(\left(E_{m,l}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n+1} - 2 \left(\eta_{m,l}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^n + \left(\eta_{m,l}^{(x,z)} \right)_{k+\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \\ &- \sum_{m=1}^L D_{l,m} \frac{\Delta x^2}{2\Delta z \Delta t} \left(\left(\psi_{m,l}^{(x,z)} \right)_{k+1}^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)} \right)_k^{n+1} - \left(\psi_{m,l}^{(x,z)} \right)_{k+1}^{n-1} + \left(\psi_{m,l}^{(x,z)} \right)_k^{n-1} \right) \end{aligned} \right.$$

ainsi que des formules analogues pour $F_l^{(y)}$ et $G_l^{(x)}$. Ainsi, les inconnues de face sont déterminées en inversant deux systèmes linéaires de taille $2L$. Reste à montrer leur inversibilité. C'est l'objet de la proposition suivante

Proposition 2.1 *Sous les conditions*

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_L < 1, \\ \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} < 1, \quad \beta_l > 0, \end{aligned} \right.$$

les systèmes (2.36) et (2.37) sont inversibles

Preuve Commençons par le système (2.36). L'inversibilité de ce système est équivalent à l'existence d'un inverse à la matrice :

$$(2.40) \quad M_1 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\Delta y} Id & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t}{\Delta x} Id \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^6 & -B^7 \\ -B^7 & B^6 \end{bmatrix}$$

où B^6 et B^7 sont les matrices de taille L données par (2.38). Cette matrice possède la propriété remarquable d'être à diagonale positive et dominante. C'est évident pour la première matrice de la somme. Concernant la seconde, remarquons que sa diagonale est à éléments positifs puisque :

$$B_l^6 = 1 + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \sum_{m=1}^L a_{l,m}^\sigma \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\alpha_l}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m}$$

$$\text{et } 0 < a_{l,m}^\sigma < 1 \Rightarrow B_l^6 > 1 + \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\alpha_m(1 - \alpha_l)}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} > 0$$

Quant à la somme de ses éléments extra-diagonaux, montrer qu'elle est inférieure à la valeur de la diagonale équivaut à s'assurer de :

$$B_l^6 = \gamma - \sum_{m=1}^L C_{l,m} a_{l,m}^\sigma > \sum_{m=1}^L |B_{l,m}^7| = \sum_{m=1}^L D_{l,m} a_{l,m}^\sigma$$

Soit, en utilisant les expressions de γ , $C_{l,m}$ et de $D_{l,m}$

$$\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \left(a_{l,m}^\sigma \frac{\alpha_l + \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} - 1 \right) < 1$$

Majorons $a_{l,m}^\sigma$ par 1, il suffit de montrer

$$\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\alpha_m \alpha_l}{\alpha_l + \alpha_m - \alpha_l \alpha_m} < 1$$

Soit en minorant α_m par 0

$$\sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{1 - \alpha_m} < 1$$

Ce qui est vrai, par hypothèse. Une matrice à diagonale dominante étant inversible, on obtient ainsi l'inversibilité pour le premier système.

Pour le second système, on choisit comme inconnues les $2L$ quantités :

$$\Delta x \left(\psi_{l,y}^{(x)} \right)_{j=1, k+\frac{1}{2}}^{n+1} ; \Delta y \left(\psi_{l,x}^{(y)} \right)_{k+\frac{1}{2}, i=1}^{n+1}$$

L'inversibilité du système (2.37) est alors équivalente à l'existence d'un inverse à la matrice :

$$(2.41) \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{4\theta\Delta t}{\Delta y} Id & 0 \\ 0 & \frac{4\theta\Delta t}{\Delta x} Id \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^6 & B^7 \\ B^7 & B^6 \end{bmatrix}$$

qui existe bien puisqu'il s'agit là encore d'une matrice à diagonale dominante. Ceci achève la démonstration.

2.3.3 Traitement des composantes tangentielles du champ électrique le long des arêtes

Le calcul des fonctions de face aux nœuds situés le long des arêtes à l'aide des équations discrètes écrites précédemment amène à une situation paradoxale qui concerne le calcul des composantes tangentielles du champ électrique le long de l'arête: on dispose de deux

2.3 Schéma pour les équations d'arête

équations pour les évaluer. En effet, par exemple, on peut tout d'abord considérer que $(E_z)_{i=\frac{1}{2},j=\frac{1}{2},k}$ se calcule par la CLA relative à la face $x = 0$, auquel cas :

$$(2.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n - (E_z)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_z)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n \right)}{2\Delta x} + \\ + \gamma \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} + (E_z)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n - (E_z)_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n \right)}{2\Delta t} - \\ - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left((\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2},k}^n \right)}{\Delta t} = 0, \end{array} \right.$$

soit considérer la CLA relative au bord $y = 0$ et alors :

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n - (E_z)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},k}^n \right)}{2\Delta y} + \\ + \gamma \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},k}^n - (E_z)_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},k}^n \right)}{2\Delta t} - \\ - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left((\psi_{m,z}^{(y)})_{k,\frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(y)})_{k,\frac{1}{2}}^n \right)}{\Delta t} = 0. \end{array} \right.$$

Je conjecture que modulo les équations discrètes satisfaites par les fonctions auxiliaires, ces deux équations ne sont en fait pas indépendantes et que l'une entraîne l'autre. Ceci demanderait à être vérifié par des calculs analytiques. On peut également adopter un profil plus bas consistant à ne pas favoriser une face plutôt que l'autre et de retenir le schéma obtenu en sommant les deux équations relatives à chacune des faces. On obtient :

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n - (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} - (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n \right)}{2\Delta x} + \\ & + \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n - (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^n \right)}{2\Delta y} + \\ & + \gamma \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} + (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n - (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n \right)}{2\Delta t} + \\ & + \gamma \frac{\left((E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} + (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^{n+1} - (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n - (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^n \right)}{2\Delta t} - \\ & - \sum_{m=1}^L \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{\left((\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^n + (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^n \right)}{\Delta t} = 0. \end{aligned} \right.$$

$(E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1}$ peut alors se calculer via:

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{aligned} & (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} = A^1 \cdot (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^n + A^2 \cdot (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n + \\ & + A^3 \cdot (E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^{n+1} + A^4 \cdot (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} + A^5 \cdot (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n + \\ & + \sum_{m=1}^L A_m^6 \left((\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^n + (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^n \right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{aligned} A^1 &= \frac{\frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{2\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}}, & A^2 &= \frac{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{\gamma}{2\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}} \\ A^3 &= \frac{\frac{1}{2\Delta y} - \frac{\gamma}{2\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}}, & A^4 &= \frac{\frac{1}{2\Delta x} - \frac{\gamma}{2\Delta t}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}} \\ A^5 &= \frac{\frac{\gamma}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{2\Delta y}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}}, & A_m^6 &= \frac{\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\alpha_m}{\beta_m}}{\frac{1}{2\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y} + \frac{\gamma}{\Delta t}} \end{aligned} \right.$$

2.4 Schéma pour les équations de coin

Dans le cas d'un maillage isotrope ($\Delta x = \Delta y = h$), ce schéma se simplifie en :

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left((E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^n + (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n \right) + \\ + A^3 \cdot \left((E_z)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, k}^{n+1} + (E_z)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^{n+1} - 2(E_z)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k}^n \right) + \\ + \sum_{m=1}^L A_m^6 \left((\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(y)})_{k, \frac{1}{2}}^n + (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^{n+1} - (\psi_{m,z}^{(x)})_{\frac{1}{2}, k}^n \right) \end{array} \right.$$

avec

$$(2.48) \quad A^3 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t - \gamma h}{\Delta t + \gamma h}, \quad A_m^6 = \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{h}{\Delta t + \gamma h}.$$

2.4 Schéma pour les équations de coin

On décrit un schéma de discrétisation par différences finies pour les équations de coin. Puis, on montre que ce schéma permet le calcul des inconnues liées au coin. Le schéma, écrit pour σ positif ou nul, pourrait bien sûr être simplifié dans le cas $\sigma = 0$. Il est toutefois opérant même dans ce dernier cas.

2.4.1 Préambule

L'ensemble des conditions de coin est construit à partir des deux systèmes :

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z^2}(0, t) = -\gamma \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(0, t) + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{d^2 \psi_{l,m,p}^{(x,z)}}{dt^2}(t) - \\ - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{d^2 \eta_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2}(t) + \frac{d^2 \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2}(t) \right) + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{d^2 \eta_{l,p,m}^{(x,y)}}{dt^2}(t) \end{array} \right.$$

et

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial z}(0, t) = -\gamma \frac{\partial \eta_{l,m}^{(x,z)}}{\partial t}(0, t) + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{d \eta_{l,m,p}^{(x,z)}}{dt}(t) + \\ + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{d \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt}(t) + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{d \psi_{l,p,m}^{(x,y)}}{dt}(t) \end{array} \right.$$

Les fonctions de coin, triplement indicées, étant données par :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,p} \sigma \psi_{l,m,p}^{(a,b)}(t) = \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(b=0, t) \quad (2.51)_1 \\ \frac{d \eta_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t) + \gamma_{l,m,p} \sigma \eta_{l,m,p}^{(a,b)}(t) = \frac{\partial \eta_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b=0, t) \quad (2.51)_2 \end{array} \right.$$

Le système complet est obtenu en effectuant sur (2.50) et (2.49),

1. La permutation $x \rightarrow y, y \rightarrow x$, l'indice z restant fixé.
2. Deux fois et successivement la rotation d'indice $x \rightarrow y, y \rightarrow z$ et $z \rightarrow x$.

On obtient ainsi 12 systèmes de L^2 équations. Après discrétisation, ce système permet d'évaluer les 12 L^2 inconnues manquantes dans le processus itératif en temps, à savoir,

$$\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{b=1}^{n+1}, \quad \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{b=\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad a, b = x, y, \text{ ou } z \quad \text{et } a \neq b, \quad l, m = 1, \dots, L$$

2.4.2 Description du schéma

On commence par la discrétisation des équations différentielles ordinaires au coin. On centre ces équations sur l'instant $t_{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$, en écrivant

$$(2.52) \quad \begin{cases} \psi_{l,m,p}^{(a,b)}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} + \left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{2} \\ \frac{d\psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt}(t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{\Delta t} \end{cases}$$

et pareillement pour $\eta_{l,m,p}^{(a,b)}$. De même, on utilise les approximations :

$$(2.53) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b}(b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_1^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_1^n - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-1}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-1}^n}{4\Delta b} \\ \frac{\partial \eta_{l,m}^{(a,b)}}{\partial t}(b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) & \approx \frac{\left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\frac{1}{2}}^n - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta t} \end{cases}$$

Le schéma pour les fonctions de coin s'écrit alors,

$$(2.54) \quad \begin{cases} \frac{\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - \left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{\Delta t} + \sigma \gamma_{l,m,p} \frac{\left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} + \left(\psi_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{2} = \\ = \frac{\left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_1^{n+1} + \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_1^n - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-1}^{n+1} - \left(\psi_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-1}^n}{4\Delta b} \end{cases}$$

pour (2.51)₁, et

$$(2.55) \quad \begin{cases} \frac{\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} - \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{\Delta t} + \sigma \gamma_{l,m,p} \frac{\left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^{n+1} + \left(\eta_{l,m,p}^{(a,b)}\right)^n}{2} = \\ = \frac{\left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{\frac{1}{2}}^n - \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}\right)_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta t} \end{cases}$$

2.4 Schéma pour les équations de coin

pour (2.51)₂.

Le système (2.50) se discrétise en utilisant des approximations similaires. On obtient :

$$(2.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^{n+1} + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta z} = \\ -\gamma \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta t} + \\ + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{(\eta_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1} - (\eta_{l,m,p}^{(x,z)})^n}{\Delta t} + \\ + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \frac{(\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^{n+1} - (\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^n}{\Delta t} + \\ + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{(\psi_{l,p,m}^{(x,y)})^{n+1} - (\psi_{l,p,m}^{(x,y)})^n}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Reste la discrétisation du système (2.49). Elle s'appuie sur les approximations,

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b \partial t} (b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{(\psi_{l,m}^{(a,b)})_1^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_1^{n-1} - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{-1}^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{-1}^{n-1}}{4\Delta b \Delta t} \\ \frac{\partial^2 \psi_{l,m}^{(a,b)}}{\partial b^2} (b=0, t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{\theta (\psi_{l,m,0}^{(a,b)})^{n+1} + (1-2\theta) (\psi_{l,m,0}^{(a,b)})^n + \theta (\psi_{l,m,0}^{(a,b)})^{n-1}}{\Delta b^2} \\ \frac{d^2 \psi_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt^2} (t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} - 2(\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n + (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n-1}}{\Delta t^2} \\ \frac{d^2 \eta_{l,m,p}^{(a,b)}}{dt^2} (t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{(\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} - 2(\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^n + (\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^{n-1}}{\Delta t^2} \end{array} \right.$$

où on a noté,

$$(2.58) \quad (\psi_{l,m,0}^{(a,b)})^n = (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{+1}^n - 2(\psi_{l,m}^{(a,b)})_0^n + (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{-1}^n$$

et où on retrouve le paramètre de pondération temporel θ que nous avons déjà utilisé pour la discrétisation des fonctions d'arête.

Le schéma pour (2.49) s'écrit alors :

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\theta (\psi_{l,m,0}^{(x,z)})^{n+1} + (1 - 2\theta) (\psi_{l,m,0}^{(x,z)})^n + \theta (\psi_{l,m,0}^{(x,z)})^{n-1}}{\Delta z^2} = \\ & - \gamma \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n-1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n-1}}{4\Delta z \Delta t} + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{(\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1} - 2(\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^n + (\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^{n-1}}{\Delta t^2} - \\ & - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{(\eta_{p,l,m}^{(z,y)})^{n+1} - 2(\eta_{p,l,m}^{(z,y)})^n + (\eta_{p,l,m}^{(z,y)})^{n-1}}{\Delta t^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^{n+1} - 2(\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^n + (\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \\ & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{(\eta_{l,p,m}^{(x,y)})^{n+1} - 2(\eta_{l,p,m}^{(x,y)})^n + (\eta_{l,p,m}^{(x,y)})^{n-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \right.$$

En permutant et faisant circuler les indices comme indiqué dans le préambule, on obtient un schéma constitué de $12L^3$ équations du type (2.54) et (2.55) ainsi que de 6 systèmes de L^2 équations analogues à (2.56) et de 6 autres analogues à (2.59).

2.4.3 Principe de résolution

Le système précédemment décrit s'interprète comme un ensemble d'équations en les inconnues:

$$l, m = 1, \dots, L$$

$$\begin{aligned} & (\psi_{l,m}^{(z,x)})_1^{n+1}, \quad (\psi_{l,m}^{(x,y)})_1^{n+1}, \quad (\psi_{l,m}^{(y,z)})_1^{n+1}, \\ & (\psi_{l,m}^{(y,x)})_1^{n+1}, \quad (\psi_{l,m}^{(z,y)})_1^{n+1}, \quad (\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n+1}, \\ & (\eta_{l,m}^{(z,x)})_{\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\eta_{l,m}^{(x,y)})_{\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\eta_{l,m}^{(y,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ & (\eta_{l,m}^{(y,x)})_{\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\eta_{l,m}^{(z,y)})_{\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} \end{aligned}$$

2.4 Schéma pour les équations de coin

(inconnues d'arête) ainsi que

$$l, m, p = 1, \dots, L$$

$$\begin{aligned} & (\psi_{l,m,p}^{(z,x)})^{n+1}, \quad (\psi_{l,m,p}^{(x,y)})^{n+1}, \quad (\psi_{l,m,p}^{(y,z)})^{n+1}, \\ & (\psi_{l,m,p}^{(y,x)})^{n+1}, \quad (\psi_{l,m,p}^{(z,y)})^{n+1}, \quad (\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1}, \\ & (\eta_{l,m,p}^{(z,x)})^{n+1}, \quad (\eta_{l,m,p}^{(x,y)})^{n+1}, \quad (\eta_{l,m,p}^{(y,z)})^{n+1}, \\ & (\eta_{l,m,p}^{(y,x)})^{n+1}, \quad (\eta_{l,m,p}^{(z,y)})^{n+1}, \quad (\eta_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1} \end{aligned}$$

qui sont les inconnues de coin.

On commence par éliminer les inconnues de coin. On a:

$$(2.60) \quad \begin{aligned} (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} &= a_{l,m,p}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta b} (\psi_{l,m}^{(a,b)})_1^{n+1} + (P_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} \\ (\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} &= \frac{1}{2} a_{l,m,p}^\sigma (\eta_{l,m}^{(a,b)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} \end{aligned}$$

avec

$$(2.61) \quad \begin{aligned} (P_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} &= A_{l,m,p}^1 (\psi_{l,m,p}^{(a,b)})^n + \\ &+ a_{l,m,p}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta b} \left((\psi_{l,m}^{(a,b)})_1^n - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{-1}^n - (\psi_{l,m}^{(a,b)})_{-1}^{n+1} \right) \\ (E_{l,m,p}^{(a,b)})^{n+1} &= A_{l,m,p}^1 (\eta_{l,m,p}^{(a,b)})^n + \\ &+ a_{l,m,p}^\sigma \frac{1}{2} \left((\eta_{l,m}^{(a,b)})_{\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(a,b)})_{-\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(a,b)})_{-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

et

$$(2.62) \quad A_{l,m,p}^1 = \frac{1 - \gamma_{l,m,p} \sigma \frac{\Delta t}{2}}{1 + \gamma_{l,m,p} \sigma \frac{\Delta t}{2}}, \quad a_{l,m,p}^\sigma = \frac{1}{1 + \gamma_{l,m,p} \sigma \frac{\Delta t}{2}}$$

Puis, on injecte ces expressions dans les équations de type arête, il vient:

$$(2.63) \quad \left\{ \begin{aligned} & \theta \cdot \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n+1} - 2(\psi_{l,m}^{(x,z)})_0^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n+1}}{\Delta z^2} + \\ & + \theta \cdot \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n-1} - 2(\psi_{l,m}^{(x,z)})_0^{n-1} + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n-1}}{\Delta z^2} + \\ & + (1 - 2\theta) \cdot \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^n - 2(\psi_{l,m}^{(x,z)})_0^n + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^n}{\Delta z^2} \end{aligned} \right. = \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow = \\
 & -\gamma \frac{(\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n+1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n-1} - (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n+1} + (\psi_{l,m}^{(x,z)})_{-1}^{n-1}}{4\Delta z \Delta t} + \\
 & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \frac{a_{l,m,p}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta z} (\psi_{l,m}^{(x,z)})_1^{n+1} + (P_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1} - 2(\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^n + (\psi_{l,m,p}^{(x,z)})^{n-1}}{\Delta t^2} - \\
 & - \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \left(\frac{\frac{1}{2} a_{p,l,m}^\sigma (\eta_{p,l}^{(z,y)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_{p,l,m}^{(z,y)})^{n+1} - 2(\eta_{p,l,m}^{(z,y)})^n + (\eta_{p,l,m}^{(z,y)})^{n-1}}{\Delta t^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{a_{p,l,m}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta z} (\psi_{p,l}^{(z,y)})_1^{n+1} + (P_{p,l}^{(z,y)})^{n+1} - 2(\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^n + (\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \\
 & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \frac{\frac{1}{2} a_{l,p,m}^\sigma (\eta_{l,p}^{(x,y)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_{l,p,m}^{(x,y)})^{n+1} - 2(\eta_{l,p,m}^{(x,y)})^n + (\eta_{l,p,m}^{(x,y)})^{n-1}}{\Delta t^2}
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$(2.64) \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^{n+1} + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta z} = \\
 & -\gamma \frac{(\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^n - (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta t} + \\
 & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p}}{\alpha_p^2} \cdot \frac{\frac{1}{2} a_{l,m,p}^\sigma (\eta_{l,m}^{(x,z)})_{\frac{1}{2}}^{n+1} + (E_{l,m,p}^{(x,z)})^{n+1} - (\eta_{l,m,p}^{(x,z)})^n}{\Delta t} + \\
 & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \cdot \frac{a_{p,l,m}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta y} (\psi_{p,l}^{(z,y)})_1^{n+1} + (P_{p,l,m}^{(z,y)})^{n+1} - (\psi_{p,l,m}^{(z,y)})^n}{\Delta t} + \\
 & + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l}}{\alpha_p^2 \gamma_{l,m}} \cdot \frac{a_{l,p,m}^\sigma \frac{\Delta t}{4\Delta y} (\psi_{l,p}^{(x,y)})_1^{n+1} + (P_{l,p,m}^{(x,y)})^{n+1} - (\psi_{l,p,m}^{(x,y)})^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \right.$$

En procédant de même pour les autres systèmes, on obtient un système linéaire à $12 L^2$ inconnues. Afin d'obtenir un système plus facile à étudier, on a choisi de prendre comme inconnues

$${}^t U = \left(\eta_{l,m}^{(a,b)}, \frac{\Delta t}{2\Delta a} \psi_{l,m}^{(a,b)},, \quad l, m = 1, \dots, L, a, b = x, y, z, a \neq b \right).$$

2.4 Schéma pour les équations de coin

En multipliant par $2\Delta t$ les équations de type (2.64) et par $2\Delta t^2$ celles de type (2.63), le système linéaire s'écrit:

$$M U = F$$

où F se calcule explicitement et où M est donnée par

$$(2.65) \quad M =$$

	$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	$\eta_{l,m}^{(x,z)}$
$\psi_{l,m}^{(z,x)}$	A_x^θ	B	0	0	0	0	0	B	0	0	$-C$	0
$\psi_{l,m}^{(x,y)}$	0	A_y^θ	B	0	0	0	0	0	B	0	0	$-C$
$\psi_{l,m}^{(y,z)}$	B	0	A_z^θ	0	0	0	B	0	0	$-C$	0	0
$\psi_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	0	A_x^θ	0	B	0	0	$-C$	0	0	B
$\psi_{l,m}^{(z,y)}$	0	0	0	B	A_y^θ	0	$-C$	0	0	B	0	0
$\psi_{l,m}^{(x,z)}$	0	0	0	0	B	A_z^θ	0	$-C$	0	0	B	0
$\eta_{l,m}^{(z,x)}$	0	$-B$	0	0	$-C$	0	A_x	0	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(x,y)}$	0	0	$-B$	0	0	$-C$	0	A_y	0	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,z)}$	$-B$	0	0	$-C$	0	0	0	0	A_z	0	0	0
$\eta_{l,m}^{(y,x)}$	0	0	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	A_x	0	0
$\eta_{l,m}^{(z,y)}$	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	0	0	0	A_y	0
$\eta_{l,m}^{(x,z)}$	0	$-C$	0	0	$-B$	0	0	0	0	0	0	A_z

les matrices B, C, A_x, A_y, \dots sont carrées de taille $L^2 \times L^2$ et données par

$$(2.66) \quad A_a = \frac{\Delta t}{\Delta a} Id + A, \quad A_a^\theta = \frac{4\theta\Delta t}{\Delta a} Id + A, \quad a = x, y \text{ ou } z$$

$$(2.67) \quad \begin{aligned} A_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^p \delta_m^q \left(1 + \sum_{p=1}^L \frac{\beta_p}{\alpha_p} \left(1 - \frac{\gamma_{l,m,p} a_{l,m,p}^\sigma}{\alpha_p} \right) \right) \\ B_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^q \frac{\beta_p \gamma_{l,m,p} \gamma_{p,l} a_{p,l,m}^\sigma}{\alpha_p \alpha_l \gamma_{l,m}} \\ C_{l,m}^{p,q} &= \delta_l^p \frac{\beta_q \gamma_{l,m,q} \gamma_{q,l} a_{l,q,m}^\sigma}{\alpha_q^2 \gamma_{l,m}} \end{aligned}$$

A est diagonale et Les matrices B, C sont creuses. Par exemple, pour $L = 2$, A, B et C se présentent sous la forme : (les points noirs sont les éléments non nuls)

$$A = \begin{bmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \bullet & & \bullet \\ & \bullet & \\ \bullet & & \bullet \\ & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

Contrairement à la matrice relative au schéma pour les arêtes, il ne semble pas que la matrice M soit à diagonale positive dominante sous la seule condition (1.4). L'inversibilité du système du coin est donc plus difficile à établir et reste un point encore ouvert. Signalons toutefois qu'une piste possible est de calculer les vecteurs propres de M en utilisant le fait que ses éléments proviennent d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

2.5 Extensions à un domaine borné. Symétries.

Tout ce qui a été fait jusqu'à présent traite le cas du secteur $\Omega = \{x < 0, y < 0, z < 0\}$. On peut, bien sûr, généraliser le schéma au cas d'un cube. Si on remplace Ω par un parallépipède :

$$C = [-L_x, 0] \times [-L_y, 0] \times [-L_z, 0],$$

on a alors trois nouvelles faces frontières. En l'absence de symétrie, on imposera les CLA sur ces nouvelles faces. Dans ce cas, les fonctions auxiliaires nécessaires sont :

- 12 L fonctions de face (6 faces \times 2 composantes par face)
- 48 L^2 fonctions d'arête (12 arêtes \times 4 composantes par arête)
- 96 L^3 fonctions de coin (8 coins \times 12 L^2 composantes par coin)

Le schéma pour les nouvelles faces est obtenu en appliquant une simple symétrie au schéma, déjà décrit et relatif aux faces extérieures.

Le schéma pour les nouvelles arêtes doit quant à lui tenir compte de l'utilisation de la

2.5 Extensions à un domaine borné. Symétries.

divergence lors de l'obtention des conditions qui lui sont relatives. Ainsi, le passage de l'arête $x = 0, y = 0$ ($\epsilon_x = +1, \epsilon_y = +1$) à l'arête $x = -L_x, y = -L_y$ ($\epsilon_x = -1, \epsilon_y = -1$) se fait non seulement en substituant dans (2.17)-(2.24) $-\partial_x$ à ∂_x et $-\partial_y$ à ∂_y (ce que nous avons appelé simple symétrie plus haut) mais également en changeant dans (2.23) et (2.24), les termes

$$\sum_{m=1}^L D_{l,m} \left(\frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t^2}(z,t) + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t \partial z}(z,t) \right) \text{ et } \sum_{m=1}^L D_{l,m} \left(\frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2}(z,t) + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z}(z,t) \right)$$

en

$$\sum_{m=1}^L \epsilon_x D_{l,m} \left(\epsilon_y \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(y,z)}}{\partial t \partial z} \right) \text{ et } \sum_{m=1}^L \epsilon_y D_{l,m} \left(\epsilon_x \frac{\partial^2 \eta_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_{m,l}^{(x,z)}}{\partial t \partial z} \right)$$

(ces termes provenant de l'égalité $\partial_x E_x = -\partial_y E_y - \partial_z E_z$, leur signe n'est donc pas concerné par le changement de face traitée). Pour le coin, la procédure est analogue, si l'on note génériquement chaque coin $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ on passe du coin $(1, 1, 1)$ à $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$

- 1) en changeant ∂_x en $\epsilon_x \partial_x$, ∂_y en $\epsilon_y \partial_y$ et ∂_z en $\epsilon_z \partial_z$ dans les équations (2.49)-(2.51).
- 2) en substituant dans (2.49) au terme

$$\left(\frac{d^2 \eta_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2} + \frac{d^2 \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2} \right) \text{ le terme } \epsilon_z \left(\epsilon_x \frac{d^2 \eta_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2} + \epsilon_y \frac{d^2 \psi_{p,l,m}^{(z,y)}}{dt^2} \right)$$

la matrice \tilde{M} du système linéaire au coin $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ devient alors

$$\tilde{M} = \Lambda M \Lambda$$

où M est la matrice (2.65) et où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_y & 0 & 0 \\ 0 & E_z & 0 \\ 0 & 0 & E_x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_z & 0 & 0 \\ 0 & E_x & 0 \\ 0 & 0 & E_y \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } E_x = \epsilon_x Id_{L^2}, \quad E_y = \epsilon_y Id_{L^2}, \quad E_z = \epsilon_z Id_{L^2}$$

Dans le cas où le schéma admet des symétries, les composantes tangentielles du champ électrique sur les faces inférieures peuvent être calculées à l'aide de celles-ci. Il convient également d'utiliser ces symétries pour évaluer les quantités manquantes relatives aux fonctions auxiliaires des faces extérieures. Par exemple, on imposera sur la face $F_-^{(z)} = \{z = -L_z\}$,

$$\left| \begin{array}{ll} (\psi_{l,x}^{(z)})_{i,j_0-\frac{1}{2}} = \epsilon_{y,x} (\psi_{l,x}^{(z)})_{i,j_0+\frac{1}{2}}, & (\psi_{l,y}^{(z)})_{i+\frac{1}{2},j_0-1} = \epsilon_{y,y} (\psi_{l,y}^{(z)})_{i+\frac{1}{2},j_0+1} \\ (\psi_{l,x}^{(z)})_{i_0-1,j+\frac{1}{2}} = \epsilon_{x,x} (\psi_{l,x}^{(z)})_{i_0+1,j+\frac{1}{2}}, & (\psi_{l,y}^{(z)})_{i_0-\frac{1}{2},j} = \epsilon_{x,y} (\psi_{l,y}^{(z)})_{i_0+\frac{1}{2},j} \end{array} \right.$$

avec

$$-L_x = i_0 \Delta x \quad \text{et} \quad -L_y = j_0 \Delta y$$

$$\epsilon_{a,b} = \pm 1, \text{ suivant la nature de la symétrie de } E_b \text{ par rapport à } a = -L_a$$

et pour les inconnues d'arête,

$$\left| \begin{array}{l} \left(\psi_{l,m}^{(z,x)} \right)_{i_0-1} = \epsilon_{x,x} \left(\psi_{l,m}^{(z,x)} \right)_{i_0+1}, \quad \left(\eta_{l,m}^{(z,x)} \right)_{i_0-\frac{1}{2}} = \epsilon_{x,y} \left(\eta_{l,m}^{(z,x)} \right)_{i_0+\frac{1}{2}} \\ \left(\psi_{l,m}^{(z,y)} \right)_{j_0-1} = \epsilon_{y,y} \left(\psi_{l,m}^{(z,y)} \right)_{j_0+1}, \quad \left(\eta_{l,m}^{(z,y)} \right)_{j_0-\frac{1}{2}} = \epsilon_{y,x} \left(\eta_{l,m}^{(z,y)} \right)_{j_0+\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

On remarquera que le décalage des points où sont évalués les champs implique de rechercher la valeur symétrisée soit au nœud directement voisin, soit au nœud situé à deux mailles sur le maillage.

Chapitre 3

Expériences numériques

3.1 Etude de faisabilité

Afin de tester le schéma numérique décrit dans le chapitre précédent, on a construit un programme de calcul. Ce programme traite le cas d'un domaine parallélépipédique à mailles cubiques ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$) pour un milieu conducteur ($\sigma \neq 0$) ou non conducteur ($\sigma = 0$). Sur les faces de ce cube, on peut imposer soit des CLA, soit des conditions de symétrie.

3.1.1 Mise en œuvre et validation

La mise en œuvre du schéma numérique est délicate de par la multiplicité des indices qui interviennent dans sa formulation. Il convient donc de procéder avec soin et par étapes. La "stratégie" qui a été retenue est la suivante. Dans une première étape, on construit un programme de validation : on programme explicitement l'ensemble des équations du schéma et on s'assure que si l'on choisit une des solutions particulières composée des huit ondes planes à divergence nulle, on obtient bien une convergence vers 0 lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0 et ce, pour chacune des équations du schéma. Accessoirement, cela permet de vérifier l'exactitude des calculs du premier chapitre concernant les équations d'arête et de coin. Dans une seconde étape, on construit un algorithme de résolution du schéma. Sa validation est obtenue de la manière suivante :

1. On récupère aux trois derniers pas de temps (trois, parce que le schéma fait intervenir trois instants successifs) les champs et les fonctions auxiliaires en certains points du maillage.
2. On réutilise les programmes de vérification des équations de l'étape précédente, et on s'assure que la solution calculée vérifie les équations du schéma pour les points du maillage retenus.

Enfin les conditions de symétrie ont été testées en s'assurant que le problème "désymétrisé", calculé sur une boîte de calcul huit fois plus grande, donnait exactement le même résultat.

3.1.2 Premiers résultats

Des premiers tests, réalisés sur des petites boîtes de calcul (dix nœuds dans chaque direction) avec des CLA d'ordre $L = 5$ et un nombre de Courant égal à un sur racine de trois (CFL), on peut dégager les constatations suivantes :

- Le schéma à $\theta = 0$ est instable, celui à $\theta = 0.25$ semble stable. La stabilité est explorée en observant l'évolution au cours des itérations en temps de l'énergie discrète contenue dans le cube de calcul, soit:

$$E^n = h^3 \sum_{s \in \text{Nœuds}} (E_s^n)^2 + \left(H_s^{n+\frac{1}{2}} \right)^2,$$

Pour $\theta = 0$: cette énergie croît exponentiellement avec le nombre d'itérations, il y a instabilité. Par contre, le schéma avec $\theta = 0.25$ semble stable. On vérifie dans ce cas la décroissance de l'énergie et sa stabilisation à un dix-millième environ de la valeur initiale.

Le choix de 0.25 a été retenu pour des raisons purement esthétiques. En effet, dans ce cas, les systèmes linéaires relatifs au traitement des arêtes sont les mêmes pour les fonctions de type $\eta_{l,m}^{(\dots)}$ que pour celles de type $\psi_{l,m}^{(\dots)}$ (cf. 2.40 et 2.41).

- La matrice M^{-1} relative au système linéaire au coin (cf. 2.65) admet 8 L^2 éléments non nuls sur chaque ligne (sur 12 L^2 au total). Il doit y avoir une structure bande pour la matrice M qui implique ce résultat. De plus, l'inversion numérique de cette matrice n'a jamais posé de problème particulier. Elle doit être inversible, ce qui reste à démontrer.
- La conjecture relative aux équations discrètes que vérifierait le champ tangent le long d'une arête (cf. page 38) semble vraie. A la précision machine près, chacune des deux équations d'arête est vérifiée alors que la résolution utilise la demi-somme de ces deux équations.

3.1.3 Coût de la méthode

La méthode proposée pour traiter les Conditions aux Limites Absorbantes est intermédiaire entre une méthode locale mais peu précise comme celle de Silver-Müller et une méthode très précise mais non locale comme celle des équations intégrales. On s'attend donc à un coût intermédiaire tant au point de vue temps de calcul qu'au point de vue occupation mémoire. L'étude qui suit se propose d'évaluer ces coûts en les comparant à ceux correspondants à

3.1 Etude de faisabilité

une boîte de calcul pour laquelle les bords ne sont pas calculés et restent donc à zéro au cours des itérations.

On s'intéresse à un cube de calcul avec N points de discrétisation dans chaque direction. Le nombre d'opérations flottantes (additions ou multiplications) à effectuer par itération en temps est :

- Pour le calcul des nœuds internes au cube : $36 N^3$, (six opérations par composante du champ électromagnétique que multiplie six composantes)
- Pour le calcul des nœuds internes au faces : $8 \text{ faces} \times (36 L + 12)$ opérations par nœud $\times N^2$ nœuds par face
- Pour le calcul des arêtes : $12 \text{ arêtes} \times (98 L^2 + 32 L)$ opérations par nœud $\times N$ nœuds par arête.
- Pour le calcul des coins : $8 \text{ coins} \times (12 L^2 \times 8 L^2 + 288 L^3 + 144 L^2)$ opérations par coin (si l'auteur ne s'est pas trompé en les comptant!).

On a représenté sur la figure 3.1 le coût calcul relatif des CLA en fonction de N , nombre de points de discrétisation dans chaque direction. Ce coût relatif est d'autant plus faible que le nombre de points est grand. Le nombre de points pour lequel ce coût devient marginal est d'autant plus grand que le nombre de fractions rationnelles est grand. D'autre part,

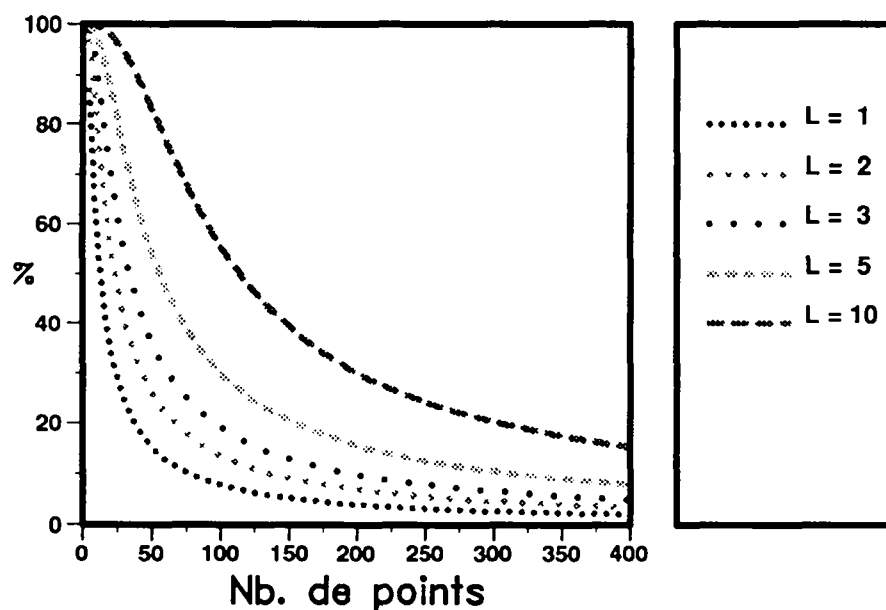


Figure 3.1 : En abscisse : Nombre de points de discrétisation dans chaque direction. En ordonnée : Pourcentage du nombre d'opérations élémentaires requises pour le traitement des 8 faces absorbantes rapporté au nombre total d'opérations.

la figure 3.2 illustre la part croissante du coût de calcul des faces par rapport à celui des

arêtes et des coins. Dès que le nombre de points dans chaque direction dépasse la centaine, le calcul des arêtes et des coins peut être considéré comme marginal.

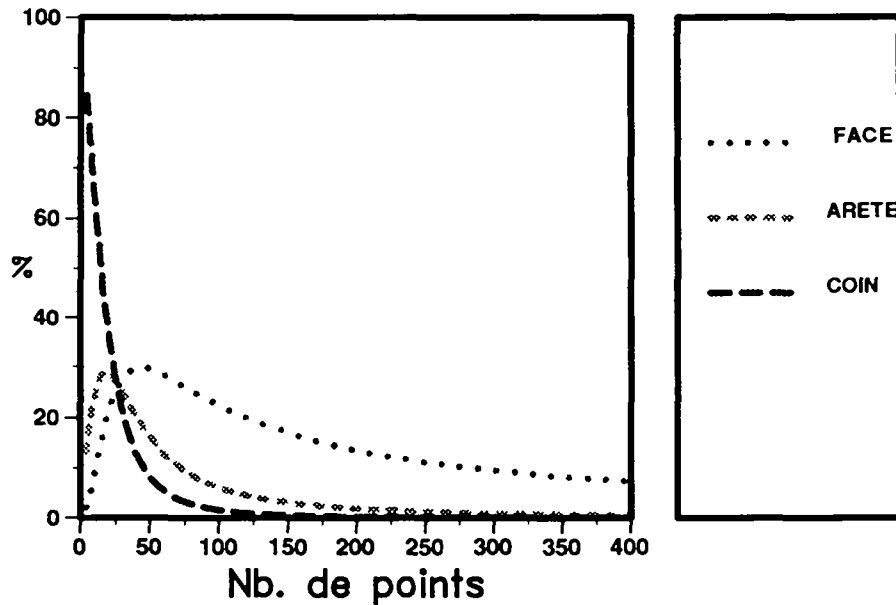


Figure 3.2 : Pour $L=5$, pourcentage du nombre d'opérations élémentaires requises pour le traitement des faces, des arêtes puis des coins rapporté au nombre total d'opérations.

Enfin les CLAs d'ordre élevé nécessitent un nombre important de fonctions auxiliaires qu'il convient de stocker. La figure 3.3 représente la part relative d'occupation mémoire des fonctions auxiliaires en regard de la place mémoire totale nécessaire. On a :

- Pour les nœuds internes au cube : $6 N^3$ places mémoire (N^3 nœuds par composantes du champ électromagnétique)
- Pour les nœuds internes aux faces : $32 (L+1) N^2$ places mémoire (8 faces \times 2 instants successifs \times $2(L+1)$ composantes par face et par instant)
- Pour les nœuds relatifs aux arêtes : $96 (L+1)^2 N$ nœuds places mémoires (12 arêtes \times 2 instants successifs \times 4 fonctions par arête)
- Pour le coin, $96 L^3 + 96 L^4$ places mémoires ($12 L^2$ fonctions auxiliaires par coin \times 8 coins $+ 12 L^2 \times 8 L^2$ pour la matrice inverse).

On observera que la tendance est la même pour le temps de calcul et pour l'occupation mémoire.

En conclusion de cette étude préliminaire, il semble que le schéma proposé soit stable ($\theta = 0.25$) et que son coût quoique non négligeable pour des simulations dans des boîtes de très petite taille devient acceptable pour des boîtes de calcul d'une centaine de nœuds dans

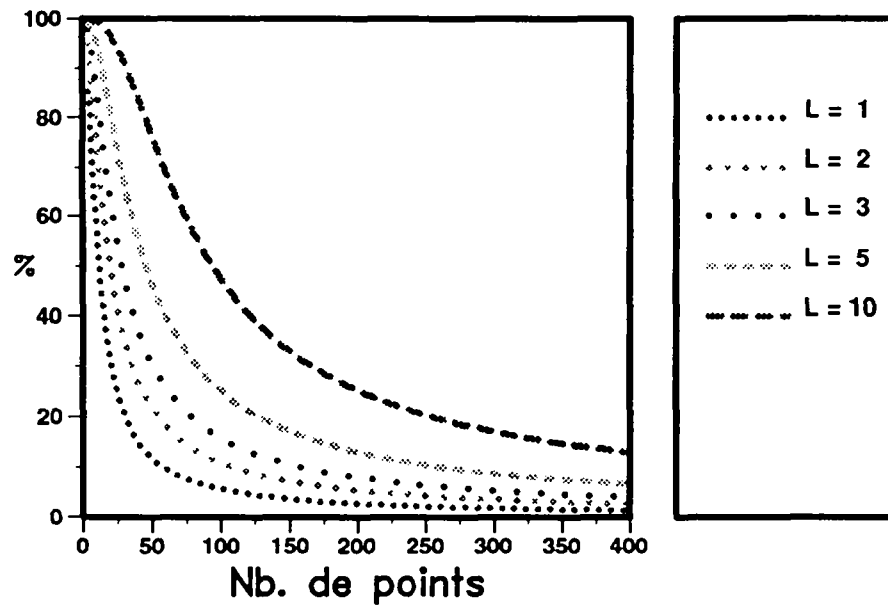


Figure 3.3 : Pourcentage d'occupation mémoire spécifique aux CLA rapporté à l'occupation mémoire totale.

chaque direction et ce pour un nombre de fractions rationnelles inférieur à 10. Le surcoût par rapport à des CLA moins précises devrait être compensé par un pouvoir absorbant plus élevé.

3.1.4 Diffraction d'une onde plane par un parallélépipède

Afin de tester la méthode, on a repris les essais réalisés au centre de Gramat ([10]) lors d'une étude portant sur l'efficacité des CLA de Joly-Mercier (JMCLA, cf [7]) sur des problèmes difficiles (onde incidente de moyenne non nulle et de durée grande en regard de la taille de la boîte de calcul). Rappelons que ces conditions sont d'ordre deux par rapport à l'angle d'incidence et se comparent donc typiquement aux nouvelles conditions avec $L=1$. On espère ainsi améliorer les résultats obtenus en montant en ordre d'approximation.

Cas du petit cube

On considère un cube de 4 mètres de côté, centré sur l'origine et illuminé par une onde plane à incidence verticale suivant z avec $\vec{E}_{inc} = E_{inc}\hat{y}$ et,

$$E_{inc}(z, t) = G(t - z/c), \quad G(t) = A \exp^{-((t-t_{max})/\tau_{max})^2}$$

$$A = 1000 \text{ V./m.} \quad t_{max} = 2.14 \tau_{max} \quad \tau_{max} = 12.5 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$$

On s'intéresse à la valeur du champ électromagnétique au coin du cube situé en aval de l'onde incidente et sur l'intervalle de temps $[0., 0.146\mu\text{s.}]$.

Les calculs sont menés sur une grille régulière et isotrope de pas $h=0.4$ mètre et avec un pas de temps calculé via la CFL ($\Delta t = h/\sqrt{3}c \approx 0.7710^{-9}$ s. soit 190 pas de temps).

Les conditions de symétries, par rapport aux axes $x = 0, y = 0$, permettent de calculer les champs uniquement sur le domaine :

$$\Omega_c = [0, L_x + L_c] \times [0, L_y + L_c] \times [-(L_z + L_c), L_z + L_c]$$

$$\text{où } L_x = L_y = L_z = 10h, L_c = N_m h,$$

et où N_m est le nombre de mailles séparant le bord du cube de la frontière absorbante du domaine de calcul.

Sur la figure (3.4), on compare une solution de référence (calculée avec $N_m = 50$ points) aux solutions obtenues avec les CLA de Padé, $L=3$, et en plaçant la frontière à 3 puis 4 puis 5 mailles de la frontière du cube. Comparé aux résultats obtenus avec la JMCLA, l'amélioration est déjà nette. On observera que les solutions approchées suivent la solution exacte durant un intervalle de temps de 2 à 3 fois plus long avec les nouvelles CLA.

Sur la figure (3.5), on compare la même solution de référence avec des solutions obtenues en plaçant la frontière à N_m =cinq mailles de la face du cube et en retenant successivement les CLA de Padé, $L=3$ puis 5 ainsi qu'avec des CLA, $L=5$ dont les coefficients sont donnés dans la table ci-dessous. Ces coefficients ont été calculés de telle sorte que le coefficient de réflexion soit minimal en angle d'incidence et sur une plage de fréquence donnée (Cf. [9]).

$\alpha_1 = 0.7096084150294$	$\beta_1 = 0.1076348036463$
$\alpha_2 = 0.1917022124165$	$\beta_2 = 0.2167004878495$
$\alpha_3 = 0.0300657520451$	$\beta_3 = 0.1044152492483$
$\alpha_4 = 0.0042047748108$	$\beta_4 = 0.0418837319174$
$\alpha_5 = 0.0003532566839$	$\beta_5 = 0.0231838584434$

Valeurs des coefficients optimisés.

On observera l'amélioration obtenue en montant en ordre ainsi que l'excellent comportement de la solution calculée avec les coefficients optimisés.

Cas du grand pavé

On refait les mêmes essais mais sur un intervalle de temps plus long ($[0., 0.6\mu s.]$) et sur un parallélépipède plus grand dont les arêtes ont pour longueur:

$$L_x = 8m., L_y = 12m., L_z = 16m.$$

3.1 Etude de faisabilité

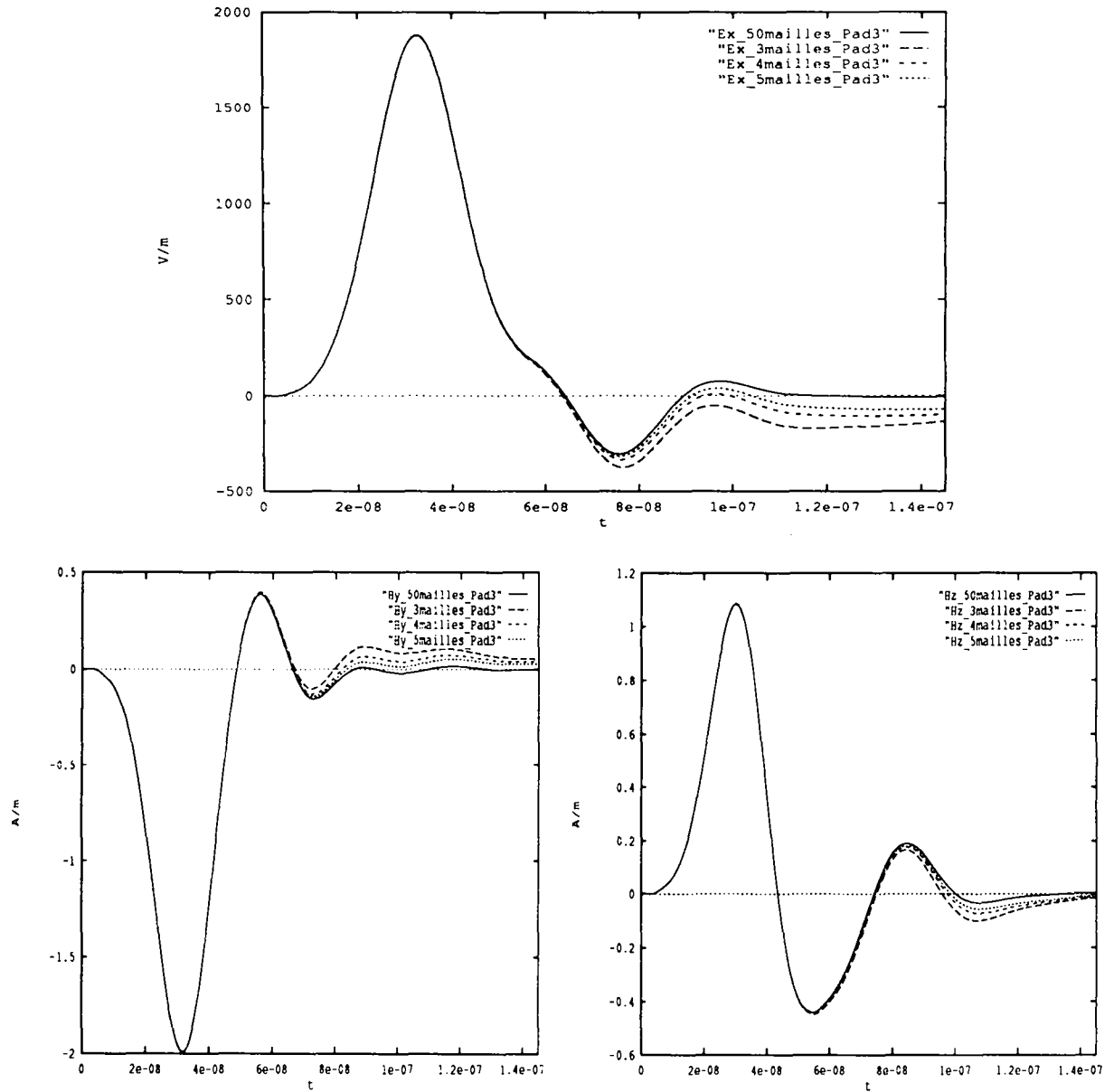


Figure 3.4 : Comparaison des variations en fonction du temps des composantes E_x , H_y et H_z à la pointe du cube isolant avec la CLA de Padé, $L=3$ que l'on impose à une distance de 3,4 puis 5 mailles du cube (traits tiretés) avec une solution de référence calculée avec la même CLA mais imposée à 50 mailles du cube (trait plein).

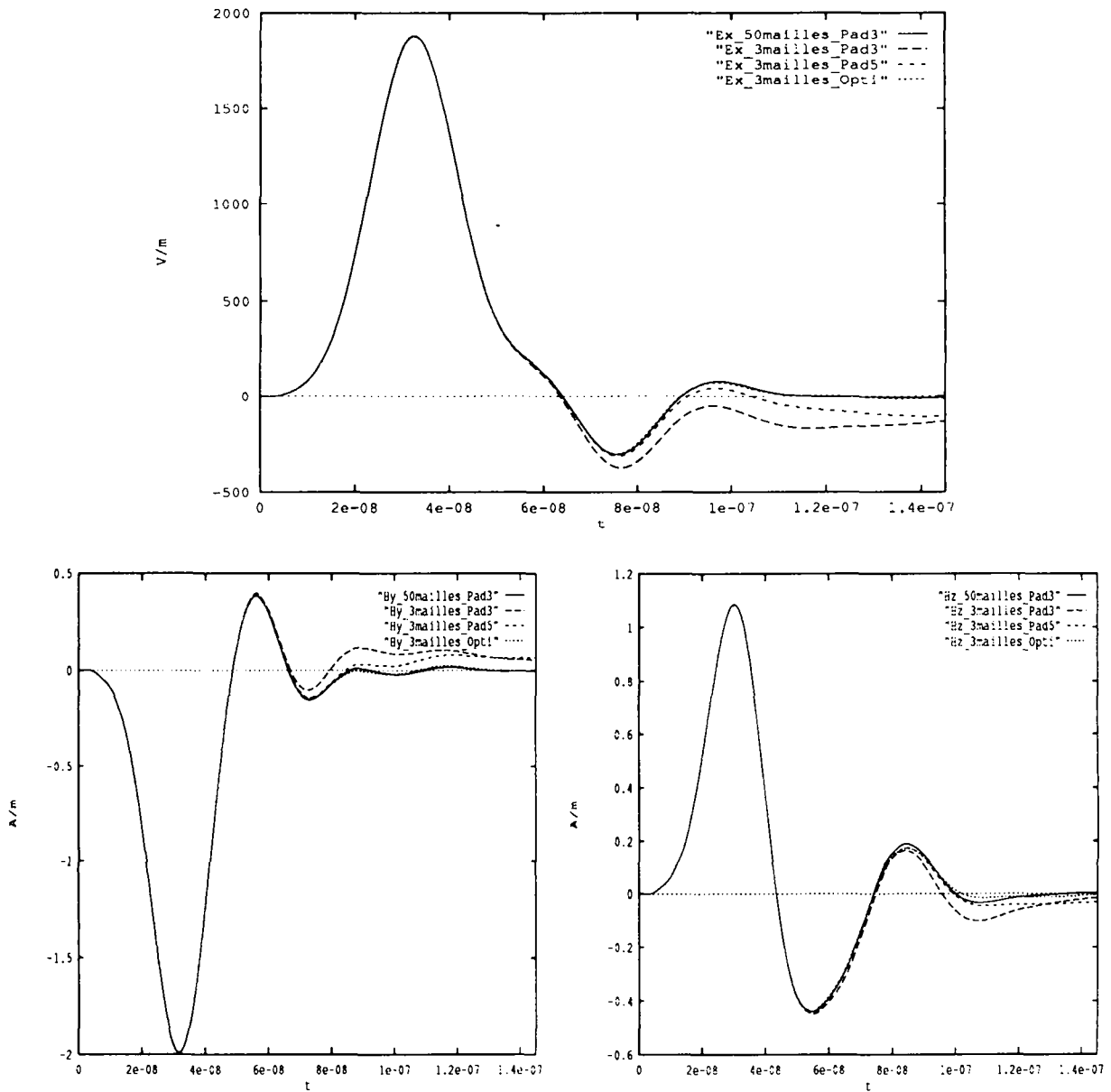


Figure 3.5 : Comparaison des variations en fonction du temps des composantes E_x , H_y et H_z à la pointe du cube isolant pour différentes CLA que l'on impose à une distance de 5 mailles du cube (traits tiretés) avec une solution de référence calculée avec la CLA de Padé ($L=3$) imposée à 50 mailles du cube (trait plein).

3.1 Etude de faisabilité

Les pas de discrétisation et l'onde incidente sont inchangés par rapport à l'essai précédent (780 pas de temps). Après utilisation des conditions de symétries, l'objet est de 10 mailles sur 15 mailles sur 40 mailles.

On retient les CLA de Padé, $L=3$ et on place la frontière successivement à 5,6,8,10 puis 50 mailles (solution de référence). Par rapport aux conditions JMCLA, on observera (cf.figure 3.6) l'absence de "rebonds" qui caractérisaient les solutions obtenues. D'autre part, on notera l'amélioration de la solution au fur et à mesure de l'éloignement de la frontière.

La figure (3.7) compare, quant à elle, les CLA en fixant la frontière à 5 mailles du bord du cube. Cette distance semble insuffisante pour une bonne précision quantitative et raisonnable pour avoir une idée sur l'allure de la courbe.

Enfin, la figure (3.8) montre l'excellent comportement de la CLA avec $L=5$ et les coefficients optimisés lorsque le bord est situé à 10 mailles de l'objet diffractant.

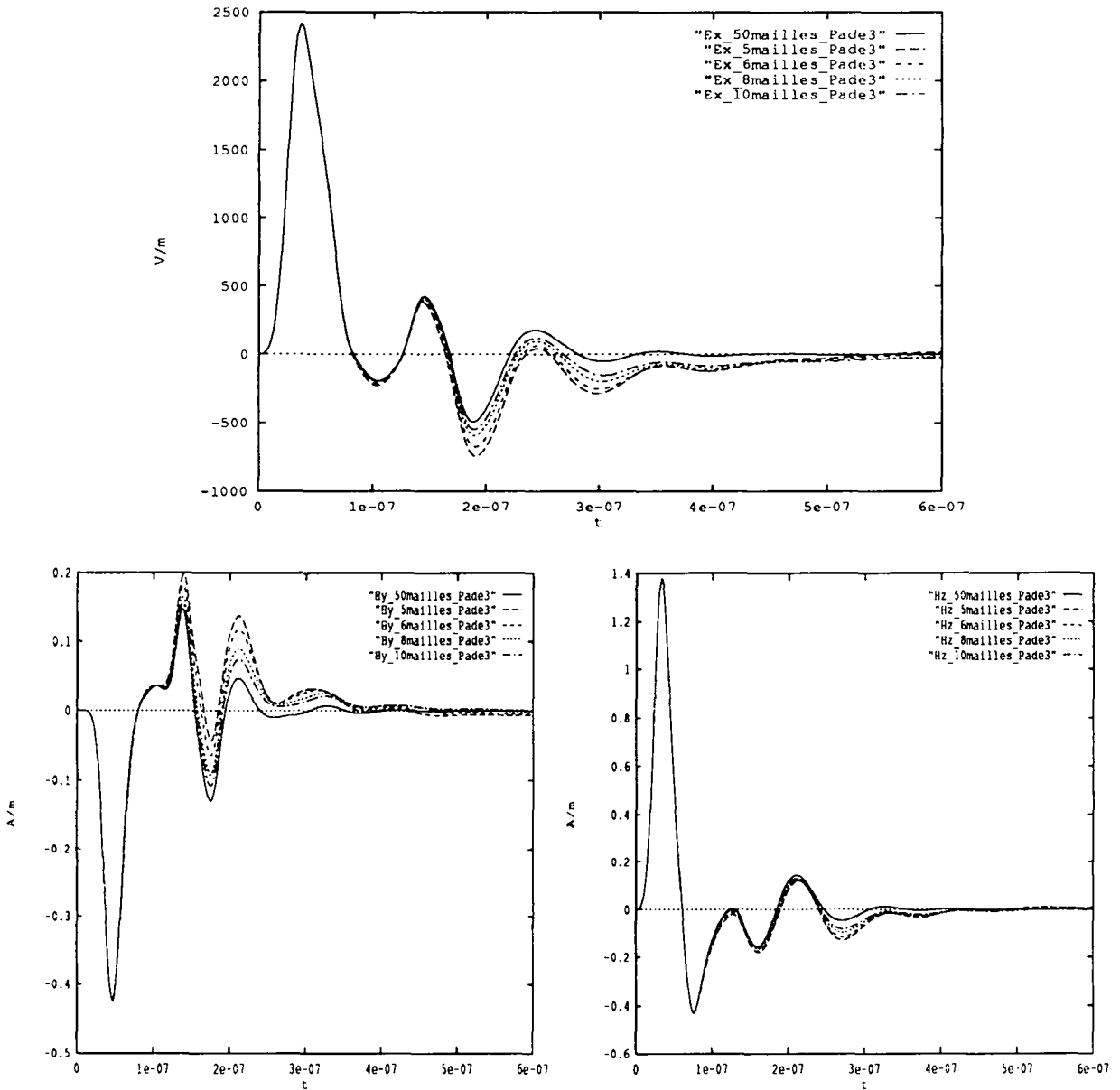


Figure 3.6 : Comparaison des variations en fonction du temps des composantes E_x , H_y et H_z à la pointe du pavé isolant avec une CLA de Padé, $L=3$ que l'on impose à une distance de 5,6, 8 puis 10 mailles du pavé (traits tiretés) avec une solution de référence calculée avec la CLA de Padé ($L=3$) imposée à 50 mailles du pavé (trait plein).

3.1 Etude de faisabilité

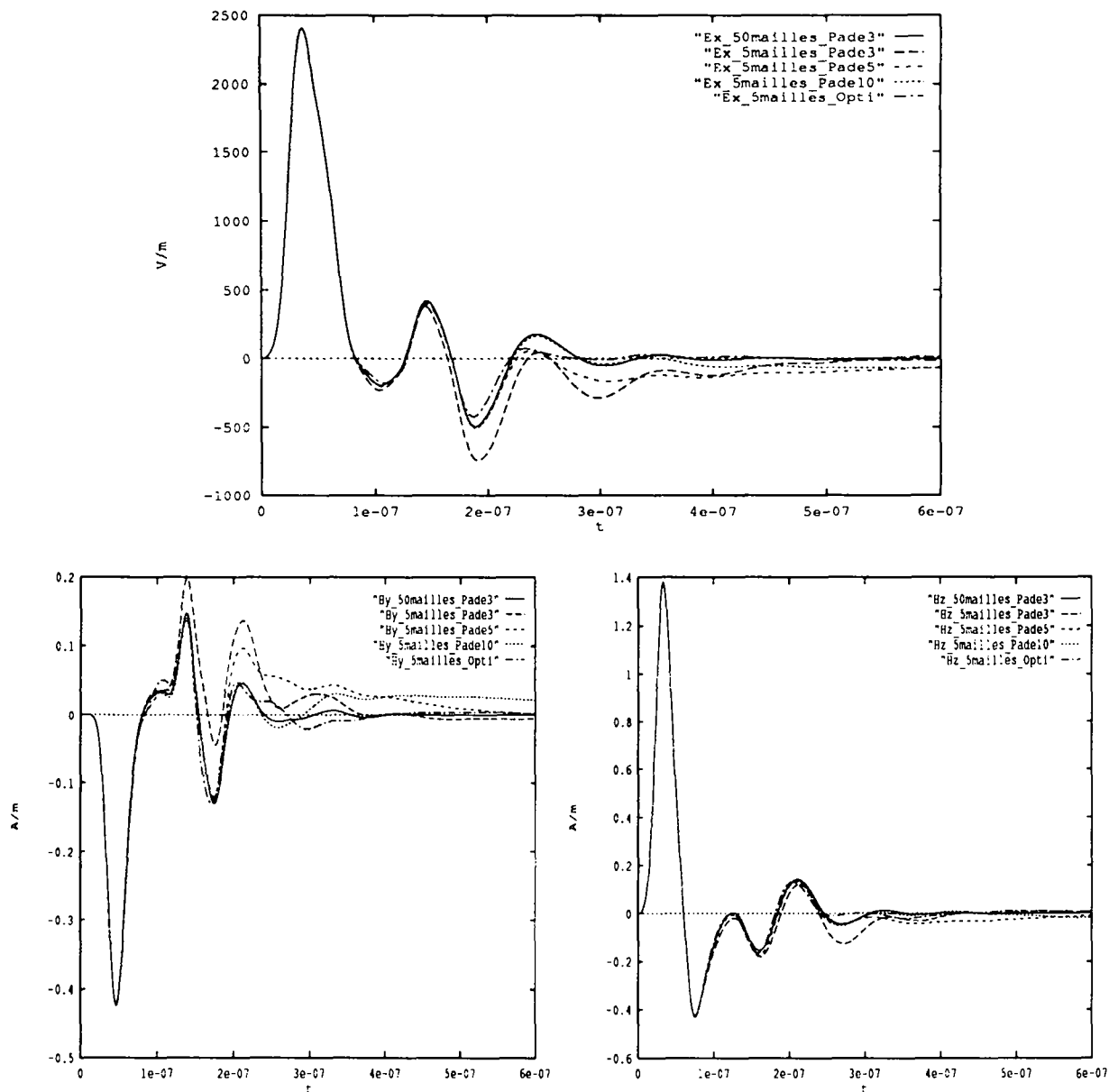


Figure 3.7 : Comparaison des variations en fonction du temps des composantes E_x , H_y et H_z à la pointe du pavé isolant pour différentes CLA que l'on impose à une distance de 5 mailles du pavé (traits tiretés) avec une solution de référence calculée avec la CLA de Padé ($L=3$) imposée à 50 mailles du pavé (trait plein).

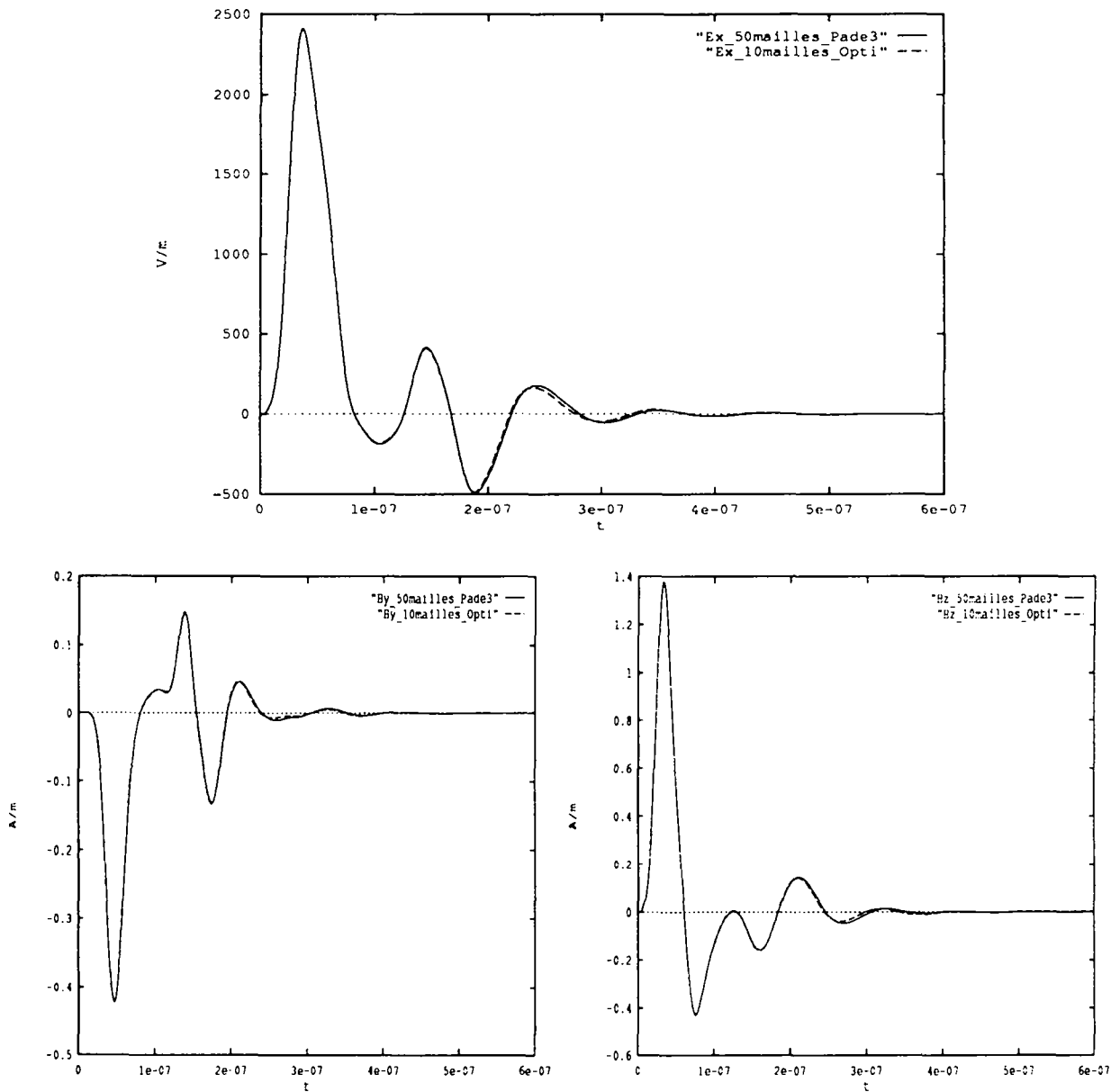


Figure 3.8 : Comparaison des variations en fonction du temps des composantes E_x , H_y et H_z à la pointe du pavé isolant calculée avec une CLA, $L=5$ et coefficients optimisés, que l'on impose à une distance de 10 mailles du pavé (trait tireté) avec une solution de référence calculée avec la CLA de Padé ($L=3$) imposée à 50 mailles du pavé (trait plein).

Bibliographie

- [1] A. BAYLISS and E. TURKEY. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:707–725, 1980.
- [2] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. Technical Report 1794, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Novembre 1992.
- [3] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.
- [4] D. GIVOLI. Non reflecting boundary conditions. *Jour. Comp. Phys*, 94(1), Mai 1991.
- [5] R.L. HIGDON. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *SIAM review*, 28, 1977.
- [6] P. JOLY. *Analyse numérique et mathématique de problèmes liés à la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques*. PhD thesis, Université Paris IX, 1987.
- [7] P. JOLY and B. MERCIER. Une nouvelle condition transparente d'ordre 2 pour les équations de maxwell en dimension 3. Technical Report 1047, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Juin 1989.
- [8] L. TREFETHEN and L. HALPERN. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.
- [9] R. VEZINET, P. JOLY, and F. COLLINO. Nouvelles conditions absorbantes pour les équations de maxwell. *Revue Scientifique de la Défense*, A paraître.
- [10] R. VEZINET and B. PECQUEUX. Conditions absorbantes du second ordre pour le code gorff de résolution par la méthode des différences finies de problèmes électromagnétiques impulsionnels. Technical Report 37190/CEG/AEM/HF, Centre D'Etude de Gramat, DRET, Décembre 1990.

Table des matières

0	Introduction	1
1	Dérivation des C.L.A. pour le problème continu.	7
1.1	Les équations de Maxwell en milieu homogène	7
1.2	Equations sur les faces	9
1.3	Construction d'une famille de solutions particulières régulières	11
1.4	Détermination des conditions d'arêtes	12
1.4.1	Détermination d'une première famille de conditions	13
1.4.2	Détermination d'une seconde famille de conditions d'arête	15
1.5	Détermination des conditions de coin	16
1.5.1	Détermination d'une première famille de conditions de coin	17
1.5.2	Détermination de la seconde famille de conditions de coin	21
2	Discrétisation du problème	23
2.1	Schéma pour les nœuds intérieurs au domaine	23
2.2	Schéma pour les équations de face	26
2.2.1	Description du schéma	26
2.2.2	Principe de résolution	29
2.3	Schéma pour les équations d'arête	30
2.3.1	Description du schéma	30
2.3.2	Principe de résolution	35
2.3.3	Traitement des composantes tangentielles du champ électrique le long des arêtes	38
2.4	Schéma pour les équations de coin	41
2.4.1	Préambule	41
2.4.2	Description du schéma	42
2.4.3	Principe de résolution	44
2.5	Extensions à un domaine borné. Symétries.	48
3	Expériences numériques	51
3.1	Etude de faisabilité	51
3.1.1	Mise en œuvre et validation	51

TABLE DES MATIÈRES

3.1.2	Premiers résultats	52
3.1.3	Coût de la méthode	52
3.1.4	Diffraction d'une onde plane par un parallélépipède	55



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R . 1 9 9 1 ★