

Etude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution

Lahcène Chorfi

► **To cite this version:**

Lahcène Chorfi. Etude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution. [Rapport de recherche] RR-1846, INRIA. 1993. inria-00074826

HAL Id: inria-00074826

<https://hal.inria.fr/inria-00074826>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Étude mathématique
des modes guidés
dans un milieu élastique
à symétrie de révolution*

Lahcène CHORFI

N° 1846
Février 1993

PROGRAMME 6

Calcul Scientifique,
Modélisation et
Logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES MODES GUIDÉS DANS UN MILIEU
ÉLASTIQUE À SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION

MATHEMATICAL ANALYSIS OF GUIDED MODES IN ELASTIC
MEDIA WITH A SYMMETRY OF REVOLUTION

Lahcène CHORFI (*)

(*) Jeune Equipe *Equations Aux Dérivées Partielles-Analyse Numérique*.

UFR-MIM. Université de Provence. Place V-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3. France.

Résumé

Ce rapport est consacré à l'étude de la propagation d'ondes guidées dans un milieu élastique hétérogène à symétrie de révolution. Ce problème est ramené à l'étude spectrale d'une suite d'opérateurs auto-adjoints.

Nous établissons des résultats très fins qui prolongent et complètent ceux précédemment obtenues dans [BDJ]. La plupart de ces résultats ont servi dans [C]. Il constitue une base théorique pour une étude numérique des modes guidés. Elle sera faite dans un rapport ultérieur par la méthode des éléments finis localisés.

Mots Clés

Système de l'élasticité, Milieu Hétérogène, Mode Guidé, Théorie Spectrale, Opérateur Auto-adjoint, Principe du Min-Max, Courbe de Dispersion, Seuil.

Abstract

This report is devoted to study the propagation of guided waves in heterogeneous media with a symmetry of revolution. This problem is reduced to the spectral analysis of a sequence of self-adjoint operators.

We establish sharp results which extend and complete those previously obtained in [BDJ]. The most of this results were used in [C]. They constitute a theoretical background for numerical analysis of guided waves. This will be done in a next report by localized finite element method.

Key Words

System of elasticity, Heterogeneous Media, Guided Modes, Spectral Theory, Self-adjoint Operators, Min-Max Principle, Dispersion Curves, Thresholds.

Sommaire

Introduction	1
Chapitre 1. Position du problème	3
1.1. Les équations	4
1.2. Formulation mathématique	8
Chapitre 2. Analyse spectrale de l'opérateur $A_n(\beta)$	11
2.1. Propriétés des espaces V_n	11
2.2. Propriétés de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$	14
2.3. Caractérisation du spectre de l'opérateur $A_n(\beta)$	19
2.3.1. Le spectre essentiel de $A_n(\beta)$	19
2.3.2. Majoration des valeurs propres	23
Chapitre 3. Le spectre discret de $A_n(\beta)$. Existence des modes guidés.	28
3.1. Existence des modes guidés	29
3.2. Etude des seuils	32
3.2.1. Estimations a priori sur les seuils	33
3.2.2. Equation des seuils	44
3.3. Comportement asymptotique des modes guidés à haute fréquence	48
3.3.1. Comportement de la vitesse de phase	48
3.3.2. Comportement des amplitudes	50
Chapitre 4. Etude des courbes de dispersion	56
4.1. Régularité des fonctions $S_m^n(\beta)$	56
4.2. Dépendance des fonctions $S_m^n(\beta)$ par rapport à (ρ, λ, μ)	59
4.3. Régularité des fonctions propres. Conséquence	62
Annexe 1. Décomposition d'un mode guidé en série de Fourier	81
Annexe 2. Quelques résultats de densité	90
Annexe 3. Une inégalité de Poincaré	94
Bibliographie	96

Introduction

La propagation d'ondes guidées est connue depuis les travaux de Lord Rayleigh [Ra]. Il fut le premier à mettre en évidence l'existence d'une onde se propageant à la surface libre d'un demi espace élastique, l'énergie de cette onde étant localisée au voisinage de la surface libre. Ultérieurement, plusieurs auteurs se sont intéressés à la propagation des ondes à l'extérieur d'une cavité cylindrique plongée dans un milieu infini. Dans cette direction on peut citer successivement les travaux de M. Biot [Bi], I.A. Mindlin [M], A. Boström et A.D. Burden ([BBu], [Bu]), et récemment une étude mathématique rigoureuse de ce problème a été faite par A. Bamberger, P. Joly et M. Kern [BJK]. Dans ce dernier travail, ils ont généralisé des résultats connus pour la cavité de section circulaire à une cavité de section arbitraire. Ils montrent que le problème se ramène à la détermination des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint à résolvante non compacte. Le cas particulier de la fissure a été analysé, du point de vue numérique, dans la thèse de J. Tlili [Tl].

Les ondes élastiques peuvent aussi être guidées par des hétérogénéités (d'un milieu élastique invariant dans une direction), ce qui se traduit par une variation locale des coefficients de Lamé. Une étude théorique de ce type d'onde est réalisée dans un rapport de A. Bamberger, Y. Dermenjian et P. Joly [BDJ]. Dans cet article on montre, sous certaines hypothèses portant sur le profil du milieu, l'existence d'une famille dénombrable de modes guidés.

Pour les ondes électromagnétiques, on citera la thèse de A.S. Bonnet [Bo] et la thèse de R. Djellouli [Dj] qui étudient les modes guidés dans une fibre optique. Malgré les différences qui existent entre les équations de Lamé et les équations de Maxwell, les techniques d'analyse spectrale utilisées dans ces deux thèses ressemblent beaucoup à celles utilisées dans [BJK] et [BDJ]. Ce qui confirme encore une fois la puissance des méthodes issues de l'analyse fonctionnelle.

Le travail présenté dans ce rapport est consacré à l'étude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution. La démarche suivi

dans cette étude utilise des idées issues de nombreuses sources dont [BDJ]. La symétrie de révolution permet de ramener l'étude du système de l'élasticité à celle d'une suite de systèmes différentiels à une variable. On peut ainsi espérer obtenir des résultats plus fins et plus complets que dans [BDJ].

Présentation des résultats.

Au chapitre 1, nous utilisons la symétrie de révolution pour décomposer le champ de déplacement en série de Fourier par rapport à la variable angulaire θ , ce qui ramène la recherche des modes guidés à l'étude spectrale d'une suite d'opérateurs auto-adjoints $A_n(\beta)$, où β est le nombre d'onde et n désigne l'ordre de l'harmonique en θ (le carré de la fréquence apparaît ici comme une valeur propre). Nous avons tenu à justifier cette décomposition dans l'annexe A1.

Dans le chapitre 2, on donne un cadre fonctionnel à l'opérateur $A_n(\beta)$ et on étudie les principales propriétés de la forme quadratique associée à $A_n(\beta)$. Puis on caractérise la nature de son spectre. Notons que, tout au long de ce rapport, les cas $n = 0$ et $n = 1$ (correspondant aux modes axisymétriques et aux modes de flexion) présentent des difficultés particulières.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du spectre discret et de la relation de dispersion par le principe du Min–Max. Nous introduisons la notion de seuil qui correspond à une valeur limite du paramètre β au delà de laquelle il apparaît un nouveau mode guidé. S'inspirant des travaux de Bamberger-Bonnet, nous montrons que les seuils vérifient une équation variationnelle, quadratique en β , qui sera mise à profit dans l'étude numérique. On montre que, pour des fréquences élevées, la vitesse de phase tend vers la plus petite vitesse v_s (vitesse caractéristique des ondes S) du milieu, de plus l'onde est essentiellement transverse avec une énergie qui est confinée autour des fibres de faible résistance (au cisaillement).

Au chapitre 4, nous étudions la dépendance des valeurs propres en fonction des coefficients de Lamé. Cette étude est basée sur la régularité des fonctions propres et de leur comportement asymptotique au voisinage de l'axe du cylindre $r=0$. On montre que, si les coefficients sont assez réguliers (par morceaux), cette dépendance est localement lipschitzienne en norme L^1 . Ce résultat est une contribution originale par rapport au travaux précédents . En effet, dans le cadre des fibres optiques ([Bo], [Dj], cas vectoriel), seule une dépendance L^∞ a été obtenue. La difficulté était essentiellement due à la présence des paramètres dans la partie principale de l'opérateur.

Chapitre 1

Position du problème

Nous nous plaçons dans les hypothèses de l'élastodynamique linéaire dans un milieu hétérogène et isotrope. Nous supposons qu'un milieu élastique occupe l'espace entier \mathbf{R}^3 . Il est caractérisé par des coefficients de Lamé λ , μ , et une densité ρ . On suppose que ce milieu présente une symétrie de révolution d'axe Ox_3 ((O, x_1, x_2, x_3) étant un repère orthonormé de \mathbf{R}^3). De façon précise, λ , μ et ρ dépendent uniquement de la variable radiale $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

La structure du milieu étant cylindrique, nous écrivons les équations du mouvement en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Désignons par e_r, e_θ, e_z les directions locales. Alors le champ des déplacements :

$$\tilde{U}(r, \theta, z) = \tilde{U}_r(r, \theta, z)e_r + \tilde{U}_\theta(r, \theta, z)e_\theta + \tilde{U}_z(r, \theta, z)e_z$$

vérifie le système [Du] :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \sigma_{\theta\theta} &= r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_r}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} &= r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} &= r\rho\frac{\partial^2\tilde{U}_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

où σ est le tenseur de contraintes (symétrique) lié au déplacement \tilde{U} par les relations suivantes :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + 2\mu \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial r} & ; \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{U}_\theta}{r} \right) \right] \\ \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial z} \right) & ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial \tilde{U}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{U}_r \right) \\ \sigma_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{U}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial \theta} \right) & ; \quad \sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \tilde{U} + 2\mu \frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial z} \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{div} \tilde{U} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\tilde{U}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{U}_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial \tilde{U}_z}{\partial z}$$

Nous cherchons le champ de déplacement sous la forme :

$$(1.3) \quad \tilde{U}(r, \theta, z, t) = \left[U_r(r, \theta)e_r + U_\theta(r, \theta)e_\theta + U_z(r, \theta)e_z \right] \exp i(\omega t - \beta z)$$

Ce qui signifie que le champ \tilde{U} est une onde plane se propageant dans la direction Ox_3 avec une vitesse de phase égale à $V = \frac{\omega}{\beta}$ (ω : pulsation ; β : nombre d'onde).

Nous dirons que \tilde{U} est un mode guidé si de plus \tilde{U} vérifie la condition :

$$(1.4) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (U_r^2 + U_\theta^2 + U_z^2) r dr d\theta < \infty$$

La condition (1.4) signifie physiquement que les déplacements restent confinés autour de l'axe du cylindre.

1.1 Les équations

En substituant (1.3) dans (1.1), le champ $U(r, \theta) = (U_r(r, \theta), U_\theta(r, \theta), U_z(r, \theta))$ doit vérifier le système :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta r}^\beta}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} - i\beta r\sigma_{zr}^\beta = -\omega^2 \rho r U_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2\sigma_{r\theta}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^\beta}{\partial \theta} - i\beta r\sigma_{\theta z}^\beta = -\omega^2 \rho r U_\theta \\ \frac{\partial(r\sigma_{rz}^\beta)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}^\beta}{\partial \theta} - i\beta r\sigma_{zz}^\beta = -\omega^2 \rho r U_z \end{cases}$$

où on a posé :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rr}^\beta = \lambda(\operatorname{div}^\beta U) + 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} & ; \quad \sigma_{r\theta}^\beta = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) \right] \\ \sigma_{rz}^\beta = \mu \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} - i\beta U_r \right) & ; \quad \sigma_{\theta\theta}^\beta = \lambda \operatorname{div}^\beta U + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) \\ \sigma_{\theta z}^\beta = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - i\beta U_\theta \right) & ; \quad \sigma_{zz}^\beta = \lambda \operatorname{div}^\beta U - 2\mu i\beta U_z \end{cases}$$

avec

$$\operatorname{div}^\beta U = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right] - i\beta U_z$$

La structure du milieu étant circulaire, ceci nous permet de décomposer le champ $U(r, \theta)$ en série de Fourier et nous amène à considérer des champs, pour $n \in \mathbb{N}$, de la forme :

$$(1.7) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) &= u_1(r) \cos n\theta \\ U_\theta(r, \theta) &= u_2(r) \sin n\theta \\ U_z(r, \theta) &= -iu_3(r) \cos n\theta \end{cases}$$

Une substitution de (1.7) dans (1.5) montre que le champ $u = (u_1, u_2, u_3)$ vérifie les équations :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[(\lambda + 2\mu)r \frac{du_1}{dr} \right] + \frac{d}{dr} (\lambda u_1 + n\lambda u_2 - \beta\lambda r u_3) - \lambda \frac{du_1}{dr} + n\mu \frac{du_2}{dr} - \beta\mu r \frac{du_3}{dr} \\ - \left[\frac{(n^2 + 2)\mu + \lambda}{r} + \beta^2 \mu r \right] u_1 - \frac{n}{r} (\lambda + 3\mu) u_2 + \beta\lambda u_3 = -\omega^2 \rho r u_1 \\ \frac{d}{dr} (\mu r \frac{du_2}{dr}) - \frac{d}{dr} [\mu(nu_1 + u_2)] - n\lambda \frac{du_1}{dr} + \mu \frac{du_2}{dr} - \frac{n}{r} (\lambda + 3\mu) u_1 - \\ \left[\frac{(2n^2 + 1)\mu + n^2 \lambda}{r} + \beta^2 \mu r \right] u_2 + n\beta(\lambda + \mu) u_3 = -\omega^2 \rho r u_2 \\ \frac{d}{dr} (\mu r \frac{du_3}{dr}) + \frac{d}{dr} (\beta\mu r u_1) + \beta\lambda r \frac{du_1}{dr} + \beta\lambda u_1 + n\beta(\lambda + \mu) u_2 - \\ \left[\frac{n^2 \mu}{r} + \beta^2 r (\lambda + 2\mu) \right] u_3 = -\omega^2 \rho r u_3 \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Le système obtenu est à coefficients réels, donc on peut considérer u_1, u_2, u_3 comme des fonctions réelles.

La recherche des modes guidés se ramène donc à la résolution, pour tout $\beta > 0$, de la suite des problèmes suivants :

$$(\tilde{P}_n(\beta)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \omega \in \mathbf{R}^+ \text{ et } u = (u_1, u_2, u_3), \quad u \neq 0 \text{ tels que :} \\ -\frac{d}{dr} (B \frac{du}{dr}) + B_1 \frac{du}{dr} - \frac{d}{dr} (B_2 u) + B_3 u = \omega^2 \rho r u \text{ dans } D'(\mathbf{R}^+) \\ \text{et} \quad \int_0^\infty |u|^2 r dr < \infty \end{array} \right.$$

où les matrices $B, B_i, i = 1, 2, 3$, sont définies par :

$$B = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)r & 0 & 0 \\ 0 & \mu r & 0 \\ 0 & 0 & \mu r \end{pmatrix}$$

$$B_1 = B_2^t = \begin{pmatrix} \lambda & -n\mu & \beta\mu r \\ n\lambda & -\mu & 0 \\ -\beta\lambda r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{(n^2 + 2)\mu + \lambda}{r} + \beta^2\mu r & \frac{n(\lambda + 3\mu)}{r} & -\beta\lambda \\ \frac{n(\lambda + 3\mu)}{r} & \frac{(2n^2 + 1)\mu + n^2\lambda}{r} + \beta^2\mu r & -n\beta(\lambda + \mu) \\ -\beta\lambda & -n\beta(\lambda + \mu) & \frac{n^2\mu}{r} + \beta^2 r(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2 Si $n = 0$, le système (1.8) se découple en deux systèmes indépendants :

$$(P_n^c(\beta)) \quad -\frac{d}{dr}(\bar{B} \frac{d\bar{u}}{dr}) + \bar{B}_1 \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{d}{dr}(\bar{B}_2 \bar{u}) + \bar{B}_3 \bar{u} = \omega^2 \rho r \bar{u} \quad \bar{u} = (u_1, u_3)$$

avec

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)r & 0 \\ 0 & \mu r \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2^t = \begin{pmatrix} \lambda & \beta\mu r \\ -\beta\lambda r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_3 = \begin{pmatrix} \frac{(2\mu + \lambda)}{r} + \beta^2\mu r & -\beta\lambda \\ -\beta\lambda & \beta^2 r(\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}$$

et

$$(P_0^t(\beta)) \quad \frac{d}{dr}(\mu r \frac{du_2}{dr} - \mu u_2) + \mu \frac{du_2}{dr} - \mu(\beta^2 r + \frac{1}{r})u_2 = -\omega^2 \rho r u_2$$

On constate que deux types d'ondes se propagent dans ce cas :

1- Une onde de torsion

$$U_r = U_z = 0, \quad U_\theta = u_2(r) \exp i(\omega t - \beta z)$$

2- Une onde de compression

$$\begin{cases} U_r = u_1(r) \exp i(\omega t - \beta z) \\ U_\theta = 0 \\ U_z = u_3(r) \exp i(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

Remarque 1.3 Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ vérifie $\tilde{P}_n(\beta)$ alors le champ

$$(1.9) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) = u_1(r) \sin n\theta \\ U_\theta(r, \theta) = -u_2(r) \cos n\theta \\ U_z(r, \theta) = -iu_3(r) \sin n\theta \end{cases}$$

vérifie le système (1.5).

On montrera en annexe 1 que, réciproquement, si $U = (U_r, U_\theta, U_z)$ vérifie (1.5) alors on a nécessairement :

$$(1.10) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^1(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^1(r) \cos n\theta + v_n^1(n) \sin n\theta) \\ U_\theta(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^2(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^2(r) \sin n\theta + v_n^2(n) \cos n\theta) \\ U_z(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^3(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^3(r) \cos n\theta + v_n^3(n) \sin n\theta) \end{cases}$$

où, pour tout $0 \leq n \leq N(\beta)$, $u_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3)$ (resp $v_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3)$) est une fonction propre de $\tilde{P}_n(\beta)$ (resp de $\tilde{P}_{-n}(\beta)$) associée à ω^2 . En particulier, si $\omega < \beta v$, $N(\beta)$ est un nombre fini.

1.2 Formulation mathématique

Dans la suite, on suppose que les fonctions $\lambda(r)$, $\mu(r)$, et $\rho(r)$ sont mesurables et vérifient les propriétés suivantes :

(i) λ, μ et $\rho \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$.

(ii) Il existe $R > 0$ tel que :

$$\rho(r) = \rho_\infty, \quad \lambda(r) = \lambda_\infty, \quad \mu(r) = \mu_\infty \quad \text{si } r > R$$

(iii)

$$\begin{cases} 0 < \rho_- \leq \rho_+ \\ 0 < \lambda_- \leq \lambda_+ \\ 0 < \mu_- \leq \mu_+ \end{cases}$$

ou, pour $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$, on a noté :

$$f_+ = \operatorname{ess\,sup}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r) \quad \text{et} \quad f_- = \operatorname{ess\,inf}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r)$$

Nous définissons les vitesses :

$$\begin{cases} v_s = \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} : & \text{vitesse des ondes S du milieu extérieur} \\ v_p = \left(\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} : & \text{vitesse des ondes P du milieu extérieur} \end{cases}$$

Considérons l'espace de Hilbert réel défini par :

$$H = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^3; \sqrt{r}u \in L^2(\mathbf{R}^+)^3\},$$

muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_0^\infty \sum_{j=1}^3 u_j v_j \rho dr.$$

On note par $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ la norme associée.

Introduisons la suite d'espaces fonctionnels V_n , $n \in \mathbf{N}$, définie par :

$$V_1 = \{u \in H; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^3; \frac{1}{\sqrt{r}}(u_1 + u_2, u_3) \in L^2(\mathbf{R}^+)^2\}$$

$$V_n = \{u \in H; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^3; \frac{1}{\sqrt{r}} \left((n+1)u_1, (n+1)u_2, nu_3 \right) \in L^2(\mathbf{R}^+)^3\}, n \neq 1,$$

et munis des normes (naturelles) suivantes :

$$\|u\|_{V_1}^2 = \int_0^\infty \left(|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \left(\frac{u_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{u_3}{r} \right)^2 \right) r dr,$$

$$\|u\|_{V_n}^2 = \int_0^\infty \left(|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + n^2 \left(\frac{u_3}{r} \right)^2 \right) r dr \quad \text{si } n \neq 1.$$

V_n est un espace de Hilbert pour tout n .

On définit sur V_n la forme bilinéaire symétrique $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ suivante :

$$a_n(\beta; u, v) = \int_0^\infty \left(B \frac{du}{dr} \cdot \frac{dv}{dr} + B_1 \frac{du}{dr} \cdot v + B_2 u \cdot \frac{dv}{dr} + B_3 u \cdot v \right) dr \quad \forall u, v \in V_n$$

Formellement $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ est associée à l'opérateur différentiel $\mathcal{A}_n(\beta)$ défini au sens des distributions par :

$$\mathcal{A}_n(\beta)u = \frac{1}{\rho r} \left[-\frac{d}{dr} \left(B \frac{du}{dr} + B_2 u \right) + B_1 \frac{du}{dr} + B_3 u \right]$$

c'est à dire :

$$a_n(\beta; u, v) = (\mathcal{A}_n(\beta)u, v)$$

$a_n(\beta; u, v)$ s'écrit sous la forme développée :

$$\begin{aligned} (1.11) \quad a_n(\beta; u, v) &= \int_0^\infty \lambda (\operatorname{div}^\beta u) (\operatorname{div}^\beta v) r dr + \beta^2 \int_0^\infty \mu (u_1 v_1 + u_2 v_2 + 2u_3 v_3) r dr \\ &+ \int_0^\infty \mu \left(2 \frac{du_1}{dr} \cdot \frac{dv_1}{dr} + \frac{du_2}{dr} \cdot \frac{dv_2}{dr} + \frac{du_3}{dr} \cdot \frac{dv_3}{dr} \right) r dr \\ &+ \int_0^\infty \mu \left[-(nu_1 + u_2) \frac{dv_2}{dr} - (nv_1 + v_2) \frac{du_2}{dr} + \beta r \left(u_1 \frac{dv_3}{dr} + v_1 \frac{du_3}{dr} \right) \right] dr \\ &+ \int_0^\infty \mu \left[(n^2 + 2)u_1 v_1 + (2n^2 + 1)u_2 v_2 + n^2 u_3 v_3 \right. \\ &\left. + 3n(u_1 v_2 + u_2 v_1) - n\beta r (u_2 v_3 + u_3 v_2) \right] \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{div}^\beta u = \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1 + nu_2}{r} - \beta u_3$$

Remarquons que la norme de V_n est optimale pour rendre la forme $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ continue.

Maintenant nous sommes en mesure de poser le problème $\tilde{P}_n(\beta)$ du point de vue de la théorie spectrale. Pour cela, on introduit l'opérateur non borné $A_n(\beta)$ défini dans H par :

$$(1.12) \quad \begin{cases} D(A_n(\beta)) = \{u \in V_n; A_n(\beta)u \in H\} \\ A_n(\beta)u = \mathcal{A}_n(\beta)u \quad \text{si } u \in D(A_n(\beta)) \end{cases}$$

et on pose le problème spectral :

$$(P_n(\beta)) \quad \begin{cases} \text{trouver } \omega \in \mathbf{R} \text{ et } u \in D(A_n(\beta)), u \neq 0, \text{ tels que :} \\ A_n(\beta)u = \omega^2 u \end{cases}$$

On vérifiera au chapitre 3 que :

- (i) $a_n(\beta; u, v) = (A_n(\beta)u, v), \quad \forall u, v \in D(A_n(\beta)) \times V_n,$
- (ii) $a_n(\beta; u, v)$ est coercive.

On en déduira à l'aide du théorème de Lax-Milgram que l'opérateur $A_n(\beta)$ est autoadjoint ; de plus le problème spectral $P_n(\beta)$ est équivalent à la formulation variationnelle :

$$(P_n(\beta)) \quad \begin{cases} \text{trouver } \omega \in \mathbf{R} \text{ et } u \in V_n, u \neq 0, \text{ tels que :} \\ a_n(\beta; u, v) = \omega^2(u, v); \quad \forall v \in V_n \end{cases}$$

Nous verrons que la résolvante de l'opérateur $A_n(\beta)$ n'est pas compacte. Par suite la question de l'existence de valeurs propres pour $A_n(\beta)$ n'est pas évidente. L'étude du spectre de l'opérateur $A_n(\beta)$ sera ramenée à l'étude de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$.

Chapitre 2

Analyse spectrale des opérateurs $A_n(\beta)$

Le but de ce chapitre est de démontrer que l'opérateur $A_n(\beta)$ est caractérisé par la forme bilinéaire $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$, puis de déterminer la nature de son spectre.

2.1. Propriétés des espaces V_n

Nous démontrons quelques propriétés de V_n qui seront utiles pour la suite.

Propriété 2.1.

$$u \in V_n \implies u|_{[0,1]} \in L^2(0,1)^3$$

Preuve. Il suffit de montrer que $u_i \in L^2(0,1)$ pour $i=1,2,3$.

En effet, on peut écrire :

$$u_i(r) = u_i(1) - \int_r^1 \frac{du_i}{dr} dr$$

D'autre part :

$$\left| \int_r^1 \frac{du_i}{dr} dr \right| \leq \left(\int_r^1 \left| \frac{du_i}{dr} \right|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_r^1 \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\left| \int_r^1 \frac{du_i}{dr} dr \right| \leq C |\text{Log } r|^{\frac{1}{2}}$$

par suite

$$u_i(r) = O(|\text{Log } r|^{\frac{1}{2}}), \quad r \rightarrow 0$$

ce qui montre que

$$u_i \in L^2(0,1)$$

□

Propriété 2.2.

$$n \geq 2 \implies V_n = \{u \in H ; \sqrt{r}u \in H^1(\mathbf{R}^+)^3\}$$

Preuve. $V_n \subset \{u \in H ; \sqrt{r}u \in H^1(\mathbf{R}^+)^3\}$ est facile à démontrer.

L'inclusion $\{u \in H ; \sqrt{r}u \in H^1(\mathbf{R}^+)^3\} \subset V_n$ découle de l'inégalité de Hardy ([DL], Vol 5, page 72) :

$$\left\| \frac{u}{\sqrt{r}} \right\|_{L^2}^2 \leq 4 \left\| \frac{d}{dr}(\sqrt{r}u) \right\|_{L^2}^2$$

□

De la même manière, on vérifie que :

$$V_0 = \{u \in H ; \sqrt{r}(u_1, u_2) \in H^1(\mathbf{R}^+)^2 ; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

et

$$V_n = \{u \in H ; \sqrt{r}(u_1 + u_2, u_3) \in H^1(\mathbf{R}^+)^2 ; \sqrt{r} \frac{du_1}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

Propriété 2.3.

$$u \in V_n \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r}u(r) = 0$$

Preuve. Soit $u \in V_n$, alors

$$\sqrt{r}u \in L^2(1, \infty)^3$$

d'autre part la formule :

$$\frac{d}{dr}(\sqrt{r}u) = \frac{u}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{du}{dr}$$

montre que $\frac{d}{dr}(\sqrt{r}u) \in L^2(1, \infty)^3$. Par suite :

$$\sqrt{r}u \in H^1(1, \infty)^3$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r}|u(r)| = 0$$

□

Propriété 2.4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\{u \in V_n \implies \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r}u(r) = 0\}$$

Preuve. Nous avons déjà établi dans la preuve de la propriété 2.1 le comportement $|u(r)| = O(|\text{Log } r|^{1/2})$. Donc $\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r}u(r) = 0$. \square

Considérons maintenant l'espace de Hilbert

$$W = \{v \in L^2_{loc}(0, 1); \|v\|_W^2 \equiv \int_0^1 \left(\frac{v^2}{r} + r \left| \frac{dv}{dr} \right|^2 \right) dr < \infty\}$$

Propriété 2.5. L'espace W est inclu dans l'espace $C^0([0, 1])$ avec injection continue. De plus on a :

$$v \in W \implies v(0) = 0$$

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $v \in W$, on voit que la restriction de la fonction v à l'intervalle $]\varepsilon, 1]$ appartient à l'espace $H^1(\varepsilon, 1)$. Par conséquent W est inclu dans $C^0(]0, 1])$.

Soit $v \in W$ et (r_n) une suite de $]0, 1]$ qui converge vers 0.

D'une part on a :

$$v^2(r_n) - v^2(r_m) = 2 \int_{r_m}^{r_n} vv' dr \leq \int_{r_m}^{r_n} v^2 \frac{dr}{r} + \int_{r_m}^{r_n} (v')^2 r dr$$

Ceci prouve que la suite $(v^2(r_n))$ est une suite de Cauchy et converge vers une limite $\alpha \in \mathbf{R}^+$. D'autre part, on sait que :

$$\int_0^1 \frac{v^2}{r} dr < \infty$$

et on obtient nécessairement $\alpha = 0$. Finalement la majoration

$$v^2(r) = 2 \int_0^r vv' dr \leq \int_0^1 \left(\frac{v^2}{r} + r \left| \frac{dv}{dr} \right|^2 \right) dr$$

implique immédiatement que l'inclusion $W \subset C^0([0, 1])$ est continue. \square

Comme corollaire on a la propriété suivante :

Proposition 2.6.

$$\begin{aligned} u \in V_n, n \geq 2 &\implies \lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0, \\ u \in V_1 &\implies \lim_{r \rightarrow 0} (u_1 + u_2)(r) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} u_3(r) = 0, \\ u \in V_0 &\implies \lim_{r \rightarrow 0} (u_1(r), u_2(r)) = 0. \end{aligned}$$

On montrera en annexe 2.1 que $D(\mathbf{R}^+)$ est dense dans les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+); \sqrt{r}u \in L^2(\mathbf{R}^+); \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)\} \\ \mathcal{W} &= \{u \in \mathcal{V}; \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+)\} \end{aligned}$$

munis de leurs normes usuelles. De même $D(\mathbf{R}^+)^2$ est dense dans

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{W}} &= \{\bar{u} = (u_1, u_2) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^2; \sqrt{r} \frac{d\bar{u}}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^2; \\ &\quad \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+); \sqrt{r}\bar{u} \in L^2(\mathbf{R}^+)^2\} \end{aligned}$$

Comme conséquence on a la proposition

Proposition 2.7. $D(\mathbf{R}^+)^3$ est dense dans V_n .

Preuve. Il suffit de remarquer que la norme de V_n est liée aux normes des espaces \mathcal{V} , \mathcal{W} et $\bar{\mathcal{W}}$ par les inégalités :

- * $\|u\|_{V_0} \leq C_1 (\|u_1\|_{\mathcal{W}} + \|u_2\|_{\mathcal{W}} + \|u_3\|_{\mathcal{V}})$
- * $\|u\|_{V_1} \leq C_2 (\|u_3\|_{\mathcal{W}} + \|\bar{u}\|_{\bar{\mathcal{W}}})$
- * $\|u\|_{V_n} \leq C_3 \left(\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{\mathcal{W}} \right) \quad (n \geq 2)$

2.2 Propriétés de la forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$

Proposition 2.8. On a :

$$(\mathcal{A}_n(\beta)u, v) = a_n(\beta; u, v) \quad \forall (u, v) \in D(\mathcal{A}_n(\beta)) \times V_n$$

Preuve. Soient $(u, v) \in D(\mathcal{A}_n(\beta)) \times V_n$. D'après la proposition 2.7 il existe deux suites $(u_p)_p$ et $(v_p)_p$ de $D(\mathbf{R}^+)^3$ qui vérifient :

$$\|u - u_p\|_{V_n} \longrightarrow 0 \text{ et}$$

$$\|v - v_p\|_{V_n} \longrightarrow 0$$

quand $p \rightarrow \infty$.

En intégrant par parties, nous avons :

$$(\mathcal{A}_n(\beta)u_p, v_p) = a_n(\beta; u_p, v_p)$$

Comme $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ est continue sur $V_n \times V_n$, alors :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_n(\beta; u_p, v_p) = a_n(\beta; u, v)$$

Grâce à la symétrie de l'opérateur différentiel $\mathcal{A}_n(\beta)$ on montre que :

$$\mathcal{A}_n(\beta)u_p \rightharpoonup \mathcal{A}_n(\beta)u \quad \text{faiblement dans } H$$

ce qui entraîne, avec $v_p \rightarrow v$ dans H , qu'on a la limite :

$$(\mathcal{A}_n(\beta)u, v) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_n(\beta)u_p, v_p)$$

Ainsi on obtient le résultat. □

Proposition 2.9. Pour tout $\beta \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $u \in V_n$ on a :

$$(2.1) \quad a_n(\beta; u, u) \geq \mu_- \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr \quad (n \neq 1)$$

$$a_1(\beta; u, u) \geq \mu_- \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{2}{r^2} (u_1 + u_2)^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right] r dr$$

Preuve. En utilisant l'expression (1.11) on peut écrire $a_n(\beta; u, u)$ sous la forme :

$$(2.2) \quad a_n(\beta; u, u) = \int_0^\infty \lambda |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \int_0^\infty \mu \varepsilon_n(\beta; u) dr$$

où $\varepsilon_n(\beta; u)$ est donné par l'expression :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_n(\beta; u) = & \beta^2 |u|^2 r + r \left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + r \left| \frac{du}{dr} \right|^2 \\ & + \frac{1}{r} \left((n^2 + 2)u_1^2 + (2n^2 + 1)u_2^2 + n^2 u_3^2 + 6nu_1 u_2 \right) - 2n\beta u_2 u_3 \\ & + 2 \left(\beta u_1 r \frac{du_3}{dr} - (nu_1 + u_2) \frac{du_2}{dr} \right) \end{aligned}$$

A l'aide d'un calcul direct, on vérifie que :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_n(\beta; u) = & 2r \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \beta^2 u_3^2 \right) + r \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + r \left(\frac{du_3}{dr} + \beta u_1 \right)^2 \\ & + \frac{1}{r} (nu_3 - \beta r u_2)^2 + \frac{2}{r} (u_1 + nu_2)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent $\varepsilon_n(\beta; u) \geq 0$ et on a :

$$(2.5) \quad a_n(\beta; u, u) \geq \mu_- \int_0^\infty \varepsilon_n(\beta; u) dr$$

D'autre part on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\beta; u) = & \beta^2 |u|^2 r + r \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2}{r} u_3^2 + \frac{4nu_1 u_2}{r} \\ & + r |\operatorname{div}^\beta u|^2 + 2\beta \left(u_1 r \frac{du_3}{dr} + u_3 \frac{d}{dr} (r u_1) \right) \\ & - 2(nu_1 + u_2) \frac{du_2}{dr} - 2(u_1 + nu_2) \frac{du_1}{dr} \end{aligned}$$

Utilisant les propriétés 2.3 et 2.6, ainsi que la propriété 2.5 si $n=0$, nous avons :

$$\int_0^\infty \left[u_1 r \frac{du_3}{dr} + u_3 \frac{d(r u_1)}{dr} \right] dr = \int_0^\infty \frac{d(r u_1 u_3)}{dr} dr = [r u_1(r) u_3(r)]_0^\infty = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2 \left[(nu_1 + u_2) \frac{du_2}{dr} + (u_1 + nu_2) \frac{du_1}{dr} \right] dr &= \int_0^\infty \frac{d}{dr} [2nu_1 u_2 + u_1^2 + u_2^2] dr \\ &= [2nu_1 u_2 + u_1^2 + u_2^2]_0^\infty \quad \text{si } n \neq 1 \\ &= [(u_1 + u_2)^2]_0^\infty \quad \text{si } n = 1 \\ &= 0 \quad (\text{d'après les propriétés de } u \in V_n) \end{aligned}$$

D'où

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a_n(\beta; u, u) \geq & \mu_- \int_0^\infty \left[\beta^2 |u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{(n^2 + 1)}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) \right. \\ & \left. + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4nu_1 u_2}{r^2} \right] r dr \end{aligned}$$

Pour avoir le résultat, il suffit de remarquer que :

$$(n^2 + 1)(u_1^2 + u_2^2) + 4nu_1u_2 \geq \begin{cases} (n-1)^2(u_1^2 + u_2^2) & \text{si } n \geq 2 \\ 2(u_1 + u_2)^2 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Corollaire 2.10. *La forme bilinéaire $a_n(\beta; u, v)$ est coercive sur V_n . On a :*

$$(2.7) \quad a_n(\beta, u, u) \geq C_n \|u\|_{V_n}^2 \quad \forall u \in V_n$$

avec

$$C_n = \begin{cases} (\mu_-) \frac{(n-1)^2}{n^2+1} \min(1, \beta^2) & \text{si } n \geq 2, \\ (\mu_-) \min(1, \beta^2) & \text{si } n = 0, 1 \end{cases}$$

Corollaire 2.11. *L'opérateur $A_n(\beta)$ défini par (1.12) est autoadjoint positif.*

Preuve. La forme quadratique $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ est symétrique, continue et coercive sur V_n (qui est dense dans H). D'après le théorème de caractérisation (cf. [DL], vol 4, chap. VI, prop. 9) $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ engendre un opérateur autoadjoint et positif défini dans H par :

$$\begin{cases} D(A_n(\beta)) = \{u \in V_n; \exists w \in H \text{ tel que } a_n(\beta; u, v) = (w, v), \forall v \in V_n\} \\ A_n(\beta)u = w \quad \text{si } u \in D(A_n(\beta)) \end{cases}$$

Comme $D(\mathbf{R}^+)^3$ est dense dans V_n , la proposition 2.8 entraîne l'égalité $w = A_n(\beta)u$ dans $D'(\mathbf{R}^+)^3$. Ce qu'il fallait démontrer. \square

Proposition 2.12. *Pour tout $\beta \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a la décomposition :*

$$(2.8) \quad a_n(\beta; u, u) = \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \|u\|^2 + b_n(\beta; u, u) + p(\beta; u, u)$$

où on a posé :

$$(2.9) \quad b_n(\beta; u, u) = \int_0^\infty (\lambda + \mu) |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \int_0^\infty \mu \left[\left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left| \frac{du_3}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr$$

$$p(\beta; u, u) = \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) |u|^2 r \rho dr + 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \frac{d}{dr} (ru_1 u_3) dr$$

Preuve. Rappelons l'expression de $a_n(\beta; u, u)$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} a_n(\beta; u, u) &= \int_0^\infty \lambda |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \int_0^\infty \left[\beta^2 (u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \left| \frac{du_2}{dr} \right|^2 + \left| \frac{du_3}{dr} \right|^2 \right] r dr \\ &\quad + \int_0^\infty \mu \left[\frac{n^2 + 2}{r} u_1^2 + \frac{2n^2 + 1}{r} u_2^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} - 2n\beta u_2 u_3 \right. \\ &\quad \left. - 2(nu_1 + u_2) \frac{du_2}{dr} + 2\beta r u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{6nu_1 u_2}{r} \right] dr \end{aligned}$$

Pour obtenir (2.8) il suffit de remarquer les identités suivantes :

$$\begin{aligned} 1- \quad r |\operatorname{div}^\beta u|^2 &= r \left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{u_1^2 + n^2 u_2^2}{r} + \beta^2 u_3^2 r + \frac{2nu_1 u_2}{r} - 2n\beta u_3 u_2 \\ &\quad - 2\beta u_3 u_1 - 2r\beta u_3 \frac{du_1}{dr} + 2(u_1 + nu_2) \frac{du_1}{dr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \quad \left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 &= \left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} \right)^2 \\ + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{4nu_1 u_2}{r^2} - 2 \left(\frac{u_1 + nu_2}{r} \right) \frac{du_1}{dr} - 2 \left(\frac{nu_1 + u_2}{r} \right) \frac{du_2}{dr} \end{aligned}$$

$$3- \quad \int_0^\infty \mu |u|^2 r dr = \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) |u|^2 \rho r dr + \|u\|^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

$$\begin{aligned} 4- \quad \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \frac{d}{dr} (r u_1 u_3) dr &= \int_0^\infty \mu \frac{d}{dr} (r u_1 u_3) dr - \mu_\infty [r u_1 u_3]_0^\infty \\ &= \int_0^\infty \mu \left(u_1 u_3 + r u_1 \frac{du_3}{dr} + r u_3 \frac{du_1}{dr} \right) dr \end{aligned}$$

□

La forme $p(\beta; u, v)$ vérifie la propriété de compacité suivante :

Lemme 2.13. *Pour toute suite (u^p) convergeant faiblement dans V_n vers u , nous avons :*

$$(2.10) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = p(\beta; u, u)$$

Preuve. Comme la suite (u^p) est bornée dans V_n , on peut extraire une sous suite, encore notée (u^p) , et trouver $u \in V_n$ de sorte que :

$$\begin{cases} u^p \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } V_n \\ \sqrt{r}u^p \rightarrow \sqrt{r}u & \text{dans } L^2(0, R)^3 \end{cases}$$

Par ailleurs, comme $p(\beta; u, u)$ ne fait intervenir que des intégrales sur $[0, R]$ $\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} = 0 \text{ pour } r \geq R \right)$, on a alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = p(\beta; u, u)$$

d'où le résultat. □

2.3 Caractérisation du spectre de l'opérateur $A_n(\beta)$

D'après le corollaire 2.11, l'opérateur $A_n(\beta)$ est autoadjoint positif; de plus l'inégalité (3.1) montre que le spectre de $A_n(\beta)$, noté $\sigma(\beta)$, est inclu dans l'intervalle $\left[\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+}, +\infty \right[$.

2.3.1 Le spectre essentiel de $A_n(\beta)$

Définition 2.1

On appelle spectre discret, noté $\sigma_d(\beta)$, de l'opérateur $A_n(\beta)$ l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie qui sont isolées dans le spectre $\sigma(\beta)$. Le spectre essentiel, noté $\sigma_{ess}(\beta)$, est le complémentaire de $\sigma_d(\beta)$ dans $\sigma(\beta)$.

Nous avons la caractérisation suivante du spectre essentiel :

Caractérisation 2.1 (cf.[SCH])

Un nombre σ appartient à $\sigma_{ess}(\beta)$ si et seulement s'il existe une suite (u^p) dans $D(A_n(\beta))$ telle que :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \|u^p\| = 1 \\ u^p \rightharpoonup 0 & \text{dans } H \text{ (faiblement)} \\ Au^p - \sigma u^p \rightarrow 0 & \text{dans } H \text{ (fortement)} \end{cases}$$

Une suite (u^p) vérifiant (4.1) est dite *singulière*.

Théorème 2.14. *Pour tout $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, le spectre essentiel de $A_n(\beta)$ est indépendant de n et vérifie :*

$$\sigma_{ess}(\beta) = \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$$

Preuve.

$$(i) \sigma_{ess}(\beta) \subset \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$$

Soient $\sigma \in \sigma_{ess}(\beta)$ et (u^p) une suite singulière. Le résultat de coercivité (2.1) montre que la suite (u^p) est bornée dans V_n . La compacité de $p(\beta; \cdot, \cdot)$ (voir Lemme 2.13) implique :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p(\beta; u^p, u^p) = 0$$

D'après la décomposition (2.8) on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{p \rightarrow \infty} ((A_n(\beta) - \sigma)u^p, u^p) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} a_n(\beta; u^p, u^p) - \sigma \\ &= \left(\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \sigma \right) + \lim_{p \rightarrow \infty} b_n(\beta; u^p, u^p) \end{aligned}$$

Comme $b(\beta; u^p, u^p) \geq 0$, on déduit $\sigma \geq \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$.

$$(ii) \sigma_{ess}(\beta) \supset \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$$

On associe à $\sigma \in \left[\beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, +\infty \right[$, une suite singulière $(u^p)_{p \in \mathbf{N}^*}$. Pour cela, on désigne par $A_n^\infty(\beta)$ l'opérateur qui correspond à $A_n(\beta)$ avec les coefficients constants $\rho = \rho_\infty$, $\lambda = \lambda_\infty$ et $\mu = \mu_\infty$.

Nous avons (cf. [E.S], p. 776) :

$$A_n^\infty(\beta)u^\sigma = \sigma u^\sigma$$

où

$$u^\sigma = \begin{pmatrix} \frac{n}{r} J_n(k_2 r) \\ -k_2 J_{n-1}(k_2 r) + \frac{n}{r} J_n(k_2 r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$k_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{v_s^2} - \beta^2}, \quad v_s^2 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

En tenant compte du comportement asymptotique de la fonction de Bessel [AS] :

$$(2.12) \quad J_n(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{k\pi r}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}n\pi\right) \quad (r \rightarrow \infty)$$

on voit que u^σ n'appartient pas à $D(A_n(\beta))$. Pour cette raison on introduit la fonction de troncature φ_p qui a les propriétés suivantes :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \varphi_p(r) = \varphi\left(\frac{r}{p}\right) \\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+) \quad ; \quad \varphi(r) = 0 \text{ si } r < R \\ \int_0^\infty |\varphi|^2 dr = 1 \end{cases}$$

Nous définissons la suite (u^p) de la manière suivante :

$$u^p(r) = \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi_p(r) u^\sigma(r)$$

Remarquons que :

$$\forall p \in N^*, \quad \text{Supp}(u^p) \cap [0, R] = \emptyset$$

u^p vérifie l'équation :

$$A_n(\beta)u^p = \sigma u^p + \epsilon_p$$

avec

$$\epsilon_p = \frac{1}{\rho_\infty r \sqrt{p}} \left[\frac{d\varphi_p}{dr} \left(-2B \frac{du^\sigma}{dr} + \left(\frac{1}{r}B + B_1 - B_2 \right) u^\sigma \right) + \frac{d^2\varphi_p}{dr^2} B u^\sigma \right]$$

d'où l'inégalité :

$$|\epsilon_p|^2 \leq \frac{C}{p} \left(\left| \frac{d^2\varphi_p}{dr^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi_p}{dr} \right|^2 \right) \left(|u^\sigma|^2 + \left| \frac{du^\sigma}{dr} \right|^2 \right)$$

En utilisant (2.12), on peut voir que la fonction :

$$|u^\sigma|^2 + \left| \frac{du^\sigma}{dr} \right|^2$$

est bornée sur \mathbf{R}^+ . Ainsi il existe une constante $C(\sigma) \geq 0$ telle que :

$$|\epsilon_p|^2 \leq \frac{C(\sigma)}{p} \left(\left| \frac{d^2\varphi_p}{dr^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi_p}{dr} \right|^2 \right)$$

et

$$\|\epsilon_p\|^2 \leq \frac{C(\sigma)}{p} \int_0^\infty \left(\left| \frac{d^2 \varphi_p}{dr^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi_p}{dr} \right|^2 \right) r dr$$

ou encore

$$\|\epsilon_p\|^2 \leq \frac{C(\sigma)}{p} \int_0^\infty (|\varphi'(r)|^2 + \frac{1}{p^2} |\varphi''(r)|^2) r dr$$

et finalement on obtient :

$$\|(A_n(\beta) - \sigma)u^p\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$

Montrons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ et un entier p_0 tels que :

$$\|u^p\| \geq \alpha \quad \forall p \geq p_0$$

En effet nous avons :

$$\begin{aligned} \|u^p\|^2 &= \frac{1}{p} \int_0^\infty \left| \varphi\left(\frac{r}{p}\right) u^\sigma(r) \right|^2 r dr \\ &= p \int_0^\infty |\varphi(r) u^\sigma(pr)|^2 r dr \end{aligned}$$

A partir de (2.12) on déduit la formule asymptotique :

$$|u^p(pr)|^2 \simeq \frac{k_2}{\pi pr} (1 + (-1)^{n+1} \sin(2k_2 pr)) \quad (p \rightarrow \infty)$$

d'où

$$\|u^p\|^2 \simeq \frac{k_2}{\pi} \left[1 + (-1)^{n+1} \int_0^\infty \varphi^2(r) \sin(2k_2 pr) dr \right] \quad (p \rightarrow \infty)$$

Le théorème de Riemman nous dit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi^2(r) \sin(2k_2 pr) dr = 0 \quad \text{quand} \quad p \rightarrow \infty$$

ce qui répond à la question.

On peut donc supposer $\|u^p\| = 1$ (quitte à remplacer u^p par $\frac{u^p}{\|u^p\|}$).

Il reste à prouver que $u^p \rightarrow 0$ (faiblement) dans H . Pour cela, on va utiliser la densité de $D(\mathbb{R}^+)^3$ dans H .

Soient $v \in H$ et $\epsilon > 0$ quelconque ; il existe alors une fonction $\phi_\epsilon \in D(\mathbb{R}^+)^3$ telle que :

$$\|v - \phi_\epsilon\| < \epsilon$$

On peut écrire :

$$\int_0^\infty u^p v r dr = \int_0^\infty u^p \phi_\epsilon r dr + \int_0^\infty u^p (v - \phi_\epsilon) r dr$$

ce qui implique l'inégalité

$$\left| \int_0^\infty u^p v r dr \right| \leq \int_0^\infty |u^p \phi_\epsilon| r dr + \left(\int_0^\infty |v - \phi_\epsilon|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}},$$

puis

$$\left| \int_0^\infty u^p v r dr \right| \leq \int_0^\infty |u^p \phi_\epsilon| r dr + \epsilon.$$

Il existe un rang $p_0(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\text{Supp}(u^p) \cap \text{Supp}(\phi_\epsilon) = \emptyset \quad \text{si } p \geq p_0(\epsilon),$$

par conséquent :

$$\left| \int_0^\infty u^p v r dr \right| \leq \epsilon \quad \forall p \geq p_0(\epsilon)$$

Ceci prouve que la suite (u^p) est singulière. □

2.3.2 Majoration des valeurs propres

Nous allons montrer que le spectre essentiel $\sigma_{ess}(\beta)$ ne contient pas de valeurs propres strictement supérieures à $\beta^2 v_p^2$.

Lemme 2.15. *Soit u une fonction propre de l'opérateur $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 \geq \beta^2 v_p^2$. Alors on a :*

(1) si $\omega \in]\beta v_s, \beta v_p[$ et $r > R$, u se met sous la forme :

$$u(r) = A \begin{pmatrix} k_1 \frac{dK_n}{dr}(k_1 r) \\ -\frac{n}{r} K_n(k_1 r) \\ \beta K_n(k_1 r) \end{pmatrix}$$

où $K_n(z)$ est la fonction de Bessel modifiée et $k_1 = (\beta^2 - \omega^2/v_p^2)^{\frac{1}{2}}$

(2) Si $\omega > \beta v_p$, alors $u(r) = 0, \forall r \geq R$.

Preuve. Si $r \geq R$ le système $A_n(\beta)u = \omega^2 u$ est à coefficients constants. Il admet une solution analytique qui s'écrit ([E.S], p.776) :

$$u(r) = A\chi_1(r) + B\chi_2(r) + C\chi_3(r) \quad ((A, B, C) \text{ constantes réelles})$$

avec

$$\begin{aligned}\chi_1(r) &= \left(k_1 \frac{dR_n}{dr}(k_1 r), -\frac{n}{r} R_n(k_1 r), \beta R_n(k_1 r) \right) \\ \chi_2(r) &= \left(\frac{n}{r} R_n(k_2 r), -k_2 \frac{dR_n}{dr}(k_2 r), 0 \right) \\ \chi_3(r) &= \left(-\beta k_2 \frac{dR_n}{dr}(k_2 r), \beta \frac{n}{r} R_n(k_2 r), -k_2^2 R_n(k_2 r) \right)\end{aligned}$$

et

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{v_p^2} - \beta^2; \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{v_s^2} - \beta^2; \quad \omega = \omega(\beta)$$

$R_n(kr)$ est une solution réelle de l'équation de Bessel sur l'intervalle $[R, +\infty[$:

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0$$

donc

$$R_n(kr) = \begin{cases} C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr), & \text{si } k^2 > 0; \\ C_3 K_n(|k|r) + C_4 I_n(|k|r), & \text{si } k^2 < 0. \end{cases}$$

(i) Supposons que $\omega \in]\beta v_s, \beta v_p[$ (dans ce cas $k_1^2 < 0$ et $k_2^2 > 0$).

A l'aide des formules asymptotiques [AS] :

$$R_n(r) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \left[C_1 \cos \left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + C_2 \sin \left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] & \text{si } k^2 > 0; \\ \sqrt{\frac{1}{2|k|\pi r}} \left[\pi C_3 e^{-|k|r} + C_4 e^{|k|r} \right] & \text{si } k^2 < 0. \end{cases}$$

on déduit que

$$\chi_1(r) \in H; \quad \chi_2(r) \notin H; \quad \chi_3(r) \notin H$$

donc

$$u \in H \iff B = C = 0$$

ou encore

$$u \in H \iff u(r) = A \chi_1(r)$$

(ii) Supposons $\omega > \beta v_p$. Alors $k_1^2 > 0$ et $k_2^2 > 0$ et on a :

$$\chi_i(r) \notin H \quad \forall i = 1, 2, 3$$

d'où

$$u(r) = 0 \quad \forall r \geq R$$

□

Proposition 2.16. *Pour tout β et tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs propres ω^2 de l'opérateur $A_n(\beta)$ vérifient :*

$$\omega^2 \leq \beta^2 v_p^2$$

Preuve. Supposons qu'il existe $\omega > \beta v_p$ et $u \in V_n$ tels que :

$$A_n(\beta)u = \omega^2 u$$

D'après le lemme 2.15

$$u(r) = 0 \quad \text{pour } r > R$$

Montrons que :

$$u(r) = 0 \quad \text{pour } 0 < r < R$$

Nous avons à résoudre le système :

$$(P_n) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dr}(B \frac{du}{dr}) + B_1 \frac{du}{dr} - \frac{d}{dr}(B_2 u) + B_3 u = \omega^2 \rho r u, & 0 < r < R \\ u(R) = \frac{du}{dr}(R) = 0 & (u \in H_{loc}^2(]0, R])^3 \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} v = u \\ w = -B \frac{du}{dr} - B_2 u \end{cases}$$

alors

$$\frac{dv}{dr} = -B^{-1}w - B^{-1}B_2 v$$

et

$$v(R) = w(R) = 0$$

A l'aide du changement d'inconnue $z = (v, w)$, le système (P_n) est équivalent au problème de Cauchy :

$$(C_n) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dr} = M(r)z, & 0 < r < R \\ z(R) = 0 \end{cases}$$

où

$$M(r) = \begin{pmatrix} -B^{-1}B_2 & -B^{-1} \\ B_1 B^{-1} B_2 + \bar{B}_3 & B_1 B^{-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\bar{B}_3 = -B_3 + \omega^2 \rho r I \quad \text{et } I \text{ la matrice identité}$$

Comme la fonction :

$$r \longrightarrow \|M(r)\|$$

est mesurable et bornée sur chaque intervalle du type $] \epsilon, R[$, $\epsilon > 0$, le problème (C_n) possède l'unique solution $z = 0$ sur l'intervalle $]0, R[$ (cf. [CL] p. 37, problème 2). Ce qui établit la proposition. \square

Remarque 2.17 La question concernant l'existence des valeurs propres dans l'intervalle $]\beta^2 v_s^2, \beta^2 v_p^2[$ a été étudiée dans [J] et [J.W]. Dans ces travaux on donne, en particulier, un exemple d'opérateur pour lequel il existe de telles valeurs propres. L'opérateur correspond à un milieu où (μ, ρ) sont constantes et λ vérifie l'inégalité $\lambda_- < \lambda_\infty$. Moyennant ces hypothèses, on montre que l'opérateur $A_n(\beta)$ se découple en donnant naissance à un opérateur de Schrödinger dont le spectre discret (non vide) est inclus dans l'intervalle $[\beta^2 v_s^2, \beta^2 v_p^2[$.

Proposition 2.18. *Les valeurs propres de $A_n(\beta)$ peuvent s'accumuler seulement à gauche de $\beta^2 v_p^2$.*

Preuve.

1. Les valeurs propres discrètes ne s'accumulent pas à gauche de $\beta^2 v_s^2$, sinon on obtiendrait une contradiction avec la proposition 3.7.

2. On va raisonner par l'absurde en supposant que $\sigma \in [\beta^2 v_s^2, \beta^2 v_p^2[$ est un point d'accumulation du spectre ponctuel. Il existe alors une suite $\omega_m^2 \in \mathbf{R}^+$ et une suite $u_m \in D(A_n(\beta))$ vérifiant :

$$\begin{cases} \omega_m^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sigma \\ A_n(\beta)u_m = \omega_m^2 u_m \\ \|u_m\| = 1 \end{cases}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la suite (ω_m) est strictement décroissante.

La coercivité de $a_n(\beta; \cdot, \cdot)$ montre que la suite (u_m) est bornée dans V_n . Alors on peut supposer que (u_m) converge faiblement vers $u \in H$. Comme la suite (u_m) est orthogonale, on a nécessairement $u = 0$.

D'après le lemme 2.15, $u_m(r)$ admet, pour $r > R$, la représentation :

$$u_m(r) = C_m \chi_1(k_m r)$$

avec

$$k_m = \beta \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\beta^2 v_p^2} \right)^{1/2}$$

et

$$\chi_1(kr) = \begin{pmatrix} -kK_{n-1}(kr) - \frac{n}{r}K_n(kr) \\ -\frac{n}{r}K_n(kr) \\ \beta K_n(kr) \end{pmatrix}$$

Montrons que la suite $(C_m)_m$ est bornée. D'une part la fonction $|\chi_1(kr)|$ est décroissante, donc on a :

$$|\chi_1(k_m r)| \geq |\chi_1(k_\infty r)| > 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

avec

$$k_m \nearrow k_\infty = \beta \left(1 - \frac{\sigma^2}{\beta^2 v_p^2} \right)^{1/2} \quad (m \rightarrow \infty),$$

d'autre part la continuité de la trace entraîne :

$$|u_m(R)| \leq M_1 \|u_m\|_{V_n}$$

d'où

$$|C_m| = \left| \frac{u_m(R)}{\chi_1(k_m R)} \right| \leq M_1 \frac{\|u_m\|_{V_n}}{|\chi_1(k_\infty R)|} \leq M_2$$

A partir de la formule asymptotique :

$$\chi_1(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} e^{-k_0 r} \left[1 + O(1/r) \right] (-k_0, 0, \beta)$$

on déduit la propriété :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists R_1 > R \quad \text{tel que} \quad \int_{R_1}^{\infty} |\chi_1(k_m r)|^2 r dr \leq \int_{R_1}^{\infty} |\chi_1(k_0 r)|^2 r dr \leq \epsilon.$$

Comme (u_m) est bornée dans V_n et converge faiblement vers 0 (dans H) on sait, au besoin en prenant une sous-suite, que :

$$\int_0^{R_1} |u_m|^2 r dr \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad m \rightarrow \infty$$

et l'égalité :

$$1 = \int_0^{R_1} |u_m|^2 r dr + |C_m|^2 \int_{R_1}^{\infty} |\chi_1(k_m r)|^2 r dr$$

entraîne pour m assez grand :

$$1 \leq \epsilon + M_2^2 \epsilon$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit, on est conduit à une contradiction. \square

Chapitre 3

Le spectre discret de l'opérateur $A_n(\beta)$. Existence des modes guidés

Dans ce chapitre on étudie les valeurs propres qui appartiennent au spectre discret de $A_n(\beta)$. On les caractérise à l'aide du principe du Min–Max (cf. [R.S]).

Définition 3.1 Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, notons par $S_m^n(\beta)$ le nombre réel défini par :

$$(3.1) \quad S_m^n(\beta) = \sup_{(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) \in H} \left(\inf_{\substack{v \in [v_1, v_2, \dots, v_{m-1}]^\perp \\ v \neq 0}} \frac{a_n(\beta; v, v)}{\|v\|^2} \right)$$

où

$$[v_1, v_2, \dots, v_{m-1}]^\perp = \{v \in V_n; (v, v_j) = 0, 1 \leq j \leq m-1\}$$

Une caractérisation équivalente des nombres $S_m^n(\beta)$ est fournie par :

$$(3.2) \quad S_m^n(\beta) = \inf_{V \in F_m} \left(\sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a_n(\beta; v, v)}{\|v\|^2} \right)$$

ou F_m désigne la famille des sous-espaces de V_n de dimension m .

Le théorème 2.14 et le principe du Min–Max (cf. [R.S]) nous permettent d'énoncer :

Proposition 3.1. *Pour tout $\beta \in \mathbf{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $(S_m^n(\beta))_{m \in \mathbf{N}^*}$ est une suite croissante qui converge vers $\beta^2 v_s^2$. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ l'alternative suivante a lieu :*

(i) soit

$$S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \left(= \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)$$

et dans ce cas, l'opérateur $A_n(\beta)$ possède au moins m valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$, qui sont :

$$S_1^n(\beta) \leq S_2^n(\beta) \leq \dots \leq S_m^n(\beta)$$

(ii) soit

$$S_m^n(\beta) = \beta^2 v_s^2,$$

auquel cas , on a :

$$S_{m+1}^n(\beta) = S_{m+2}^n(\beta) = \dots = \beta^2 v_s^2$$

et $A_n(\beta)$ admet au plus $(m-1)$ valeurs propres strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$.

3.1 Existence des modes guidés

On établira dans ce paragraphe une condition suffisante portant sur les coefficients μ et ρ afin de permettre la propagation d'au moins un mode guidé dans le milieu considéré.

Théorème 3.2. *Si la condition suivante est vérifiée :*

$$(3.3) \quad \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho r dr > 0$$

alors

$$S_1^1(\beta) < \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta > 0.$$

Ainsi , pour tout $\beta > 0$, le problème $P_1(\beta)$ admet au moins une solution.

Preuve. Par définition de $S_1^1(\beta)$, il suffit de trouver $\tilde{u} \in V_1$ tel que :

$$a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) < \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2$$

Etant donné $a > R$, on définit $\phi_a(r)$ par :

$$\phi_a(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\text{Log } \frac{a}{r}}{\text{Log } \frac{a}{R}} & \text{si } R \leq r \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq r \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que :

$$\sqrt{r}\phi_a \in L^2(\mathbf{R}^+); \quad \sqrt{r}\frac{d\phi_a}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)$$

et

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr = 0.$$

En posant $\tilde{u} = (\phi_a, -\phi_a, 0)$, alors $\tilde{u} \in V_1$ et la décomposition (3.8) s'écrit pour $n = 1$:

$$a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2 = b_1(\beta, \tilde{u}, \tilde{u})$$

avec

$$b_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) = \int_0^\infty (\lambda + 3\mu) \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr - 2\beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho |\phi_a|^2 r dr$$

d'où l'inégalité :

$$a_1(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2 \leq (\lambda + 3\mu) \int_0^\infty \left| \frac{d\phi_a}{dr} \right|^2 r dr - 2\beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho r dr$$

Nous pouvons affirmer, sous l'hypothèse (3.3), qu'avec a assez grand, on a :

$$S_1^1(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.1 En tenant compte de la remarque 1.3 il existe, pour tout $\beta > 0$, au moins deux modes (c.a.d un mode double) qui se propagent dans le milieu.

Théorème 3.3. *S'il existe un intervalle ouvert $]r_0, r_1[\subset]0, R[$ et un nombre $\delta > 0$ tels que :*

$$(3.4) \quad \frac{\mu(r)}{\rho(r)} + \delta \leq \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad p.p \quad r \in]r_0, r_1[$$

alors pour tout (m, n) , il existe un réel $\beta_m(n)$ tel que :

$$(3.5) \quad S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \quad \forall \beta > \beta_m(n)$$

ce qui prouve que $A_n(\beta)$ admet au moins m valeurs propres $S_1^n(\beta), S_2^n(\beta), \dots, S_m^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$ pour $\beta > \beta_m(n)$.

Preuve. Pour $u = (u_1, 0, 0)$ on a :

$$a_n(\beta, u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 = b_n(u, u) - \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) u_1^2 \rho r dr$$

avec

$$b_n(u, u) = \int_0^\infty \left[2\mu \left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \mu \left(\frac{n^2 + 2}{r^2} \right) u_1^2 + \lambda \left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} \right)^2 \right] r dr$$

On vérifie sans peine que :

$$b_n(u, u) \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \int_0^\infty \left[\left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} u_1^2 \right] r dr$$

d'où

$$(3.6) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \int_0^\infty \left[\left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} u_1^2 \right] r dr - \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) u_1^2 \rho r dr$$

Soient $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,m}$ les m premières valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle $]r_0, r_1[$ (avec la condition de Dirichlet ($v(r_0) = v(r_1) = 0$ si $r_0 > 0$; $v(r_1) = 0$ si $r_0 = 0$) et soient $v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,m}$ les fonctions propres associées normalisées et prolongées par zéro à l'extérieur de l'intervalle $]r_0, r_1[$. Nous avons :

$$\int_0^R \left(\left| \frac{dv_{n,k}}{dr} \right|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} v_{n,k}^2 \right) r dr \leq \lambda_{n,m} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Si Y est le sous-espace engendré par $v_{n,1}, v_{n,2}, \dots, v_{n,m}$, posons

$$V = \{u = (u_1, 0, 0); u_1 \in Y\}$$

On vérifie que V est un sous-espace de V_n de dimension m . De plus, si $u \in V$, l'inégalité (3.6) et l'hypothèse (3.4) entraînent :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \leq \left[3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m} - \beta^2 \delta \right] \|u\|^2$$

Du principe du Min-Max découle l'inégalité :

$$S_m^n(\beta) - \beta^2 v_s^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m} - \beta^2 \delta$$

et nous pouvons conclure en choisissant :

$$\beta_m(n) \geq \left[\frac{3(\lambda_+ + 2\mu_+) \lambda_{n,m}}{\delta} \right]^{1/2}$$

□

3.2 Etude des seuils

Le résultat d'existence (voir théorème 3.3) nous permet de définir le $m^{\text{ième}}$ seuil supérieur (auquel correspond la fréquence de coupure), que l'on note $\beta_m^*(n)$, comme étant la plus petite valeur de $\beta_m(n)$ telle que (3.6) soit réalisée.

Par ailleurs, il pourrait exister β tel que :

$$\beta < \beta_m^*(n) \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

Il est donc naturel de définir le $m^{\text{ième}}$ seuil inférieur que l'on note $\beta_m^0(n)$, comme étant la plus grande valeur de $\beta_m(n)$ telle que :

$$\beta \leq \beta_m^*(n) \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta) = \beta^2 v_s^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a les propriétés suivantes :

- 1) Si $\beta > \beta_m^*(n)$, $A_n(\beta)$ admet au moins m valeurs propres $\omega_1^2 = S_1^n(\beta), \dots, \omega_m^2 = S_m^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$.
- 2) Si $\beta \leq \beta_m^0(n)$, $A_n(\beta)$ admet au plus $(m - 1)$ valeurs propres $\omega_1^2 = S_1^n(\beta), \dots, \omega_{m-1}^2 = S_{m-1}^n(\beta)$ strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$.
- 3) Pour tout $m=1,2,\dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \beta_m^0(n) \leq \beta_m^*(n) \\ \beta_m^0(n) \leq \beta_{m+1}^0(n) \\ \beta_m^*(n) \leq \beta_{m+1}^*(n) \end{array} \right.$$

La détermination des modes guidés (du moins ceux qui se propagent à une vitesse $v < v_s$) consiste donc à résoudre, pour tout n , entier fixé, l'équation de dispersion :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } m = 1, 2, \dots \\ S_m^n(\beta) = \omega^2 \\ S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2 \end{array} \right.$$

Dans le plan (β, ω) , le graphe de la fonction :

$$\beta \longrightarrow \omega = S_m^n(\beta)^{1/2} \quad (\omega < \beta v_s)$$

s'appelle "courbe de dispersion" du $m^{\text{ième}}$ mode guidé. On peut interpréter graphiquement la signification des seuils $\beta_m^0(n)$ et $\beta_m^*(n)$ à l'aide du graphe suivant :

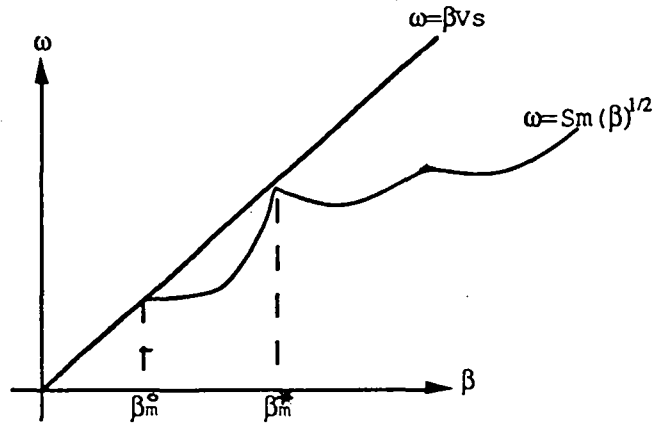


Fig 3.1 : Allure d'une courbe de dispersion

3.2.1 Estimations a priori sur les seuils

Théorème 3.4. Il existe une constante C (indépendante de m) telle que :

$$(3.8) \quad \beta_{3m-2}^0(n) \geq C \mu_{n,m}^{1/2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

où $(\mu_{n,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $|n-1|$ sur l'intervalle $]0, R[$ avec la condition limite $\frac{dv}{dr}(R) = 0$.

Preuve. En utilisant la représentation (2.8), on peut écrire :

$$(3.9) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq (\lambda_- + \mu_-) \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ + \mu_- \int_0^\infty \left[\left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr - \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho |u|^2 r dr \\ + 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \left(u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right) r dr$$

Pour tout $\epsilon > 0$, les inégalités suivantes ont lieu :

$$(3.10) \quad \int_0^\infty \left[\left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr \\ \geq \int_0^\infty C_n(u) r dr$$

$$(3.11) \quad 2\beta|\mu - \mu_\infty| \left| u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right| \leq \mu_+ \left(2\frac{\beta^2}{\epsilon} |u|^2 + \epsilon C_n(u) \right)$$

avec

$$C_n(u) = \begin{cases} \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_1^2}{r^2} & \text{si } n = 0; \\ \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_3^2}{r^2} & \text{si } n = 1; \\ \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + (n-1)^2 \frac{|u|^2}{r^2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En choisissant $0 < \epsilon < \frac{\mu_-}{\mu_+}$ on peut trouver des constantes positives C_1 et C_2 telles que , pour tout n :

$$(3.12) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq C_1 \int_0^R \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \epsilon_n (n-1)^2 \frac{|u|^2}{r^2} \right) r dr - C_2 \beta^2 \int_0^R |u|^2 r dr$$

avec

$$\epsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 1, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

1- Considérons d'abord le cas $n \geq 2$ (les cas $n = 0$ et $n = 1$ se traitent de la même manière).

Soient $(\mu_{nm})_{m \in \mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $(n-1)$ sur l'intervalle $]0, R[$ avec la condition $\frac{dw}{dr}(R) = 0$; et $(w_{nm})_{m \in \mathbb{N}^*}$ les fonctions propres normalisées associées.

On sait d'après le principe du Min-Max que :

$$\int_0^R \left(\left| \frac{dv}{dr} \right|^2 + (n-1)^2 \frac{|v|^2}{r^2} \right) r dr \geq \mu_{nm} \int_0^R |v|^2 r dr, \quad \forall v \in [w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp$$

où

$$[w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp = \{v \in W_R; \int_0^R v w_j r dr = 0, 1 \leq j \leq m\}$$

avec

$$W_R = \{v \in L^2(0, R); \int_0^R \left(\left| \frac{dv}{dr} \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) r dr < \infty\}$$

Maintenant , on définit $3(m-1)$ éléments de H par :

$$\begin{cases} v_j^{(1)} &= (\tilde{w}_{nj}, 0, 0) \\ v_j^{(2)} &= (0, \tilde{w}_{nj}, 0) \\ v_j^{(3)} &= (0, 0, \tilde{w}_{nj}) \end{cases}$$

où

$$\tilde{w}_{nj} = \begin{cases} w_{nj} & \text{si } r \in]0, R[\\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Soit V_{3m-3} le sous-espace de dimension $(3m-3)$ engendré par ces éléments. Notons que si $u \in V_{3m-3}^\perp$ alors :

$$u_i|_{]0, R[} \in [w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm}]^\perp$$

et on a :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \geq (C_1 \mu_{nm} - C_2 \beta^2) \int_0^R |u|^2 r dr \quad \forall u \in V_{3m-3}^\perp$$

Ce qui entraîne avec (3.1) l'inégalité :

$$S_{3m-2}^n \geq \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \mu_{nm} \right)^{1/2}$$

En tenant compte de la proposition 3.1, on obtient l'identité :

$$S_{3m-2}^n = \beta^2 v_s^2, \quad \forall \beta \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \mu_{nm} \right)^{1/2}$$

ce qui prouve le théorème pour $n \geq 2$.

2- Les cas $n = 0$ et $n = 1$ s'obtiennent de la même manière : il suffit de choisir comme suite $(w_{nm})_m$ le système trigonométrique $\left\{ \cos(m-1)\pi \frac{r}{R}; \quad m \in \mathbf{N}^* \right\}$.

Corollaire 3.5. Si le rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie (3.4), il existe deux constantes $C_1(n)$ et $C_2(n)$ telles que, pour m assez grand :

$$(3.13) \quad C_1(n)m \leq \beta_m^0(n) \leq \beta_m^*(n) \leq C_2(n)m$$

Preuve. Au cours de la démonstration des théorèmes 3.3 et 3.4 nous avons établi l'existence de deux constantes C_1 et C_2 (qui dépendent seulement de (λ, μ, ρ)) telles que :

$$C_1 \mu_{nm}^{1/2} \leq \beta_m^0(n) \leq \beta_m^*(n) \leq C_2 \lambda_{nm}^{1/2}$$

(μ_{nm}) (resp. (λ_{nm})) sont les valeurs propres de l'opérateur de Bessel avec la condition de Neumann (resp. de Dirichlet).

Cherchons un équivalent de (μ_{nm}) et (λ_{nm}) lorsque $m \rightarrow \infty$:

Si $r_0 > 0$, $(\lambda_{nm})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des valeurs propres d'un opérateur de Sturm-Liouville qui est régulier sur l'intervalle $[r_0, r_1]$; d'où, pour $m \rightarrow \infty$:

$$\lambda_{nm} \simeq \left(\frac{m\pi}{r_1 - r_0} \right)^2$$

Si $r_0 = 0$, $\lambda_{nm} = \left(\frac{j_{n+1,m}}{r_1} \right)^2$ où $(j_{n+1,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ désigne la suite des zéros de $J_{n+1}(r)$; d'où, pour $m \rightarrow \infty$:

$$\lambda_{nm} \simeq \left(\frac{m\pi}{r_1} \right)^2$$

D'autre part, $\mu_{nm} = \left(\frac{j'_{n-1,m}}{R} \right)^2$ où $(j'_{n-1,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ désigne la suite des zéros de $J'_{n-1}(r)$, par conséquent :

$$\mu_{nm} \simeq \left(\frac{m\pi}{R} \right)^2 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Ce qui établit les inégalités (3.13). □

Remarque 3.2 L'inégalité (3.13) n'est pas en contradiction avec le résultat du théorème 3.10 du rapport [BDJ] car les seuils β_m^0 (resp. β_m^*) de ce théorème sont inférieurs aux seuils $\beta_m^0(n)$ (resp. $\beta_m^*(n)$). Nous énonçons la conjecture suivante : il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\beta_m^*(n) \geq Cn\beta_m^*$.

Proposition 3.6. *Il existe $\eta > 0$ tel que , pour tout $n \geq 2$, on ait :*

$$(3.14) \quad \beta_1^0(n) \geq \eta(n-1)$$

Preuve. D'après l'inégalité (3.12) il existe C_1 et C_2 tels que :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \geq C_1(n-1)^2 \int_0^R \frac{|u|^2}{r} dr - C_2 \beta^2 \int_0^R |u|^2 r dr$$

D'autre part l'inégalité :

$$\int_0^R |u|^2 r dr \leq R^2 \int_0^R \frac{|u|^2}{r} dr$$

entraîne :

$$a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \geq \left(\frac{C_1(n-1)^2}{R^2} - C_2 \beta^2 \right) \int_0^R |u|^2 r dr$$

Le terme de droite est positif si $\beta \leq \frac{n-1}{R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$, ce qui montre que :

$$\beta_1^0(n) \geq \eta(n-1) \quad \text{avec } \eta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

□

Désignons par $N_n(\beta)$ le nombre de valeurs propres de $A_n(\beta)$ dans l'intervalle $\left[\frac{\mu_-}{\rho_+}, \beta^2 v_s^2\right]$. Alors

$$N(\beta) = N_0(\beta) + 2 \sum_{n \geq 1} N_n(\beta)$$

est le nombre total des modes guidés pouvant se propager dans le milieu avec une vitesse $v(\beta) = \frac{\omega(\beta)}{\beta} < v_s$ (rappelons que, si $n \geq 1$, chaque valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ est au moins double).

Proposition 3.7. *Pour tout $\beta > 0$, le nombre $N(\beta)$ est fini.*

Preuve.

1- $N_n(\beta)$ est fini. Dans le cas contraire on aurait :

$$\beta_m^0(n) < \beta \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (3.13) lorsque $m \rightarrow \infty$.

2- $N_n(\beta) = 0$ si n est assez grand : en effet, si $n > 1 + \beta/\eta$, alors on a, d'après (3.14) :

$$\beta < \beta_1^0(n)$$

ce qui signifie, par définition de $\beta_1^0(n)$, que :

$$N_n(\beta) = 0 \quad \text{si } n > 1 + \frac{\beta}{\eta}$$

la proposition est une conséquence de 1 et 2. □

Théorème 3.8. *On a :*

$$(i) \quad \beta_1^0(0) > 0$$

$$(ii) \quad \beta_2^0(1) > 0$$

Ceci implique que : pour β assez petit, il se propage au plus deux modes guidés.

Preuve.

(i) Si $n = 0$ l'inégalité (3.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad a_0(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \lambda_- \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \mu_- \int_0^\infty \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_1^2 + u_2^2}{r^2} \right) r dr \\
 &+ 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \left(u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right) r dr \\
 &- \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho} \right) \rho |u|^2 r dr
 \end{aligned}$$

Soient $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $0 < \eta < 1/2$ et $R' \geq R$. On a :

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad \lambda_- \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr &\geq \epsilon \lambda_- \int_0^{R'} |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\
 &\geq \epsilon \lambda_- \left[\beta^2 (1 - 2\eta) \int_0^{R'} u_3^2 r dr - \frac{1}{\eta} \int_0^{R'} \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{u_1^2}{r^2} \right) r dr \right]
 \end{aligned}$$

$$(3.17) \quad 2\beta |\mu - \mu_\infty| \left| u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right| \leq |\mu - \mu_\infty| \left[\frac{\beta^2}{\epsilon} (u_1^2 + 2u_3^2) + \epsilon \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_1^2}{r^2} \right) \right]$$

En joignant ces inégalités avec (3.15), et après quelques transformations, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 (3.18) \quad a_0(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq (\mu_- - \epsilon \mu_+ - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^\infty \left| \frac{du}{dr} \right|^2 r dr \\
 &+ \left[\frac{1}{R^2} (\mu_- - \epsilon \mu_+ - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2 \left(\rho_+ \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty + \frac{\mu_+}{\epsilon} \right) \right] \int_0^R u_1^2 r dr \\
 &+ \left[\frac{\mu_-}{R^2} - \beta^2 \rho_+ \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right] \int_0^R u_2^2 r dr \\
 &+ \beta^2 \int_0^{R'} \left[\epsilon \lambda_- (1 - 2\eta) - \frac{2}{\epsilon} |\mu - \mu_\infty| + \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho \right] u_3^2 r dr
 \end{aligned}$$

Considérons la décomposition de u_3 :

$$\begin{cases} u_3 &= u_{3p} + u_{3p}^\perp \\ u_{3p}^\perp &= \frac{1}{R'} \int_0^{R'} u_3 r dr \end{cases}$$

u_{3p} vérifie alors :

$$\int_0^{R'} u_{3p} r dr = 0$$

On établira en annexe 3 qu'il existe une constante $C(R') \geq 0$ telle que :

$$(3.19) \quad \int_0^{R'} |u_{3p}|^2 r dr \leq C(R') \int_0^{R'} \left| \frac{du_{3p}}{dr} \right|^2 r dr$$

Posons :

$$K(r) = \epsilon \lambda_- (1 - 2\eta) - \frac{2}{\epsilon} |\mu - \mu_\infty| + \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)$$

On peut écrire :

$$(3.20) \quad \int_0^{R'} K(r) u_3^2 r dr = (u_{3p}^\perp)^2 \int_0^{R'} K(r) r dr + D$$

où D peut être estimé comme suit (γ quelconque) :

$$(3.21) \quad |D| \leq \|K\|_\infty \left[(u_{3p}^\perp)^2 \gamma \frac{R'^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \int_0^{R'} |u_{3p}|^2 r dr \right]$$

En tenant compte simultanément des relations (3.18) à (3.21) on déduit, pour tout $u \in V_0$:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} a_0(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \left[C(R') (\mu_- - \epsilon \mu_+ - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2 \|K\|_\infty \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right] \int_0^{R'} |u_{3p}|^2 r dr \\ &+ \left[\frac{1}{R^2} (\mu_- - \epsilon \mu_+ - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2 \left(\rho_+ \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty + \frac{\mu_+}{\epsilon} \right) \right] \int_0^R u_1^2 r dr \\ &+ \left[\frac{\mu_-}{R^2} - \beta^2 \rho_+ \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right] \int_0^R u_2^2 r dr \\ &+ \beta^2 (u_{3p}^\perp)^2 \left[\int_0^{R'} K(r) r dr - \gamma \|K\|_\infty \frac{R'^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Nous choisissons les paramètres ϵ , η et γ dans l'ordre suivant :

1- $\epsilon > 0$ tel que :

$$\mu_- - \epsilon \mu_+ - \epsilon \frac{\lambda_-}{\eta} > 0$$

2- Puisque $K(r) = \epsilon \lambda_- (1 - 2\eta)$ si $r \geq R$, il existe R' assez grand tel que :

$$\int_0^{R'} K(r) r dr > 0$$

3- γ assez petit pour que :

$$\int_0^{R'} K(r) r dr - \gamma \|K\|_\infty \frac{R'^2}{2} > 0$$

4- Finalement, si β est assez petit , on a :

$$\begin{cases} C(R')(\mu_- - \epsilon\mu_+ - \epsilon\frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2\|K\|_\infty(1 + \frac{1}{\gamma}) & \geq 0 \\ \left[\frac{1}{R^2}(\mu_- - \epsilon\mu_+ - \epsilon\frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2\left(\rho_+\|\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\|_\infty + \frac{\mu_+}{\epsilon}\right) \right] & \geq 0 \\ \left[\frac{\mu_-}{R^2} - \beta^2\rho_+\|\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\|_\infty \right] & \geq 0 \end{cases}$$

Ce qui entraîne

$$a_0(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in V_0$$

d'où

$$S_1^0(\beta) = \beta^2 v_s^2$$

c'est à dire que :

$$0 < \beta \leq \beta_1^0(0)$$

(ii) Dans le cas $n = 1$ nous utilisons les inégalités suivantes :

$$(3.23) \quad \lambda_- \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \geq \epsilon \lambda_- \left[\beta^2 (1-2\eta) \int_0^R u_3^2 r dr - \frac{1}{\eta} \int_0^R \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{(u_1 + u_2)^2}{r^2} \right) r dr \right]$$

$$(3.24) \quad 2\beta |\mu - \mu_\infty| \left| u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_3}{dr} + \frac{u_1 u_3}{r} \right| \leq |\mu - \mu_\infty|^2 \frac{\beta^2}{\epsilon} (2u_1^2 + u_3^2) + \epsilon \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right)$$

pour avoir, après quelques manipulations, l'inégalité :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq (\mu_- - \epsilon - \epsilon\frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^R \left| \frac{du}{dr} \right|^2 r dr \\ &+ \beta^2 \int_0^{R'} (K_1 u_1^2 + K_2 u_2^2 + K_3 u_3^2) r dr \\ &+ (\mu_- - \epsilon\frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{cases} K_1(r) = \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) - \frac{2}{\epsilon} |\mu - \mu_\infty|^2 \\ K_2(r) = \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \\ K_3(r) = \epsilon \lambda (1 - 2\mu) + \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) - \frac{1}{\epsilon} |\mu - \mu_\infty|^2 \end{cases}$$

De la même manière on décompose u comme suit :

$$\begin{cases} u = u_p + u_p^\perp \\ u_p^\perp = \frac{1}{R'} \int_0^{R'} u r dr \end{cases}$$

alors il existe $C(R') \geq 0$ tel que :

$$\int_0^{R'} \left| \frac{du_p}{dr} \right|^2 r dr \geq C(R') \int_0^{R'} |u_p|^2 r dr$$

En suivant la même démarche que dans (i), on obtient :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) &\geq \left[C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K \right] \int_0^{R'} |u|^2 r dr \\ &+ \beta^2 \sum_{i=1}^3 (u_{pi}^\perp)^2 \left(\int_0^{R'} K_i(r) r dr - \gamma K \frac{R'^2}{2} \right) \\ &+ (\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

avec

$$K = \max\{\|K_i\|_\infty; 1 \leq i \leq 3\}$$

On choisit ε , η , R' , γ , et β de manière à avoir dans l'ordre :

- (1) $\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta} > 0$
- (2) $\int_0^{R'} K_3(r) r dr > 0$
- (3) $\int_0^{R'} K_3(r) r dr - \gamma K \frac{R'^2}{2} > 0$
- (4) $C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K > 0$

On pose $v_1(r) = (\chi(r), 0, 0)$ avec

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < r < R'; \\ 0, & \text{si } R' < r \end{cases}$$

Maintenant si $u \in V_1$ et u est orthogonal à v_1 alors $u_{1p}^\perp = 0$ et on a :

$$(3.27) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) &\geq \left[C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K \right] \int_0^{R'} |u_{1p}|^2 r dr \\ &+ \beta^2(u_{2p}^\perp)^2 \left(\int_0^{R'} K_2(r) r dr - \gamma K \frac{R'^2}{2} \right) \\ &+ (\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^\infty |u_1 + u_2|^2 \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

Montrons que le second membre est positif si β est voisin de 0. Pour cela on distingue deux cas :

1- On suppose que $\int_0^{R'} |u_{1p}|^2 r dr = 0$; alors $u_{1p} = 0$ et on a :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) &\geq (\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_0^{R'} |u_2|^2 \frac{dr}{r} - \beta^2 K \int_0^R |u_2|^2 r dr \\ &\geq \left[R'^2(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2 K \right] \int_0^{R'} |u_2|^2 r dr \\ &\geq 0 \quad \text{si } \beta \text{ est petit.} \end{aligned}$$

2- Supposons que $\int_0^{R'} |u_{1p}|^2 r dr > 0$.

* Si $u_{2p}^\perp = 0$, l'inégalité (3.27) montre que , pour β suffisamment petit :

$$a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq 0, \quad \forall u \in [v_1]^\perp$$

* Si $u_{2p}^\perp \neq 0$, (3.27) entraîne que , pour $b \geq R$:

$$(3.29) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \left[C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K \right] \int_0^{R'} |u_{1p}|^2 r dr \\ &- \beta^2(u_{2p}^\perp)^2(1 + \gamma)K \frac{R'^2}{2} \\ &+ (\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_b^{2b} |u_{1p} + u_2|^2 \frac{dr}{r}, \quad \forall u \in [v_1]^\perp \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie que :

$$\int_b^{2b} |u_{1p} + u_2|^2 \frac{dr}{r} \geq \int_b^{2b} \left(\frac{1}{2}(u_{2p}^\perp)^2 - 2u_{1p}^2 \right) \frac{dr}{r} \geq \frac{\log 2}{2}(u_{2p}^\perp)^2 - 2 \int_b^{2b} u_{1p}^2 \frac{dr}{r}$$

Ce qui entraîne avec (3.29) l'inégalité :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \left[C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K \right] \int_0^{R'} |u_{1p}|^2 r dr \\ &+ (u_{2p}^\perp)^2 \left[\frac{\text{Log } 2}{2}(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2 K(1 + \gamma) \frac{R'^2}{2} \right] \\ &- 2(\mu_- - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) \int_b^{2b} |u_{1p}|^2 \frac{dr}{r} \quad \forall u \in [v_1]^\perp \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{2b} |u_{1p}|^2 \frac{dr}{r} = 0$$

on peut choisir b assez grand pour que :

$$a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in [v_1]^\perp$$

Ainsi

$$S_2^1(\beta) = \beta^2 v_s^2, \quad \text{pour } \beta \text{ petit}$$

et par suite,

$$\beta_2^0(1) > 0$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.9. □

Théorème 3.10. *Sous la condition :*

$$(3.31) \quad \int_0^R \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho r dr \geq \frac{1}{\mu_-} \int_0^R |\mu - \mu_\infty|^2 r dr$$

le seuil $\beta_1^0(1)$ est strictement positif.

Preuve. En choisissant convenablement les paramètres ε , η , R' et γ l'inégalité (3.26) entraîne :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} a_1(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 &\geq \left[C(R')(\mu_- - \varepsilon - \varepsilon \frac{\lambda_-}{\eta}) - \beta^2(1 + \frac{1}{\gamma})K \right] \int_0^{R'} |u|^2 r dr \\ &+ \beta^2 \left((u_{1p}^\perp)^2 + (u_{2p}^\perp)^2 \right) \left[\int_0^R (K_1 + K_2) r dr - \gamma K \frac{R'^2}{2} \right] \quad \forall u \in V_1 \end{aligned}$$

Si $\varepsilon < \mu_-$, la condition (3.31) entraîne :

$$\int_0^R (K_1 + K_2) r dr > 0$$

On peut donc rendre le second membre de l'inégalité (3.32) positif si γ et β sont assez petits, ce qui montre que $\beta_1^0(1) > 0$. \square

En regroupant les résultats obtenus jusqu'ici on conclut, sous l'hypothèse (3.31), que $\beta_1^0(n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ceci signifie que si β est suffisamment petit, il n'existe aucun mode guidé de vitesse strictement inférieure à v_s .

3.2.2 Equation des seuils

Soit $\beta > \beta_m^*(n)$, $\beta_m^*(n)$ étant le seuil supérieur d'ordre m . Alors on a, par définition de $\beta_m^*(n)$:

$$S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

et chaque mode guidé associé à la fréquence $\omega = S_m^n(\beta)^{1/2}$ possède une amplitude u exponentiellement décroissante, de façon précise u a le comportement asymptotique :

$$u(r) \simeq C_1 \chi_1(r) + C_2 \chi_2(r) + C_3 \chi_3(r). \quad (r \rightarrow \infty)$$

avec

$$\begin{cases} \chi_1(r) &= \sqrt{\frac{1}{k_1 r}} e^{-k_1 r} (-k_1, 0, \beta) \\ \chi_2(r) &= \sqrt{\frac{1}{k_2 r}} e^{-k_2 r} (0, k_2, 0) \\ \chi_3(r) &= \sqrt{\frac{1}{k_2 r}} e^{-k_2 r} (\beta k_2, 0, -k_2^2) \end{cases}$$

où

$$k_1^2 = (\beta^2 - \omega^2/v_p^2) \quad \text{et} \quad k_2^2 = (\beta^2 - \omega^2/v_s^2)$$

Si β tend vers $\beta_m^*(n)$, k_2 tend vers 0 et les fonctions $\sqrt{r}\chi_2(r)$ et $\sqrt{r}\chi_3(r)$ perdent leur caractère L^2 à l'infini, autrement dit le mode u est de moins en moins guidé (à la limite $\beta = \beta_m^*(n)$, $u \notin H$). Lorsque $\beta = \beta_m^*(n)$, on dit qu'il y a coupure du mode.

Nous allons montrer dans ce paragraphe, qu'à la coupure, le champ u n'est plus dans V_n mais dans un espace plus large, noté W_n , et que les seuils sont les solutions d'un problème de valeurs propres généralisées.

Notre étude s'inspire de BAMBERGER-BONNET [B.B]. Nous posons :

$$q_n(\beta; u, u) = a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2 \quad \forall u \in V_n$$

Alors nous avons :

$$q_n(\beta; u, u) = b_n(\beta; u, u) + p(\beta; u, u)$$

avec

$$b_n(\beta; u, u) = \int_0^\infty (\lambda + \mu) |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ + \int_0^\infty \mu \left[\left(\frac{du_1}{dr} - \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right] r dr$$

et

$$p(\beta; u, u) = \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho |u|^2 r dr + 2\beta \int_0^\infty (\mu - \mu_\infty) \frac{d}{dr} (ru_1 u_3) dr$$

Nous voyons que $q_n(\beta; u, u)$ est une forme quadratique définie sur un espace W_n , contenant V_n , caractérisé de la façon suivante :

si $n \neq 1$

$$W_n = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^3; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^3; \frac{1}{\sqrt{r}}(u_1, u_2, nu_3) \in L^2(\mathbf{R}^+)^3; \sqrt{r}u_3 \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

et

$$W_1 = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^3; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^3; \frac{1}{\sqrt{r}}(u_1 + u_2, u_3) \in L^2(\mathbf{R}^+)^2; \\ \sqrt{r}u_3 \in L^2(\mathbf{R}^+); \sqrt{r}(u_1, u_2) \in L^2(0, R)^2\}$$

On montrera en annexe 2 que $D(\mathbf{R}^+)^2$ est dense dans W_n .

Pour assurer l'existence des seuils $\beta_m^0(n)$ (resp. $\beta_m^*(n)$) nous supposons, dans ce qui suit, par exemple que la condition (3.4) est satisfaite.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ fixé, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.11. *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\beta_m^*(n)$ et $\beta_m^0(n)$ sont solutions du problème suivant :*

$$(S_n) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \beta \in \mathbf{R}^+ \text{ tel qu'il existe } u \text{ vérifiant :} \\ u \in W_n, u \neq 0 \\ q_n(\beta; u, v) = 0 \quad \forall v \in W_n \end{cases}$$

Preuve. Soit (β^p) une suite de réels telle que :

$$\begin{cases} \beta^p > \beta_m^*(n) & \forall p \in \mathbb{N} \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \beta^p = \beta_m^*(n) \end{cases}$$

Soit $(u^p)_p$ une suite de fonctions non nulles de V_n telle que :

$$(3.33) \quad a_n(\beta^p; u^p, v) = S_m^n(\beta^p)(u^p, v) \quad \forall v \in V_n$$

Posons dans cette égalité $v = u^p$ pour avoir :

$$(3.34) \quad b_n(\beta^p; u^p, u^p) = (S_m^n(\beta^p) - (\beta^p)^2 v_s^2) \|u^p\|^2 - p(\beta^p; u^p, u^p)$$

D'après la définition de $\beta_m^*(n)$, on a :

$$S_m^n(\beta^p) < (\beta^p)^2 v_s^2$$

ce qui entraîne avec (3.34) que $p(\beta^p; u^p, u^p) < 0$; de ce fait on peut normaliser u^p par la relation :

$$(3.35) \quad \int_0^R \rho |u^p|^2 r dr = 1$$

On a aussi

$$(3.36) \quad b_n(\beta^p; u^p, u^p) \leq |p(\beta^p; u^p, u^p)|$$

ε étant arbitraire, on peut vérifier les inégalités :

$$(3.37) \quad |p(\beta^p; u^p, u^p)| \leq (\beta^p)^2 \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty + \beta^p \|\mu - \mu_\infty\|_\infty \left(\frac{2}{\varepsilon \rho_-} + \varepsilon r_n(u^p) \right)$$

avec

$$r_n(u) = \begin{cases} \int_0^R \left(\left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{u_3^2}{r^2} \right) r dr & \text{si } n \neq 0; \\ \int_0^R \left(\left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{u_1^2}{r^2} \right) r dr & \text{si } n = 0; \end{cases}$$

et

$$(3.38) \quad \begin{aligned} b_n(\beta^p; u^p, u^p) &\geq (\lambda_- + \mu_-) \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u^p|^2 r dr \\ &+ \mu_- \int_0^\infty \left[\left| \frac{du^p}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} ((u_1^p)^2 + (u_2^p)^2) + \frac{4nu_1^p u_2^p}{r^2} + \frac{n^2 (u_3^p)^2}{r^2} \right] r dr \end{aligned}$$

Combinant (3.37) et (3.38) on obtient :

$$(3.39) \quad (\mu_- - \varepsilon \beta^p \|\mu - \mu_\infty\|_\infty) r_n(u^p) \leq (\beta^p)^2 \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty + \beta^p \frac{2}{\varepsilon \rho_-} \|\mu - \mu_\infty\|$$

En choisissant ε assez petit, (3.39) montre que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $(r_n(u^p))_p$ est bornée. Par conséquent la suite $(b_n(\beta^p; u^p, u^p))_p$ est bornée et l'inégalité (3.38) montre que les quantités suivantes sont aussi bornées :

$$(3.40) \quad \left| \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta u^p|^2 r dr \right. \\ \left. \int_0^\infty \left[\left| \frac{du^p}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} ((u_1^p)^2 + (u_2^p)^2) + \frac{4nu_1^p u_2^p}{r^2} + \frac{n^2 (u_3^p)^2}{r^2} \right] r dr \right|$$

ce qui entraîne avec la relation

$$\beta u_3^p = -\operatorname{div}^\beta u^p + \frac{du_1^p}{dr} + \frac{u_1^p + nu_2^p}{r}$$

que l'intégrale :

$$\int_0^\infty |u_3^p|^2 r dr$$

est uniformément bornée.

Maintenant on peut conclure que la suite $(u^p)_p$ est bornée dans W_n . Il existe alors une sous-suite, toujours notée $(u^p)_p$, telle que :

- (i) $u^p \rightharpoonup u$ faiblement dans W_n .
- (ii) $\sqrt{r}u^p \rightarrow \sqrt{r}u$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^3$

Nous pouvons passer à la limite, quand $p \rightarrow \infty$, dans (3.33) pour avoir :

$$\begin{cases} u \in W_n \\ a_n(\beta_m^*(n); u, v) = (\beta_m^*(n))^2 v_s^2(u, v), \quad \forall v \in D(\mathbf{R}^+)^3 \end{cases}$$

c'est à dire :

$$q_n(\beta_m^*(n); u, v) = 0, \quad \forall v \in D(\mathbf{R}^+)^3$$

ceci reste vrai par densité pour tout $v \in W_n$, de plus $u \neq 0$ car $\int_0^R \rho |u|^2 r dr = 1$.

Ce qui prouve que $\beta_m^*(n)$ vérifie le problème (S_n) .

La démonstration pour $\beta_m^0(n)$ est analogue. En effet, par définition de $\beta_m^0(n)$, on a la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \beta \in]\beta_m^0(n), \beta_m^0(n) + \varepsilon[\text{ vérifiant } S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

On construit ainsi une suite (β^p) qui tend vers $\beta_m^0(n)$, et la démonstration est la même que pour $\beta_m^*(n)$. \square

Remarque 3.3 Comme nous ne savons pas dire si les seules solutions de (S_n) sont les seuils, il ne s'agit pas d'une caractérisation. Cependant, on montrera dans la deuxième partie que les solutions de (S_n) forment un ensemble discret.

3.3 Comportement asymptotique des modes guidés à haute fréquence

L'objet de ce paragraphe est le comportement des modes guidés lorsque $\beta \rightarrow +\infty$ (de manière équivalente lorsque $\omega \rightarrow +\infty$).

3.3.1 Comportement de la vitesse de phase

Cherchons la limite de la vitesse de phase $v(\beta) = \frac{S_m^n(\beta)^{1/2}}{\beta}$ lorsque $\beta \rightarrow +\infty$.

Proposition 3.12. *Pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on a :*

$$(3.41) \quad \limsup_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq (v_s^-)^2$$

$$\text{où } (v_s^-)^2 = \inf_{0 \leq r \leq R} \left[\frac{\mu(r)}{\rho(r)} \right]$$

Preuve. En reprenant la démonstration du théorème 3.3 et remplaçant, dans l'inégalité (3.6), v_s par v_s^- , on obtient :

$$(3.42) \quad a_n(\beta; u, u) - \beta^2 (v_s^-)^2 \|u\|^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \int_0^\infty \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} u_1^2 \right) r dr \\ + \beta^2 \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) u_1^2 \rho r dr \quad (u = (u_1, 0, 0))$$

En utilisant la notion d'ensemble de Lebesgue (cf. [HS], définition 18.6 et théorème 18.5) on peut établir la propriété :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \eta > 0; \exists r_0 \in [0, R] \text{ et } \delta > 0 \text{ tels que :} \\ \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) \rho r dr < \eta, \quad I_\delta =]r_0 - \delta, r_0 + \delta[. \end{array} \right.$$

Soient $\mu_{n,1}^\delta, \mu_{n,2}^\delta, \dots, \mu_{n,m}^\delta$, les m premières valeurs propres de l'équation de Bessel d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle I_δ avec la condition de Dirichlet homogène ; et soient

$v_{n,1}^\delta, v_{n,2}^\delta, \dots, v_{n,m}^\delta$ les fonctions propres associées normalisées et prolongées par zéro à l'extérieur de l'intervalle I_δ . Nous avons :

$$(3.44) \quad \int_0^R \left(\left| \frac{dv_{n,k}^\delta}{dr} \right|^2 + \frac{(n+1)^2}{r^2} |v_{n,k}^\delta|^2 \right) r dr \leq \mu_{n,m}^\delta, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Soit Y le sous-espace engendré par $v_{n,1}^\delta, v_{n,2}^\delta, \dots, v_{n,m}^\delta$. Posons

$$V = \{u = (u_1, 0, 0); u_1 \in Y\}$$

On vérifie que V est un sous-espace de V_n de dimension m . De plus si $u \in V$, les inégalité (3.42) et (3.44) entraînent :

$$(3.45) \quad \frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq 3(\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^\delta + \beta^2 m \max_k \|v_{n,k}^\delta\|_{L^\infty(I_\delta)}^2 \int_{I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) \rho dr$$

Par ailleurs, on vérifie que :

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } k = 1, \dots, m; \\ \mu_{n,k}^\delta = \frac{1}{\delta^2} \mu_{n,k}^1 \\ \|v_{n,k}^\delta\|_{L^\infty(I_\delta)}^2 = \frac{1}{\delta} \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \end{array} \right.$$

On déduit alors de (3.43), (3.45) et (3.46) :

$$\frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2 (v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2} (\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + \beta^2 m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \eta$$

Du principe du Min–Max découle l'inégalité :

$$(3.47) \quad \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq (v_s^-)^2 + \varepsilon_m^n(\beta)$$

avec

$$\varepsilon_m^n(\beta) = \left[\frac{3}{\delta^2 \beta^2 \eta} (\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \right] \eta$$

d'où, pour $\beta > \frac{1}{\delta \sqrt{\eta}}$, on a :

$$\varepsilon_m^n(\beta) \leq \left[3(\lambda_+ + 2\mu_+) \mu_{n,m}^1 + m \max_k \|v_{n,k}^1\|_{L^\infty(I_1)}^2 \right] \eta$$

Ceci achève la démonstration. □

Corollaire 3.13. *Sous les hypothèses suivantes :*

$$(i) (v_s^-)^2 = \frac{\mu_-}{\rho_+}$$

$$(ii) \frac{\mu_-}{\rho_+} < \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

Il existe pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (n étant fixé) un nombre β_m^n tel que :

$$\beta \geq \beta_m^n \implies S_m^n(\beta) < \beta^2 v_s^2$$

de plus :

$$(3.48) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} = (v_s^-)^2$$

Preuve. On sait déjà que, pour tout $\beta > 0$, $S_m^n(\beta) \geq \beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+}$, ce qui entraîne avec (3.47) la double inégalité :

$$\frac{\mu_-}{\rho_+} \leq \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq (v_s^-)^2 + \varepsilon_m^n(\beta)$$

avec $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varepsilon_m^n(\beta) = 0$.

Moyennant les hypothèses on prouve ainsi le corollaire. □

3.3.2 Comportement des amplitudes

Nous considérons maintenant un milieu de vitesse caractéristique $\sqrt{\frac{\mu(r)}{\rho(r)}}$ vérifiant les hypothèses :

$$(3.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v_s^-)^2 \equiv \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_- = \frac{\mu_-}{\rho_+} < \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, \\ \text{Il existe un intervalle } I_\delta =]r_0 - \delta, r_0 + \delta[\subset [0, R] \text{ tel que :} \\ \frac{\mu(r)}{\rho(r)} = (v_s^-)^2 \quad \text{p.p. } r \in I_\delta \\ \frac{\mu(r)}{\rho(r)} > (v_s^-)^2 \quad \text{p.p. } r \in I \setminus I_\delta \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que, lorsque $\beta \rightarrow +\infty$, l'énergie du mode est confinée autour de la position $r = r_0$, valeur qui correspond au minimum du rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$, et nous montrons aussi que le déplacement axial u_3 tend vers zéro, c'est à dire que le champ u devient transverse.

Lemme 3.13. *Supposons que le rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie l'hypothèse (3.49). Alors, pour tout $m \geq 1$, on a :*

$$(3.50) \quad S_m^n(\beta) - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2}(\lambda_+ + 2\mu_+)\mu_{n,m}, \quad \forall \beta \in \mathbf{R}^+$$

où $\mu_{n,m}$ est la $m^{\text{ième}}$ valeur propre de l'équation de Bessel d'ordre $(n + 1)$ sur l'intervalle $] - 1, +1[$ avec la condition de Dirichlet.

Preuve. Elle découle de la preuve de la proposition 3.12. En effet, puisque $\frac{\mu(r)}{\rho(r)} = (v_s^-)^2$ sur I_δ et $\mu_{n,m}^\delta = \frac{1}{\delta^2}\mu_{n,m}$, l'inégalité 3.45 prend la forme :

$$(3.51) \quad \frac{a_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2}(\lambda_+ + 2\mu_+)\mu_{n,m} \quad \forall u \in V$$

où $V \subset V_n$ est de dimension m .

D'où l'inégalité (3.50).

Lemme 3.14. *Supposons que le rapport $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie l'hypothèse (3.49).*

Pour $m \geq 1$ et $\beta \geq \beta_m^(n)$, on note $u^m(\beta)$ une fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ et telle que $\|u^m(\beta)\| = 1$.*

Alors on a :

$$(3.52) \quad \int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r dr \leq \frac{C_{n,m}}{\delta^2 \mu_-} \quad \text{avec } C_{n,m} = 3(\lambda_+ + 2\mu_+)\mu_{n,m},$$

$$(3.53) \quad \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 r dr \leq \frac{4C_{n,m}}{(\delta\beta)^2(\lambda_- + \mu_-)},$$

$$(3.54) \quad \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu)r |u_3^m(\beta)|^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r \right] dr \leq \frac{C_{n,m}}{2(\delta\beta)^2} + \frac{1}{\delta\beta} \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} \right) \sqrt{\frac{C_{n,m}}{\mu_-}}$$

$$\text{avec } |D_n(u)|^2 = \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4nu_1 u_2}{r}.$$

Preuve. Pour tout $\beta > \beta_m^*$, on a :

$$(3.55) \quad \begin{cases} \|u^m(\beta)\| = 1, \\ a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) = S_m^n(\beta). \end{cases}$$

A partir de (3.55) et (3.51), on déduit l'inégalité :

$$(3.56) \quad a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{3}{\delta^2}(\lambda_+ + 2\mu_+)\mu_{n,m} \quad \forall \beta > \beta_m^*$$

D'après la preuve de la proposition 2.9, on peut avoir l'inégalité :

$$(3.57) \quad (\lambda_- + \mu_-) \int_0^\infty |\operatorname{div}^\beta(u^m(\beta))|^2 r dr + \mu_- \int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r dr \\ \leq a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{C_{n,m}}{\delta^2} \quad \left((v_s^-)^2 = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)$$

ce qui établit l'inégalité (3.52).

De la relation $\operatorname{div}^\beta u = \frac{du_1}{dr} + \frac{u_1 + nu_2}{r} - \beta u_3$, on déduit l'inégalité :

$$\beta^2 |u_3^m(\beta)|^2 \leq 4 (|\operatorname{div}^\beta(u_m(\beta))|^2 + |D_n(u^m(\beta))|^2)$$

ce qui entraîne avec (3.57) l'inégalité (3.53).

La décomposition (4.2) montre que :

$$(3.58) \quad a_n(\beta; u^m(\beta), u^m(\beta)) - \beta^2(v_s^-)^2 \geq \beta t_1(u^m(\beta), u^m(\beta)), \\ + 2\beta^2 \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu) |u_3^m(\beta)|^2 r + \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r \right] dr$$

et d'après (4.7) la quantité $t_1(u^m(\beta), u^m(\beta))$ admet la majoration :

$$(3.59) \quad |t_1(u^m(\beta), u^m(\beta))| \leq 2 \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} \right) \left(\int_0^\infty |D_n(u^m(\beta))|^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \|u^m(\beta)\| \\ \leq \frac{2(\lambda_+ + \mu_+)}{\delta \rho_-} \sqrt{\frac{C_{n,m}}{\mu_-}}$$

Finalement l'inégalité (3.54) découle de (3.56), (3.58) et (3.59).

Théorème 3.15. *Supposons que $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie l'hypothèse (3.49).*

Pour $m \geq 1$ et $\beta \geq \beta_m^(n)$, on note $u^m(\beta)$ une fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ et telle que $\|u^m(\beta)\| = 1$.*

Alors on a :

$$(3.60) \quad \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 r dr \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

$$(3.61) \quad \int_{|r-r_0| \geq \delta} |u^m(\beta)|^2 r dr \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve.

(i) La limite (3.60) découle immédiatement de (3.53).

(ii) Raisonnons maintenant par l'absurde pour établir (3.61).

Si (3.61) n'est pas vrai, alors il existe ϵ , $\epsilon > 0$, et une suite $(\beta_p)_p$ telle que :

$$(3.62) \quad \begin{cases} \beta_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et} \\ \int_{|r-r_0| \geq \delta} |u^m(\beta_p)|^2 r dr > \epsilon \end{cases}$$

D'après (3.52) et la condition de normalisation $\|u^m(\beta)\| = 1$, la suite $(u^m(\beta_p))_p$ est bornée dans V_n . On peut donc en extraire une sous-suite encore notée $(u^m(\beta_p))_p$ telle que :

$$(3.63) \quad \begin{cases} u^m(\beta_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} u^m \text{ faiblement dans } V_n \\ \int_0^R |u^m(\beta_p) - u^m|^2 r dr \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

On a :

$$\int_{|r-r_0| \geq \delta} |u^m(\beta_p)|^2 r dr = \int_R^\infty |u^m(\beta_p)|^2 r dr + \int_{[0, R] \setminus I_\delta} |u^m(\beta_p)|^2 r dr$$

or d'après (3.54), il existe $K_{n,m} \geq 0$ tel que :

$$\int_R^\infty |u^m(\beta_p)|^2 r dr \leq \frac{K_{n,m}}{\delta \beta_p ((v_s)^2 - (v_s^-)^2)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, d'après (3.63) et (3.54), on a

$$\int_{[0, R] \setminus I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m|^2 r dr = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[0, R] \setminus I_\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta_p)|^2 r dr = 0$$

donc

$$u^m(r) = 0 \quad p.p. \quad r \in [0, R] \setminus I_\delta.$$

et on obtient

$$(3.64) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{[0, R] \setminus I_\delta} |u^m(\beta_p)|^2 r dr = \int_{[0, R] \setminus I_\delta} |u^m|^2 r dr = 0$$

De (3.64), (3.65) et (3.66), on déduit finalement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{|r-r_0| \geq \delta} |u^m(\beta_p)|^2 r dr = 0$$

ce qui contredit l'hypothèse (3.62). \square

Les hypothèses (3.49) ne sont pas naturelles car on impose à la fonction $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ d'être constante au voisinage de son minimum. Nous allons énoncer un résultat analogue au théorème 3.51 mais avec des hypothèses de régularité. Plus précisément, on impose à la fonction $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ de vérifier :

$$(3.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu(r)}{\rho(r)} \text{ est analytique sur } [0, R], \\ \frac{\mu(r)}{\rho(r)} \text{ possède un minimum } (v_s^-)^2 \text{ au point } r = r_0, r_0 \in [0, R[, \\ \frac{\mu(r)}{\rho(r)} > (v_s^-)^2 = \frac{\mu_-}{\rho_+} \quad \forall r \in \mathbf{R}^+ \setminus \{r_0\}. \end{array} \right.$$

De ces hypothèses, il découle en particulier :

$$(3.66) \quad \frac{\mu(r)}{\rho(r)} - (v_s^-)^2 = s_2(r - r_0)^2 + o(|r - r_0|^2), \quad (s_2 \geq 0).$$

$$(3.67) \quad \int_{|r-r_0| \leq \delta} \left(\frac{\mu(r)}{\rho(r)} - (v_s^-)^2 \right) dr = s_2 \delta^3 + o(\delta^3) \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0 \quad \text{si } r_0 \neq 0,$$

$$\text{et } \int_{0 \leq r \leq \delta} \left(\frac{\mu(r)}{\rho(r)} - (v_s^-)^2 \right) r dr = s_1 \delta^3 + o(\delta^3), \quad s_1 \geq 0.$$

Théorème 3.16. *Supposons que $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ vérifie les hypothèses (3.65).*

Pour $m \geq 1$ et $\beta \geq \beta_m^(n)$, on note $u^m(\beta)$ une fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à la valeur propre $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ et telle que $\|u^m(\beta)\| = 1$.*

Alors on a :

$$(3.68) \quad \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 r dr \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

$$(3.69) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \int_{|r-r_0| \geq \epsilon} |u^m(\beta)|^2 r dr \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

Preuve. Nous ne détaillons pas la preuve, mais donnons le principe et les différentes étapes.

- Soit $\delta > 0$ quelconque. A partir des inégalités (3.45) et (3.67) on déduit :

$$(3.70) \quad S_m^n(\beta) - \beta^2(v_s^-)^2 \leq \frac{C_{n,m}}{\delta^2} + s_2(\beta\delta)^2 + o((\beta\delta)^2)$$

- En reprenant la preuve du lemme 3.14, cette fois-ci avec l'inégalité (3.70) au lieu de (3.56), on arrive à établir l'estimation suivante (qui est l'analogue de (3.54)) :

$$(3.71) \quad \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu)ru_3^m(\beta)^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r \right] dr \leq \frac{C_{n,m}}{2(\delta\beta)^2} + s_2\delta^2 + \sqrt{\frac{C_{n,m}}{(\delta\beta)^2} + s_2\delta^2 + o(\delta^2)}$$

- Soit $\eta > 0$ quelconque. En choisissant $\delta < \eta$ puis $\beta > \frac{1}{\delta\eta}$ on peut rendre le second membre de (3.71) inférieur à $C\eta$ ($C \geq 0$), ce qui prouve les limites suivantes :

$$(3.72) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\infty |u_3^m(\beta)|^2 \rho r dr = 0 \quad (\text{car } \lambda_- + \mu_- > 0)$$

$$(3.73) \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r dr = 0$$

- Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe d'après (3.65) une constante $\alpha(\epsilon) > 0$ telle que :

$$\forall r \in \mathbf{R}^+, |r - r_0| \geq \epsilon \implies \frac{\mu(r)}{\rho(r)} - (v_s^-)^2 \geq \alpha(\epsilon)$$

ce qui entraîne avec (3.73) :

$$\int_{|r-r_0| \geq \epsilon} |u^m(\beta)|^2 \rho r dr \leq \frac{1}{\alpha(\epsilon)} \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\rho} - (v_s^-)^2 \right) |u^m(\beta)|^2 \rho r dr \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0$$

et la preuve est achevée. \square

Chapitre 4

Etude des courbes de dispersion

4.1 Régularité des fonctions $S_m^n(\beta)$

Cette étude est basée sur le principe du Min–Max.

Proposition 4.1. *Les fonctions :*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^+ &\longmapsto \mathbf{R} \\ \beta &\longrightarrow S_m^n(\beta) \end{aligned}$$

sont continues. Elles sont dérivables presque partout et leurs dérivées vérifient :

$$(4.1) \quad \left| \frac{d}{d\beta}(S_m^n(\beta)) - 2\beta \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right| \leq C\beta$$

Preuve. $a_n(\beta; u, u)$ possède la décomposition (voir formule (2.8)) :

$$(4.2) \quad a_n(\beta; u, u) = \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \|u\|^2 + t_0(u, u) + \beta t_1(u, u) + \beta^2 t_2(u, u) \quad \forall u \in V_n$$

où les $t_i(u, u)$; $i=1,2,3$; sont donnés par les expressions suivantes :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} t_0(u, u) &= \int_0^\infty \left[\lambda \left(\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\left(\frac{du_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{u_1 + nu_2}{r} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 + \mu \left(\left(\frac{du_3}{dr} \right)^2 + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} \right) \right] r dr \\ t_1(u, u) &= 2 \int_0^\infty \left[\mu u_1 u_3 + \mu r \left(u_3 \frac{du_1}{dr} + u_1 \frac{du_2}{dr} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2(\lambda + \mu) u_3 \left(r \frac{du_1}{dr} + u_1 + nu_2 \right) \right] dr \\ t_2(u, u) &= \int_0^\infty \left[(\lambda + \mu) u_3^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \rho |u|^2 \right] r dr \end{aligned} \right.$$

La décomposition (4.2) montre que la famille des opérateurs autoadjoints $(A_n(\beta))_\beta$ est holomorphe, donc les valeurs propres $\omega^2 = S_m^n(\beta)$ sont les branches d'une ou plusieurs fonctions analytiques (cf. [K]). Puisque ces branches peuvent se croiser

(en des points isolés), les courbes $\beta \longrightarrow S_m^n(\beta)$ sont continues et dérivables par morceaux.

Pour établir (4.1), nous suivrons la méthode de BAMBERGER-BONNET [BB].

Nous posons pour $m = 1, 2, \dots$

$$\Lambda_m^n(\beta) = S_m^n(\beta) - \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

Les fonctions $\Lambda_m^n(\beta)$ admettent la caractérisation suivante :

$$(4.4) \quad \Lambda_m^n(\beta) = \inf_{V \in F_m} \left(\sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{t_n(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \right)$$

avec

$$t_n(\beta; u, u) = a_n(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|^2$$

et

$$F_m = \{V \subset V_n; \dim V = m\}$$

Pour établir le théorème, il suffit de montrer que $\Lambda_m^n(\beta)$ est continue et dérivable presque partout, ce que l'on sait déjà, et vérifie :

$$(4.5) \quad \left| \frac{d}{d\beta} \Lambda_m^n(\beta) \right| \leq C\beta$$

La formule (4.2) entraîne :

$$(4.6) \quad t_n(\beta; u, u) - t_n(\beta'; u, u) = (\beta - \beta') [t_1(u, u) + (\beta + \beta') t_2(u, u)]$$

On vérifie facilement que :

$$(4.7) \quad |t_1(u, u)| \leq 4 \frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} \left[\int_0^\infty \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4nu_1 u_2}{r^2} \right) r dr \right]^{1/2} \|u\|$$

$$|t_2(u, u)| \leq \left[\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} + \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right] \|u\|^2$$

D'autre part, l'inégalité (2.6) entraîne :

$$(4.8) \quad \rho_+ \int_0^\infty \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{n^2 u_3^2}{r^2} + \frac{4nu_1 u_2}{r^2} \right) r dr \leq \left[\frac{\rho_+}{\mu_-} a_n(\beta', u, u) - \beta'^2 \|u\|^2 \right]$$

Reportant (4.7) et (4.8) dans (4.6), il vient :

$$(4.9) \quad t_n(\beta; u, u) \leq t_n(\beta'; u, u) + |\beta - \beta'| \left[2 \frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_- \rho_+} \left(\frac{\rho_+}{\mu_-} a_n(\beta', u, u) - \beta'^2 \|u\|^2 \right)^{1/2} \|u\| \right. \\ \left. + (\beta + \beta') \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} + \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right) \|u\|^2 \right]$$

Soit $m \in \mathbf{N}^*$, d'après (4.9) et (4.4), on a :

$$(4.10) \quad \Lambda_m^n(\beta) \leq \Lambda_m^n(\beta') + |\beta - \beta'| \left[2 \frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_- \rho_+} \left(\frac{\rho_+}{\mu_-} S_m^n(\beta') - (\beta')^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + (\beta + \beta') \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} + \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right) \right]$$

Or, on sait que :

$$S_m^n(\beta') \leq \beta'^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$$

de sorte que :

$$(4.11) \quad \Lambda_m^n(\beta) - \Lambda_m^n(\beta') \leq |\beta - \beta'| \left[2 \beta' \frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_- \rho_+} \left(\frac{\rho_+}{\mu_-} \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - 1 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + (\beta + \beta') \left(\frac{\lambda_+ + \mu_+}{\rho_-} + \left\| \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right\|_\infty \right) \right]$$

On peut alors échanger les rôles de β et β' et l'on obtient :

$$(4.12) \quad \left| \frac{\Lambda_m^n(\beta) - \Lambda_m^n(\beta')}{\beta - \beta'} \right| \leq C \sup(\beta, \beta')$$

avec une constante C qui dépend seulement de (λ, μ, ρ) .

Ainsi la fonction $\Lambda_m^n(\beta)$ est localement lipschitzienne, par conséquent elle est dérivable presque partout et sa dérivée vérifie (4.5).

Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1. □

4.2 Dépendance des fonctions $S_m^n(\beta)$ par rapport à (ρ, λ, μ)

Nous allons introduire dans les notations la dépendance par rapport à (ρ, λ, μ) .

Nous notons désormais :

$$\Lambda(r) = (\rho(r), \lambda(r), \mu(r))$$

$$\|\Lambda\|_\infty = \max\{\|\lambda\|_\infty, \|\mu\|_\infty, \|\rho\|_\infty\}$$

$$a_n(\beta, \Lambda; u, v) = a_n(\beta; u, u)$$

$$S_m^n(\beta, \Lambda) = S_m^n(\beta)$$

$$\|u\|_\rho^2 = \int_0^\infty |u|^2 \rho r dr$$

Un résultat de monotonie est fourni par la proposition :

Proposition 4.2. *Considérons deux milieux élastiques caractérisés par $\Lambda = (\rho, \lambda, \mu)$ et $\Lambda' = (\rho', \lambda', \mu')$ vérifiant :*

$$(4.13) \quad \begin{cases} \lambda(r) \leq \lambda'(r) \\ \mu(r) \leq \mu'(r) \\ \rho'(r) \leq \rho(r) \end{cases}$$

presque partout pour $r \in \mathbf{R}^+$

Alors, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$(4.14) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) \leq S_m^n(\beta, \Lambda'), \quad \forall \beta \in \mathbf{R}^+$$

Preuve. Pour tout $\beta \in \mathbf{R}^+$ et tout $u \in V_n$, on a :

$$a_n(\beta, \Lambda'; u, u) - a_n(\beta, \Lambda; u, u) = a_n(\beta, \Lambda' - \Lambda; u, u) \geq 0$$

Comme $\|u\|_{\rho'} \leq \|u\|_\rho$, on a :

$$\frac{a_n(\beta, \Lambda'; u, u)}{\|u\|_{\rho'}^2} \geq \frac{a_n(\beta, \Lambda; u, u)}{\|u\|_\rho^2}, \quad \forall u \in V_n$$

En passant dans cette inégalité au sup puis à l'inf, on obtient l'inégalité (4.14). \square

La proposition suivante donne un résultat de continuité par rapport à Λ .

Proposition 4.3. *La fonction :*

$$\Lambda \longmapsto S_m^n(\beta, \Lambda)$$

est localement lipschitzienne. Plus précisément, pour tout Λ , il existe deux constantes positive $\alpha(\Lambda)$ et $C(\Lambda)$ telles que :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} |S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda')| &\leq \beta^2 C(\Lambda) \left(\|\lambda - \lambda'\|_{L^\infty(0,R)} + \|\mu - \mu'\|_{L^\infty(0,R)} \right. \\ &\quad \left. + \|\rho - \rho'\|_{L^\infty(0,R)} + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| + |\rho_\infty - \rho'_\infty| \right) \\ \forall \Lambda' : \quad \|\Lambda - \Lambda'\|_\infty &\leq \alpha(\Lambda) \end{aligned}$$

Preuve. Utilisons l'écriture suivante :

$$(4.16) \quad a_n(\beta, \Lambda; u, u) = \int_0^\infty \lambda |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \int_0^\infty \mu \varepsilon_n(\beta, u) r dr$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\beta, u) &= 2 \left(\left| \frac{du_1}{dr} \right|^2 + \beta^2 u_3^2 \right) + \left(\frac{du_2}{dr} - \frac{nu_1 + u_2}{r} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{du_3}{dr} + \beta u_1 \right)^2 + \left(\frac{nu_3}{r} - \beta u_2 \right)^2 + \frac{2}{r^2} (u_1 + nu_2)^2 \end{aligned}$$

On a :

$$(4.17) \quad \begin{aligned} a_n(\beta, \Lambda; u, u) &\leq a_n(\beta, \Lambda'; u, u) + \|\lambda - \lambda'\|_{L^\infty(0,R)} \int_0^R |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| \int_R^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \|\mu - \mu'\|_{L^\infty(0,R)} \int_0^R \varepsilon_n(\beta, u) r dr \\ &\quad + |\mu_\infty - \mu'_\infty| \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r dr \end{aligned}$$

D'après (4.16), on a :

$$(4.18) \quad \begin{aligned} a_n(\beta, \Lambda'; u, u) &\geq \lambda' \int_0^R |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr + \lambda'_\infty \int_R^\infty |\operatorname{div}^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + \mu'_- \int_0^R \varepsilon_n(\beta, u) r dr + \mu'_\infty \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r dr \end{aligned}$$

En combinant (4.17) et (4.18) on obtient :

$$(4.19) \quad \begin{aligned} a_n(\beta, \Lambda; u, u) &\leq a_n(\beta, \Lambda'; u, u) + \left[\frac{1}{\lambda'_-} \|\lambda - \lambda'\|_{L^\infty(0,R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu'_-} \|\mu - \mu'\|_{L^\infty(0,R)} + \frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right] a_n(\beta, \Lambda'; u, u) \end{aligned}$$

D'autre part la relation

$$\int_0^\infty |u|^2 \rho' r dr = \int_0^\infty |u|^2 \rho r dr + \int_0^\infty |u|^2 (\rho' - \rho) r dr$$

entraîne

$$(4.20) \quad \|u\|_{\rho'} \leq \left[1 + \frac{1}{\rho'_-} \|\rho - \rho'\|_{L^\infty(0,R)} + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho'_\infty} \right] \|u\|_\rho$$

puis, à l'aide de (4.19), on a :

$$(4.21) \quad \frac{a_n(\beta, \Lambda; u, u)}{\|u\|_\rho^2} \leq \frac{a_n(\beta, \Lambda'; u, u)}{\|u\|_{\rho'}^2} (1 + \varphi(\Lambda, \Lambda'))$$

où

$$1 + \varphi(\Lambda, \Lambda') = \left[1 + \frac{1}{\rho_-} \|\rho - \rho'\|_{L^\infty(0,R)} + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty} \right] \times \left[1 + \frac{1}{\lambda'_-} \|\lambda - \lambda'\|_{L^\infty(0,R)} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu'_-} \|\mu - \mu'\|_{L^\infty(0,R)} + \frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right]$$

En passant au sup, puis à l'inf, dans (4.21) on obtient :

$$S_m^n(\beta, \Lambda) \leq S_m^n(\beta, \Lambda') (1 + \varphi(\Lambda, \Lambda'))$$

or on sait que :

$$S_m^n(\beta, \Lambda') \leq \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}$$

d'où

$$S_m^n(\beta, \Lambda) \leq S_m^n(\beta, \Lambda') + \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \varphi(\Lambda, \Lambda')$$

En échangeant les rôles de Λ et Λ' , on obtient :

$$(4.22) \quad |S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda')| \leq \beta^2 \max \left(\frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \varphi(\Lambda', \Lambda), \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \varphi(\Lambda, \Lambda') \right)$$

$\varphi(\Lambda, \Lambda')$ vérifie la propriété : pour tout Λ fixé, il existe $\alpha(\Lambda) \geq 0$ et $C(\Lambda) \geq 0$ tels que :

$$(4.23) \quad \varphi(\Lambda, \Lambda') \leq C(\Lambda) \left(\|\lambda - \lambda'\|_{L^\infty(0,R)} + \|\mu - \mu'\|_{L^\infty(0,R)} + \|\rho - \rho'\|_{L^\infty(0,R)} \right. \\ \left. + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| + |\rho_\infty - \rho'_\infty| \right) \quad \text{si } \|\Lambda - \Lambda'\|_\infty \leq \alpha(\Lambda)$$

En remplaçant dans (4.22), on obtient l'inégalité (4.15). □

4.3 Régularité des fonctions propres. Conséquence

Le résultat de continuité fourni par la proposition 4.3 n'est pas assez fin pour permettre d'évaluer la variation de $S_m^n(\beta, \Lambda)$ due à une petite variation de $\Lambda = (\rho, \lambda, \mu)$. Notre objectif est d'obtenir une dépendance en norme $L^1(]0, R[)$. Pour adapter la démonstration de la proposition 4.3 nous avons besoin que les quantités $|u|$, $|r(\operatorname{div}^\beta u)^2|$ et $|r\varepsilon_n(\beta, u)|$ soient bornées sur l'intervalle $[0, R]$ lorsque u est une fonction propre.

Le but de ce paragraphe consiste donc à examiner la régularité et le comportement asymptotique d'une fonction propre de $A_n(\beta)$ au voisinage de $r = 0$.

Dans toute la suite, on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $\rho \in L^\infty(]0, R[)$,
- (ii) $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ sont des fonctions lipshitziennes par morceaux, c'est à dire qu'il existe une partition $r_0 = 0 < r_1 < \dots < r_p = R$ pour laquelle $\lambda, \mu \in W^{1,\infty}(I_k)$, $I_k =]r_{k-1}, r_k[$. Cet espace sera noté \mathcal{L}_m . En particulier, une fonction constante par morceaux est un élément de \mathcal{L}_m .

Soit u un élément de $D(A_n(\beta))$ qui est une fonction propre de $A_n(\beta)$ associée à la valeur propre ω^2 . Alors u vérifie, sur chaque intervalle I_k , le système suivant (équivalent au système (1.8)) :

$$(4.24) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_1}{dr} \right) + n \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{du_2}{dr} - \left[\frac{(n^2 + 2)\mu + \lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{u_1}{r} - n \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{u_2}{r} = \sqrt{r} g_1(u) \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_2}{dr} \right) - n \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) \frac{du_1}{dr} - n \left(\frac{3\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{u_1}{r} - \left[\frac{n^2 \lambda + (2n^2 + 1)\mu}{\mu} \right] \frac{u_2}{r} = \sqrt{r} g_2(u) \end{cases}$$

$$(4.25) \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_3}{dr} \right) - n^2 \frac{u_3}{r} = \sqrt{r} g_3(u)$$

où on a posé :

$$(4.26) \quad \begin{cases} \sqrt{r} g_1(u) = \left[(\beta^2 \mu - \omega^2 \rho) r u_1 + \beta \mu r \frac{du_3}{dr} - \left(\frac{d\lambda}{dr} + 2 \frac{d\mu}{dr} \right) r \frac{du_1}{dr} \right. \\ \quad \left. - \frac{d\lambda}{dr} (u_1 + n u_2) + \beta r \frac{d\lambda}{dr} u_3 + \beta \lambda r \frac{du_3}{dr} \right] (\lambda + 2\mu)^{-1} \\ \sqrt{r} g_2(u) = \left[(\beta^2 \mu - \omega^2 \rho) r u_2 - n \beta (\lambda + \mu) u_3 - \frac{d\mu}{dr} \left(r \frac{du_2}{dr} - n u_1 - u_2 \right) \right] \mu^{-1} \\ \sqrt{r} g_3(u) = \left[(\beta^2 (\lambda + 2\mu) - \omega^2 \rho) r u_3 - \beta \lambda \left(r \frac{du_1}{dr} + u_1 \right) - n \beta (\lambda + \mu) u_2 \right. \\ \quad \left. - r \frac{d\mu}{dr} \frac{du_3}{dr} - \beta \left(r \frac{d\mu}{dr} + \mu \right) u_1 - \beta \mu r \frac{du_1}{dr} \right] \mu^{-1} \end{cases}$$

$g_i(u) \in L^2(0, R)$ car $u \in V_n$.

Remarque 4.1 Si $n = 0$, le système se réduit à :

$$(4.27) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr}(r \frac{du_1}{dr}) - \frac{u_1}{r} = \sqrt{r}g_1(u) \\ \frac{d}{dr}(r \frac{du_2}{dr}) - \frac{u_2}{r} = \sqrt{r}g_2(u) \end{cases}$$

$$(4.28) \quad \frac{d}{dr}(r \frac{du_3}{dr}) = \sqrt{r}g_3(u)$$

Dans ce cas l'étude qualitative du système (4.24) (et de l'équation (4.25)) se ramène à l'étude d'une équation de Bessel (non homogène).

Moyennant les hypothèses sur les coefficients du système, il est clair d'après les équations (4.24) (4.25) et (4.26) que $u \in H^2(I_k)^3$ pour $k = 2, 3, \dots, p$ et on a l'estimation :

$$\|u\|_{H^2(I_k)^3} \leq C\|u\|_{V_n}$$

Examinons maintenant le comportement de u au voisinage de $r = 0$. Pour cela, on utilisera une représentation intégrale de u sur l'intervalle $I_1 =]0, r_1[$ dont le noyau est la résolvante du système (4.24)(ou de l'équation (4.25)).

Réduction du système (4.12)

le changement d'inconnues :

$$\begin{cases} X_1 = u_1 \\ X_2 = u_2 \\ X_3 = r \frac{du_1}{dr} \\ X_4 = r \frac{du_2}{dr} \end{cases}$$

transforme (4.24) en un système différentiel du premier ordre :

$$(4.29) \quad \frac{dX}{dr} = \frac{1}{r}AX + \sqrt{r}g(X)$$

avec

$$g(X) = (g_1(u), g_2(u), 0, 0)$$

et $A(r)$ est une matrice d'ordre 4 définie par :

$$A(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\lambda + (n^2 + 2)\mu}{\lambda + 2\mu} & \frac{n(\lambda + 3\mu)}{\lambda + 2\mu} & 0 & \frac{-n(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \\ \frac{n(\lambda + 3\mu)}{\mu} & \frac{n^2\lambda + (2n^2 + 1)\mu}{\mu} & \frac{n(\lambda + \mu)}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.2

Comme $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ appartiennent à la classe \mathcal{L}_m , on peut écrire :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_0 + r\lambda_1(r); & r \in I_1 \\ \mu = \mu_0 + r\mu_1(r) \end{cases}$$

où $\lambda_1(r)$ et $\mu_1(r)$ sont bornées sur I_1 .

Ce qui entraîne :

$$A(r) = A_0 + rA_1(r)$$

avec $A_0 = A(\lambda_0, \mu_0)$ et $A_1(r)$ de norme bornée sur I_1 .

Ainsi le système (4.29) prend la forme :

$$\frac{dX}{dr} = \frac{1}{r}A_0X + \sqrt{r}\tilde{g}(X)$$

avec

$$\tilde{g}(X) = \{g(X) + \frac{1}{\sqrt{r}}A_1(r)X\}$$

D'autre part, l'inégalité :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}}A_1(r)X \right\|_{L^2(I_1)^4} \leq C\|u\|_{V_n}$$

entraîne

$$\|\tilde{g}(X)\|_{L^2(I_1)^4} \leq C\|u\|_{V_n}$$

Donc, sans restreindre la généralité, on peut supposer, dans le système (4.29), que la matrice A est à coefficients constants (quitte à remplacer A par A_0 et g par \tilde{g}).

Recherche de la matrice fondamentale

L'équation homogène $\frac{dX}{dr} = \frac{1}{r}AX$ est du type Euler ; en posant $r = e^t$ elle se transforme en :

$$(4.30) \quad \frac{dX}{dt} = AX$$

Les valeurs propres de A sont :

$$s_1 = -n - 1; \quad s_2 = -n + 1; \quad s_3 = n - 1; \quad s_4 = n + 1$$

(i) Si $n \geq 2$, les valeurs propres sont simples.

Désignons par $\{\xi_k; k = 1, \dots, 4\}$ les vecteurs propres associées. Alors un système fondamental de solutions est fourni par :

$$\{e^{s_k t} \xi_k; k = 1, \dots, 4\}$$

En revenant à la variable r , l'équation homogène admet le système fondamental de solutions :

$$M_n = \{r^{s_k} \xi_k; k = 1, \dots, 4\}$$

(ii) Si $n = 1$; alors $\{s_1 = -2; s_2 = s_3 = 0; s_4 = 2\}$.

En utilisant la base de Jordan $\{\xi_k; k = 1, \dots, 4\}$ définie par les équations :

$$A\xi_1 = -2\xi_1; \quad A\xi_2 = 0; \quad A^2\xi_3 = 0; \quad A\xi_4 = 2\xi_4$$

on construit la matrice fondamentale de solutions (ou la résolvante) :

$$(4.31) \quad M_1 = (r^{-2}\xi_1; (\text{Log } r)\xi_2 + \xi_3; \xi_2; r^2\xi_4)$$

où $\Xi = \{\xi_k; k = 1, \dots, 4\}$ est la matrice, d'ordre 4, définie par :

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \gamma/2 \\ 1 & 1 & \alpha & 1/2 \\ -2 & 0 & -1 & \gamma \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{-\lambda + \mu}{3\lambda + 5\mu}$$

A l'aide de la matrice M_n , on sait représenter la solution du système non homogène (4.29) :

$$(4.32) \quad X(r) = M_n(r)C + M_n(r) \int_{r^*}^r \sqrt{\tau} M_n^{-1}(\tau) g(u(\tau)) d\tau, \quad r \in I_1$$

la constante C dépendant de la condition initiale $X(r^*)$.

Estimations a priori

Maintenant on va établir une estimation a priori sur la solution particulière :

$$\bar{X}(r) = M_n(r) \int_{r^*}^r \sqrt{\tau} M_n^{-1}(\tau) g(u(\tau)) d\tau, \quad r \in I_1$$

On envisage trois cas (suivant n).

1- $\boxed{n \geq 2}$.

Explicitons, l'expression de $\bar{X}(r)$. L'inverse de $M_n(r)$ s'écrit :

$$M_n^{-1} = \frac{1}{\det \Xi} {}^t(r^{s_4} \zeta_1, r^{s_3} \zeta_2, r^{s_2} \zeta_3, r^{s_1} \zeta_4)$$

$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ étant la matrice des cofacteurs de Ξ .

Ce qui donne, après un calcul algébrique :

$$\bar{X}_i(r) = \frac{1}{\det \Xi} \sum_{k=1}^4 r^{s_k} G_k(r) \xi_{ik} \quad i = 1, \dots, 4$$

avec

$$G_k(r) = \int_{r^*}^r \tau^{s_5-k+\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^4 g_j(X(\tau)) \zeta_{jk} \right) d\tau \quad (1 \leq k \leq 4)$$

On choisit la borne r^* telle que :

$$r^* = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, 2; \\ r_1 & \text{si } k = 3, 4 \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$(4.33) \quad |G_k(\bar{X})| \leq \left\| \sum_{j=1}^4 g_j(X(\tau)) \zeta_{jk} \right\|_{L^2(0, r_1)} \left(\int_{r^*}^r \tau^{2s_5-k+1} d\tau \right)^{1/2}$$

D'après la définition de $g(u)$ (voir formule (4.25)) il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\left\| \sum_{j=1}^4 g_j(X(\tau)) \zeta_{jk} \right\|_{L^2(0, r_1)} \leq C \|u\|_{V_n}$$

d'où :

$$|G_k(r)| \leq C r^{\gamma_k} \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

avec $\gamma_k = s_5 - k + 1$; $1 \leq k \leq 4$.

Par conséquent :

$$(4.34) \quad |\bar{X}_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

et l'égalité (4.32) peut être mise sous la forme :

$$(4.35) \quad X_i(r) = \sum_{k=1}^4 c_k \xi_{ik} r^{s_k} + \bar{X}_i(r) \quad (1 \leq i \leq 4)$$

On sait déjà que $\lim_{r \rightarrow 0} u_i(r) = 0$; $i = 1, 2$. Ceci joint à (4.34) et (4.35) fournit :

$$c_1 = c_2 = 0$$

et on a :

$$(4.36) \quad |X_i(r)| \leq (c_3^2 + c_4^2)^{1/2} (|\xi_3|^2 + |\xi_4|^2)^{1/2} r^{n-1} + C\sqrt{r} \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

D'autre part, en posant $r = r_1$ dans (4.35), on a :

$$\begin{cases} X_1(r_1) = c_3 \xi_{31} r_1^{n-1} + c_4 \xi_{41} r_1^{n+1} + \bar{X}_1(r_1) \\ X_2(r_1) = c_3 \xi_{32} r_1^{n-1} + c_4 \xi_{42} r_1^{n+1} + \bar{X}_2(r_1) \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$|c_3| + |c_4| \leq C(|X_1(r_1)| + |X_2(r_1)| + |\bar{X}_1(r_1)| + |\bar{X}_2(r_1)|)$$

En tenant compte de (4.34) et de l'injection continue de V_n dans $C([0, R])$, $n \geq 2$, il existe une constante C telle que :

$$|c_3| + |c_4| \leq C \|u\|_{V_n}$$

ce qui donne avec (4.36) :

$$|X_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (1 \leq i \leq 4)$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} |u_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \\ \left| \frac{du_i}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_n} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (i = 1, 2)$$

L'inverse de $M_1(r)$ est donné par :

$$(4.37) \quad M_1^{-1}(r) = \frac{1}{\det M_1} {}^t M_1^*$$

où

$$\begin{aligned} \det M_1 &= (\text{Log } r) \det(\xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_4) + \det(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ &= \det \Xi \neq 0 \end{aligned}$$

et

$$M_1^* = (r^2 \zeta_1, \zeta_2, (\text{Log } r) \zeta_2 + \zeta_3, r^{-2} \zeta_4)$$

où la matrice $\zeta = (\zeta_i)_{i=1,4}$ est définie par :

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 2(1 - \gamma) & 2\alpha(1 - \gamma) - \gamma - 3 & -4 \\ -1 - \gamma & 2(\gamma - 1) & -1 - 3\gamma & 4 \\ (-1/2)(1 + \gamma) + \alpha & 3 + \gamma & \alpha + \gamma(1/2 + \alpha) - 1/2 & -2(1 + \alpha) \\ (1/2)(1 + \gamma + 2\alpha\gamma) & 3\gamma + 1 & (1/2)(4\alpha\gamma - \gamma + 1) & -4 \end{pmatrix}$$

En posant :

$$G(r) = \int_{r^*}^r \sqrt{\tau} M_1^{-1}(\tau) g(u(\tau)) d\tau = \frac{1}{\det \Xi} (G_1, G_2, G_3, G_4)$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} G_1(r) &= \int_0^r \left[(1 + \gamma)(g_2(u) - g_1(u)) + \left(\alpha - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\right)g_3(u) + \left(\alpha\gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\right)g_4(u) \right] \tau^{\frac{5}{2}} d\tau \\ G_2(r) &= \int_0^r \left[2(1 - \gamma)(g_2(u) - g_1(u)) + (3 + \gamma)g_3(u) + (3\gamma + 1)g_4(u) \right] \tau^{\frac{1}{2}} d\tau \\ G_3(r) &= \int_r^R \left\{ \log \tau \left[2(1 - \gamma)(g_1(u) - g_2(u)) + (3 + \gamma)g_3(u) + (3\gamma + 1)g_4(u) \right] \right. \\ &\quad \left. + (2\alpha(1 - \gamma) - \gamma - 3)g_1(u) - (1 + 3\gamma)g_2(u) + \left(\alpha - \frac{1}{2} + \gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right)g_3(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(4\alpha\gamma - \gamma + 1)g_4(u) \right\} \tau^{\frac{1}{2}} d\tau \\ G_4(r) &= \int_r^R \left[-4(g_1(u) - g_2(u)) - 2(\alpha + 1)g_3(u) - 4g_4(u) \right] \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \end{aligned} \right.$$

On peut vérifier facilement les inégalités suivantes sur l'intervalle $[0, r_1]$:

$$(4.38) \quad \begin{cases} |G_1(r)| \leq C_1 r^3 \|u\|_{V_1} \\ |G_2(r)| \leq C_2 r \|u\|_{V_1} \\ |G_3(r)| \leq C_3 \sqrt{r} \|u\|_{V_1} \\ |G_4(r)| \leq C_4 r^{-1} \|u\|_{V_1} \end{cases}$$

L'équation intégrale (4.33) est équivalente à :

$$(4.39) \quad X(r) = c_1 r^{-2} \xi_1 + c_2 (\text{Log } r \xi_2 + \xi_3) + c_3 \xi_2 + c_4 r^2 \xi_4 + M_1(r)G(r)$$

avec

$$(4.40) \quad M_1(r)G(r) = \begin{pmatrix} r^{-2}G_1(r) - \text{Log } r G_2(r) - G_3(r) + \frac{r^2}{2}\gamma G_4(r) \\ r^{-2}G_1(r) + (\text{Log } r + \alpha)G_2(r) + G_3(r) + \frac{r^2}{2}G_4(r) \\ -2r^{-2}G_1(r) - G_2(r) + \gamma r^2 G_4(r) \\ -2r^{-2}G_1(r) + G_2(r) + r^2 G_4(r) \end{pmatrix}$$

Ce qui entraîne avec (4.38) l'inégalité :

$$|M_1(r)G(r)| \leq C\sqrt{r}\|u\|_{V_1}$$

Puisque :

$$\begin{cases} u_i \in L^2(0, R) \\ \sqrt{r} \frac{du_i}{dr} \in L^2(0, R) \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

on a nécessairement :

$$c_1 = c_2 = 0$$

A partir de (4.39) et (4.40), on déduit :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 &= c_4 \frac{r^2}{2}(1 + \gamma) + 2r^{-2}G_1(r) + \alpha G_2(r) + \frac{r^2}{2}(1 + \gamma)G_4(r) \\ X_3 &= c_4 r^2(1 + \alpha) - 2r^{-2}G_1(r) - G_2(r) + \gamma r^2 G_4(r) \\ X_4 &= -2c_4 r^2 - 2r^{-2}G_1(r) + G_2(r) + r^2 G_4(r) \end{cases}$$

Ce qui entraîne avec (4.38), les inégalités :

$$(4.41) \quad \begin{cases} |X_1 + X_2| \leq |c_4|(1 + \gamma)\frac{r^2}{2} + Cr\|u\|_{V_1} \\ |X_3| + |X_4| \leq |c_4|(3 + \alpha)r^2 + Cr\|u\|_{V_1} \quad \forall r \in [0, r_1] \end{cases}$$

Vérifions que :

$$|c_4| \leq C\|u\|_{V_1}$$

En effet à partir de l'égalité :

$$X_1(r_1) + X_2(r_1) = c_4(1 + \gamma)\frac{r_1^2}{2} + 2r_1^{-2}G_1(r_1) + \alpha G_2(r_1)$$

on déduit :

$$|c_4| \leq C \left(|G_1(r_1)| + |G_2(r_1)| + |X_1(r_1) + X_2(r_1)| \right)$$

D'après (4.38), on a :

$$|G_i(r_1)| \leq C \|u\|_{V_1} \quad (i = 1, 2)$$

On sait aussi que :

$$\sqrt{r}(X_1(r) + X_2(r)) \in H^1(0, R)$$

donc

$$|X_1(r_1) + X_2(r_1)| \leq C \|u\|_{V_1}$$

et

$$|c_4| \leq C \|u\|_{V_1}$$

ce qui donne avec (4.41) :

$$\begin{cases} |u_1(r) + u_2(r)| \leq Cr \|u\|_{V_1} \\ \left| \frac{du_i}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_1} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (i = 1, 2)$$

En réinjectant ces informations dans les développements précédents, on améliore la dernière inégalité pour obtenir :

$$(4.42) \quad \begin{cases} |u_1(r) + u_2(r)| \leq Cr^2 \|u\|_{V_1} \\ \left| \frac{du_i}{dr} \right| \leq Cr \|u\|_{V_1} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (i = 1, 2)$$

Comportement de la composante u_3

Si $n \neq 0$, u_3 vérifie l'équation différentielle :

$$(4.43) \quad \frac{d^2 u_3}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_3}{dr} - \frac{n^2}{r^2} u_3 = r^{-\frac{1}{2}} g_3(u)$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$u_3^h = c_1 r^{-n} + c_2 r^n$$

L'équation (4.33) est équivalente alors à l'équation intégrale :

$$(4.44) \quad u_3(r) = u_3^h + \frac{r^n}{2n} \varphi_2(u)(r) - \frac{r^{-n}}{2n} \varphi_1(u)(r)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_1(u)(r) = \int_0^r \tau^{n+\frac{1}{2}} g_3(u(\tau)) d\tau \\ \varphi_2(u)(r) = \int_r^R \tau^{-n+\frac{1}{2}} g_3(u(\tau)) d\tau \end{cases}$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |\varphi_1(u)| \leq Cr^{n+1} \|u\|_{V_n} \\ |\varphi_2(u)| \leq Cr^{-n+1} \|u\|_{V_n} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

Puisque $\lim_{r \rightarrow 0} u_3(r) = 0$ alors on a nécessairement $c_1 = 0$.

Comme auparavant, à partir de la trace $u_3(r_1) = c_2 r_1^n - \frac{r_1^{-n}}{2n} \varphi_1(u)(r_1)$ et des inégalités précédentes, on déduit :

$$|c_2| \leq C \|u\|_{V_n}$$

et par suite :

$$(4.45) \quad |u_3(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n}$$

En dérivant (4.44), on a :

$$\frac{du_3}{dr} = c_2 n r^{n-1} + \frac{1}{2} (r^{n-1} \varphi_2(u) + r^{-n-1} \varphi_1(u))$$

d'où

$$(4.46) \quad \left| \frac{du_3}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_n}, \quad \forall r \in [0, r_1]$$

3- $\boxed{n=0}$.

D'après le système (4.27), u_1 et u_2 vérifient une équation du type (4.43) avec $n = 1$. Donc les conclusions précédentes sur u_3 demeurent valables pour le couple (u_1, u_2) ; c'est à dire :

$$(4.47) \quad \begin{cases} |u_i(r)| \leq Cr \|u\|_{V_0} \\ \left| \frac{du_i}{dr} \right| \leq C \|u\|_{V_0} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (i = 1, 2)$$

La composante u_3 vérifie (4.28) qui est solution de l'équation intégrale :

$$(4.48) \quad u_3(r) = c_1 + c_2 \operatorname{Log} r + \operatorname{Log} r \psi_1(u) - \psi_2(u)$$

avec

$$\begin{cases} \psi_1(u)(r) = \int_0^r \sqrt{\tau} g_3(u(\tau)) d\tau \\ \psi_2(u)(r) = \int_0^r \sqrt{\tau} \operatorname{Log} \tau g_3(u(\tau)) d\tau \end{cases}$$

d'où les estimations suivantes :

$$(4.49) \quad \begin{cases} |\psi_1(u)(r)| \leq Cr \|u\|_{V_0} \\ |\psi_2(u)(r)| \leq Cr^{1-\epsilon} \|u\|_{V_0} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1] \quad (\epsilon > 0)$$

Si on dérive l'expression (4.48), on obtient :

$$(4.50) \quad \frac{du_3}{dr} = \frac{c_2}{r} + \frac{1}{r} \psi_1(u)$$

d'où, pour $r \rightarrow 0$:

$$\frac{du_3}{dr} = \frac{c_2}{r} + O(1)$$

Comme $\sqrt{r} \frac{du_3}{dr} \in L^2(0, R)$, on a obligatoirement

$$c_2 = 0$$

En considérant la trace de u_3 en $r = r_1$, on aboutit à :

$$|c_2| \leq C \|u\|_{V_0}$$

et les inégalités (4.49) entraînent avec (4.48) et (4.50) :

$$(4.51) \quad \begin{cases} |u_3(r)| \leq C \|u\|_{V_0} \\ \left| \frac{du_3}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_0} \end{cases} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

En tenant compte de (4.51) et (4.47) on remarque qu'en fait on a $g_3(u) = \sqrt{r} h_3(u)$ avec $|h_3(u)| \leq C \|u\|_{V_0}$, ce qui nous permet d'obtenir une meilleure estimation :

$$\left| \frac{du_3}{dr}(r) \right| \leq Cr \|u\|_{V_0} \quad \forall r \in [0, r_1]$$

Nous regroupons tous les résultats ainsi obtenus dans le théorème suivant :

Théorème 4.4. Soit u , élément de V_n , une fonction propre de $A_n(\beta)$. Si les coefficients de Lamé (λ, μ) appartiennent à classe \mathcal{L}_m alors u vérifie sur $[0, r_1]$, les estimations suivantes :

1- Si $n = 0$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 |u_i(r)| + r \left| \frac{du_i}{dr}(r) \right| \leq Cr \|u\|_{V_0} \\ |u_3(r)| \leq C \|u\|_{V_0} \\ \left| \frac{du_3}{dr}(r) \right| \leq Cr \|u\|_{V_0} \end{array} \right.$$

2- Si $n = 1$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 |u_i(r)| + \left| \frac{du_3}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_1} \\ \sum_{i=1}^2 \left| \frac{du_i}{dr}(r) \right| + |u_3(r)| \leq Cr \|u\|_{V_1} \\ |u_1(r) + u_2(r)| \leq Cr^2 \|u\|_{V_1} \end{array} \right.$$

3- Si $n \geq 2$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} |u(r)| \leq Cr \|u\|_{V_n} \\ \left| \frac{du}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{V_n} \end{array} \right.$$

La constante C est indépendante de u .

Corollaire 4.5. Sous l'hypothèse du théorème 4.4, toute fonction propre u de $A_n(\beta)$ vérifie :

$$(4.52) \quad |u(r)|^2 + |\operatorname{div}^3 u(r)|^2 + |\varepsilon_n(\beta, u)(r)| \leq C \|u\|_{V_n}^2 \quad p.p. r \in [0, R]$$

l'expression de $\varepsilon_n(\beta; u)$ étant donnée par la formule (4.16).

Corollaire 4.6. Supposons que $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{L}_m)^2$. Si u est une fonction propre de $A_n(\beta)$ alors $u \in H^2(0, r_1)^3$ et vérifie sur $[0, r_1]$ les estimations suivantes :

1- Si $n = 0$, on a :

$$\sum_{i=1}^2 |u_i(r)| + r |u_3(r)| + |u_3'(r)| \leq Cr \|u\|_{H^1(0, r_1)^3}$$

2- Si $n = 1$, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 |u_i(r)| + \left| \frac{du_3}{dr}(r) \right| \leq C \|u\|_{H^1(0,r_1)^3} \\ \sum_{i=1}^2 \left| \frac{du_i}{dr}(r) \right| + |u_3(r)| \leq Cr \|u\|_{H^1(0,r_1)^3} \\ |u_1(r) + u_2(r)| \leq Cr^2 \|u\|_{H^1(0,r_1)^3} \end{array} \right.$$

3- Si $n \geq 2$, on a :

$$|u_i(r)| \leq Cr \|u\|_{H^1(0,R)^3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Preuve. Le résultat du théorème 4.4 montre que $u \in H^1(0, r_1)^3$. Donc il reste à prouver que $\frac{d^2u}{dr^2} \in L^2(0, r_1)$. Montrons ce fait dans un cas particulier (l'idée étant la même pour les autres cas). Examinons la composante u_1 pour $n \geq 2$. En dérivant l'égalité (4.35) on obtient :

$$\begin{aligned} r \frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{du_1}{dr} = & c_3(n-1)\xi_{33}r^{n-2} + c_4(n+1)\xi_{34}r^{n-1} - (n+1)\xi_{11}r^{-n-2}G_1(r) \\ & + \xi_{11}r^{-n-1}G'_1(r) + (1-n)\xi_{12}r^{-n}G_2(r) + \xi_{12}r^{-n+1}G'_2(r) \\ & + \xi_{13}r^{n-1}G'_3(r) + (n-1)\xi_{13}r^{n-2}G_3(r) + \xi_{14}r^{n+1}G'_4(r) \\ & + (n+1)\xi_{14}r^nG_4(r) \end{aligned}$$

avec

$$G_k(r) = \int_{r^*}^r \tau^{s_k-k+\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^4 g_j(u(\tau)) \zeta_{jk} \right) d\tau \quad (1 \leq k \leq 4)$$

Posons :

$$h_k = \sum_{j=1}^4 g_j(u) \zeta_{jk}$$

En réinjectant les informations du théorème 4.4 dans ce qui précède, on peut établir les estimations :

- (i) $h_k(r) = r\tilde{h}_k(r)$ et $|\tilde{h}_k(r)| \leq C \|u\|_{V_n}$;
- (ii) $|G_k(r)| \leq Cr^{\gamma_k} \|u\|_{V_n}$, $\gamma_1 = n+3$, $\gamma_2 = n+1$, $\gamma_3 = -n+3$, $\gamma_4 = -n+1$;
- (iii) $G'_k(r) = r^{\gamma_k-1} \tilde{h}_k(r)$.

L'ensemble de ces considérations entraînent :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dr} = c_3 \xi_{33} r^{n-2} + O(r) \text{ et} \\ r \frac{d^2 u_1}{dr^2} = (n-2) c_3 \xi_{33} r^{n-2} + O(r) \end{cases}$$

Ceci prouve que $\frac{d^2 u_1}{dr^2}$ est borné au voisinage 0. Les inégalités (1-2-3) sont analogues à celles établies dans le théorème 4.4, elles proviennent du fait que l'inégalité $\|g(u)\|_{L^2(0,r_1)} \leq C \|u\|_{H^1(0,r_1)}$ a lieu dans tous les cas (revoir les développements qui ont abouti au théorème 4.4).

Remarque 4.3

En réitérant le raisonnement précédent, on arrive à la conclusion : si $n \geq 1$, u se comporte au voisinage de $r = 0$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_i(r) = O(r^{n-1}) \text{ si } i = 1, 2 \\ u_3(r) = O(r^n). \end{cases}$$

Conséquence

Le théorème suivant traduit la continuité de la fonction $\Lambda = (\lambda, \mu, \rho) \mapsto S_m^n(\beta, \Lambda)$ par rapport à la norme $\|\Lambda\|_{L^1(0,R)}$. La démonstration de ce théorème utilise essentiellement le résultat du corollaire 4.5.

Nous supposons que Λ varie dans l'espace $(\mathcal{L}_m)^2 \times L^\infty([0, R])$.

Théorème 4.7. *La fonction $\Lambda = (\lambda, \mu, \rho) \mapsto S_m^n(\beta, \Lambda)$ vérifie :*

$$(4.53) \quad \begin{aligned} |S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda')| \leq & \frac{2}{\delta} C m^2 (1 + \beta^2) \max\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}\right) \left[\int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr \right. \\ & + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| + |\rho_\infty - \rho'_\infty| \\ & \left. + \max\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}, \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}\right) \max\left(\frac{\rho'_+}{\rho_-}, \frac{\rho_+}{\rho'_-}\right) \int_0^R |\rho - \rho'| r dr \right] \end{aligned}$$

avec $\delta = \min(\lambda_-, \lambda'_-, \mu_-, \mu'_-, \rho_-, \rho'_-)$, et C étant la constante du corollaire 4.5.

Preuve. Pour simplifier l'exposé supposons d'abord que $\rho = \rho'$.

D'après (4.12), on a :

$$(4.54) \quad \begin{aligned} a_n(\beta, \Lambda; u, u) &\leq a_n(\beta, \Lambda'; u, u) + \int_0^R |\lambda - \lambda'| |div^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r dr + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| \int_R^\infty |div^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + |\mu_\infty - \mu'_\infty| \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r dr ; \quad u \in V_n \end{aligned}$$

La formule (4.18) entraîne si $u \in V_n$:

$$(4.55) \quad \begin{cases} \int_R^\infty |div^\beta u|^2 r dr \leq \frac{1}{\lambda'_\infty} a_n(\beta, \Lambda'; u, u) \\ \int_R^\infty \varepsilon_n(\beta, u) r dr \leq \frac{1}{\mu'_\infty} a_n(\beta, \Lambda'; u, u) \end{cases}$$

A partir de (4.54) et (4.55), la définition de $S_m^n(\beta, \Lambda)$ entraîne :

$$(4.56) \quad \begin{aligned} S_m^n(\beta, \Lambda) &\leq \max_{u \in V_m} \frac{a_n(\beta, \Lambda'; u, u)}{\|u\|^2} + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\lambda - \lambda'| |div^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r dr \\ &\quad + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \max_{u \in V_m} \frac{a_n(\beta, \Lambda'; u, u)}{\|u\|^2} \end{aligned}$$

où V_m est un sous-espace quelconque de V_n de dimension m .

On distingue 4 cas :

$$(i) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) < \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta, \Lambda') < \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}$$

Alors il existe, d'après le principe du Min-Max, $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)} \in V_n$ tels que :

$$(4.57) \quad \begin{cases} \int_0^\infty u^{(i)} u^{(j)} \rho' r dr = \delta_{ij} \\ a_n(\beta, \Lambda'; u^{(i)}, u^{(j)}) = \delta_{ij} S_i^n(\beta, \Lambda') \quad (1 \leq i, j \leq m) \end{cases}$$

Choisissons $V_m = \{u^{(1)}, \dots, u^{(m)}\}$, alors (4.56) entraîne :

$$(4.58) \quad \begin{aligned} S_m^n(\beta, \Lambda) &\leq S_m^n(\beta, \Lambda') + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\lambda - \lambda'| |div^\beta u|^2 r dr \\ &\quad + \max_{u \in V_m} \frac{1}{\|u\|^2} \int_0^R |\mu - \mu'| \varepsilon_n(\beta, u) r dr \\ &\quad + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \end{aligned}$$

Soit $u \in V_m$ de norme unité

$$\begin{cases} u = \sum_{k=1}^m \alpha_k u^{(k)}; & \alpha_k = \int_0^\infty uu^{(k)} \rho' r dr \\ \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 = 1 \end{cases}$$

d'où

$$div^\beta u = \sum_{k=1}^m \alpha_k div^\beta(u^{(k)}) \implies |div^\beta u|^2 \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} |div^\beta u^{(k)}|^2$$

et

$$(4.59) \quad \||div^\beta u|^2\|_{L^\infty(0,R)} \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \||div^\beta u^{(k)}|^2\|_{L^\infty(0,R)}$$

De la même manière, on montre que :

$$(4.60) \quad \|\varepsilon_n(\beta, u)\|_{L^\infty(0,R)} \leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)}$$

D'après le corollaire (4.5), il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $k \in [1, m]$, on ait :

$$(4.61) \quad \begin{cases} \||div^\beta u^{(k)}|^2\|_{L^\infty(0,R)} & \leq C \|u^{(k)}\|_{V_n}^2 \\ \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)} & \leq C \|u^{(k)}\|_{V_n}^2 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \||div^\beta u|^2\|_{L^\infty(0,R)} & \leq C m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|u^{(k)}\|_{V_n}^2 \\ (4.62) \quad & \leq \frac{C m^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} \max_{1 \leq k \leq m} a_n(\beta, \Lambda'; u^{(k)}, u^{(k)}) \quad (\text{coercivité de } a_n(\beta)) \\ & \leq \frac{C m^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} S_m^n(\beta, \Lambda') \\ & \leq \frac{C m^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad (\forall u \in V_m). \end{aligned}$$

De la même manière on montre que :

$$(4.63) \quad \|\varepsilon_n(\beta, u^{(k)})\|_{L^\infty(0,R)} \leq \frac{C m^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad (u \in V_m)$$

ce qui entraîne avec (4.46) :

$$(4.64) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda') \leq \frac{Cm^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr \\ + \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}$$

En échangeant les rôles de Λ et Λ' , on obtient :

$$(4.65) \quad |S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda')| \leq \frac{(C+1)m^2}{\delta} (1 + \beta^2) \max \left(\frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}, \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right) \\ \times \left[\int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr + |\lambda_\infty - \lambda'_\infty| + |\mu_\infty - \mu'_\infty| \right]$$

où $\delta = \min(\lambda_-, \lambda'_-, \mu_-, \mu'_-)$. A ce niveau on a supposé que $C \geq 1$, ce qui ne nuit pas à la généralité.

$$(ii) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) = \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta, \Lambda') < \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}.$$

$$(a) \quad \text{Si } \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \geq \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad \text{alors} \quad S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda') \geq 0$$

ce qui donne, avec (4.64), l'inégalité (4.65).

$$(b) \quad \text{Si } \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \leq \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \quad \text{alors} :$$

$$S_m^n(\beta, \Lambda') - S_m^n(\beta, \Lambda) \leq \beta^2 \left(\frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \right)$$

et l'inégalité :

$$0 \leq \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{|a_1 - a_2|}{a_1} + \frac{|b_1 - b_2|}{b_1} \right)$$

entraîne :

$$(4.66) \quad S_m^n(\beta, \Lambda') - S_m^n(\beta, \Lambda) \leq \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \left(\frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu_\infty} + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty} \right)$$

Comme l'inégalité (4.64) est valable dans ce cas, on obtient (4.65).

$$(iii) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) = \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta, \Lambda') = \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}.$$

alors :

$$|S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda')| = \beta^2 \left| \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \right|$$

ce qui est analogue à (ii)-(b).

$$(iv) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) < \beta^2 \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad \text{et} \quad S_m^n(\beta, \Lambda') = \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty}.$$

Ce cas est symétrique à (ii).

Pour compléter la démonstration, envisageons le cas $\{\rho \neq \rho'\}$.

Partons de l'inégalité suivante :

$$(4.67) \quad \|u\|_{\rho'}^2 \leq \|u\|_{\rho}^2 + \int_0^R |\rho - \rho'| |u|^2 r dr + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty} \int_R^\infty |u|^2 \rho_\infty r dr \quad (u \in H)$$

d'où :

$$(4.68) \quad \|u\|_{\rho'}^2 \leq \|u\|_{\rho}^2 + \|u\|_{L^\infty(0,R)^3}^2 \int_0^R |\rho - \rho'| r dr + \|u\|_{\rho}^2 \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty}$$

Si $u \in V_m$ est tel que $\|u\|_{\rho'} = 1$, alors

$$(4.69) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0,R)^3}^2 &\leq m^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|u^{(k)}\|_{L^\infty(0,R)^3}^2 \\ &\leq Cm^2 \max_{1 \leq k \leq m} \|u^{(k)}\|_{V_n}^2 \quad (\text{Corollaire (4.5)}) \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} \max_{1 \leq k \leq m} a_n(\beta; \Lambda', u^{(k)}, u^{(k)}) \quad (\text{coercivité de } a_n(\beta)) \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} S_m^n(\beta, \Lambda') \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_- \min(1, \beta^2)} \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \\ &\leq \frac{Cm^2}{\mu'_-} (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$1 = \|u\|_{\rho'}^2 \leq \frac{\rho'_+}{\rho_-} \|u\|_{\rho}^2$$

entraîne :

$$\|u\|_{L^\infty(0,R)^3}^2 \leq \frac{1}{\mu_-} Cm^2 (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \frac{\rho'_+}{\rho_-} \|u\|_{\rho}^2$$

ce qui donne avec (4.68) :

$$(4.70) \quad \|u\|_{\rho'}^2 \leq \|u\|_{\rho}^2 (1 + \varphi(\Lambda, \Lambda'))$$

avec

$$\varphi(\Lambda, \Lambda') = \frac{1}{\mu_-} Cm^2 (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \frac{\rho'_+}{\rho_-} \int_0^R |\rho - \rho'| r dr + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty}$$

Nous allons établir (4.53) dans le cas (i) (la méthode étant identique pour les autres cas).

En suivant la même démarche que dans le cas $\{\rho = \rho'\}$, on peut établir l'inégalité :

$$(4.71) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) \leq (1 + \varphi(\Lambda, \Lambda')) \left[S_m^n(\beta, \Lambda') + \frac{1}{\mu'_-} C m^2 (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \right. \\ \left. \times \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr + \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \right]$$

ou encore :

$$(4.72) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) \leq S_m^n(\beta, \Lambda') + \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \varphi(\Lambda, \Lambda') + (1 + \varphi(\Lambda, \Lambda')) \\ \times \left[\frac{1}{\mu'_-} C m^2 (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr \right. \\ \left. + \beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} \right) \right]$$

On suppose maintenant que Λ et Λ' sont suffisamment proches (ce qui n'affaiblit pas le résultat final) pour que $\varphi(\Lambda, \Lambda') \leq 1$. Ceci entraîne avec (4.70) :

$$(4.73) \quad S_m^n(\beta, \Lambda) - S_m^n(\beta, \Lambda') \leq 2\beta^2 \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \left(\frac{|\lambda_\infty - \lambda'_\infty|}{\lambda'_\infty} + \frac{|\mu_\infty - \mu'_\infty|}{\mu'_\infty} + \frac{|\rho_\infty - \rho'_\infty|}{\rho_\infty} \right) \\ + \frac{2}{\mu_-} C m^2 (1 + \beta^2) \left(\frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \right)^2 \frac{\rho'_+}{\mu'_-} \int_0^R |\rho - \rho'| r dr \\ + \frac{2}{\mu'_-} C m^2 (1 + \beta^2) \frac{\mu'_\infty}{\rho'_\infty} \int_0^R (|\lambda - \lambda'| + |\mu - \mu'|) r dr$$

En échangeant les rôles de Λ et Λ' on obtient le résultat du théorème 4.6. \square

Remarque 4.4 L'inégalité (4.53) a un intérêt pratique seulement lorsque Λ' varie dans un domaine où la quantité $\delta = \delta(\Lambda')$ reste minorée (uniformément) par un nombre $\delta_0 > 0$.

Annexe 1

Décomposition d'un mode guidé en série de Fourier

On sait, d'après la remarque 1.3, que toute solution $u = (u_1, u_2, u_3)$ du problème $P_n(\beta)$ permet de construire deux modes guidés $U^{(1)}(r, \theta)$ et $U^{(2)}(r, \theta)$ (solutions du système (1.5)) grâce aux formules :

$$\begin{cases} U^{(1)}(r, \theta) = u_1(r) \cos n\theta e_r + u_2(r) \sin n\theta e_\theta - iu_3(r) \cos n\theta e_z \\ U^{(2)}(r, \theta) = u_1(r) \sin n\theta e_r - u_2(r) \cos n\theta e_\theta - iu_3(r) \sin n\theta e_z \end{cases}$$

Réciproquement, chaque mode guidé est une combinaison (finie si $\omega < \beta v_s$) de solutions du type $U^{(1)}(r, \theta)$ et $U^{(2)}(r, \theta)$.

De façon précise, nous avons le théorème :

Théorème A1.1. *Soit $U(r, \theta) = U_r(r, \theta)e_r + U_\theta(r, \theta)e_\theta + U_z(r, \theta)e_z$ une solution de (1.5) (appartenant à $L^2(\mathbf{R}^2)^3$). Alors $U(r, \theta)$ possède la décomposition :*

$$(A1.1) \quad \begin{cases} U_r(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^1(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^1(r) \cos n\theta + v_n^1(r) \sin n\theta) \\ U_\theta(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^2(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^2(r) \sin n\theta - v_n^2(r) \cos n\theta) \\ U_z(r, \theta) = \frac{1}{2}u_0^3(r) + \sum_{n=1}^{N(\beta)} (u_n^3(r) \cos n\theta + v_n^3(r) \sin n\theta) \end{cases}$$

où, pour tout $n \in [0, N(\beta)]$, $u_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3)$ et $v_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3)$ sont deux fonctions propres de $A_n(\beta)$ associées à ω^2 . En particulier, si $\omega < \beta v_s$, le nombre $N(\beta)$ est fini.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème rappelons un résultat de BAMBERGER et al. [B.D.J]. Dans ce rapport on montre que les modes guidés vérifient le problème variationnel suivant :

$$(P(\beta)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \omega \in \mathbf{R}^+ \text{ et } u \in V, u \neq 0 \text{ tels que :} \\ a(\beta; u, v) = \omega^2(u, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

avec

$$V = H^1(\mathbf{R}^2)^3; \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^2)^3$$

et

$$a(\beta; u, v) = \int_{\mathbf{R}^2} \lambda(\operatorname{div}^\beta u)(\operatorname{div}^\beta v) dx_1 dx_2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^2} \mu \varepsilon_{i,j}^\beta(u) \varepsilon_{i,j}^\beta(v) dx_1 dx_2$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}^\beta u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \beta u_3 \\ \varepsilon_{k,j}^\beta(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad k, j = 1, 2 \\ \varepsilon_{k,3}^\beta(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_k} + \beta u_k \right) \quad k = 1, 2 \\ \varepsilon_{3,3}^\beta(u) = -\beta u_3 \end{array} \right.$$

Cette formulation dérive des équations de l'élastodynamique écrites en coordonnées cartésiennes.

Commençons par démontrer une série de lemmes techniques.

Lemme A1.2. Soit $(u, v) \in V \times V$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta) = u_1(r, \theta)e_r + u_2(r, \theta)e_\theta + u_3(r, \theta)e_z \\ v(r, \theta) = v_1(r, \theta)e_r + v_2(r, \theta)e_\theta + v_3(r, \theta)e_z \end{array} \right.$$

Alors, on a :

(i)

$$(A1.2) \quad \begin{aligned} (u, v)_V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left(u_i v_i + \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(u_1 \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_1 v_1 + u_2 v_2 \right) \frac{dr}{r} d\theta \end{aligned}$$

(ii) En particulier si

$$(A1.3) \quad \begin{cases} u_1(r, \theta) = u_1(r) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \\ u_2(r, \theta) = u_2(r) \begin{pmatrix} -\cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_3(r, \theta) = u_3(r) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

on a l'équivalence :

$$u(r, \theta) \in V \iff (u_1(r), u_2(r), u_3(r)) \in V_n$$

(iii) Supposons que, pour tout entier n , (u_1^n, u_2^n, u_3^n) appartient à V_n . Alors le système

$$(A1.4) \quad \left\{ u_1^n(r) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e_r + u_2^n(r) \begin{pmatrix} -\cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} e_\theta + u_3^n(r) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e_z ; n \in \mathbf{N} \right\}$$

est orthogonal dans V .

Preuve.

Soit $u \in V$. Si $u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ dans le repère cartésien (O, x_1, x_2, x_3) alors, par définition, on a :

$$\|u\|_V^2 = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}^2} (\|u_{x_i}\|^2 + \|\nabla u_{x_i}\|^2) dx_1 dx_2$$

A l'aide des formules de changement de base :

$$\begin{cases} u_{x_1} &= u_1(r, \theta) \cos \theta - u_2(r, \theta) \sin \theta \\ u_{x_2} &= u_1(r, \theta) \sin \theta + u_2(r, \theta) \cos \theta \\ u_{x_3} &= u_3(r, \theta) \end{cases}$$

on obtient les relations :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |u_{x_i}|^2 &= \sum_{i=1}^3 |u_i|^2 \\ \sum_{i=1}^3 |\nabla u_{x_i}|^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\partial u_{x_i}}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_{x_i}}{\partial \theta} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left[u_1^2 + u_2^2 + 2 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 \right) \end{aligned} \right.$$

d'où l'identité :

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left(|u_i|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 \right) r dr d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[2 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + |u_1|^2 + |u_2|^2 \right] \frac{dr}{r} d\theta \end{aligned}$$

la formule (A1.2) découle de la décomposition polaire :

$$(u, v)_V = \frac{1}{2} [(u + v, u + v)_V - \|u\|_V^2 - \|v\|_V^2].$$

(i) En substituant (A1.3) dans (A1.2) on obtient :

$$\|u\|_V^2 = \pi \int_0^\infty \left(|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{4nu_1u_2}{r^2} + \frac{n^2u_3^2}{r^2} \right) r dr$$

d'où l'équivalence des normes :

$$\frac{\pi}{2} \|u(r)\|_{V_n}^2 \leq \|u(r, \theta)\|_V^2 \leq 2\pi \|u(r)\|_{V_n}^2$$

par suite :

$$u(r, \theta) \in V \iff u(r) \in V_n$$

(iii) En utilisant (A1.2), l'orthogonalité du système (A1.4) est une conséquence de l'orthogonalité du système trigonométrique $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n \in \mathbf{N}^*\}$ dans $L^2(0, 2\pi)$. \square

Afin de simplifier l'exposé, nous adopterons provisoirement dans le lemme qui suit la définition suivante de la norme :

$$\|u\|_{V_n}^2 = \int_0^\infty \left(|u|^2 + \left| \frac{du}{dr} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{4nu_1u_2}{r^2} + \frac{n^2u_3^2}{r^2} \right) r dr, n \neq 0.$$

qui est équivalente à la norme initiale.

Lemme A1.3. Soit $u(r, \theta) = u_r(r, \theta)e_r + u_\theta(r, \theta)e_\theta + u_3(r, \theta)e_3$ un élément de V . Alors u admet le développement de Fourier suivant :

$$(A1.5) \quad \begin{cases} u_r(r, \theta) &= \frac{1}{2}u_0^1(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^1(r) \cos n\theta + v_n^1(r) \sin n\theta) \\ u_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{2}u_0^2(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2(r) \sin n\theta - v_n^2(r) \cos n\theta) \\ u_z(r, \theta) &= \frac{1}{2}u_0^3(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^3(r) \cos n\theta + v_n^3(r) \sin n\theta) \end{cases}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de Fourier $u_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3)$ et $v_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3)$ sont des éléments de V_n .

De plus, on a :

$$(i) \quad \|u\|_V^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|_{V_0}^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\|u_n\|_{V_n}^2 + \|v_n\|_{V_n}^2)$$

(ii) la série (A1.5) converge vers $u(r, \theta)$ dans V .

Preuve. Soit u un élément de V ayant la décomposition $u(r, \theta) = u_1(r, \theta)e_r + u_2(r, \theta)e_\theta + u_3(r, \theta)e_3$. En vertu du lemme A1.2, on a :

$$(A1.6) \quad \|u\|_V^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left(|u_i|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 \right) r dr d\theta \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[2 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + |u_1|^2 + |u_2|^2 + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 \right] \frac{dr}{r} d\theta$$

On vérifie facilement l'identité :

$$(A1.7) \quad 2 \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + |u_1|^2 + |u_2|^2 + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 = \\ \left| \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right|^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - u_2 \right)^2$$

ce qui prouve que l'intégrale :

$$(A1.8) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left(|u_i|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 \right) r dr d\theta$$

est convergente.

Par suite :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \left(|u_i(r, \theta)|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 \right) d\theta < +\infty \quad \text{p.p. } r \in \mathbf{R}^+$$

Ainsi la fonction $u_i(r, \theta)$ est développable en série de Fourier par rapport à θ et on a la formule (A1.5). De plus, on peut dériver (terme à terme) par rapport à r la série (A1.5) et, en particulier, la formule de Parseval nous donne :

$$\int_0^{2\pi} \left(|u_i|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \left(|u_0^i|^2 + \left| \frac{\partial u_0^i}{\partial r} \right|^2 \right) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|u_n^i|^2 + |v_n^i|^2 + \left| \frac{\partial u_n^i}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_n^i}{\partial r} \right|^2 \right)$$

ce qui entraîne avec (A1.8)

$$(A1.9) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left(|u_i|^2 + \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 \right) r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(|u_0^i|^2 + \left| \frac{\partial u_0^i}{\partial r} \right|^2 \right) r dr + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(|u_n^i|^2 + |v_n^i|^2 + \left| \frac{\partial u_n^i}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_n^i}{\partial r} \right|^2 \right) r dr$$

De (A1.6) et (A1.7) on déduit que les fonctions $\frac{\partial u_3}{\partial \theta}$, $\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_1$ et $\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2$ appartiennent à $L^2(0, 2\pi)$ pour presque tout r positif. D'où

$$\frac{\partial u_i}{\partial \theta}(r, \theta) \in L^2(0, 2\pi) \quad \text{p.p. } r \in \mathbf{R}^+ \quad (i = 1, 2, 3)$$

On peut donc dériver (A1.5) par rapport à θ et avoir :

$$(A1.10) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|u_n^i|^2 + |v_n^i|^2) \\ \int_0^{2\pi} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (u_n^1 u_n^2 + v_n^1 v_n^2) \\ \int_0^{2\pi} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} d\theta = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (u_n^1 u_n^2 + v_n^1 v_n^2) \end{cases}$$

d'où

$$(A1.11) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right|^2 \frac{dr}{r} d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} n^2 (|u_n^i|^2 + |v_n^i|^2) \frac{dr}{r} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \frac{dr}{r} d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} 2n \int_0^{\infty} (u_n^1 u_n^2 + v_n^1 v_n^2) \frac{dr}{r} \end{cases}$$

En substituant (A1.9) et (A1.11) dans (A1.6), on obtient :

$$(A1.12) \quad \|u\|_V^2 = \frac{\pi}{2} \|u_0\|_{V_0}^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\|u_n\|_{V_n}^2 + \|v_n\|_{V_n}^2)$$

(ii) Notons $u_N(r, \theta)$ la série tronquée des seconds membres de (A1.5). Montrons que :

$$\|u - u_N\|_V \longrightarrow 0 \quad \text{quand } N \longrightarrow \infty$$

Nous avons

$$\|u - u_N\|_V^2 = \|u\|_V^2 + \|u_N\|_V^2 - 2(u, u_N)_V$$

D'après le point (iii) du lemme A1.2, on peut écrire :

$$(u, u_N)_V = \sum_{n=0}^N (u, e_n)_V$$

où e_n est le terme général de la série (A1.5).

Moyennant les formules

$$\begin{cases} u_n^i(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_i(r, \theta) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta, & n \in \mathbf{N} \\ v_n^i(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_i(r, \theta) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} d\theta, & n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

on vérifie que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} (u, e_n)_V = \pi (\|u_n\|_{V_n}^2 + \|v_n\|_{V_n}^2) & n \neq 0 \\ (u, e_0)_V = \frac{1}{2} \|u_0\|_{V_0}^2 \end{cases}$$

d'où

$$(u, u_N)_V = \|u_N\|_V^2 = \frac{1}{2} \|u_0\|_{V_0}^2 + \pi \sum_{n=1}^N (\|u_n\|_{V_n}^2 + \|v_n\|_{V_n}^2)$$

et

$$\|u - u_N\|_V^2 = \|u\|_V^2 - \|u_N\|_V^2 = \pi \sum_{n \geq N+1} (\|u_n\|_{V_n}^2 + \|v_n\|_{V_n}^2)$$

Comme la série (A1.12) est convergente, on a finalement :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - u_N\|_V^2 = 0$$

□

Lemme A1.4. Soient $u = (u_1, u_2, u_3) \in V_n$ et $v = (v_1, -v_2, v_3) \in V_m$. Posons :

$$\begin{cases} \tilde{u}(r, \theta) = u_1(r) \cos n\theta e_r + u_2(r) \sin n\theta e_\theta + u_3(r) \cos n\theta e_3 \\ \tilde{v}(r, \theta) = v_1(r) \sin m\theta e_r + v_2(r) \cos m\theta e_\theta + v_3(r) \sin m\theta e_3 \end{cases}$$

Alors $\tilde{u}, \tilde{v} \in V$ et on a :

$$a(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m; \\ \pi a_n(\beta; u, v) & \text{si } n = m \end{cases}$$

Preuve. Considérons la décomposition de $\tilde{u}(r, \theta) = u_{x_1} e_1 + u_{x_2} e_2 + u_{x_3} e_3$ suivant la base canonique de \mathbf{R}^3 . Nous avons les formules de changement de base :

$$(A1.14) \quad \begin{cases} u_{x_1}(r, \theta) = u_1(r) \cos n\theta \cos \theta - u_2(r) \sin n\theta \sin \theta \\ u_{x_2}(r, \theta) = u_1(r) \cos n\theta \sin \theta + u_2(r) \sin n\theta \cos \theta \\ u_{x_3}(r, \theta) = u_3(r) \cos n\theta \end{cases}$$

et les formules de dérivation :

$$(A1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Moyennant ces transformations, on établit (après un calcul fastidieux) la conclusion du lemme. \square

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer le théorème A1.1.

Preuve du théorème A1.1. Soient $u \in V$ et $\omega \in \mathbf{R}^+$ tels que :

$$a(\beta; u, w) = \omega^2(u, w)_{\mathcal{H}}, \quad \forall w \in V$$

D'après le lemme (A1.3), u admet la représentation (A1.5) avec les coefficients $u_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3)$ et $v_n = (v_n^1, -v_n^2, v_n^3)$ qui appartiennent à V_n et la suite $u_N(r, \theta)$ qui converge vers u dans V . La continuité de $a(\beta; \cdot, \cdot)$ entraîne :

$$a(\beta; u, w) = \lim_{N \rightarrow \infty} a(\beta; u_N, w), \quad \forall w \in V$$

Pour $v = (v_1, v_2, v_3) \in V_n$ quelconque, on pose :

$$w(r, \theta) = v_1(r) \cos n\theta e_r + v_2(r) \sin n\theta e_\theta + v_3(r) \cos n\theta e_3$$

En vertu des lemmes (A1.2) et (A1.4), nous avons pour tout $N \geq n$:

$$\begin{cases} a(\beta, u_N, w) = \pi a_n(\beta; u_n, v) \\ (u_N, w)_{\mathcal{H}} = \pi(u_n, v)_H \end{cases}$$

d'où

$$a_n(\beta; u_n, v) = \omega^2(u_n, v)_H, \quad \forall v \in V_n$$

ce qui prouve que u_n est une fonction propre de $A_n(\beta)$ associée à ω^2 .

De manière analogue, en choisissant :

$$w(r, \theta) = v_1(r) \sin n\theta e_r + v_2(r) \cos n\theta e_\theta + v_3(r) \sin n\theta e_3 \text{ avec } (v_1, v_2, v_3) \in V_n$$

on montre que $v_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3)$ est une fonction propre de $A_n(\beta)$ associée à ω^2 .

Or on sait, d'après la proposition 5.7, que, pour n assez grand, $A_n(\beta)$ n'a pas de valeurs propres strictement inférieures à $\beta^2 v_s^2$. Donc, si $\omega < \beta v_s$, la série (A1.5) comporte seulement un nombre fini de termes non nuls. Ceci achève la preuve du théorème. \square

Annexe 2

Quelques résultats de densité

Nous voulons montrer dans cette annexe la densité de l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+) \equiv D(\mathbf{R}^+)^3$ dans les espaces fonctionnels V_n et W_n introduits respectivement dans les chapitres 1 (p. 8) et 3 (p.45). Remarquons que V_n (resp W_n) est un produit cartésien d'espaces fonctionnels plus simples, plus précisément nous avons les décompositions :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = \mathcal{W}^2 \times \mathcal{V} \\ V_1 = \overline{\mathcal{W}}^2 \times \mathcal{W} \\ V_n = \mathcal{W}^3, \quad n \geq 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_0 = \mathcal{W}^2 \times \mathcal{V} \\ W_1 = \overline{\mathcal{W}}_R \times \mathcal{W} \\ W_n = \mathcal{W}^3, \quad n \geq 2 \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{V} = \{u \in H; \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

$$\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{V}; \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

$$W = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+); \sqrt{r} \frac{du}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+); \frac{u}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+)\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}} &= \{\bar{u} = (u_1, u_2) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^2; \sqrt{r} \frac{d\bar{u}}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^2; \\ &\quad \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+); \sqrt{r}\bar{u} \in L^2(\mathbf{R}^+)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}}_R &= \{\bar{u} = (u_1, u_2) \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^2; \sqrt{r} \frac{d\bar{u}}{dr} \in L^2(\mathbf{R}^+)^2; \\ &\quad \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{r}} \in L^2(\mathbf{R}^+); \sqrt{r}\bar{u} \in L^2(0, R)^2\} \end{aligned}$$

La question est donc de vérifier la densité de $D(\mathbf{R}^+)$ dans chacun des espaces définies ci-dessus. La densité de $D(\mathbf{R}^+)$ dans \mathcal{V} est démontrée dans la monographie ([D.L], tome 5, chap. 8). On s'inspire des idées utilisées dans ce travail pour établir nos résultats.

Proposition A2.1. $D(\mathbb{R}^+)$ est dense dans l'espace \mathcal{W} .

Preuve. S'inspirant des idées de la référence [D.L], on procédera en deux étapes.

1^{ère} étape : les fonctions de \mathcal{W} à supports bornés sont denses dans \mathcal{W} .

Soit $u \in \mathcal{W}$, posons $u_R = \Theta_R \cdot u$ avec Θ_R défini par :

$$\Theta_R(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq R; \\ 2 - \frac{r}{R} & \text{si } R < r < 2R; \\ 0 & \text{si } 2R \leq r \end{cases}$$

Montrons que $\|u - u_R\|_{\mathcal{W}} \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$.

(i)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(|u - u_R|^2 r + \frac{|u - u_R|^2}{r} \right) dr &= \int_R^\infty |1 - \Theta_R|^2 \left(r + \frac{1}{r} \right) |u|^2 dr \\ &\leq \int_R^\infty \left(r + \frac{1}{r} \right) |u|^2 dr \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(ii)

$$\int_0^\infty \left| \frac{du}{dr} - \frac{du_R}{dr} \right|^2 r dr = \int_R^{2R} \left| \frac{d}{dr} ((1 - \Theta_R)u) \right|^2 r dr + \int_{2R}^\infty \left| \frac{du}{dr} \right|^2 r dr$$

d'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_R^{2R} \left| \frac{d}{dr} ((1 - \Theta_R)u) \right|^2 r dr &= \int_R^{2R} \left| \frac{u}{R} + (1 - \Theta_R) \frac{du}{dr} \right|^2 r dr \\ &\leq 2 \left[\frac{1}{R^2} \int_R^{2R} |u|^2 r dr + \int_R^{2R} \left| \frac{du}{dr} \right|^2 r dr \right] \\ &\leq 8 \int_R^{2R} \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 r + \frac{|u|^2}{r} \right) dr \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\infty \left| \frac{du}{dr} - \frac{du_R}{dr} \right|^2 r dr \leq 8 \int_R^\infty \left(\left| \frac{du}{dr} \right|^2 r + \frac{|u|^2}{r} \right) dr \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

2^{ème} étape : Supposons que $u \in \mathcal{W}$ et $u(r) = 0$ pour $r \geq R$.

D'après la propriété 2.4, $\sqrt{r}u \in H_0^1(0, R)$, de plus on a l'inégalité :

$$\|u\|_{\mathcal{W}} \leq 2\sqrt{2} \|\sqrt{r}u\|_{H^1(0, R)}$$

Par définition de $H_0^1(0, R)$, il existe une suite $v_n \in D(0, R)$ telle que :

$$\|\sqrt{r}u - v_n\|_{H^1(0,R)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

ce qui entraîne :

$$\left| \begin{array}{l} u_n = \frac{v_n}{\sqrt{r}} \in D(R^+) \\ \text{et } \|u - u_n\|_W \leq 2\sqrt{2}\|\sqrt{r}u - v_n\|_{H^1(0,R)} \longrightarrow 0 \end{array} \right. \quad (n \longrightarrow \infty)$$

qui prouve le résultat. \square

On peut adapter la démonstration précédente pour démontrer le résultat suivant :

Proposition A2.2. $D(\mathbb{R}^+)$ est dense dans W .

Remarque sur la démonstration : Dans la première étape (i), on ne tient pas compte du terme $\int_0^\infty |u - u_R|^2 r dr$. Dans la deuxième étape, si u est à support borné on a aussi l'inégalité :

$$\|u\|_W \leq 2\sqrt{2}\|\sqrt{r}u\|_{H^1(0,R)}$$

Proposition A2.3. $D(\mathbb{R}^+)^2$ est dense dans les espaces \overline{W} et \overline{W}_R .

Preuve. On va prouver la densité pour l'espace \overline{W} , la preuve est identique pour \overline{W}_R . La norme de \overline{W} est définie naturellement par l'expression :

$$\|\bar{u}\|_{\overline{W}}^2 = \int_0^\infty |\bar{u}|^2 r dr + \int_0^\infty \left(r \left| \frac{d\bar{u}}{dr} \right|^2 + \frac{|u_1 + u_2|^2}{r} \right) dr$$

1^{ère} étape : les fonctions de \overline{W} , nulles dans un voisinage de $+\infty$ sont denses dans \overline{W} . Soit $u \in \overline{W}$, posons $\bar{u}_R = \Theta_R \cdot \bar{u}$, $R > 0$, (Θ_R est définie dans la proposition A2.1).

En suivant la démarche de la proposition A2.1, on établit, pour $R \rightarrow +\infty$, les limites suivantes :

- (i) $\int_0^\infty |\bar{u} - \bar{u}_R|^2 r dr \longrightarrow 0$,
- (ii) $\int_0^\infty |u_1 + u_2 - u_{1R} - u_{2R}|^2 \frac{dr}{r} \longrightarrow 0$,
- (iii) $\int_0^\infty \left| \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{d\bar{u}_R}{dr} \right|^2 r dr \longrightarrow 0$.

2^{ème} étape : Les fonctions de \overline{W} , bornées et nulles dans un voisinage de $+\infty$, sont denses dans \overline{W} .

Soit $\bar{u} = (u_1, u_2) \in \overline{W}$, nulle au voisinage de $+\infty$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ introduisons la fonction $\bar{u}_k = (u_{1k}, u_{2k})$ définie par :

$$u_{ik}(r) = \begin{cases} k & \text{si } u_i(r) \geq k \\ u_i(r) & \text{si } |u_i(r)| \leq k \\ -k & \text{si } u_i(r) \leq -k \end{cases} \quad \text{p.p. en } r$$

En utilisant les mêmes arguments que dans ([DL], Tome 5, p.88), on montre que :

$$\|\bar{u} - \bar{u}_k\|_{\overline{W}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty$$

3^{ème} étape : Les fonctions à support compact dans \mathbf{R}^+ sont denses dans l'ensemble des fonctions de \overline{W} qui sont bornées et nulles au voisinage de $+\infty$.

Soit ρ la fonction continue définie par :

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ r - 1 & \text{si } 1 \leq r \leq 2, \\ 1 & \text{si } 2 \leq r. \end{cases}$$

Soit $v = (v_1, v_2) \in \overline{W}$, v bornée et nulle au voisinage de $+\infty$. La fonction définie par $v_n(r) = \rho(nr)v(r)$ est dans \overline{W} et à support compact. On vérifie que (voir [DL], Tome 5, p.89) :

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{dans } \overline{W} \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

4^{ème} étape : Régularisation.

Des étapes 1 à 3 on déduit que les fonctions de \overline{W} à support compact dans \mathbf{R}^+ sont denses dans \overline{W} .

Il suffit donc d'approcher une telle fonction v par une fonction de classe C^∞ . Soit alors ϕ_ϵ , $\epsilon > 0$, une suite de fonctions de $D(\mathbf{R}^+)$ telles que :

$$\begin{cases} \phi_\epsilon(r) = \phi\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \quad \text{et} \\ \int_{\mathbf{R}} \phi dr = 1, \quad \text{supp } \phi \subset [-1, 1] \end{cases}$$

On vérifie sans peine que $v_\epsilon = (\phi_\epsilon * v_1, \phi_\epsilon * v_2) \rightarrow v$ dans \overline{W} lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. □

Annexe 3

Une inégalité de Poincaré

Considérons l'espace de Hilbert :

$$W(0, R) = \{v \in L^2(0, R); \sqrt{r}v \in L^2(0, R); \sqrt{r}\frac{dv}{dr} \in L^2(0, R)\}$$

Soit $P(0, R)$ le sous-espace de $W(0, R)$ défini par :

$$P(0, R) = \{v \in W(0, R); \int_0^R v r dr = 0\}$$

Lemme A3.1. *Il existe une constante $C(R) > 0$ telle que :*

$$\int_0^R |v|^2 r dr \leq C(R) \int_0^R \left| \frac{dv}{dr} \right|^2 r dr, \quad \forall v \in P(0, R)$$

Preuve. Nous allons raisonner par l'absurde. Cette inégalité est fautive s'il existe une suite $(v_m) \subset P(0, R)$ telle que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$:

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^R |v_m|^2 r dr = 1 \quad (A3.1) \\ \int_0^R \left| \frac{dv_m}{dr} \right|^2 r dr \leq \frac{1}{m} \quad (A3.2) \\ \int_0^R v_m r dr = 0 \quad (A3.3) \end{array} \right.$$

L'injection de $W(0, R)$ dans $H(0, R) = \{v \in L^2_{loc}(0, R); \sqrt{r}v \in L^2(0, R)\}$ est compacte et la suite (v_m) étant bornée dans $W(0, R)$, on peut extraire une sous-suite, notée toujours (v_m) , qui converge vers un élément $v \in H(0, R)$, ce qui veut dire que $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^R |v_m - v|^2 r dr = 0$. D'autre part l'inégalité (A3.2) entraîne :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^R \left| \frac{dv_m}{dr} \right|^2 r dr = 0$$

Puisque $W(0, R)$ est complet, on en déduit que $v_m \rightarrow v$ dans $W(0, R)$. De plus v vérifie $\frac{dv}{dr} = 0$, donc v est une constante.

En passant à la limite, quand $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\int_0^R v r dr = 0$$

d'où $v = 0$. Or ce dernier résultat est impossible car, en passant à la limite dans (A3.1), on a $\|v\|_{H(0, R)} = 1$. □

Remerciements

Je tiens à remercier Y. DERMENJIAN et P. JOLY pour leurs remarques et suggestions. Elles me furent utiles durant la réalisation de ce rapport.

BIBLIOGRAPHIE

- [AS] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications (1968).
- [A] J.D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North Holland (1980).
- [Au] B.A. AULD, *Acoustic fields and waves in solids*, Wiley Interscience (1973).
- [BB] A. BAMBERGER, A.S. BONNET, *Calcul des modes guidés d'une fibre optique. Deuxième partie: analyse mathématique*, Rapport interne 143, 1986, CPAM.
- [Bi] M. BIOT, *Propagation of elastic waves in a liquid-filled cylindrical bore, surrounded by a elastic solid*, J. Appl. Physics **24** (1953), 511-521.
- [BBu] A. BOSTRÖM, A.D. BURDEN, *Propagation of elastic surface waves and their excitation by a point force*, J. Acoust. Soc. Amer. **72** (1982), 998-1004.
- [Bu] A.D. BURDEN, *Propagation of elastic surface waves along cylindrical cavities of general cross section*, J. Wave. Motion **7** (1985), 153-168.
- [BJK] A. BAMBERGER, P. JOLY, M. KERN, *Etude mathématique des modes guidés par l'extérieur d'une cavité de section arbitraire*, Rapport INRIA No 650 (1987).
- [BDJ] A. BAMBERGER, Y. DERMENJIAN, P. JOLY, *Mathematical analysis of the propagation of elastic guided waves in heterogeneous media*, J. Diff. Equ. Vol **88**, No 1 (1990).
- [Bo] A.S. BONNET, *Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques*, Rapport ENSTA No 229 (1988).
- [C] L. CHORFI, *Etude mathématique et numérique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution*, Thèse de l'Université de Provence (1992).
- [CL] E.A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equation*, Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [DL] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 4 et 5, Masson (1988).
- [Dj] R. DJELLOULI, *Contribution à l'analyse mathématique et au calcul numérique des modes guidés des fibres optiques*, Thèse d'état, Paris-Sud (1988).
- [Du] G. DUVAUT *Mécanique des milieux continus*, Masson (1990).

- [HS] E. HEWITT, K. STROMBERG, "Real and abstract analysis," Springer-Verlag, 1965.
- [JT] P. JOLY, J. TLILI, *Approche par équations intégrales d'un problème d'ondes de surface élastiques*, Rapport de recherche INRIA No 1523 (1991).
- [J] P. JOLY, *Nouveau résultat d'existence d'ondes guidées en milieu élastique hétérogène*, C.R.Acad. Sci. Paris 309, I (1989), 709-796.
- [J.W] P. JOLY, R. WEDER, *New results in guided waves in heterogeneous elastic media*, Rapport INRIA No 1377 (1991).
- [K] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer (1966).
- [L] P.E. LAGASSE, *Higher order finite element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves*, J. Acoust. Soc. Amer. vol 53 (1973), pp. 1116-1122.
- [LMA] P.E. LAGASSE, I.M. MASON et E.A. ASH, *Acoustic surface waveguides - Analysis and assessment*, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques vol 21 (1973), pp. 225-236.
- [M] I.A. MINDLIN, *Free elastic waves on the surface of a tube of infinite thickness*, J. Appl. Math. Mech. 27 (1963), pp. 823-828.
- [RS] M. REED, B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Vol 4, Academic Press (1981).
- [R] L. RAYLEIGH, *On waves propagating along the plane surface of an elastic solid*, Proc. London Math. Soc. 17 (1885), 4-11.
- [SC] M. SCHECHTER, *Operator methods in quantum mechanics*, North-Holland (1981).
- [T] J. TLILI, *Calcul d'ondes de surfaces élastiques guidées par une fissure*, Thèse de Paris 6, 1991.



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R . 1 8 4 6 ★