



# Generation de maillages anisotropes adaptes, application a la capture de couches limites

M.G. Vallet

## ► To cite this version:

M.G. Vallet. Generation de maillages anisotropes adaptes, application a la capture de couches limites. RR-1360, INRIA. 1990. inria-00075200

**HAL Id: inria-00075200**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075200>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INRIA**

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.:(1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N°1360

*Programme 7*

*Calcul scientifique, Logiciels numériques et  
Ingénierie assistée par ordinateur*

## **GÉNÉRATION DE MAILLAGES ANISOTROPES ADAPTÉS - APPLICATION À LA CAPTURE DE COUCHES LIMITES**

**Marie-Gabrielle VALLET**

**Décembre 1990**



# GENERATION DE MAILLAGES ANISOTROPES ADAPTES, APPLICATION A LA CAPTURE DE COUCHES LIMITES.

Rapport INRIA  
Décembre 1990

Marie-Gabrielle Vallet

INRIA Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex  
Dassault Aviation, 78 quai Marcel Dassault, 92214 Saint-Cloud

## Résumé:

On présente un générateur automatique de maillages non structurés, triangulaires et anisotropes. Les mailleurs classiques construisent des éléments proches du triangle équilatéral. Cependant, des triangles étirés dans une direction sont préférables pour capter des phénomènes fins et directionnels comme les couches limites ou les chocs. Le mailleur présenté ici est basé sur une méthode de génération de Delaunay-Voronoi, mais appliquée dans une métrique variable en espace. La direction et l'amplitude de l'étirement sont données par une estimation a posteriori de l'erreur d'interpolation dans chaque direction. Ce mailleur a été utilisé pour générer des triangulations adaptées à des écoulements stationnaires présentant de fines couches limites.

## ANISOTROPIC MESH GENERATION AND ADAPTIVE PROCEDURE FOR BOUNDARY LAYER SIMULATION.

## Abstract:

A generator of unstructured meshes with stretched triangular elements is presented. Automatic mesh generators usually try to construct triangles which are as equiangular as possible. However, stretched triangles may be more appropriated in boundary layers or regions where there are shocks. The proposed method is based on a Delaunay triangulation performed in a space with variable metric which controls both spacing and stretching. An 'a posteriori' error on a previous mesh is used to compute the metric. Then the newly generated mesh is adapted to the solution. The mesh generator has been coupled with a Navier-Stokes solver and solutions are obtained whose accuracy is also satisfactory in boundary layers and wakes.

## 1. Introduction.

La résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis nécessite dans un premier temps de mailler le domaine de calcul  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$  ou  $3$ . Or la précision de la solution obtenue au terme du calcul dépend étroitement du maillage utilisé pour la discrétisation du problème. C'est pourquoi on a souvent recours à des techniques d'adaptation de maillages: au regard d'un premier calcul sur un maillage initial  $T_0$ ,

- soit on modifie ce maillage par des techniques de raffinement local (Cf. par exemple [Lö], [Pa], [Po], [R]), de déplacement de points [PD], ...
- soit on génère un nouveau maillage  $T_1$  mieux adapté au calcul effectué.

Dans l'une et l'autre de ces approches, le calcul initial sert classiquement à déterminer une taille locale 'optimale' pour les éléments. Le maillage obtenu est alors isotrope (aucune direction n'est privilégiée). Cependant, il est possible de tirer du même calcul initial une information directionnelle afin de générer des éléments étirés dans une direction. Cette information est alors utilisée soit pour raffiner le maillage initial en privilégiant certaines directions (Cf. [KR]), soit pour régénérer un maillage anisotrope (Cf. [PVMZ], [M]). Cette approche est d'autant plus intéressante que l'on cherche à capter des phénomènes fins, comme par exemple, en dynamique des fluides, des couches limites ou des chocs.

Pour un maximum de flexibilité, nous choisissons de régénérer un maillage de  $\Omega$ . La section 2 est consacrée à un algorithme de génération de type Delaunay-Voronoi. Ces méthodes permettent d'obtenir des maillages isotropes constitués de triangles ou de tétraèdres proches de l'équilatéralité. Ici, afin de construire des éléments étirés, on applique l'algorithme dans un espace déformé. La norme euclidienne est remplacée par une norme variant localement. Ainsi, on détermine une métrique Riemannienne dans laquelle le maillage à construire est isotrope.

Cette métrique est déterminée dans la section 3 par un calcul d'erreur a posteriori. On suppose que les équations ont déjà été discrétisées et résolues sur un maillage initial. Une possibilité pour construire le maillage adapté est d'analyser l'erreur locale de la solution. Pour imposer au mailleur des directions d'étirement, l'erreur calculée est directionnelle.

Le solveur, auquel a été couplé le mailleur adaptatif, est présenté dans la section 4. Il s'agit de résoudre les équations de Navier-Stokes régissant les écoulements de fluides visqueux incompressibles. Une des difficultés de la simulation de l'écoulement d'un tel fluide est de bien capter les couches limites. Celles-ci sont d'autant plus minces que le nombre de Reynolds est grand. L'introduction d'éléments étirés permet de les calculer plus précisément sans augmenter le nombre de degrés de liberté, comme on le voit sur les cas-test de la section 5.

## 2. Génération de maillages.

Les méthodes de génération de maillages 2-D triangulaires et non structurés ne privilégient a priori aucune direction. Les algorithmes classiques d'avance de front ou ceux de type Delaunay-Voronoi créent des éléments d'angles proches de  $\pi/3$  de façon à contrôler l'applatissage des triangles. Nous présentons tout d'abord un tel générateur de maillages isotropes. Si l'on souhaite obtenir des triangles allongés, ces mailleurs doivent être modifiés, comme l'ont fait Peraire et al. [PVMZ] avec une méthode frontale et Mavriplis [M] avec un mailleur de Delaunay. Dans [M] comme ici, l'étirement des triangles est contrôlé par l'introduction d'une métrique locale. Le maillage est généré par un algorithme de type Delaunay appliqué dans l'espace muni de cette métrique.

### 2. 1. Un mailleur de type Delaunay isotrope.

Une triangulation d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un recouvrement de  $\Omega$  par des triangles tel que l'intersection de deux triangles distincts soit ou vide, ou un sommet, ou une arête. Etant donné un ensemble de points  $S = \{s_i = (x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, n_s\}$ , il y a plusieurs façons de relier les points entre eux de manière à obtenir une triangulation de l'enveloppe convexe de  $S$ . Parmi ces triangulations acceptables, nous voudrions éliminer celles qui contiennent des triangles très aplatis et privilégier celles dont tous les éléments sont proches d'un triangle équilatéral. On introduit le concept suivant.

**Définition:** Une triangulation est dite de Delaunay si elle vérifie la propriété suivante:

*aucun sommet n'est à l'intérieur du cercle circonscrit à un élément.*

D'après [H], une telle triangulation existe, quelque soit  $S$ . Elle est même unique si  $S$  ne contient pas 4 points cocycliques. Cette triangulation est la plus équilatérale possible dans le sens où elle maximise le minimum des angles, comme le met en évidence l'algorithme décrit ci-dessous.

Un algorithme de construction d'une triangulation de Delaunay est celui de Lawson [La]. C'est un processus itératif d'insertion des points qui modifie localement le maillage pour conserver la propriété énoncée. Il peut s'écrire de la façon suivante.

A1) Initialisation.

$T^3$  est la triangulation de sommets  $s_1, s_2$  et  $s_3$  (un seul élément).

A2) Insertion des sommets.

$T^k$  étant la triangulation de Delaunay de sommets  $\{s_i, i = 1, \dots, k\}$ , on y ajoute le sommet  $s_{k+1}$ . Si le sommet  $s_{k+1}$  est contenu dans un élément de  $T^k$ , cet élément est divisé en trois triangles ayant  $s_{k+1}$  comme sommet. Sinon, le nouveau sommet est extérieur au domaine de  $T^k$ , et on le relie à toutes les

arêtes qui lui sont visibles. Dans les deux cas, les arêtes opposées au sommet  $s_{k+1}$  dans un élément forment une liste  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ .

A3) Retournement d'arêtes (diagonal swapping).

Tant que  $A \neq \emptyset$ , on considère une arête  $a_j \in A$ . On note  $t_{j1}$  et  $t_{j2}$  les éléments adjacents à  $a_j$  et  $q_j$  le minimum des angles de  $t_{j1}$  et de  $t_{j2}$ . Si le quadrilatère  $t_{j1} \cup t_{j2}$  est convexe, son autre diagonale le divise en deux triangles  $t'_{j1}$  et  $t'_{j2}$ . Le minimum des angles de  $t'_{j1}$  et de  $t'_{j2}$  est noté  $q'_j$ . Si  $q_j \geq q'_j$  alors  $a_j$  est rayé de la liste  $A$  et on passe à l'arête suivante. Sinon, les éléments  $t_{j1}$  et  $t_{j2}$  de la triangulation  $T^k$  sont remplacés par  $t'_{j1}$  et  $t'_{j2}$  et les quatre côtés du quadrilatère sont ajoutés à la liste des arêtes.

A4) Itération.

La triangulation  $T^{k+1}$  obtenue est de Delaunay pour l'ensemble de points  $\{s_1, \dots, s_{k+1}\}$ . Si  $k+1 = n$ , c'est la triangulation recherchée. Sinon, il reste des sommets à inclure, faire  $k = k+1$  et aller en A2.

La triangulation de Delaunay apparaît comme la plus équiangulaire dans le sens qu'elle maximise le minimum des six angles intérieurs à chaque paire de triangles adjacents.

L'algorithme de Lawson peut être utilisé tel quel dans les cas où le domaine à mailler est convexe et tous les sommets du maillage final sont donnés. Si le domaine est non convexe, on commence par mailler l'enveloppe convexe avec l'algorithme précédent puis on en déduit un maillage du domaine (Cf. [GHS]). Il est à noter que l'existence d'un maillage de Delaunay n'est plus assurée dans ce cas.

Nous utilisons cet algorithme pour mailler un domaine quelconque  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ . Les données sont la frontière (par exemple un polygone ou bien un ensemble de courbes paramétrées), la longueur  $l_0$  des arêtes frontière, l'aire maximale  $A_0$  des éléments générés et éventuellement des paramètres de régularisation.

B1) Discrétisation de la frontière.

On découpe la frontière en segments de longueur  $l_0$ . Les points de discrétisation constituent l'ensemble  $S$ . L'ensemble des arêtes frontière est mémorisé pour l'étape B3.

B2) Triangulation initiale joignant les points frontière.

On construit le maillage de Delaunay associé à  $S$  en utilisant l'algorithme A1-A4. Un premier maillage du domaine, ayant pour sommets les sommets frontière, est ainsi construit.

B3) Respect de la frontière.

Dans le cas d'un domaine non convexe, on force les arêtes frontière même si elles ne maximisent pas le critère d'optimisation  $q_j$  et on supprime les triangles extérieurs au domaine (Cf. [GHS]). A partir de cette étape, le maillage en cours de construction est un recouvrement de  $\Omega_h$ .

B4) Génération des points intérieurs.

La méthode la plus simple consiste à parcourir les éléments du maillage et à générer un point au centre de ceux dont l'aire dépasse la valeur  $A_0$ . Chaque point généré est inséré dans le maillage de la même façon que les points frontière précédemment (étapes A2 et A3).

B5) Régularisation.

Cette étape facultative permet de mieux positionner les points intérieurs. Chaque point est déplacé au centre de gravité de ses voisins. On parcourt l'ensemble des sommets plusieurs fois jusqu'à ce que le déplacement maximum soit suffisamment petit. Ceci ne change pas la structure des mailles mais seulement les coordonnées des sommets. Le caractère "de Delaunay" est perdu mais le maillage est plus régulier.

**Remarque 1:** L'algorithme B1-B5 est à peu près celui du mailleur EMC<sup>2</sup> développé par F. Hecht et E. Saltel à l'INRIA. Ce mailleur suppose donnée la discrétisation frontière, donc l'étape B1 devient inutile. De plus, le seuil  $A_0$ , à partir duquel un sommet est créé, est variable: il dépend de la longueur des segments frontières donnés par l'utilisateur. EMC<sup>2</sup> est un mailleur isotrope à pas variable (Cf. [HS]). C'est lui qui a servi de base à l'implémentation du mailleur anisotrope présenté ici.

**Remarque 2:** L'étape de retournement d'arêtes A3 vise à contrôler l'applatissage des triangles. Dans ce but, d'autres critères peuvent être utilisés à la place de  $q_j$  lorsque le caractère "de Delaunay" du maillage n'est pas fondamental. Par exemple, les expressions suivantes sont de bons indicateurs de la qualité géométrique d'un triangle  $t_j$ .

$$q_{1,j} = \frac{r_j}{p_j}, \quad q_{2,j} = \frac{\pi r_j^2}{S_j} \quad \text{et} \quad q_{3,j} = \frac{(p_j - a_j)(p_j - b_j)(p_j - c_j)}{p_j^3}$$

avec les notations:  $a_j, b_j, c_j$  longueurs des côtés de  $t_j$ ,  
 $p_j$  demi-périmètre,  
 $S_j$  aire de  $t_j$ ,  
 $r_j$  rayon du cercle inscrit.

Ces trois critères conduisent à la même triangulation. En effet  $q_{1,j}$  et  $q_{2,j}$  sont proportionnels à cause de la relation  $S_j = r_j p_j$  et d'autre part  $q_{3,j}$  est le carré de  $q_{1,j}$  à cause de la formule de Héron:  $S_j = \sqrt{p_j(p_j - a_j)(p_j - b_j)(p_j - c_j)}$  (Héron d'Alexandrie, 2<sup>e</sup> siècle après JC). Ainsi, on peut utiliser celui des trois qui se calcule le plus directement en fonction des données de l'algorithme.

## 2. 2. Prise en compte de l'anisotropie.

Afin de construire des maillages étirés, on considère une déformation du plan suffisamment régulière. Le maillage étiré  $T$  est construit de manière à être isotrope dans

l'espace ainsi déformé. On suppose que la déformation est localement assimilable à une application linéaire de la forme

$$u \mapsto \mathcal{N}u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{où } \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \delta_1, \delta_2 > 0$$

Sur une portion du plan, la déformation de l'espace correspond au passage de la métrique euclidienne à la métrique définie par la norme  $M$  :

$$\|u\|_M^2 = u^t \mathcal{N}^t \mathcal{N} u \quad .$$

Une triangulation isotrope pour cette norme est étirée pour la norme euclidienne d'un facteur  $1/\delta_1$  dans la direction d'angle  $\alpha$  et d'un facteur  $1/\delta_2$  dans la direction orthogonale.

On suppose connaître en tout point du domaine la matrice  $\mathcal{N}$  de la déformation du plan. L'algorithme de génération de maillage B1-B5 est appliqué dans l'espace déformé. La métrique est prise en compte aux étapes suivantes:

- A l'étape B1:  
La frontière est discrétisée en segments de longueur  $l_0$  pour la norme locale  $M$ .
- Aux étapes B2 et B4:  
Le critère géométrique  $q_j$  est mesuré sur le triangle  $t_j$  déformé par  $\mathcal{N}$ .  $t_j$  est donné par les coordonnées de ses trois sommets. Les longueurs des côtés  $a_j, b_j, c_j$  sont évaluées dans la métrique locale  $M$ . Le critère  $q_{3,j}$  (Cf. Remarque 1) est alors rapide à calculer.
- A l'étape B4:  
L'aire des triangles est évaluée dans la nouvelle métrique. C'est l'aire euclidienne multipliée par le jacobien de la déformation.

$$\begin{aligned} \text{aire}_M(t_j) &= \text{aire}(t_j) \det(\mathcal{N}) \\ &= \delta_1 \delta_2 \text{aire}(t_j) \end{aligned}$$

Ainsi la densité des points varie en fonction du déterminant de  $\mathcal{N}$  sur le domaine.

L'algorithme B1-B5 ainsi modifié génère un maillage dont la densité des points et l'étirement des éléments varient en espace. La déformation du plan, donnée localement par la matrice  $\mathcal{N}$ , permet de contrôler l'un et l'autre.

**Remarque 3:** *L'étape de régularisation est indépendante de la norme utilisée (le centre de gravité est invariant). Cependant, elle peut avoir pour effet de déplacer*



les points des zones denses vers les zones moins denses. Afin de conserver la finesse locale du maillage, il est conseillé de peu déplacer les points (à une position intermédiaire entre l'ancienne position et le centre des voisins) et d'itérer un petit nombre de fois ( $\leq 5$ ).

### 2. 3. Mise en œuvre du mailleur.

Ce paragraphe est consacré à l'implémentation de l'algorithme décrit ci-dessus. Plusieurs remarques peuvent être faites à ce sujet.

#### 2. 3. 1. Lien entre $A_0$ et $l_0$ .

Pour que la discrétisation de l'intérieur du domaine soit cohérente avec celle de la frontière, l'aire maximale  $A_0$  des éléments dépend de la longueur  $l_0$  des segments frontière. L'aire des éléments obtenus par le processus de génération de points est comprise entre  $A_0$  et  $(1/3)A_0$ . On impose que l'aire d'un triangle équilatéral de côté  $l_0$  soit égale à  $(2/3)A_0$  en se donnant la relation

$$A_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8} l_0^2 .$$

Ainsi l'utilisateur choisit seulement le paramètre  $l_0$  correspondant à une unité de longueur dans l'espace déformé. De lui dépend globalement la finesse du maillage et donc le nombre de sommets créés. En intégrant le déterminant de  $\mathcal{N}$  sur tout le domaine, on peut aussi relier  $l_0$  au nombre d'éléments générés qui est sans doute une donnée plus facile à apprécier.

#### 2. 3. 2. Autres paramètres.

Selon la déformation du plan, il se peut que le mailleur autorise des éléments très longs par rapport au domaine  $\Omega_h$ . Dans ce cas, on introduit une longueur maximale  $h_{\max}$ . Là où la matrice  $\mathcal{N}$  permet des étirements trop importants, la métrique locale est modifiée. Plus précisément les coefficients d'étirement  $1/\delta_1$  et  $1/\delta_2$  de la matrice sont bornés par  $h_{\max}/l_0$ .

De la même façon, on peut se donner une longueur minimale  $h_{\min}$  pour éviter des éléments trop fins. Le coefficient  $1/\delta_i$  est alors remplacé par  $\max(1/\delta_i, h_{\min}/l_0)$ .

#### 2. 3. 3. Coordonnées entières.

L'implémentation de l'algorithme de génération de maillages est un peu délicate dans la mesure où l'on doit savoir, à l'étape A2, si un point est d'un côté ou de l'autre d'une arête. Il est important que cela soit décidable dans tous les cas. Or le test qui repose sur le signe d'un produit scalaire est sensible aux erreurs d'arrondi. Lorsque les trois sommets d'un triangle sont presque alignés, on peut considérer l'élément d'un côté ou de l'autre de ses arêtes, selon l'ordre dans lequel est effectué le calcul.

Une manière de lever l'ambiguïté est de calculer le produit scalaire en arithmétique entière. Plus précisément, les sommets sont créés sur une grille de coordonnées

entières. Ainsi, tous les calculs faits à partir des coordonnées des sommets deviennent exacts. En fin de processus, une simple transformation linéaire rend aux sommets leurs 'vraies' coordonnées.

Cette transformation est déterminée dès la donnée de la frontière de manière à ce que le diamètre  $D$  du domaine soit associé à un entier  $I$ , avec  $I^2$  de l'ordre du plus grand entier codable par l'ordinateur utilisé. De cette manière, tous les calculs d'aire peuvent se faire en entier, et donc sans arrondi.

Il existe donc une distance minimale entre deux sommets du maillage mais cela était déjà vrai en coordonnées réelles. Si l'on utilise directement les coordonnées réelles, cette distance est variable car la différence entre deux réels codés successifs dépend de leur ordre de grandeur. Avec la transformation en coordonnées entières, elle vaut partout  $D/I$ .

Et si la grille de coordonnées entières paraît trop grossière devant la taille des éléments créés, on peut associer à  $D$  un entier supérieur à  $I$ , sous réserve d'effectuer les calculs en double précision.

#### 2. 3. 4. Localisation sur un maillage de fond.

Chaque fois que l'algorithme se réfère à la déformation du plan, il associe à un point  $P = (x, y)$  une norme, c'est-à-dire une matrice  $M = \mathcal{N}^t \mathcal{N}$ . Ces matrices sont supposées connues (Cf. 3.2) en tout sommet d'un maillage  $T_0$  donné, de support  $\Omega_0$  éventuellement différent de  $\Omega_h$ . Si  $P \in \Omega_0$ , la matrice  $M$  est interpolée linéairement sur l'élément  $K_j$  de  $T_0$  auquel il appartient. Il se peut aussi que  $P$  soit extérieur à  $\Omega_0$ . Dans ce cas, on lui associe la matrice interpolée au point de  $\Omega_0$  le plus proche de  $P$ .

Il est nécessaire de situer rapidement  $P$  sur le maillage  $T_0$ , utilisé comme maillage de fond (background mesh), car cette procédure est exécutée souvent. Le point est localisé par proximité:

Soit  $K^0$  un élément de  $T_0$  supposé proche de  $P$ . Pour  $j = 0, 1, \dots$ ,  $P^j$  étant le point de  $K^j$  le plus proche de  $P$ , on se trouve dans l'un des cas suivants.

- si  $P_j = P$ , le point  $P$  est localisé.
- si  $P_j$  est sur une arête intérieure à  $\Omega_0$ , on note  $K_{j+1}$  l'élément adjacent et on incrémente  $j$ .
- si  $P_j$  est un sommet, on cherche parmi les éléments autour de ce sommet l'élément  $K_{j+1}$  qui minimise la distance à  $P$  et on itère sur  $j$ .
- si  $P_j$  est un point frontière, on parcourt tous les éléments de la composante connexe de la frontière. Si un point non frontière de l'un de ces éléments est plus proche de  $P$ , cet élément devient  $K_{j+1}$  et on incrémente  $j$ . Sinon, on projette  $P$  sur le point frontière le plus proche et on stoppe l'algorithme.

Cet algorithme est rapide dans la mesure où il est bien initialisé. On peut mémoriser pour cela l'élément de  $T_0$  auquel appartient chaque sommet au moment

où celui-ci est créé. Une structure de quatree (octree en 3D) peut aussi s'avérer efficace.

### 3. Maillages adaptés.

Afin d'adapter le maillage à un cas de calcul particulier, on mesure l'erreur locale a posteriori de la solution. Des estimateurs d'erreur a posteriori ont été proposés dans [BR], [BW], [V]. Ils ont surtout été utilisés dans le cadre de l'adaptation de maillage par raffinement local (Cf. par exemple [Lö], [KR]). Il s'agit alors de trouver un critère pour marquer les éléments qui doivent être raffinés (ou les arêtes à découper dans [KR]). L'algorithme de maillage précédent nécessite, lui, de connaître la déformation du plan pour laquelle un maillage adapté au calcul serait isotrope. Il faut en fait se donner localement une matrice  $\mathcal{N}$ , c'est-à-dire une direction d'étirement  $\alpha$  et des coefficients d'étirement  $1/\delta_1$  et  $1/\delta_2$ .

Supposons que le problème considéré soit résolu sur un maillage initial  $T_0$ . On évalue en chaque sommet une erreur directionnelle a posteriori. Le maillage adapté  $T_1$  est construit dans la métrique qui répartit au mieux cette erreur.

#### 3. 1. Un estimateur d'erreur.

Suivant Peraire et al. [PVMZ], on choisit une variable du problème physique  $\sigma$ , ou une combinaison de plusieurs variables. Si la variable-clé  $\sigma$  est approchée par une fonction linéaire sur un triangle  $K_j$  de  $T_0$ , l'erreur d'interpolation dans une direction  $d$  est estimée par:

$$E_{j,d} = h_d^2 \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial d^2} \right| \quad (3.1)$$

où  $h_d$  est la longueur du triangle  $K_j$  dans la direction  $d$ . Une possibilité pour adapter le maillage au cas de calcul est d'équirépartir cette erreur, c'est-à-dire la rendre constante dans toutes les directions et sur tous les triangles (Cf. [O]).

On note  $H$  la matrice hessienne de  $\sigma$ ,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Si  $X_d$  est le vecteur unitaire de direction  $d$ , on a

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial d^2} = X_d^t H X_d. \quad (3.3)$$

Soient  $d_1$  et  $d_2$  les directions propres de  $H$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres associées. La dérivée seconde de  $\sigma$  dans la direction  $d_k$  est égale à  $\lambda_k$  ( $k = 1$  ou  $2$ ). L'erreur  $E_{j,d}$  est indépendante de la direction  $d$  lorsque  $E_{j,d_1} = E_{j,d_2}$ , c'est-à-dire lorsque les longueurs  $h_1$  et  $h_2$  de  $K_j$  dans ces directions vérifient

$$h_1^2 |\lambda_1| = h_2^2 |\lambda_2| = c_0, \quad c_0 \text{ constante donnée.} \quad (3.4)$$

L'erreur est équirépartie si cela est vrai pour tous les triangles ( $c_0$  indépendant de  $K_j$ ).

**Remarque 1:** La matrice  $H$  étant symétrique, on a d'une part que ses valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, et d'autre part que les directions propres associées  $d_1$  et  $d_2$  sont orthogonales entre elles.

*Preuve:* Les valeurs propres d'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sont les racines du polynôme  $\lambda_i^2 - (a+d)\lambda_i + ad - bc$ . Ces racines sont réelles à la condition que le discriminant du polynôme  $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$  soit positif, et cela est vrai lorsque  $b = c$ . Alors, on associe à chaque valeur propre  $\lambda_i = (a+d \pm \sqrt{\Delta})/2$  un vecteur directeur  $X_i = (b, \lambda_i - a)^t$ . On vérifie que le produit scalaire  $X_1 \cdot X_2$  vaut  $b(b-c)$ , ainsi les deux directions propres de  $M$  sont orthogonales lorsque  $b = c$ .

### 3. 2. Une norme locale.

La matrice hessienne  $H$  est supposée connue localement, et non singulière i.e.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  non nuls. La constante  $c_0$  étant donnée, on souhaite construire des triangles de longueur  $h_k$  dans la direction  $d_k$  avec

$$h_k = \sqrt{\frac{c_0}{|\lambda_k|}}, \quad k = 1 \text{ ou } 2. \quad (3.5)$$

Soit  $X_k$  un vecteur unitaire de direction  $d_k$ . Un tel triangle n'a pas de direction privilégiée dans une métrique pour laquelle les vecteurs  $h_k X_k$  sont de normes identiques.

On introduit la matrice  $M$  de même directions propres que  $H$  et de valeurs propres  $|\lambda_k|$ .  $M$  est symétrique, comme  $H$ , et définie positive car les  $|\lambda_k|$  sont non nuls. La norme qu'elle induit vérifie

$$\begin{aligned} \|h_k X_k\|_M &= h_k \sqrt{X_k^t M X_k} \\ &= \sqrt{c_0}, \quad k = 1 \text{ ou } 2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi, un maillage isotrope dans l'espace métrique associé à  $M$  est un maillage étiré dans l'espace euclidien, d'un facteur  $h_k$  dans la direction  $d_k$ .

**Remarque 2:** On retrouve la matrice  $\mathcal{N}$  du paragraphe précédent si  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $Ox$  et la direction  $d_1$  et si  $\delta_k = \sqrt{|\lambda_k|}$ . On vérifie que  $M = \mathcal{N}^t \mathcal{N}$ .

**Remarque 3:** Un triangle généré par le mailleur (Cf. section 2) a, dans toutes les directions, une longueur de l'ordre de  $l_0$  dans la métrique  $M$ . On voit ici que ce paramètre correspond à la racine carrée de l'erreur  $c_0$  que l'on autorise en tout point du domaine.

#### 4. Application à la capture de couches limites.

Cette méthode de génération de maillages adaptés est appliquée à la simulation d'écoulements de fluides visqueux incompressibles. Soient  $\mathbf{u}$  la vitesse et  $p$  la pression d'un tel fluide contenu dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . La vitesse est imposée sur une partie  $\Gamma_0$  de la frontière, et libre sur la partie complémentaire  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ . En l'absence de forces extérieures, l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\Gamma_0} = \mathbf{g} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds, et  $n$  représente le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\Omega$ . Selon les cas de calcul, la solution du système peut évoluer vers un état stationnaire présentant des zones de fort gradient de vitesse.

##### 4. 1. Méthode de résolution.

Il existe de nombreux schémas numériques susceptibles de résoudre ces équations. Nous présentons les principales caractéristiques du solveur utilisé ici et développé en collaboration entre l'INRIA et Dassault Aviation (Cf. [GMPP],[BGMPPP]).

L'intégration en temps est faite par un  $\theta$ -schéma [G]. Soit  $\Delta t$  le pas de temps et  $\theta \in ]0, 1/2[$ .  $(\mathbf{u}^n, p^n)$  représente l'état du fluide au temps  $n\Delta t$ . On décompose l'intervalle de temps  $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$  en trois sous-intervalles.

- Sur l'intervalle  $[n\Delta t, (n+\theta)\Delta t]$ , le terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  est intégré de manière explicite. On se donne des coefficients  $\alpha$  et  $\beta = 1 - \alpha$  et on résout:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} - \frac{\alpha}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} = \frac{\beta}{Re} \Delta \mathbf{u}^n - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec les conditions aux limites ci-dessus. On est donc ramené à un système de Stokes généralisé que l'on résout par un algorithme de gradient conjugué préconditionné sur la pression (Cf. [DGL]).

- Sur l'intervalle  $[(n+\theta)\Delta t, (n+1-\theta)\Delta t]$ , le terme non linéaire est implicite mais la pression est supposée fixe. Le système à résoudre est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta) \Delta t} - \frac{\beta}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} + (\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta} \\ = \frac{\alpha}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1-\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

avec les mêmes conditions aux limites. Le problème est non linéaire en  $\mathbf{u}$ . On utilise un algorithme de GMRES non linéaire [BS] avec un préconditionnement diagonal.

- Sur l'intervalle  $[(n+1-\theta)\Delta t, (n+1)\Delta t]$ , on intègre un système de Stokes de même forme que le problème (4.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - \frac{\alpha}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} \\ \quad \quad \quad = \frac{\beta}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} - (\mathbf{u}^{n+1-\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1-\theta} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Le problème est discrétisé sur un maillage triangulaire  $T$  de  $\Omega$ , constitué de  $n_s$  sommets et  $n_e$  éléments. Les espaces de discrétisation pour  $p$  et  $\mathbf{u}$  sont respectivement

$$V_h(T) = \{q_h \in C^0(\Omega)/q_h|_{K_j} \in P_1(K_j) \quad \forall j = 1, \dots, n_e\} \quad (4.5)$$

$$\tilde{V}_h(T) = \{v_h \in C^0(\Omega)/v_h|_{\tilde{K}_j} \in P_1(\tilde{K}_j) \quad \forall j = 1, \dots, 4n_e\} \quad (4.6)$$

où les  $\tilde{K}_j$  représentent les sous-triangles obtenus en joignant les milieux des côtés des éléments de  $T$ . Les degrés de liberté sont les valeurs de  $p$  aux sommets de  $T$  et celles des deux composantes de la vitesse aux sommets et aux milieux des arêtes. Cette approximation est connue sous le nom d'élément  $P_1$ -iso $P_2$ . Elle vérifie la condition de stabilité de Ladyzhenskaya-Brezzi-Babúska pour les équations considérées (Cf. [BP]).

#### 4. 2. Génération d'un maillage adapté.

Soit  $(p_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  la solution stationnaire obtenue sur un maillage initial  $T_0$ . Dans le but de re-générer un maillage fin dans la direction du plus fort gradient de la vitesse, on choisit comme variable-clé  $\sigma = \|\mathbf{u}\|$ .

Soit  $\sigma_h^0$  le projeté de la variable  $\|\mathbf{u}_h^0\|$  dans l'espace  $\tilde{V}_h(T_0)$ . La matrice hessienne de  $\sigma$  est approchée par celle de  $\sigma_h^0$  en chaque sommet  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n_s^0$  de  $T_0$ . Les dérivées premières de  $\sigma_h^0$  sont constantes par sous-triangles. Les dérivées secondes de  $\sigma_h^0$  au sommet  $s_i$  sont évaluées au sens faible dans  $V_h(T_0)$ . Par exemple, les termes non diagonaux de  $H$  sont:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \Big|_{s_i} \simeq \int_{\Omega_h} \frac{\partial^2 \sigma_h^0}{\partial x \partial y} L_i dx dy \Big/ \int_{\Omega_h} L_i dx dy \quad (4.7)$$

où  $L_i$  est la fonction de base de  $V_h(T_0)$  qui vérifie  $L_i(s_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall j = 1, \dots, n_s^0$ . L'intégrale de la fonction de base  $L_i$  est donnée par:

$$\int_{\Omega_h} L_i dx dy = \frac{a_i}{3}$$

si  $a_i$  est l'aire de son support. L'équation (4.7) est intégrée par une formule de Green:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \Big|_{s_i} \simeq -\frac{3}{a_i} \int_{\Omega_h} \frac{\partial \sigma_h^0}{\partial x} \frac{\partial L_i}{\partial y} dx dy + \frac{3}{a_i} \int_{\partial \Omega_h} \frac{\partial \sigma_h^0}{\partial x} L_i \cdot n_y ds \quad (4.8)$$

Les dérivées premières qui apparaissent alors sont constantes sur chaque élément. Le terme de bord de l'équation (4.8) est nul pour tout sommet  $s_i$  intérieur à  $\Omega_h$ . Pour les sommets frontière, on donne aux dérivées une valeur moyennée sur un voisinage (Cf. remarque 1).

La matrice  $M$  est la 'positivée' de  $H$ . En utilisant la matrice  $R$  (c'est une rotation) qui applique les vecteurs de base du plan sur les vecteurs propres de  $H$ , on a la décomposition:

$$H = R^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R. \quad (4.9)$$

$M$  est alors donnée par

$$M = R^{-1} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} R. \quad (4.10)$$

Cette matrice est calculée en chaque sommet de  $T_0$ . Les matrices  $M$  et la triangulation  $T_0$  sont transmises au mailleur. Le maillage adapté  $T_1$  est construit dans la métrique qu'elles définissent.

La variable  $p_h^0$  et les deux composantes de  $\mathbf{u}_h^0$  sont ensuite projetées respectivement sur les espaces  $V_h(T_1)$  et  $\tilde{V}_h(T_1)$  définis en (4.5)-(4.6). On obtient une approximation  $(p_h^1, \mathbf{u}_h^1)$  de la solution sur le maillage  $T_1$  qui sert d'initialisation à la résolution itérative du système de Navier-Stokes sur le maillage adapté  $T_1$ .

**Remarque 1:** *En un sommet frontière, il est préférable d'attribuer à  $H$  une valeur moyenne plutôt que de l'intégrer. Par exemple, si un segment frontière supporte des conditions de Dirichlet  $\sigma = c$ ,  $H$  est singulière, ce qui autorise des triangles de longueur infinie dans la direction de la paroi. Par contre, si la valeur de  $H$  en un sommet frontière est une moyenne des matrices  $H$  aux sommets voisins intérieurs à  $\Omega$ , la discrétisation de la frontière est homogène avec celle de  $\Omega$  dans son voisinage.*

## 5. Résultats numériques.

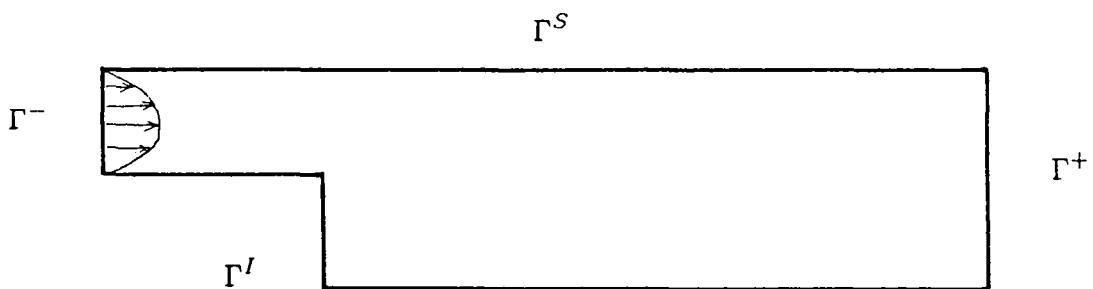
Le processus de génération de maillages adaptés a été testé dans le cas d'un écoulement externe. A partir d'une solution sur un maillage donné on itère plusieurs fois le cycle suivant:

- détermination de la métrique répartissant au mieux l'erreur d'interpolation (Cf. section 3),
- génération d'un maillage adapté, c'est-à-dire isotrope dans cette métrique (Cf. section 2),
- interpolation de la solution précédente sur le nouveau maillage,
- résolution des équations de Navier-Stokes sur le maillage adapté.

A chaque cycle, la finesse globale du maillage généré (coefficient  $l_0$ ) et le niveau de convergence de l'algorithme (nombre d'itérations de résolution) sont choisis par l'utilisateur. Tout le reste est automatique.

### 5. 1. Marche.

Un cas typique où une triangulation isotrope est inadaptée est celui d'un écoulement dans un canal. On considère ici l'écoulement d'un fluide dans un canal qui s'élargit brusquement. Le fluide adhère aux parois (la vitesse  $y$  est nulle) et un profil de vitesse est imposé à l'entrée du canal.



$$\Gamma_0 = \Gamma^- \cup \Gamma^I \cup \Gamma^S; \Gamma_1 = \Gamma^+$$

Le calcul est effectué sous les mêmes hypothèses qu'un cas-test d'un workshop GAMM (Cf. [MPT]): marche de la même hauteur que l'entrée du canal et nombre de Reynolds de 150, en prenant comme longueur de référence la hauteur de la marche. La solution, stationnaire, est atteinte par une approche instationnaire. Deux étapes de remaillage ont été nécessaires pour obtenir des éléments étirés d'un facteur 60 par rapport au triangle équilatéral (figures 1-a,b,c). Le dernier maillage, bien que deux fois plus grossier que le maillage initial (417 sommets au lieu de 798) donne une solution plus régulière (figures 2-a,b,c).



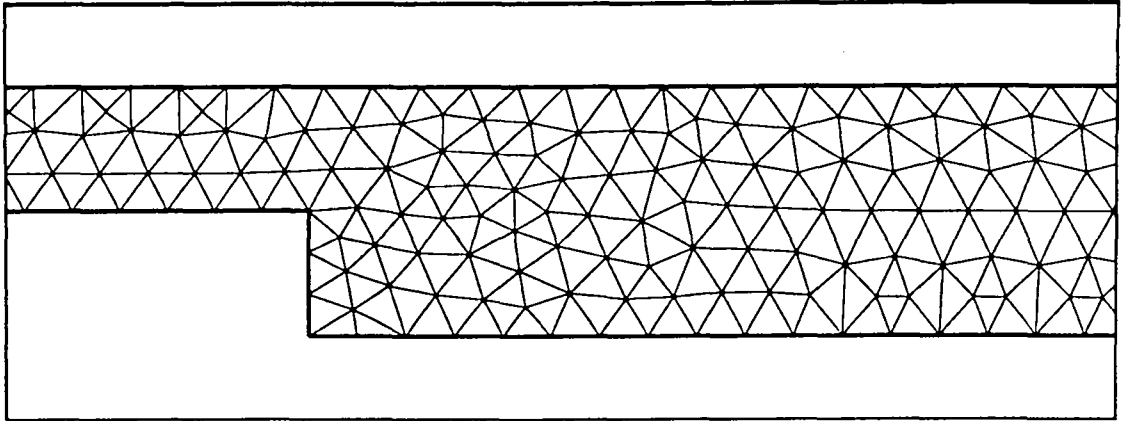


Figure 1-a: Maillage initial (798 sommets), vue partielle.

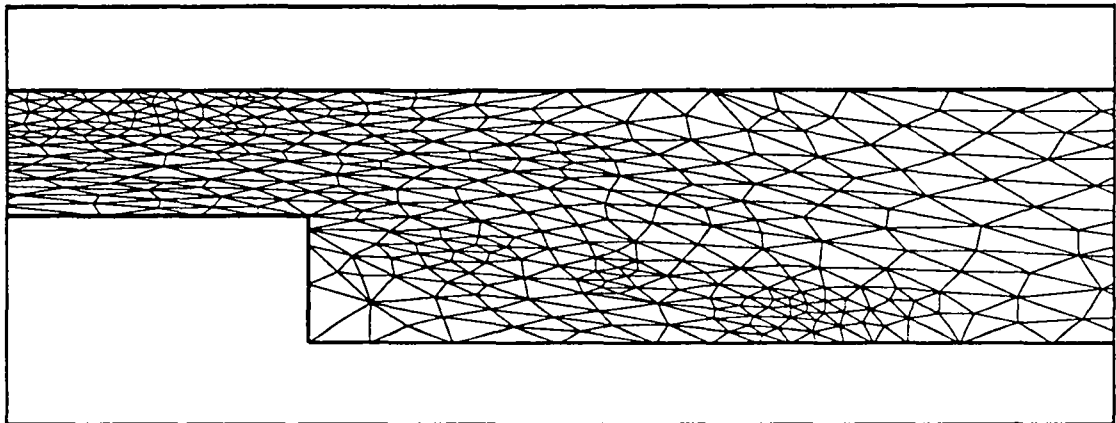


Figure 1-b: Premier maillage adapté (809 sommets), vue partielle.

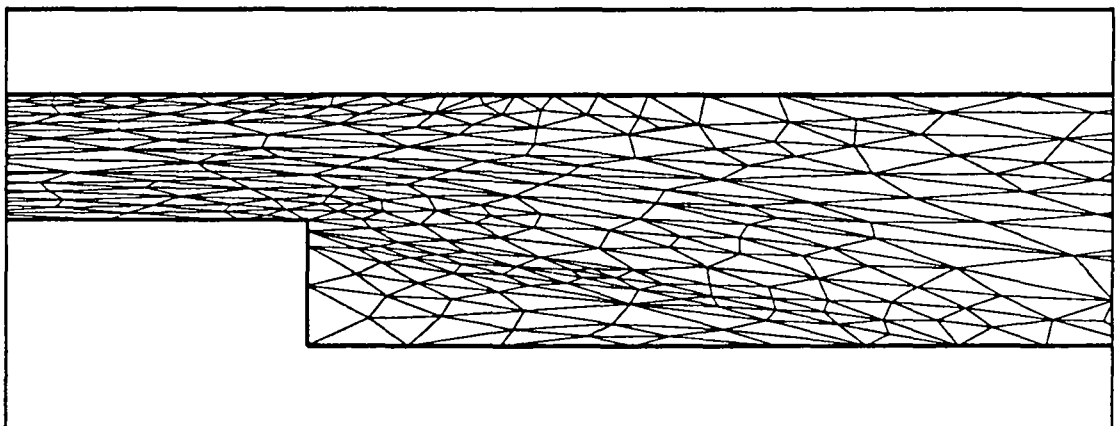


Figure 1-c: Second maillage adapté (417 sommets), vue partielle.

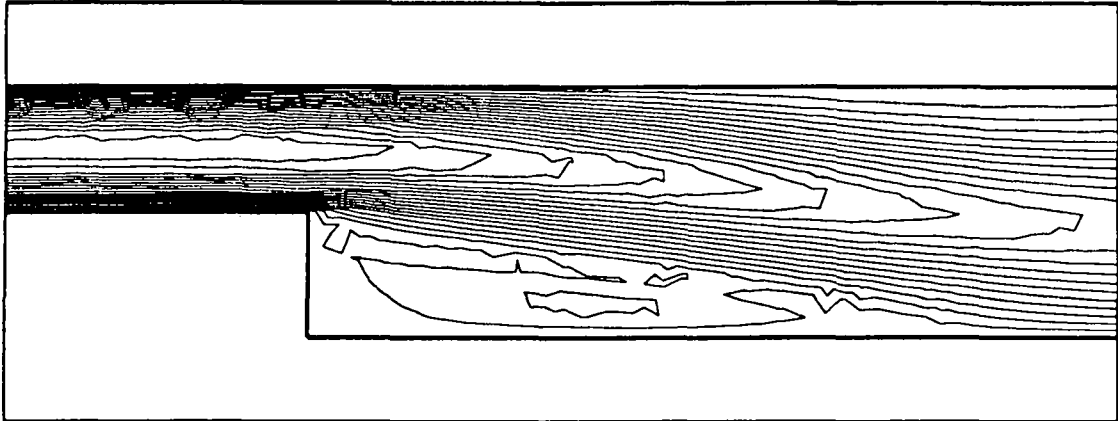


Figure 2-a: Lignes iso-vitesse de la solution obtenue sur le maillage initial.

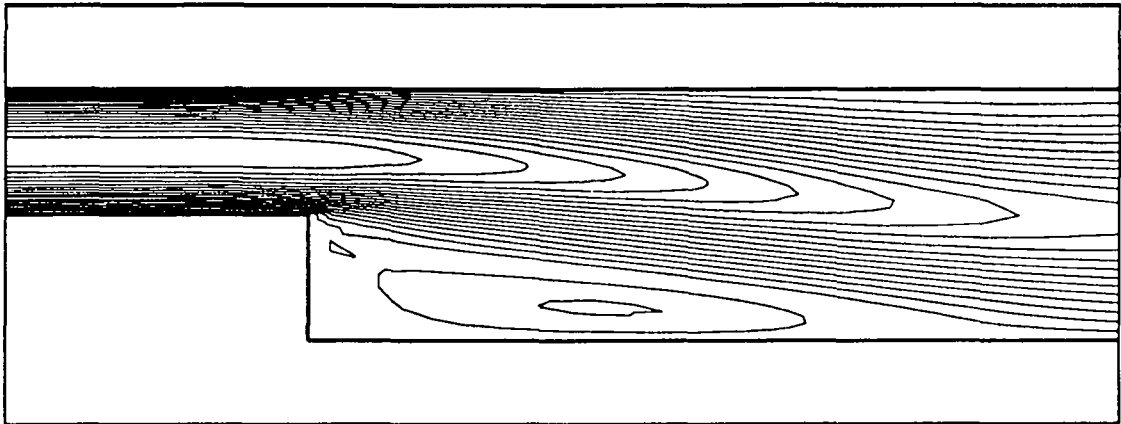


Figure 2-b: Lignes iso-vitesse de la solution obtenue sur le premier maillage adapté.

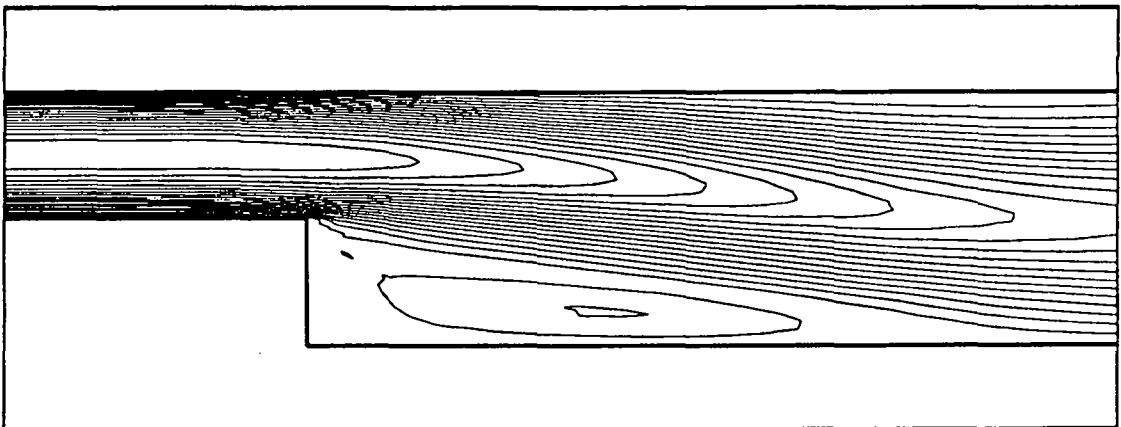


Figure 2-c: Lignes iso-vitesse de la solution obtenue sur le second maillage adapté.

Une zone de recirculation s'établit en bas de la marche. L'étendue de cette zone est définie par le coefficient de frottement à la paroi: le  $C_F$  y est négatif. Il devient positif au point appelé de rattachement. L'étendue de la zone de recirculation passe de 4.7 à 5.0 dès le premier remaillage (figures 3-a,b,c). Ces mesures sont toutes deux comparables à celles données par les participants au workshop. Cependant, la variation de 4.7 à 5.0 est peu significative, vue la disparité des chiffres obtenus par les différents participants. On peut tout de même noter que la courbe du  $C_F$  n'oscille pas sur les deux maillages adaptés.

La courbe de convergence (figure 4) montre l'intérêt d'interpoler la solution sur le nouveau maillage: on atteint ainsi plus rapidement la solution stationnaire de l'écoulement. Chaque pic de la courbe correspond à un remaillage. En quelques itérations, on retrouve donc le même niveau de convergence après remaillage qu'avant.

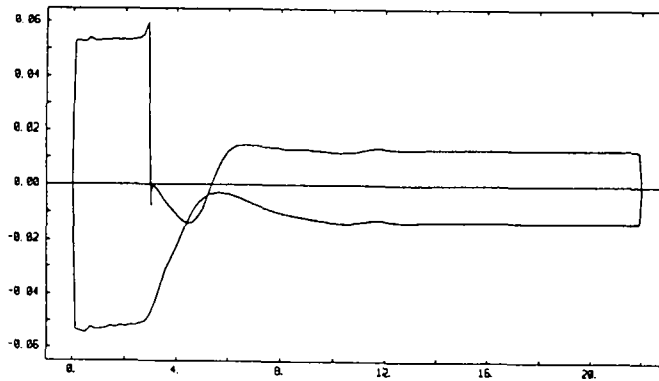


Figure 3-a:  
Courbe de  $C_F$  sur  
le maillage initial.

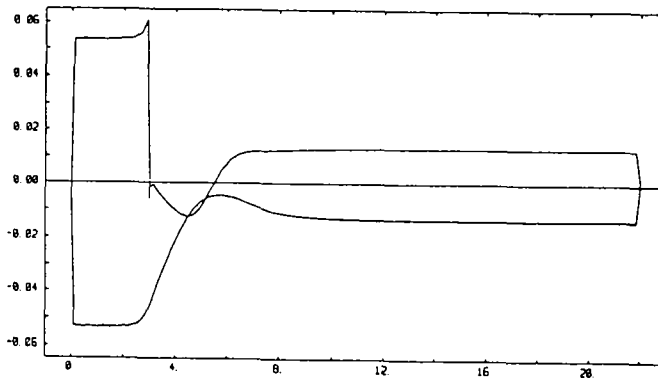


Figure 3-b:  
Courbe de  $C_F$   
sur le premier  
maillage généré.

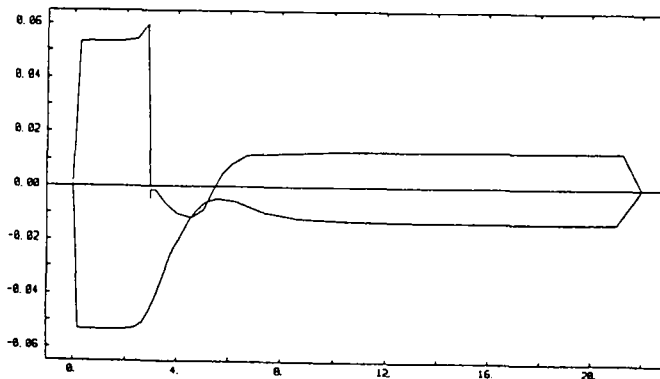


Figure 3-c:  
Courbe de  $C_F$   
sur le second  
maillage généré.

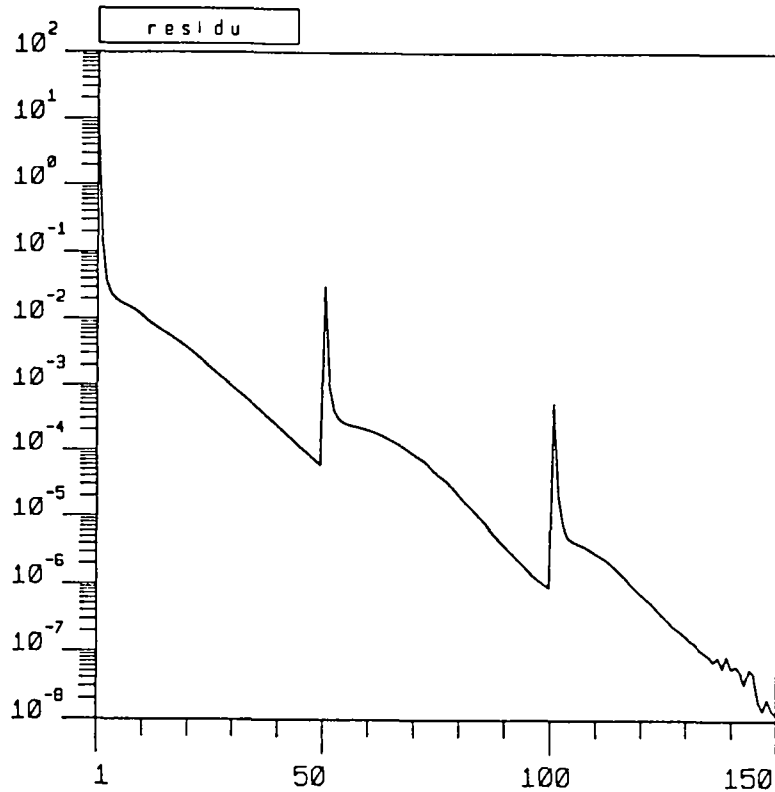


Figure 4: Courbe du résidu  $\frac{\partial u}{\partial t}$  en fonction du nombre d'itérations en temps (à pas constant).

Dans cet exemple, la méthode de génération de maillages adaptés a permis d'améliorer nettement la qualité de la solution sans augmenter le nombre de degrés de liberté (premier maillage adapté) et même en le diminuant considérablement (second maillage adapté). Un tel résultat n'aurait pu être obtenu sans avoir recours à des éléments étirés.

### 5. 2. Écoulement autour d'un profil.

Des conditions d'adhérence sont imposées sur un profil d'aile NACA0012. Un flux uniforme et sans angle d'incidence entre par la courbe frontière  $\Gamma_{\infty}^{-}$  simulant l'infini à l'amont de l'aile. La courbe infini aval  $\Gamma_{\infty}^{+}$  supporte des conditions de type Neumann:  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Le nombre de Reynolds vaut 1000, ce qui assure un écoulement stationnaire. Le domaine de calcul peut être schématisé comme suit.

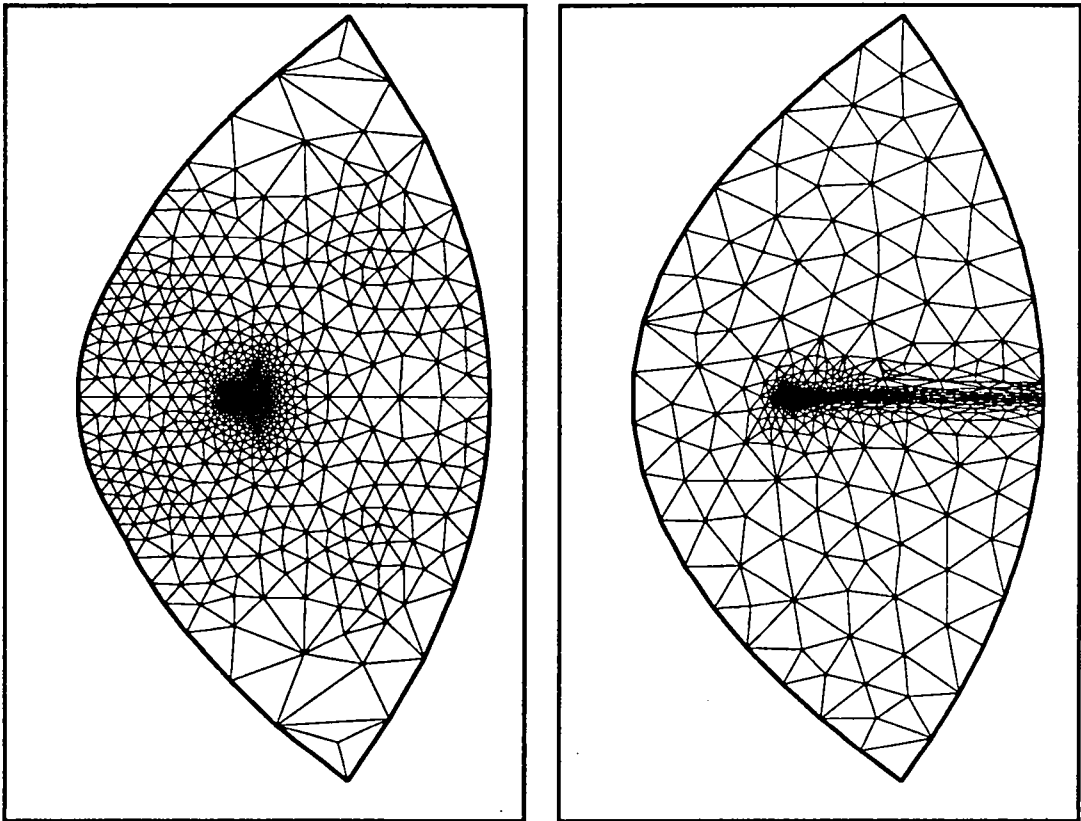
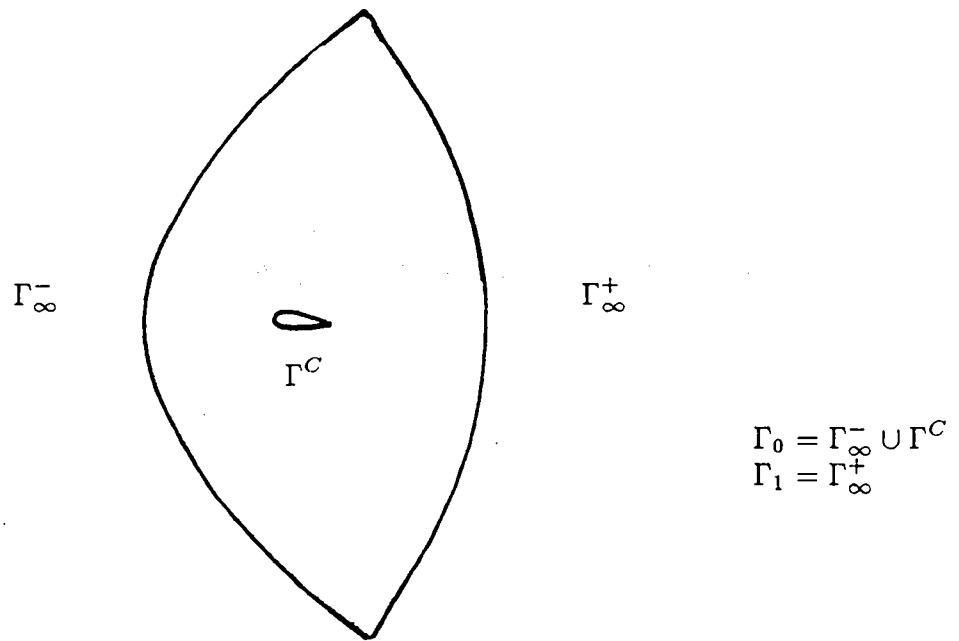


Figure 5: Maillage initial (800 pt) et maillage final (802 pt), vue globale.

Dans ce calcul, on s'est attaché à capter le sillage se développant à l'arrière du profil. Le maillage initial est visiblement trop grossier dans cette zone pour y parvenir (figure 5-a). La solution calculée sur ce maillage présente d'ailleurs des oscillations, comme on le voit sur les courbes iso- $\|u\|$  (figure 6-a). Malgré cela, une solution correcte est obtenue après un seul cycle d'adaptation (figure 6-b). Le premier maillage adapté est cependant assez fin, en particulier dans les zones où la solution présentait des oscillations. Un deuxième cycle de remaillage permet d'obtenir un maillage plus grossier sur lequel la solution est correcte (figure 6-c). Un dernier maillage comportant autant de sommets que le maillage initial est généré afin de s'assurer que le processus converge (figure 6-d).

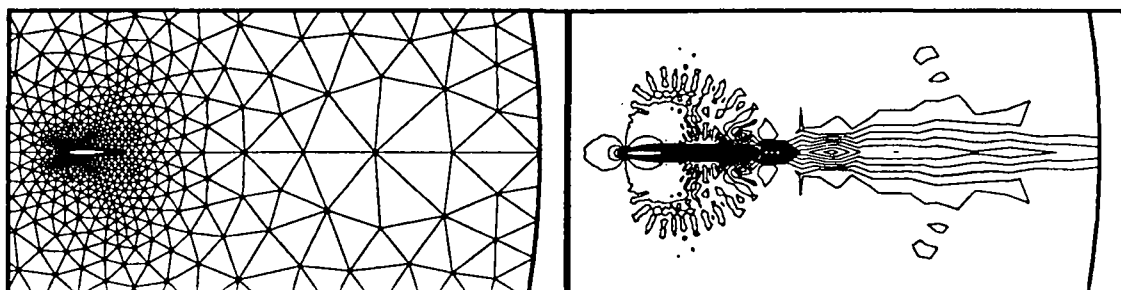


Figure 6-a: Maillage initial (800 pt) et solution associée, vue partielle.

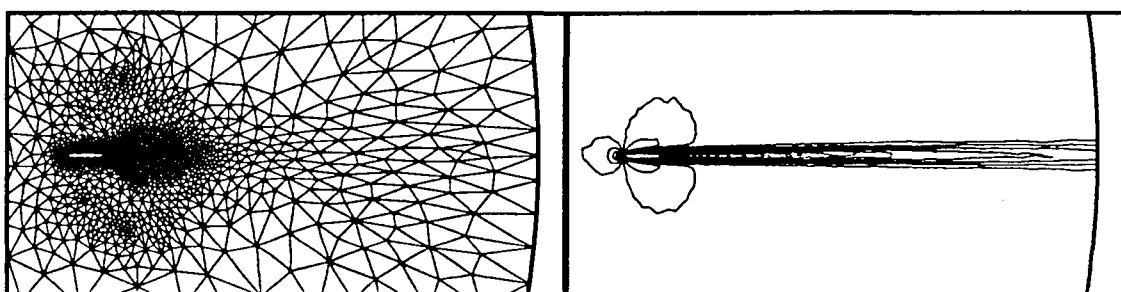


Figure 6-b: Premier maillage adapté (1356 pt) et solution associée, vue partielle.

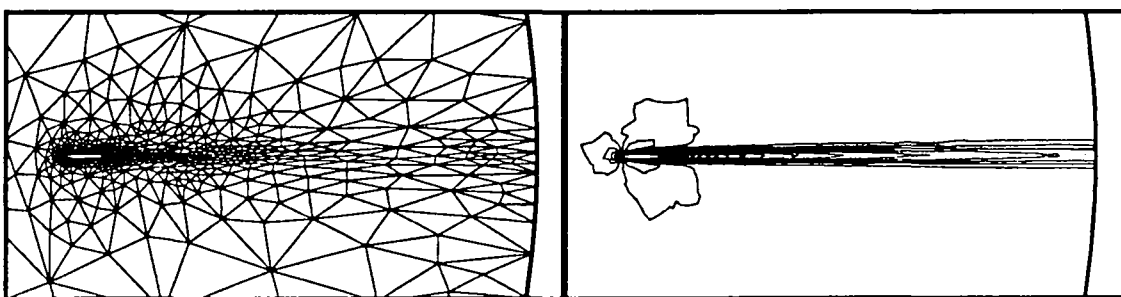


Figure 6-c: Deuxième maillage adapté (576 pt) et solution associée, vue partielle.

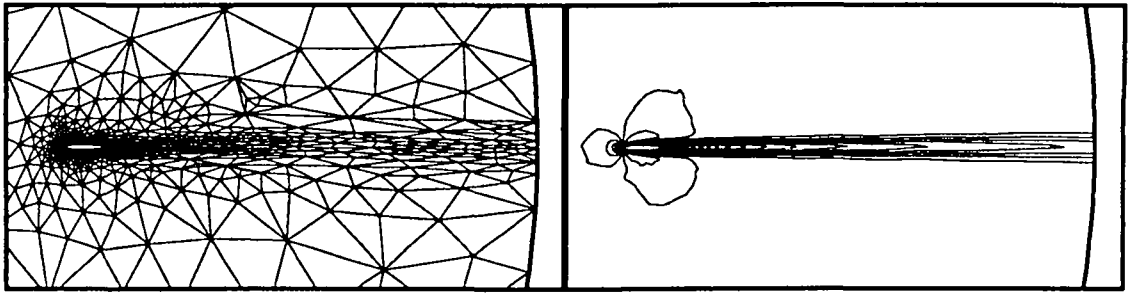


Figure 6-d: Troisième maillage adapté (802 pt) et solution associée, vue partielle.

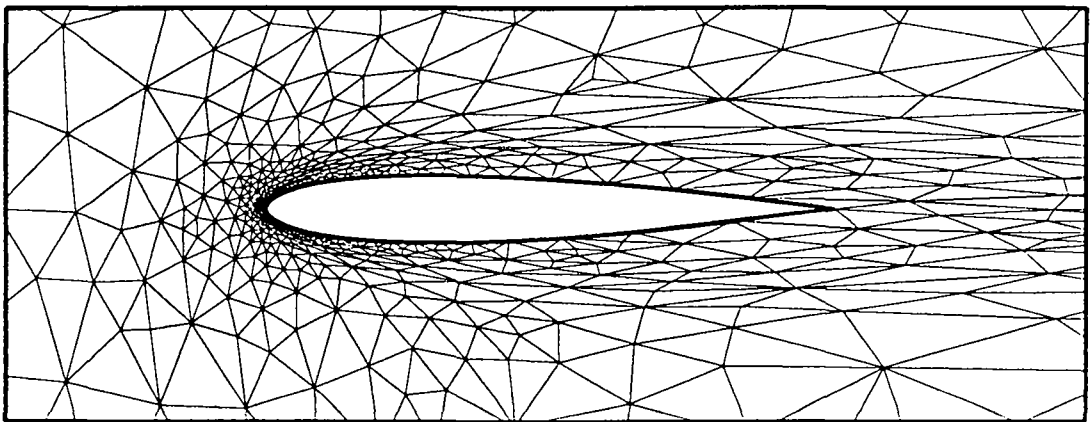


Figure 7: Troisième maillage adapté (802 pt), zoom autour du corps.

On n'a pas cherché ici à minimiser le temps total de calcul puisque la solution a été calculée sur un maillage relativement fin avant d'obtenir un maillage satisfaisant. Cependant, on montre qu'un maillage généré par la méthode proposée, même s'il comporte moins de nœuds que le maillage initial, rend mieux compte des phénomènes physiques. Le critère d'erreur identifie bien la zone et la direction de la couche limite. De plus, l'algorithme paraît utilisable même à partir de solutions présentant des oscillations. Dans ce cas, on peut noter que l'interpolation de la solution d'un maillage sur l'autre a, en elle-même, un effet de lissage.

## 6. Conclusions.

Etant donné un générateur de maillages triangulaires non structurés, un changement de métrique a permis de construire des maillages comportant des éléments étirés dans une direction choisie (noter que l'amplitude de cet étirement est fixée par la métrique et donc bornée). Une technique d'adaptation de maillages a pu alors être mise en œuvre, basée sur le principe d'équirépartition d'une erreur directionnelle. Les premiers maillages obtenus semblent bien rendre compte des phénomènes physiques même avec un petit nombre de sommets, c'est-à-dire pour un coût de calcul faible.

Cependant, une stratégie de remaillage reste à définir pour tirer parti, au mieux, des possibilités offertes par cette méthode. Ainsi, il serait intéressant de savoir à quel moment on a avantage à remailler, sur quelle variable faire porter le calcul d'erreur, ou encore combien de triangles générer à chaque cycle de remaillage pour minimiser le rapport (qualité de la solution / coût total de calcul).

On peut aussi envisager de coupler cette méthode avec des techniques de modifications locales. Des étapes de remaillage peuvent ainsi alterner avec des étapes d'enrichissement par ajout de points.

Enfin, cette méthode peut être étendue à des problèmes tridimensionnels, pour lesquels le nombre de degrés de liberté est crucial. Un calcul d'erreur semblable conduit à définir une métrique sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Un mailleur 3D classique peut être utilisé pour construire un maillage isotrope dans cette métrique. Le principal obstacle à l'implémentation de la méthode en 3D provient de la donnée de la frontière. En effet, la description complète de la frontière d'un domaine tridimensionnel pose problème si l'on ne veut pas se restreindre à des géométries simples. Or cette donnée est nécessaire à l'étape de discrétisation de la frontière (étape B1 de l'algorithme présenté), étape qui semble importante pour la qualité du maillage au voisinage de la frontière.

Ce travail, effectué à l'INRIA-Rocquencourt dans le cadre d'un contrat DRET, a été guidé et soutenu par F. Hecht que je tiens à remercier.



## 7. Références.

- [BGMPPP] M. O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Périaux, P. Perrier, O. Pironneau "A Finite Element Approximation of Navier-Stokes equations for Incompressible Viscous Fluids. Iterative Methods of Solution", *Lectures Notes in Mathematics*, vol 771, p 78-128, 1980.
- [BP] M. Bercovier, O. Pironneau, "Error Estimates for Finite Element Methods Solution of the Stokes Problem in the Primitive Variables", *Numerische Mathematik*, vol 33, p 211-224, 1979.
- [BR] I. Babuška, W. C. Rheinboldt, "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol 15, p 736-755, 1978.
- [BS] P. N. Brown, Y. Saad, "Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations", *Lawrence Livermore National Laboratory Research Report UCLR-97645*, 1987.
- [DGL] E. Dean, R. Glowinski, C. H. Li, "Supercomputer Solutions of Partial Differential Equation Problems in Computational Fluid Dynamics and in Control", *Computer Physics Communications* 53, p 401-439, 1989.
- [GHS] P. L. George, F. Hecht, E. Saltel, "Tétraèdrisation automatique et respect de la frontière", *Rapport INRIA 835*, 1988.
- [GR] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [G] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [GMPP] R. Glowinski, B. Mantel, J. Périaux, O. Pironneau, "A Finite Element Approximation of Navier-Stokes equations for Incompressible Viscous Fluids. Functional Least Squares Methods of Solution", *Computer Methods in Fluids*, p 84-133, 1980.
- [H] F. Hermeline, "Une méthode automatique de maillage en dimension n", *Thèse, Université de Paris 6*, 1980.
- [HS] F. Hecht, E. Saltel "EMC<sup>2</sup> un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels", *Rapport de recherche INRIA n° 118*, 1990.
- [KR] R. Kornhuber, R. Roitzsch, "On Adaptive Grid Refinement in the Presence of Internal or Boundary Layers", *Impact of Comp. in Science and Eng.*, vol 2, p 40-72, 1990.
- [La] C. L. Lawson, "Generation of a Triangular Grid with Application to Contour

- Plotting", *Cal. Tech. Jet Propulsion Lab. Tech Memorandum 299*, 1972.
- [Lö] R. Löhner, "An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD", *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.* 61 p 323-338, 1987.
- [M] D. J. Mavriplis, "Adaptive Mesh Generation for Viscous Flows using Delaunay Triangulation", *J. of Comp. Phys.* 90, n° 2, p 271, 1990.
- [MPT] K. Morgan, J. Périaux, F. Thomasset (Eds), "Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step", *Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vieweg vol.9, GAMM Workshop*, 1984.
- [O] J. T. Oden, "Grid Optimisation and Adaptive Meshes for Finite Element Methods", *University of Texas at Austin Notes*, 1983.
- [Pa] B. Palmerio, "Self adaptive F.E.M. algorithms for the Euler equations", *Rapport de recherche INRIA Sophia-Antipolis n° 338*, 1985.
- [PD] B. Palmerio, A. Dervieux, "2-d and 3-d Unstructured Mesh Adaption Relying on Physical Analogy", *Conf. on Numerical Grid Generation in CFD*, 1988.
- [PVMZ] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, O. C. Zienkiewicz, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", *J. of Comp. Phys.*, vol 72, p 449-466, 1987.
- [Po] C. Pouletty, "Génération et optimisation de maillages en éléments finis, Application à la résolution de quelques équations en mécanique des fluides", *Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole Centrale*, 1985.
- [R] M. C. Rivara, "Selective Refinement/Derefinement Algorithms for Sequences of nested Triangulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.28 2889-2906, 1989.
- [V] R. Verfürth, "A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations", *Rapport 445, SFB 123, Universität Heidelberg*, 1987.
- [W] B. Welfert, "A Posteriori Error Estimators and Adaptive Solution of Fluid Flow Problems", *Ph.D.Thesis, University of California, San Diego*, 1990.

**ISSN 0249 - 6399**