



# Maillage de Delaunay d'un polyedre convexe en dimension $d$ . Extension a un polyedre quelconque

Paul-Louis George, F. Hermeline

## ► To cite this version:

Paul-Louis George, F. Hermeline. Maillage de Delaunay d'un polyedre convexe en dimension  $d$ . Extension a un polyedre quelconque. RR-0969, INRIA. 1989. inria-00075590

**HAL Id: inria-00075590**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075590>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél: (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 969

*Programme 7*

### MAILLAGE DE DELAUNAY D'UN POLYEDRE CONVEXE EN DIMENSION $d$ . EXTENSION A UN POLYEDRE QUELCONQUE

**Paul Louis GEORGE**  
**François HERMELINE**

Février 1989



\* R R - 8 9 6 9 \*

**MAILLAGE DE DELAUNAY D'UN POLYEDRE CONVEXE EN DIMENSION  $d$ .**

**EXTENSION A UN POLYEDRE QUELCONQUE**

**Paul Louis GEORGE**

**INRIA-Rocquencourt**

**François HERMELINE**

**CEA-Limeil**

**Résumé**

Cet article présente une méthode permettant de construire un maillage de Delaunay s'appuyant sur un ensemble de points dans l'espace. Exposée d'un point de vue théorique pour des espaces de dimension quelconque cette méthode est ensuite décrite d'un point de vue pratique, en particulier dans le cas des espaces de dimension 2 et 3. On obtient un algorithme simple et robuste qui peut être utilisé par la suite pour construire un maillage par des simplexes d'un polyèdre convexe ou quelconque.

**DELAUNAY'S TESSELATION OF A CONVEX POLYHEDRON IN DIMENSION  $d$ .**

**EXTENSION TO A GENERAL POLYHEDRON.**

**Abstract**

This paper presents a method for creating a Delaunay's mesh connected to a set of points. The theoretical aspect is seen for any dimension, then the method is discussed in order to derive a practical approach, valid for dimension 2 and 3, which is simple and robust. Convex polyhedral and any shape polyhedral situations are introduced.

## SOMMAIRE

Résumé

Abstract

### 1. INTRODUCTION

### 2. DEFINITIONS ET NOTATIONS ASSOCIEES AU PROBLEME

- 2.1. Plan - Demi-plan - Boule
- 2.2. Simplexe
- 2.3. Polyèdres et faces
- 2.4. Polytope - Polyèdre - Maillage
- 2.5. Maillage de Delaunay
- 2.6. Caractérisation des polyèdres "Delaunay admissibles".
- 2.7. Objets associés à un simplexe

### 3. PRINCIPES DE BASE DE LA METHODE

- 3.1. Introduction
- 3.2. Situations géométriques
- 3.3. Caractérisations des situations possibles
- 3.4. Prise en compte du point  $x$ 
  - 3.4.1. En situation a)
  - 3.4.2. En situation b)
  - 3.4.3. En situation c)
- 3.5. Initialisation de la triangulation
- 3.6. Simplification de la méthode.

### 4. MISE EN OEUVRE NUMERIQUE ET DIFFICULTES ASSOCIEES

- 4.1. Introduction
- 4.2. Quelques méthodes numériques pour lever l'indétermination
- 4.3. Construction d'une triangulation "presque de Delaunay"
- 4.4. Reconnaissance d'une position

### 5. METHODE DE MAILLAGE D'UN ENSEMBLE DE POINTS.

### 6. APPLICATION AU CAS D'UN POLYEDRE ET PROBLEMES THEORIQUES GENERAUX.

- 6.1. Modification de la description de la frontière de  $\Omega$
- 6.2. Méthode de George, Hecht, Saltel
- 6.3. Création de points internes.

## **7. RESULTATS ET APPLICATIONS**

7.1. Vitesse

7.2. Un exemple d'objet tridimensionnel traité

7.3. Applications au maillage d'un objet

7.4. Conclusions.

## **BIBLIOGRAPHIE**

## 1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de décrire une méthode permettant de construire le maillage de Delaunay de l'enveloppe convexe d'un nuage de points dans un espace de dimension quelconque.

Plus précisément le but visé est d'appliquer numériquement cette méthode en dimension 3 pour développer un mailleur en tétraèdres d'objets définis par la donnée d'une triangulation de leur peau sous la forme d'une liste de faces triangulaires.

On conçoit aisément que la première étape d'un tel mailleur dit "mailleur de faces" (au sens où le maillage obtenu doit respecter les faces données par l'utilisateur pour décrire la frontière de l'objet) puisse être d'utiliser un "mailleur de points" (au sens où le maillage obtenu doit seulement respecter les points donnés) comme l'algorithme de construction du maillage de Delaunay de l'enveloppe convexe des points donnés. La deuxième étape consiste alors à construire, à partir du maillage de Delaunay, un maillage qui respecte les faces données de la frontière de l'objet : il n'y a en effet aucune raison pour que le maillage de Delaunay construit sur les points d'un ensemble de faces données comprenne toutes ces faces dans l'ensemble de ses faces.

Ce problème fera l'objet d'un autre article, en cours d'élaboration, et nous nous intéresserons ici principalement aux difficultés liées à la mise en oeuvre d'un mailleur de points.

De plus, nous exposerons quelles sont les conditions théoriques que doit vérifier la frontière d'un polyèdre quelconque pour que ce "mailleur de points" soit aussi un "mailleur de faces".

Le paragraphe 2 introduit quelques définitions générales qui seront constamment utilisées par la suite.

Le paragraphe 3 établit le fondement géométrique de la méthode et met en évidence les problèmes d'ordre théorique qui se présentent.

Le paragraphe 4 traite en détails des problèmes numériques liés aux erreurs d'arrondi et propose plusieurs méthodes pour surmonter ces difficultés et obtenir un algorithme fiable en des temps de calculs performants.

Au paragraphe 5, nous donnons les grandes lignes de ce que peut être un mailleur de points, fiable, robuste et économique permettant de mailler tout nuage de points.

Les problèmes d'applications au cas d'un polyèdre convexe ou quelconque font l'objet du paragraphe 6.

Le paragraphe 7 expose quelques résultats numériques en dimension 3 et dresse un bilan des applications de la méthode à différents problèmes géométriques comme la conception d'un mailleur universel d'objets polyédriques tridimensionnels quelconques.

## 2. DEFINITIONS ET NOTATIONS ASSOCIEES AU PROBLEME

Soit  $E_d$  l'espace affine euclidien de dimension  $d$  et  $\{x_k\} 1 \leq k \leq n$  un ensemble de points de  $E_d$  n'appartenant pas à un même hyperplan. Le problème abordé dans cet article est donc :

"construire un maillage de Delaunay associé à ces points".

Afin de présenter, dans toute sa généralité, la méthode proposée, nous allons introduire les définitions suivantes.

Soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq k \leq d$ .

### 2.1. Plan / Demi-espace/ Boule

Un  $k$ -plan est un hyperplan de dimension  $k$ .

Un  $k$ -demi-espace est un demi- $k$ -plan fermé dont la frontière est un  $(k-1)$ -plan contenu dans ce  $k$ -plan.

Une  $k$ -boule  $B$  est une boule ouverte dans un  $k$ -plan. Elle est définie par la donnée de  $(k+1)$  points  $x_1, \dots, x_{k+1}$ , n'appartenant pas à un même  $(k-1)$ -plan.

L'équation d'une  $d$ -boule, par exemple, s'écrit :

$$\Delta(x, x_1, \dots, x_{d+1}) = \begin{bmatrix} \ell_1^2 - \ell^2 & \ell_2^2 - \ell_1^2 \dots & \ell_{d+1}^2 - \ell_1^2 \\ x_1^1 - x^1 & x_2^1 - x_1^1 \dots & x_{d+1}^1 - x_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^d - x^d & x_2^d - x_1^d \dots & x_{d+1}^d - x_1^d \end{bmatrix} = 0$$

avec pour ( $1 \leq i \leq d+1$ ,  $1 \leq j \leq d$ ) :

$x_i^j$  désignant la  $j$ ème coordonnée du point  $x_i$

$x^j$  désignant celle du point  $x$

$$\text{et } \ell^2 = \sum_{m=1}^d (x^m)^2 \quad \ell_i^2 = \sum_{m=1}^d (x_i^m)^2 \quad 1 \leq i \leq k+1$$



## 2.2. Simplexe

Un  $k$ -simplexe  $K = (x_i)$  ( $1 \leq i \leq k+1$ ) est l'enveloppe convexe de  $(k+1)$  points  $x_1 \dots x_{k+1}$  qui constituent ses sommets.

A chaque  $k$ -simplexe  $K$  est associé le déterminant  $\det(K)$  suivant :

$$\det(K) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -x_1^1 \\ x_2^1 - x_1^1 & \dots & x_{k+1}^1 & -x_1^1 \\ \vdots & & & & \\ x_2^k - x_1^k & \dots & x_{k+1}^k & -x_1^k \end{bmatrix}$$

Le signe de  $\det(K)$ , associé à l'orientation de ce  $k$ -simplexe, sera supposé positif, ce qui revient à ordonner convenablement la suite  $\{x_i\}$  ( $1 \leq i \leq k+1$ ).

Si  $\det(K) = 0$ , le  $k$ -simplexe sera dit dégénéré, nous ne tolérerons pas, dans la suite, de tels éléments.

Le volume d'un tel  $k$ -simplexe est défini par  $V(K) = \frac{1}{k!} \det(K)$ .

Les 2-simplexes sont donc des triangles, et les 3-simplexes des tétraèdres.

## 2.3. Polyèdre et faces

Un  $k$ -polyèdre convexe  $P_k$  est un ensemble fermé d'intérieur non vide dans un  $k$ -plan tel que :

$$P_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n} D_k^i$$

où les  $D_k^i$  sont des  $k$ -demi-espaces.

Nous supposerons toujours que cette écriture de  $P_k$  est "minimale" au sens où tous les  $k$ -demi-espaces  $D_k^i$  sont nécessaires à sa définition.

Par définition, la  $j$ ème  $k$ -face de  $P_k$  est l'ensemble :

$$F_j = P_k \cap D_k^j$$

Le  $k$ -polyèdre convexe  $P_k$  comporte donc  $n$   $k$ -faces qui sont toutes des  $(k-1)$ -polyèdres convexes.

Par récurrence, on peut ainsi introduire la notion de  $l$ -faces ( $0 \leq l \leq k$ ) de  $P_k$ . Les 0-faces sont les sommets de  $P_k$ , qui sont aussi les extrémités des 1-faces de  $P_k$ ...

#### 2.4. Polytope - Polyèdre - Maillage

Un  $k$ -polytope est  $k$ -polyèdre convexe borné. Tout  $k$ -simplexe non dégénéré, par exemple, est donc un  $k$ -polytope.

Un  $k$ -polyèdre est un ensemble  $\Omega_k$  tel que :

$$\Omega_k = \bigcup_{1 \leq i \leq n} P_k^i$$

où les  $P_k^i$  forment une suite de  $k$ -polytopes tels que :

$$P_k^i \cap P_k^{i+1} = \text{une } k\text{-face} \quad 1 \leq i \leq n$$

La notion de  $k$ -face s'étend au cas des  $k$ -polyèdres de la façon suivante :

Une  $k$ -face de  $\Omega_k$  est un  $k$ -face de l'un des  $k$ -polyèdres convexes  $P_k^i$  qui n'est pas commune avec un autre élément  $P_k^j$ .

Un  $k$ -maillage d'un  $k$ -polyèdre  $\Omega_k$  est un ensemble de polyèdres  $(P_k^i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que :  $P_k^i \cap P_k^j = \emptyset$ , 0-face, 1-face, ...  $k-1$  face,  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

Par abus de langage on appelle  $k$ -triangulation tout maillage constitué de  $k$ -simplexes.

On pourra consulter la figure 1.

#### 2.5. Maillage de Voronoi et de Delaunay

Etant donné  $x_1, \dots, x_n$   $n$  points d'un  $k$ -plan  $E_k$ , on appelle  $k$ -polyèdre de Voronoi associé à  $x_i$  l'ensemble :

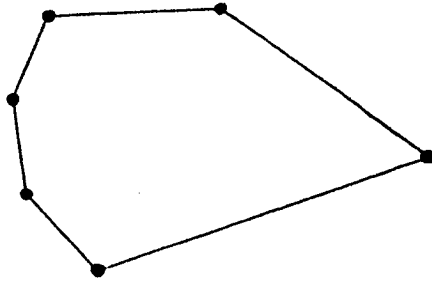
$$V_i = \{x \in E_k, \forall j \quad 1 \leq j \leq n, d(x, x_i) \leq d(x, x_j)\}$$

où  $d$  désigne la distance de  $E_k$ .

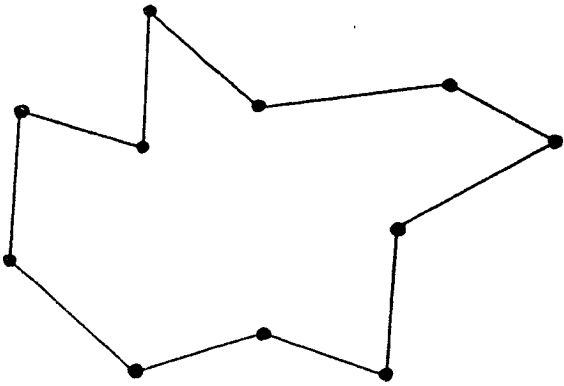
On démontre que les  $n$   $k$ -polyèdres de Voronoi  $V_1, \dots, V_i, \dots, V_n$  sont convexes et forment un maillage  $V$  de  $E_k$ , appelé maillage de Voronoi.

Si on suppose que les  $n$  points  $x_i$  n'appartiennent pas à un même  $(k-1)$ -plan, on peut construire des polyèdres de Voronoi de sommets  $y_1, \dots, y_j, \dots, y_m$ . A chaque  $y_j$  on peut associer l'enveloppe convexe  $P_j$  des points parmi  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  dont le polyèdre de Voronoi associé admet  $y_j$  comme sommet. On démontre que  $P_j$  est un  $k$ -polytope (dit de Delaunay) inscrit dans une boule  $B_j$  telle que :

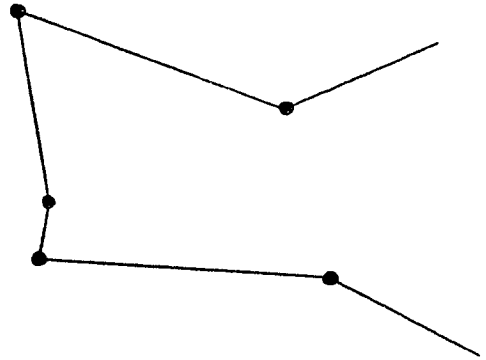
$$B_j \cap \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} = \emptyset.$$



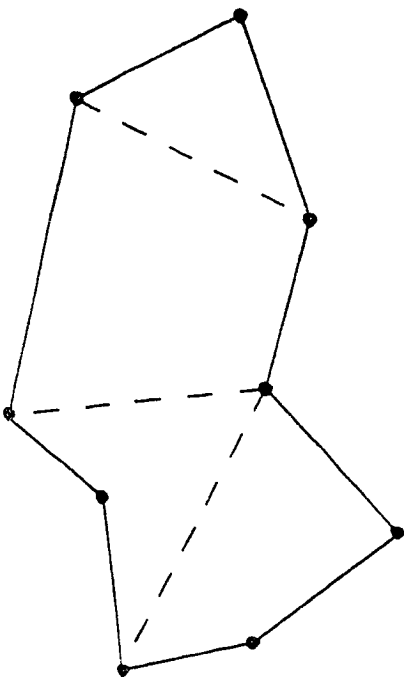
2 - Polytope



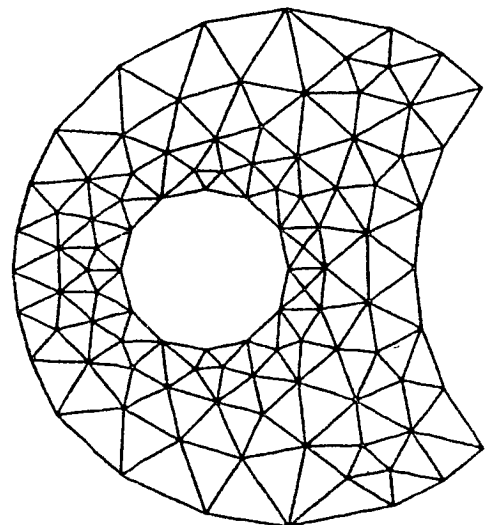
2 - Polyèdre borné



2 - Polyèdre



2 - Maillage



2 - Triangulation

Figure 1

Cette propriété dite critère de la boule vide caractérise le maillage de Delaunay.

L'ensemble de ces polytopes  $P_j$  forme un maillage  $\mathbb{D}$ , dit de Delaunay, de l'enveloppe convexe des points  $x_1 \dots x_i \dots x_n$ . Ce maillage est "dual" (au sens de la théorie des graphes) du maillage de Voronoi  $\mathbb{V}$  (voir Figure 2).

Suivant [Her], le maillage de Delaunay  $\mathbb{D}$  sera dit "spécial" s'il contient au moins un élément qui n'est pas un  $k$ -simplexe. Dans ce cas, on appelle triangulation de Delaunay associée à  $\mathbb{D}$  toute triangulation de  $\Omega$  déduite de  $\mathbb{D}$  par division en  $k$ -simplexes des éléments de  $\mathbb{D}$  qui n'en sont pas.

Sur l'exemple de la figure 2 on peut observer que le maillage de Delaunay (a) n'est pas "spécial" (tous les éléments sont des triangles) tandis que le maillage de Delaunay (b) est spécial (à cause de la présence du quadrangle  $x_2x_3x_7x_8$  et du pentagone  $x_3x_4x_5x_6x_7$ ).

Un  $k$ -polyèdre borné  $\Omega_k$  de sommets  $x_1 \dots x_i \dots x_n$  est Delaunay-admissible s'il existe un sous-ensemble  $\mathbb{D}'$  du maillage de Delaunay  $\mathbb{D}$  de l'enveloppe convexe de  $\Omega_k$  tel que  $\mathbb{D}'$  soit un maillage de  $\Omega_k$ .

## 2.6. Caractérisation des polyèdres Delaunay-admissibles

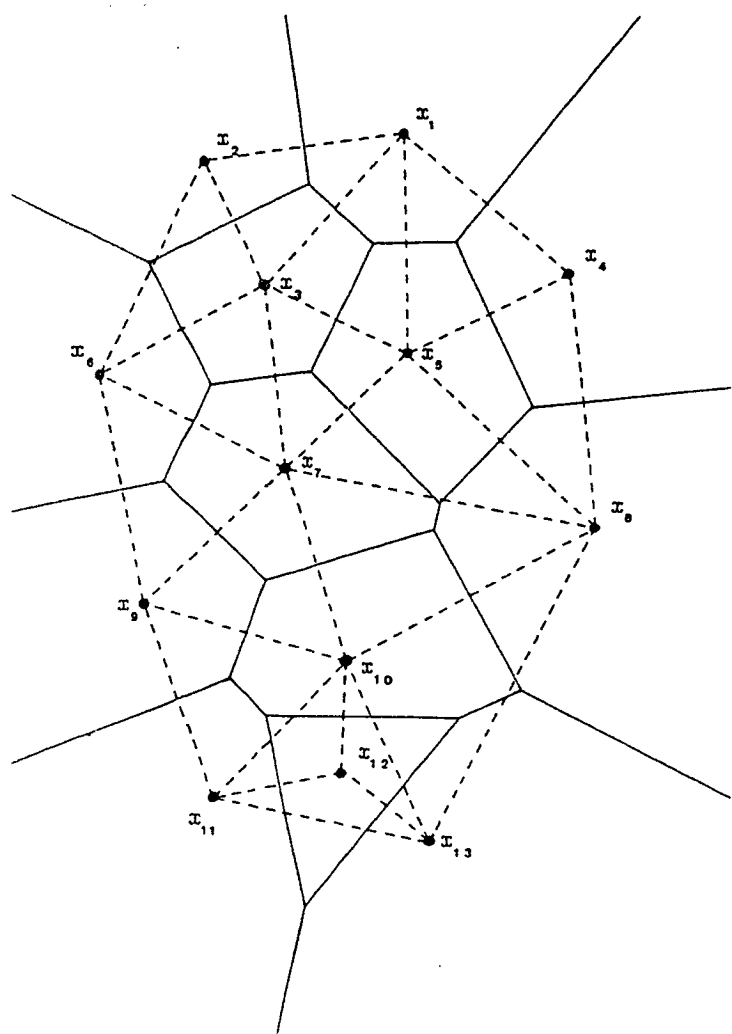
Il est possible de donner une caractérisation des  $k$ -polyèdres bornés Delaunay-admissibles à partir des propriétés de leurs faces. Dans ce but on est amené à définir, par récurrence, la notation de faces "régulières" [Her].

On dira qu'une  $l$ -face ( $l \geq 1$ )  $F$  d'un polyèdre borné est "régulière" si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

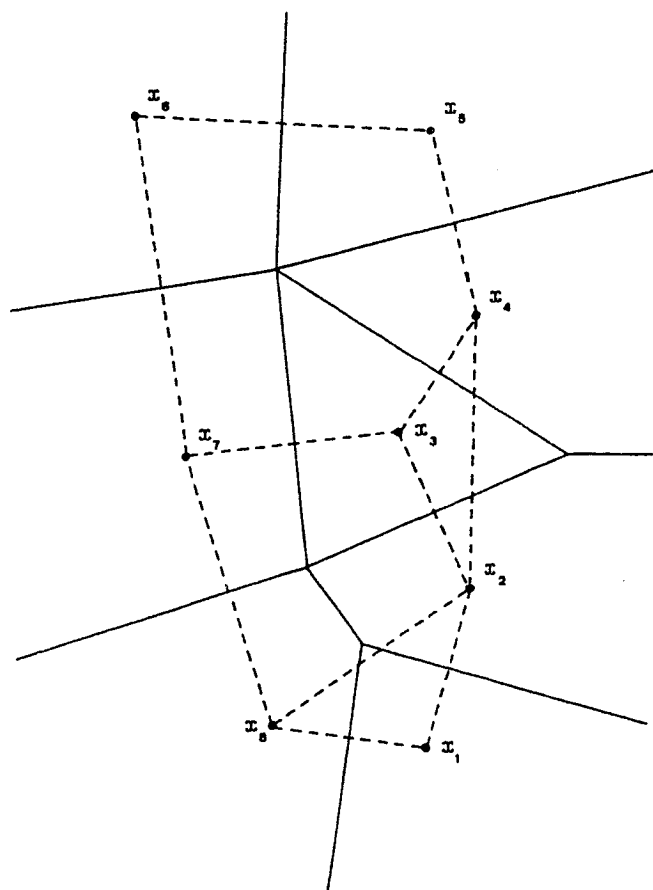
- $F$  est Delaunay-admissible : il existe donc un  $(k-1)$ -maillage  $\mathbb{D}'_{k-1}$  de  $F$ , contenu dans le  $(k-1)$ -maillage de Delaunay de l'enveloppe convexe de  $F$ .

- Le  $(k-1)$ -plan contenant  $F$  partage le  $k$ -plan  $E_k$  contenant  $\Omega_k$  en deux  $k$ -demi-espaces  $E_k^1$  et  $E_k^2$ . Puisque les sommets  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  de  $\Omega_k$  ne sont pas alignés l'un au moins de ces  $k$ -demi-espaces,  $E_k^1$  par exemple, est tel que :

(a)



(b)



-----

Maillage de Delaunay

—————

Maillage de Voronoï

Figure 2

$$\overset{\circ}{E}_k^1 \cap \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} \neq \emptyset.$$

On dira que  $F$  est régulière si pour tout  $D_{k-1} \in \mathbb{D}'_{k-1}$  et tout point  $x_i \in \overset{\circ}{E}_k^1 \cap \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  la  $k$ -boule  $B = B(D_{k-1}, x_i)$  circonscrite au  $k$ -polytope de "base"  $D_{k-1}$  et de "sommet"  $x_i$ , est telle que :

$$\bar{B} \cap \overset{\circ}{E}_k^2 \cap \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} = \emptyset$$

On peut montrer qu'un polyèdre  $\Omega$  est Delaunay-admissible si et seulement si toutes ses faces sont régulières ([Her]).

Sur l'exemple de la figure 3 la face  $x_1 x_2$  n'est pas "Delaunay-admissible".

## 2.7. Objets associés à un simplexe

A partir des définitions précédentes et dans le but de décrire la méthode de maillage proposée nous donnons ci-dessous l'ensemble des objets et quantités associées à un simplexe.

Rappelons d'abord la définition d'un simplexe (2.2). Un simplexe est la liste orientée (il existe plusieurs façons d'énoncer cette liste) constituée des  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$  telle que  $\det(K) > 0$ , nous noterons cette liste sous la forme :

$$K = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}, \text{ avec } \det(k) > 0.$$

A chaque simplexe est associé sa boule circonscrite (2.1)  $B$  de centre  $O$ , de rayon  $r$  et d'équation :

$$\Delta(x, x_1 \dots x_{k+1}) = \Delta(x, k) = 0.$$

Les  $k+1$  ( $k-1$ )-faces du simplexe  $K$  sont notées  $F_j$  et on écrira indifféremment  $K$  sous la forme :

$$K = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\} = \{F_j, x_j\}_{1 \leq j \leq k+1}$$

où  $F_j$  est la face ne comprenant pas comme sommet le point  $x_j$ . A partir de cette notation on introduit la notion de simplexe-virtuel de la façon suivante :

Soit  $x$  un point de l'espace  $E_k$  et  $K$  le simplexe  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ , à chacune de ses faces on associe le  $j$ ème simplexe "virtuel" suivant :

$$K_j^* = \{F_j, x\}_{1 \leq j \leq k+1}$$

(le point  $x$  vient prendre la place du sommet  $x_j$  de  $K$ ).

Remarquons que l'orientation de  $K$  induit celle de ses faces  $F_j$  et donne un sens au signe de la quantité  $\det(K_j^*)$  : cette propriété nous sera très utile dans la suite.

La figure 4 illustre ces notions en dimension 2.

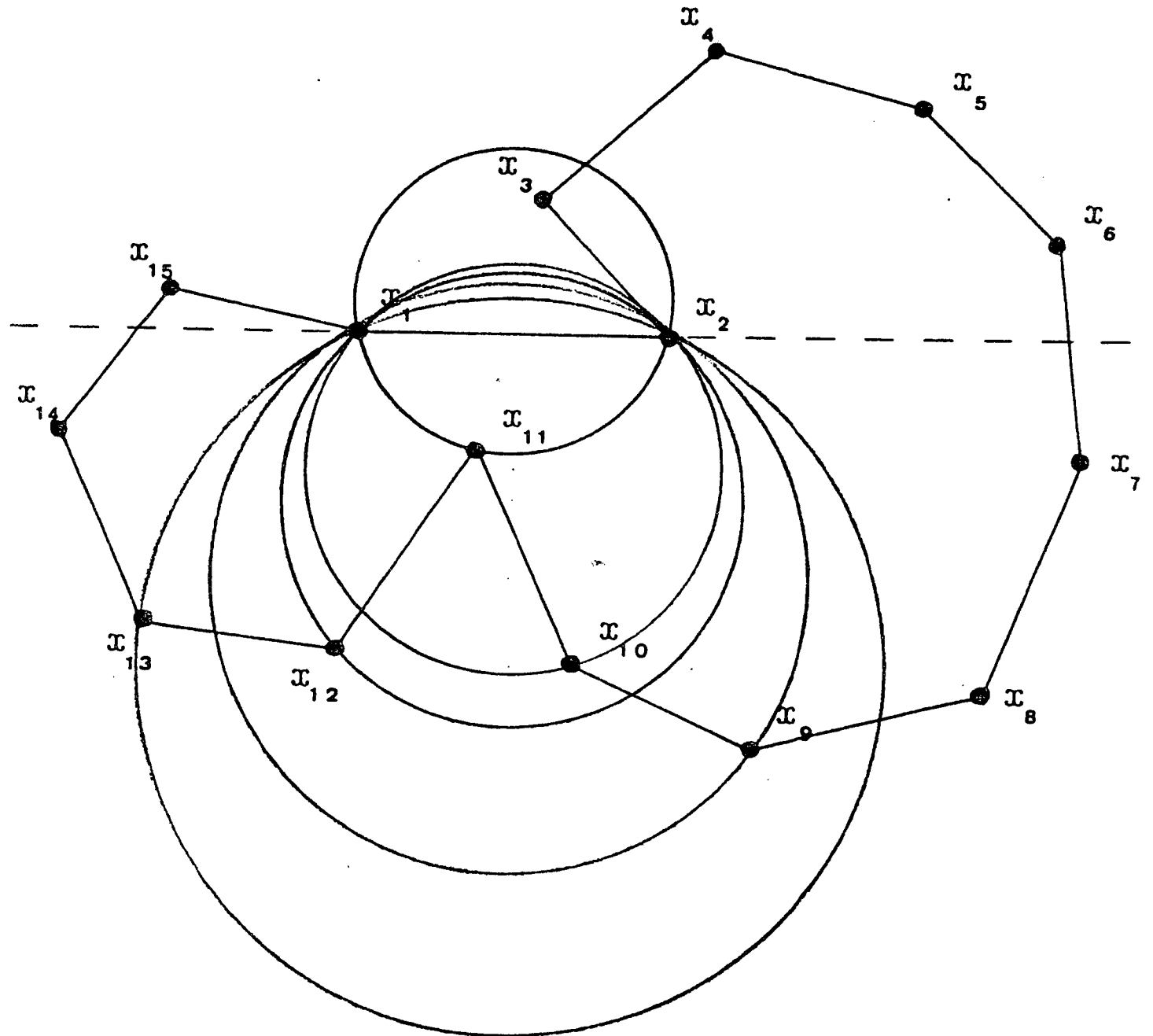
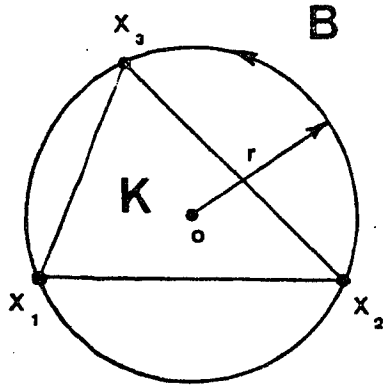
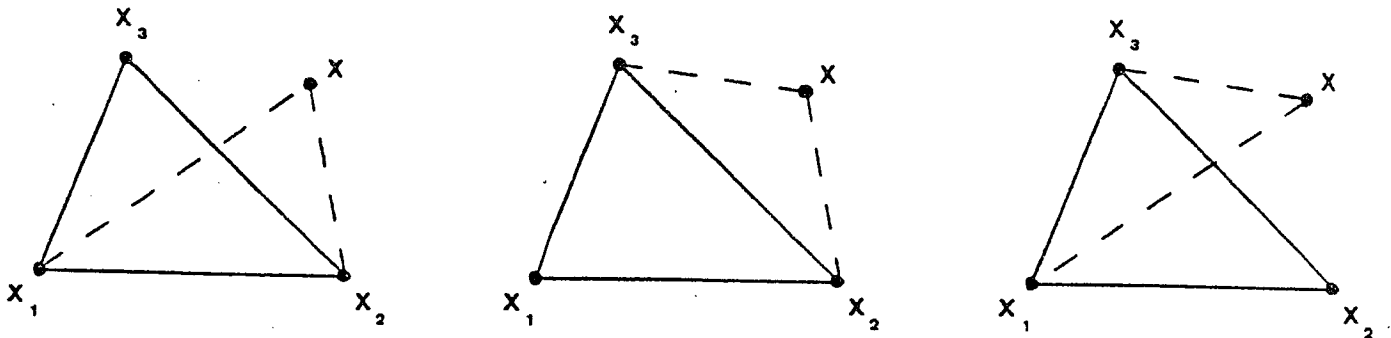


Figure 3

simplexe KK, sa boule circonscriteles 3 simplexes virtuels associés à K et au point xFigure 4

$$K = \{x_1, x_2, x_3\} = \{F_1, x_1\} = \{F_2, x_2\} = \{F_3, x_3\}$$

$$\text{avec } F_1 = \{x_2, x_3\} \quad F_2 = \{x_3, x_1\} \quad F_3 = \{x_1, x_2\}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre cet exemple à la dimension  $d \geq 3$ .

Remarque :

Dans la suite les notations seront abrégées si aucune confusion n'est à craindre ; ainsi un  $k$ -simplexe sera appelé simplexe, etc...



### 3. PRINCIPES DE BASE DE LA METHODE

#### 3.1. Introduction

Etant donné une triangulation de Delaunay  $\mathbb{D}_i$  de l'enveloppe convexe des  $i$  premiers points d'un nuage  $\{x_k\}$ , nous allons examiner la situation géométrique du point  $i+1$  par rapport à la triangulation  $\mathbb{D}_i$ .

A partir de cette analyse la triangulation de Delaunay  $\mathbb{D}_i$  sera localement modifiée pour construire une nouvelle triangulation de Delaunay  $\mathbb{D}_{i+1}$ .

Quand tous les points donnés  $\{x_k\}$  auront été traités une triangulation de Delaunay finale  $\mathbb{D}_n$  sera obtenue.

#### 3.2. Situations géométriques du point $(i+1)$ par rapport à $\mathbb{D}_i$

La position de  $x_{i+1}$  est caractérisée par rapport aux deux ensembles suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &= \bigcup_j B_j && \text{la réunion des boules associées aux éléments} \\ & && K_j \text{ de } \mathbb{D}_i \\ \mathbb{D}_i &= \bigcup_j K_j && \text{la réunion des "triangles" de la triangulation } \mathbb{D}_i. \end{aligned}$$

Il est immédiat de montrer que 3 configurations sont possibles :

- a)  $x_{i+1} \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}_i$  c'est-à-dire  $\exists k_j \in \mathbb{D}_i$  tel que  $x_{i+1} \in \overset{\circ}{K}_j$ ,
- b)  $x_{i+1} \notin \mathcal{B}_i$  c'est-à-dire  $x_{i+1}$  n'est dans aucune des boules  $B_j$ .
- c)  $x_{i+1} \notin \mathbb{D}_i$  mais  $x_{i+1} \in \mathcal{B}_i$   $x_{i+1}$  n'étant dans aucun élément  $K_j$  de  $\mathbb{D}_i$  est cependant dans l'une des boules  $B_j$ .

#### 3.3. Caractérisation des situations possibles :

Clairement la situation a) est caractérisée par la relation :

$$x_{i+1} \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}_i \iff \forall j \ 1 \leq j \leq p \ \det(K_j^*) > 0$$

où  $K_j^*$   $1 \leq j \leq p$  sont les  $p$  simplexes virtuels associés aux faces externes de  $\mathbb{D}_i$  et au point  $x$  (une face est "externe" si elle ne figure qu'une seule fois dans la liste de toutes les faces de tous les éléments de  $\mathbb{D}_i$ ).

Nous noterons  $F_j$  la  $j$ ème face externe de  $\mathbb{D}_i$ .

De même on caractérise la situation b) par :

$$x_{i+1} \notin \mathcal{B}_i \Leftrightarrow \forall K_j \in \mathbb{D}_i \Delta(x_{i+1}, K_j) \geq 0.$$

Le cas c), exclusion des 2 précédents s'écrit donc sous la forme :

$$x_{i+1} \notin \mathbb{D}_i \text{ et } x_{i+1} \in \mathcal{B}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \exists_j 1 \leq j \leq p \det(K_j^*) \leq 0 \\ \exists K_j \in \mathbb{D}_i \Delta(x_{i+1}, K_j) < 0 \end{cases}$$

A partir de cette analyse on peut construire une méthode pour obtenir le maillage de Delaunay  $\mathbb{D}_{i+1}$  à partir du maillage de Delaunay  $\mathbb{D}_i$ .

### 3.4. Prise en compte du point x

#### 3.4.1. Prise en compte de $x_{i+1}$ (situation a) :

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{D}_i$  dont la boule circonscrite contient  $x_{i+1}$ .

Soient  $F_1 \dots F_p$  les faces externes de cet ensemble (faces non communes à 2 éléments de  $\mathcal{S}$ ), on peut montrer que ([Her]) :

$$\mathbb{D}_{i+1} = (\mathbb{D}_i - \mathcal{S}) \cup (F_j x_{i+1})_j \quad 1 \leq j \leq p$$

$\mathbb{D}_{i+1}$  est une triangulation de Delaunay associée aux  $(i+1)$  premiers points de l'ensemble  $(x_k)$ . On veille ensuite à orienter positivement les nouveaux simplexes  $(F_j x_{i+1})_j$ .

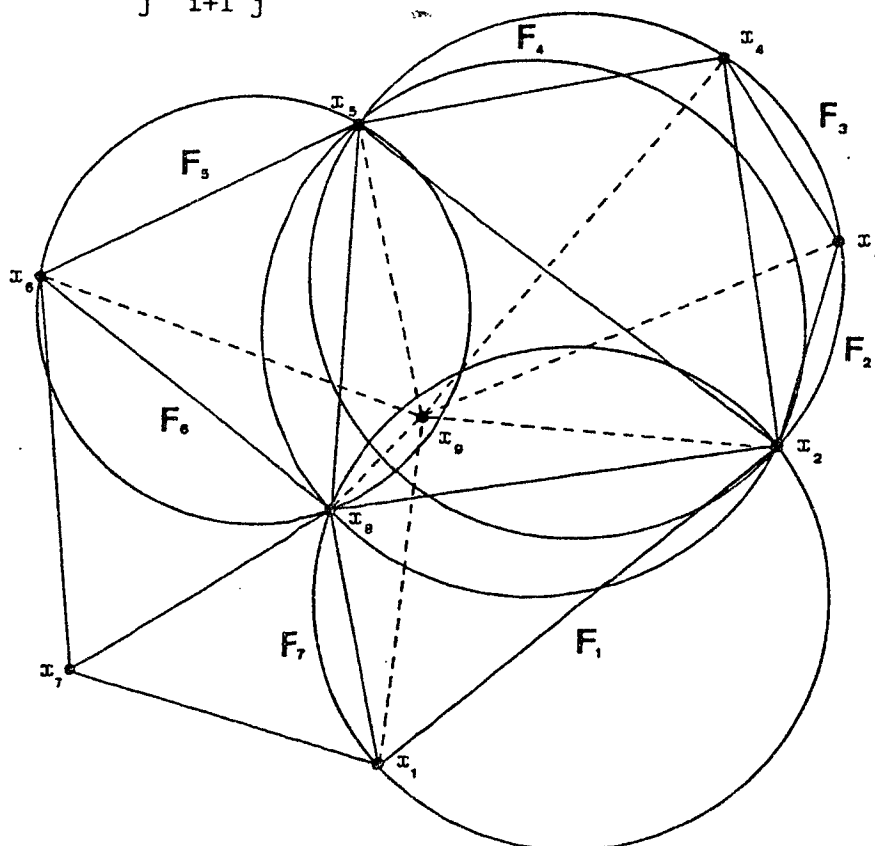


Figure 5

Exemple de l'insertion du point  $x_9$  pour construire  $\mathbb{D}_9$  à partir de  $\mathbb{D}_8$

3.4.2. Prise en compte de  $x_{i+1}$  (situation b) :

Comme  $x_{i+1} \notin \mathcal{B}_i$  on a  $x_{i+1} \notin \mathbb{D}_i$

Soient alors  $F_1 \dots F_p$  les faces externes du polytope  $\mathbb{D}_i$  qui définissent un plan séparant strictement  $x_{i+1}$  et  $\mathbb{D}_i$ , on peut montrer que ([Her]) :

$$\mathbb{D}_{i+1} = \mathbb{D}_i \cup (F_j x_{i+1})_j \quad 1 \leq j \leq p$$

est une triangulation de Delaunay associée aux  $(i+1)$  premiers points du nuage  $(x_k)$  en veillant à orienter positivement les simplexes  $(F_j x_{i+1})_j$  (cf [Her]).

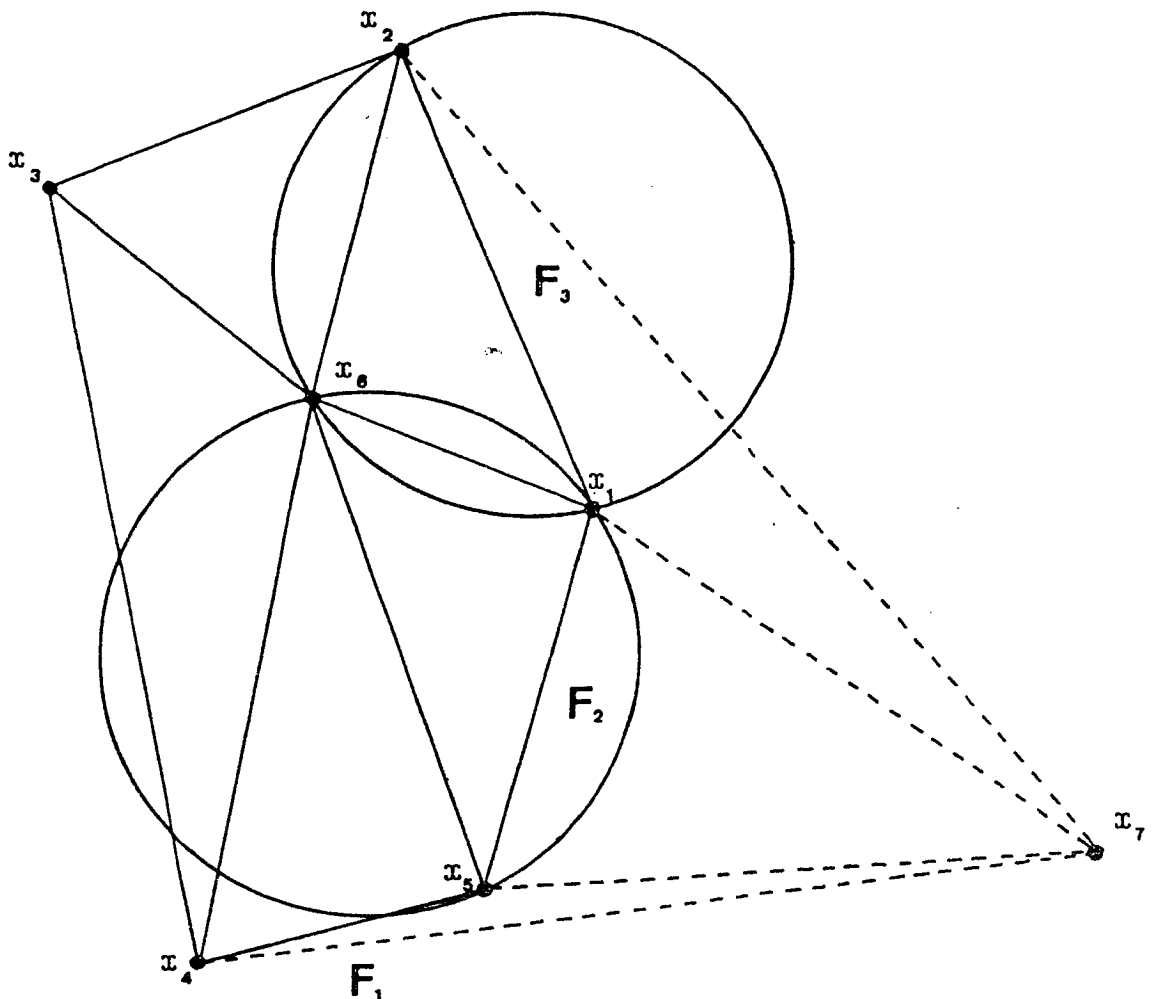


Figure 6

Exemple de l'insertion du point  $x_7$  pour construire  $\mathbb{D}_7$  à partir de  $\mathbb{D}_6$  dans le cas  $d=2$ .

### 3.4.3. Prise en compte de $x_{i+1}$ (situation c) :

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{D}_i$  dont la boule circonscrite contient  $x_{i+1}$ .

Soient  $F_1 \dots F_p$  les faces non communes à 2 éléments de  $\mathcal{S}$  déterminant un plan ne séparant pas  $x_{i+1}$  et  $\mathbb{D}_i$ .

Soient  $F_{p+1} \dots F_{p+q}$  les faces externes de  $\mathbb{D}_i$  qui ne sont pas faces d'un élément de  $\mathcal{S}$  déterminant un plan séparant  $x_{i+1}$  et  $\mathbb{D}_i$ , on peut montrer que ([Her]) :

$$\mathbb{D}_{i+1} = (\mathbb{D}_i - \mathcal{S}) \cup (F_j x_{i+1})_{1 \leq j \leq p+q}$$

est une triangulation de Delaunay associée aux  $(i+1)$  premiers points de l'ensemble  $(x_k)$  ; avec  $(F_j x_{i+1})$  orientés positivement.

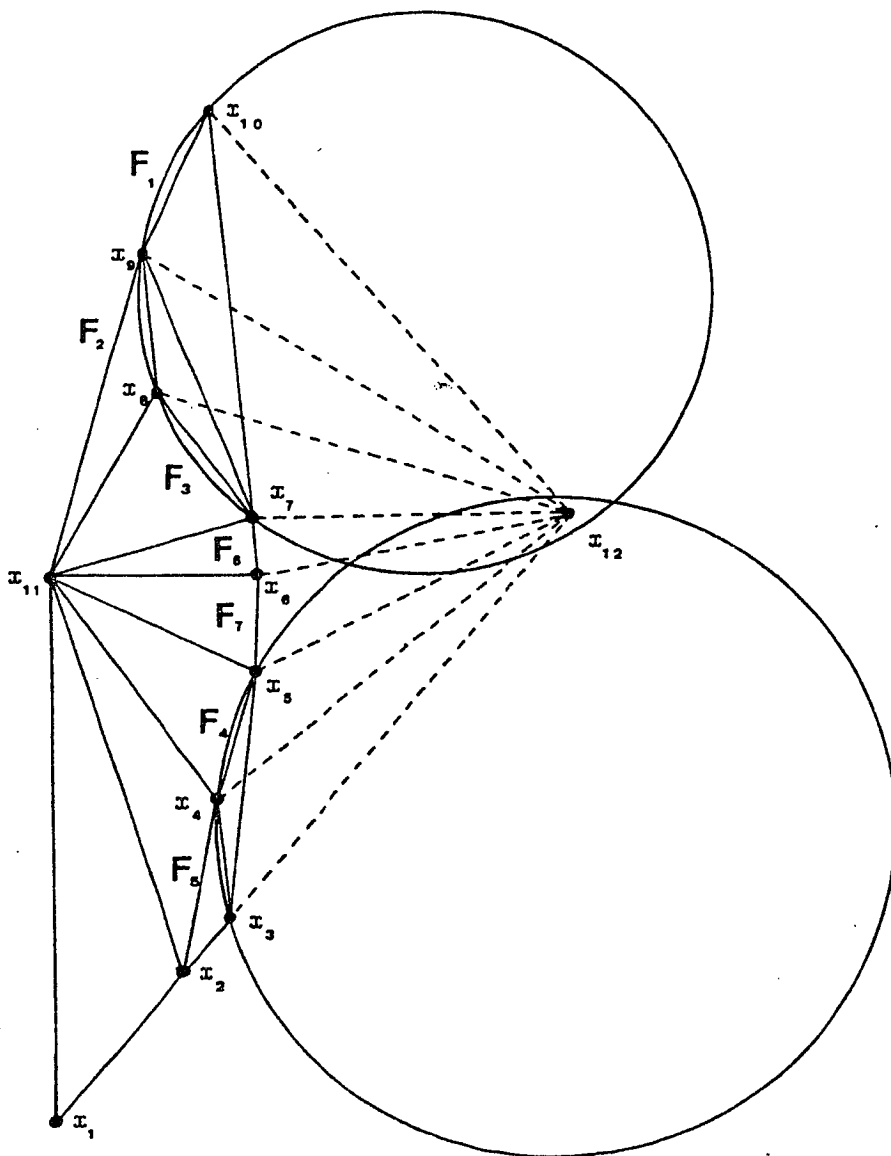


Figure 7

Exemple de l'insertion du point  $x_{12}$  pour construire  $\mathbb{D}_{12}$  à partir de  $\mathbb{D}_{11}$  dans le cas  $d=2$ .

### 3.5. Initialisation de la triangulation

La première triangulation  $\mathbb{D}_{d+1}$  est constituée par un simplexe  $K_1$  défini par  $d+1$  sommets non cohyperplanaires de l'ensemble  $\{x_k\}_{k=1,n}$ .

Le processus décrit, initialisé par  $\mathbb{D}_{d+1}$  permet d'introduire un à un les points du nuage  $\{x_k\}$ . Quand tous les points sont traités une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe du nuage est obtenue.

### 3.6. Simplification de la méthode :

On peut s'arranger pour n'avoir à traiter que la situation 3.4.1 en supposant que tous les points  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont déjà contenus dans une triangulation s'appuyant sur quelques points convenablement répartis.

Pour construire cette triangulation de départ, il suffit par exemple de définir un simplexe  $K_0$  (voir figure 8a) dont les  $d+1$  sommets sont des points calculés à partir des extrema des coordonnées du nuage  $\{x_k\}$ , et tels que :

$$\forall k, 1 \leq k \leq n, x_k \in K_0$$

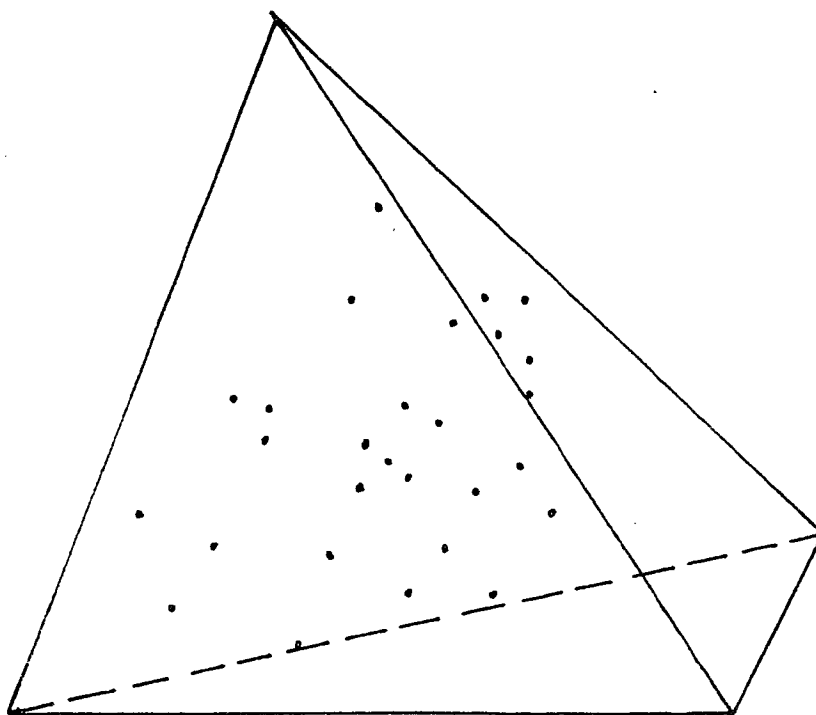


Figure 8.a (d=3)

Dans la pratique, en dimension 2 ou 3, le simplexe  $K_0$  est remplacé par une "boîte" que nous maillerons avec quelques éléments :

- en dimension 2 : un rectangle recouvert de 2 triangles,
- en dimension 3 : un parallélépipède rectangle recouvert de 5 tétraèdres (voir figure 8.b).

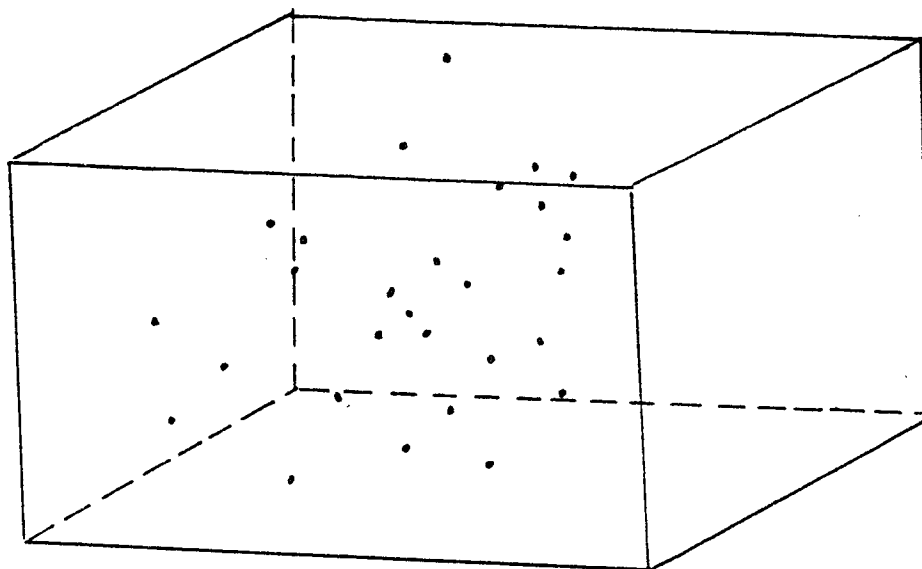


Figure 8.b (d=3)

Pour mettre en oeuvre la méthode, il suffit alors d'appliquer la construction relative à la situation a). Plus précisément il suffit de déterminer l'ensemble  $\mathcal{J}$  des éléments à détruire dont les faces externes  $F_j$  seront liées au point à insérer. Le maillage final  $\mathbb{D}_n$  est formé par l'ensemble des éléments obtenus après élimination de tous les simplexes dont l'un des sommets est l'un des points supplémentaires introduits. Il est important que la boîte soit suffisamment éloignée des points du nuage (voir chapitre 6).

#### 4. MISE EN OEUVRE NUMERIQUE ET DIFFICULTES ASSOCIEES

##### 4.1. Introduction

La seule difficulté que l'on rencontre lors de la mise en oeuvre informatique de la méthode consiste à reconnaître correctement les situations où plusieurs points sont "presque" cosphériques...

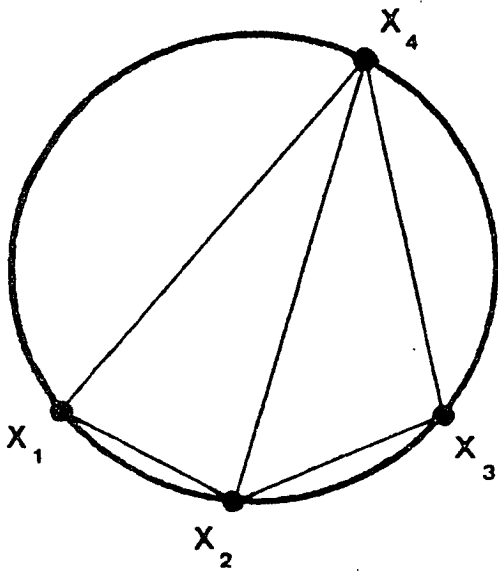
Etudions par exemple le cas où cinq points  $x_1 \dots x_5$  sont cosphériques. A partir du premier triangle  $K_1 = x_1 x_2 x_3$  l'algorithme rajoute le point  $x_4$ . A cause des erreurs d'arrondi qui sont liées au calcul du déterminant  $\Delta(x_4, K_1)$  deux situations peuvent être envisagées :

- a) si  $\Delta(x_4, K_1) < 0$  l'algorithme détruit le triangle  $K_1$  et construit les triangles  $x_1 x_2 x_4$  et  $x_2 x_3 x_4$  (fig. 9a),
- b) si  $\Delta(x_4, K_1) \geq 0$  l'algorithme conserve le triangle  $K_1$  et construit le triangle  $K_2 = x_1 x_3 x_4$  (fig. 9b).

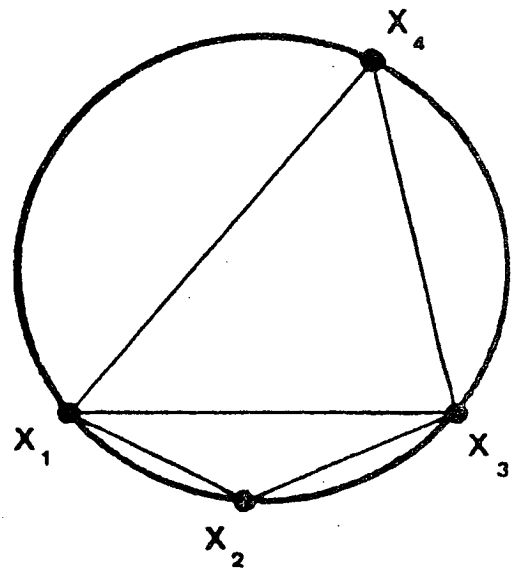
On constate que dans le cas a), la triangulation obtenue est correcte bien que la décision numérique soit fausse.

Supposons par exemple que l'on soit dans la situation b) et considérons le point  $x_5$ . Toujours à cause des erreurs d'arrondi quatre situations peuvent être envisagées :

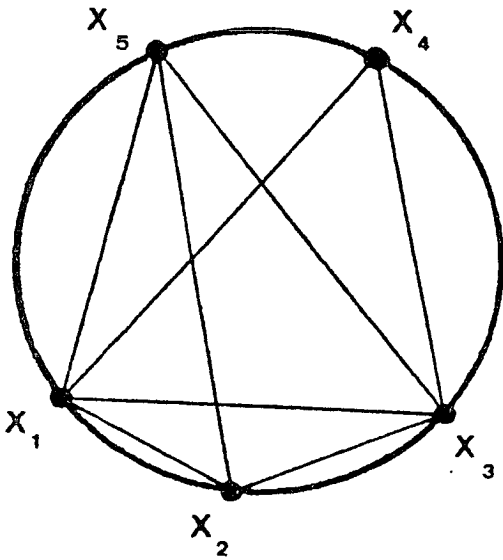
- a)  $\Delta(x_5, K_1) < 0$  et  $\Delta(x_5, K_2) \geq 0$  : l'algorithme détruit  $K_1$  conserve  $K_2$  et construit les triangles  $x_1 x_2 x_5$  et  $x_2 x_3 x_5$  (fig. 9c),
- b)  $\Delta(x_5, K_1) \geq 0$  et  $\Delta(x_5, K_2) < 0$  : l'algorithme conserve  $K_1$  détruit  $K_2$  et construit les triangles  $x_1 x_3 x_5$  et  $x_3 x_4 x_5$  (fig. 9 d),
- c)  $\Delta(x_5, K_1) < 0$  et  $\Delta(x_5, K_2) < 0$  : l'algorithme détruit  $K_1$  et  $K_2$  et construit les triangles  $x_1 x_2 x_5$ ,  $x_2 x_3 x_5$  et  $x_3 x_4 x_5$  (fig. 9 e),
- d)  $\Delta(x_5, K_1) \geq 0$  et  $\Delta(x_5, K_2) \geq 0$  : l'algorithme conserve  $K_1$  et  $K_2$  et construit le triangle  $x_1 x_4 x_5$  (fig. 9 f).



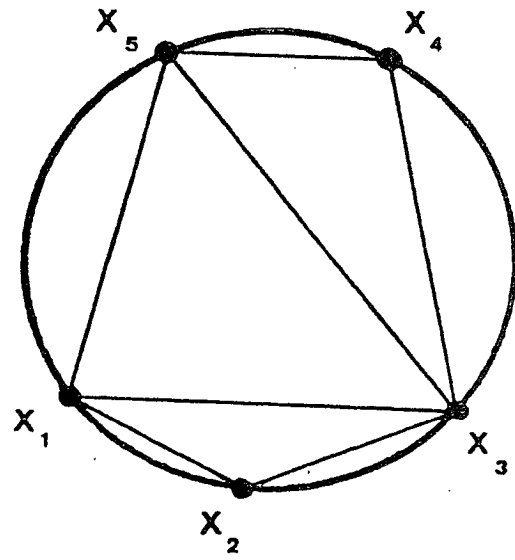
(a)



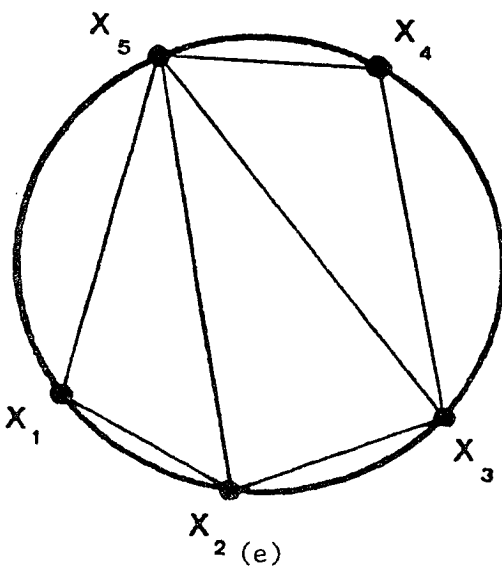
(b)



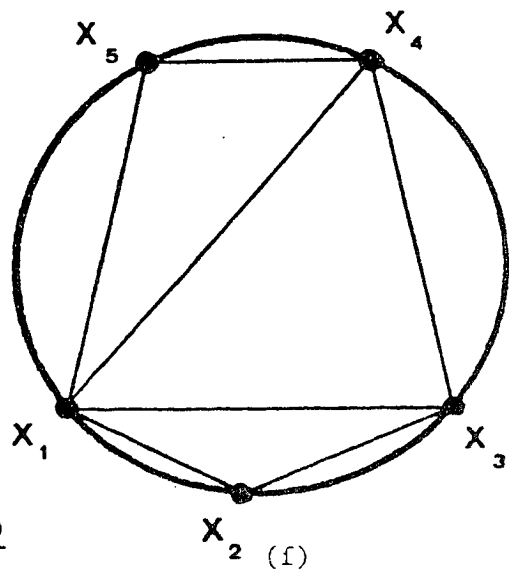
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 9



On constate que dans le cas a) la triangulation obtenue est incorrecte, dans les cas b) et c) la triangulation obtenue est correcte bien que les décisions numériques soient fausses, et dans le cas d) la triangulation est bien sûr correcte puisque c'est le seul cas où les décisions numériques sont correctes.

Cet exemple simple montre que les erreurs d'arrondi peuvent conduire l'algorithme à construire des triangulations incorrectes. C'est effectivement ce que l'on peut observer dans la pratique, particulièrement en dimension 3. Plusieurs solutions ont été envisagées pour aborder ce problème. Nous développons en particulier une méthode qui permet de construire, de manière sûre et au moindre coût, une triangulation qui est "presque" de Delaunay.

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des simplexes "détruits" (voir 3.4.1). Il s'agit donc de décider si le point  $x_{i+1}$  appartient à une boule fermée  $B$  de centre  $C$  et de rayon  $r$  circonscrite à un simplexe  $K \in \mathcal{S}$ . Cette situation peut être caractérisée numériquement de deux manières différentes (voir figure 10) :

$$- \Delta(x_{i+1}, K) \leq 0$$

$$- \frac{d-r}{r} \leq -\epsilon$$

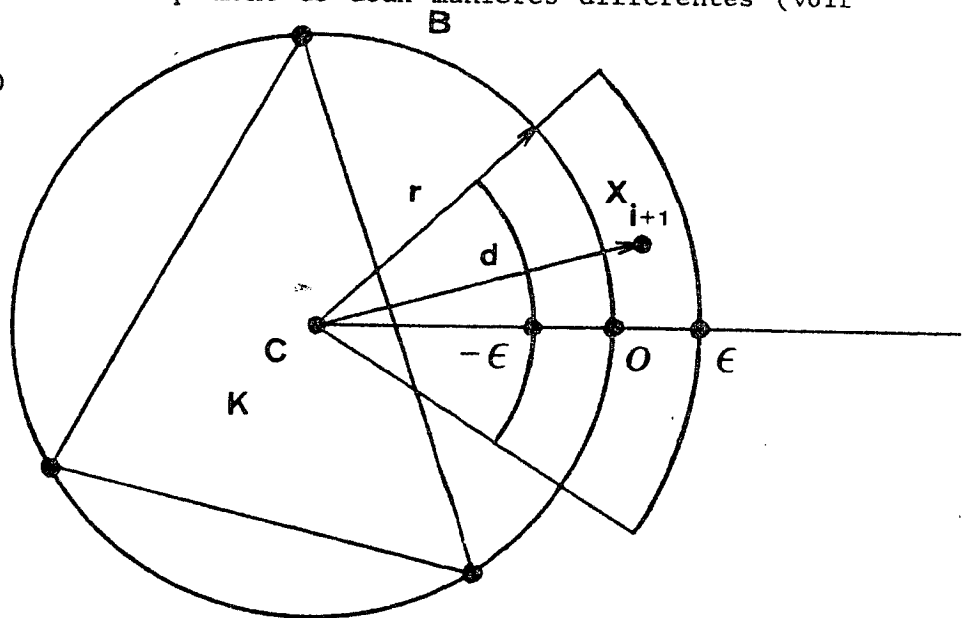


Figure 10

Pour lever l'indétermination liée au calcul de ces grandeurs autour de la valeur critique 0 on peut :

- a) augmenter la précision.
- b) recycler les points pour lesquels il y a risque d'indétermination.
- c) modifier "légèrement" les coordonnées de ces points et les remettre à leur position initiale après traitement.

d) évaluer exactement la grandeur  $\Delta(x, K_i)$  en supposant que toutes les coordonnées des points sont des nombres entiers (ce qui entraîne que les coefficients de  $\Delta(x, K)$  sont aussi des nombres entiers).

e) mêler les techniques b, c ou les techniques b, d

f) modifier la technique d afin de construire pour un coût moindre une triangulation "presque" de Delaunay.

#### 4.2. Quelques méthodes numériques pour lever l'indétermination :

L'objet de paragraphe est de détailler les différentes méthodes (a),..., (e) décrites dans le paragraphe précédent.

##### a) *Augmentation de la précision*

Cette solution (choix de la Double Précision ou même utilisation de la Précision Infinie voir [Per] [Mac]) ne fait que reporter le problème de décidabilité plus loin.

##### b) *Recyclage des points non décidables*

Dans cette approche on insère un à un les points de l'ensemble  $(x_k)$  et on construit  $\mathbb{D}_{i+1}$  de la façon suivante :

- si  $x_{i+1}$  appartient "nettement" à la boule circonscrite à chaque élément de  $\mathcal{S}$ , on construit  $\mathbb{D}_{i+1}$  à partir de  $\mathbb{D}_i$  par prise en compte du point  $x_{i+1}$ .
- s'il existe un doute sur l'appartenance du point  $x_{i+1}$  à une boule circonscrite à un élément de  $\mathcal{S}$ , on élimine le point  $x_{i+1}$  et on considère le point suivant  $x_{i+2}$ .

A la fin du processus, on insère les points éliminés précédemment.

Cette méthode permet d'insérer des points éliminés car l'environnement de ceux-ci a évolué. On ne peut néanmoins garantir sa convergence.

##### c) *Déplacement des points non décidables*

Couplée à la méthode précédente, cette approche se propose de traiter les points non recyclables en leur affectant une petite perturbation de manière à obtenir une décision nette.

Quand l'ensemble des points a été traité on a construit un maillage qui est satisfaisant pour des applications de type imagerie ou reconnaissance de forme ([Boi]) mais qui n'est pas réaliste dans notre cas. On ne peut en effet se permettre de modifier la position d'un point donné par l'utilisateur de la méthode.

D'autre part la solution consistant à remettre à leur position initiale les points déplacés conduit, généralement, à la création d'éléments très aplatis, voire de volume négatif qu'il est ensuite très malaisé de supprimer (par modifications locales avec leurs voisins : on peut penser, pour  $d=2$ , au processus d'inversion de diagonales entre 2 triangles).

d) *Calcul en entier*

L'idée exploitée ici est que le calcul d'un déterminant est exact dès que ses coefficients sont des nombres entiers. On effectue alors une normalisation de manière à convertir les coordonnées des points en nombres entiers. La méthode de construction de l'ensemble  $\mathcal{S}$  est alors basée sur le calcul exact de  $\Delta(x,K)$ , déterminant d'ordre  $d+1$ , faisant intervenir des grandeurs élevées à la puissance  $d+2$  (cf 2.1).

Cette méthode séduisante se heurte à la précision des ordinateurs actuels qui restreint, dès que  $d \geq 3$ , la taille possible des objets manipulables.

La grandeur  $\Delta(x,K)$  est de la forme :  $\sum_{i=1}^{d+1} L_i^{d+2}$  où  $L_i$  a la dimension d'une "longueur".

Soit  $b$  le nombre de bytes de la mantisse d'un mot mémoire, alors on sait évaluer  $\Delta(x,K)$  uniquement si :

$$L_i \leq 2^{b/d+2} - 1$$

Pour  $d=3$  et  $b=48$  on obtient :

$$L_i \leq 2^9 - 1$$

ce qui ne permet pas une normalisation raisonnable, en entier, des coordonnées des points de la pièce.

Pour lever cette contrainte il est possible de reprogrammer [Per] les opérations nécessaires (addition et multiplication) à l'évaluation de  $\Delta(x,K)$  en utilisant des multimots.

Cette solution a l'inconvénient d'exiger un temps de calcul important.

e) *Méthode "mixte" numéro 1*

Afin d'accéder à la solution sans se pénaliser en temps calcul, une possibilité est de combiner les approches a) b) et d).

Ainsi le calcul en entier ne sera effectué que pour les seuls points "critiques" pour lesquels  $\Delta(x_{i+1},K)$  est "proche" de 0.

Utilisée dans [Per] cette technique semble donner de bons résultats dans la plupart des cas.

### 4.3. Construction d'une triangulation "presque" de Delaunay

L'objet de ce paragraphe est d'exposer en détails la méthode (f) annoncée en 4.1.

Basée sur des idées analogues à celles développées dans 4.2 cette méthode n'exige que le calcul exact de déterminants à coefficients entiers du type  $\det(K)$  (où  $K$  est un simplexe) qui sont donc des quantités de la forme :

$$\sum_{i=1}^d L_i^d,$$

au lieu de :

$$\sum_{i=1}^{d+1} L_i^{d+2}$$

comme pour les déterminants  $\Delta(x,K)$  qui interviennent dans les méthodes (d) ou (e) exposées en 4.1. A nombre de bytes égal on peut donc traiter des objets de taille nettement plus réaliste en utilisant des mots en double précision. En dimension 3 on obtient

$$L_i \leq 2^{16} - 1 = 37667$$

ce qui est raisonnable pour une définition en coordonnées entières des sommets de l'objet à mailler.

D'après 3.6 on est toujours dans la situation où le nouveau point  $x_{i+1}$  à traiter appartient à un des simplexes du maillage  $\mathbb{D}_i$  déjà existant. Par analogie avec l'algorithme décrit en 3.4.1 pour traiter cette situation on va déterminer un ensemble  $\mathcal{J}'$  de simplexes appartenant à  $\mathbb{D}_i$  tels que :

- (i)  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$
- (ii)  $\bigcup_{K \in \mathcal{J}'} K$  soit un polyèdre étoilé par rapport à  $x_{i+1}$
- (iii)  $(\bigcup_{K \in \mathcal{J}'} K) \cap \{x_1, \dots, x_i\} = \emptyset$ .

Dans un premier temps, on détermine l'ensemble  $\mathcal{J}'_\epsilon$  des simplexes tels que :

$$K \in \mathcal{J}'_\epsilon \Leftrightarrow \frac{d-r}{r} \leq -\epsilon$$

où  $\epsilon$  est un nombre suffisamment grand pour que l'on soit sûr, quelles que soient les erreurs d'arrondi qui peuvent perturber le calcul de  $\frac{d-r}{r}$ , que  $x_{i+1}$  appartienne à la boule circonscrite à  $K$ .

Il est clair que :

$$\{K_0\} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_\epsilon \quad (K_0 \text{ est défini en 3.6})$$

Il reste à modifier  $\mathcal{I}_\epsilon$ , en rajoutant ou en otant des éléments, de façon à construire, à partir de  $\mathcal{I}_\epsilon$ , un ensemble  $\mathcal{I}'$  qui vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) : c'est l'objet de l'algorithme suivant.

Etant donné un ensemble  $\mathcal{I}'$  de simplexes on notera :

- $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_j, \dots, F_p\}$  : l'ensemble des faces d'éléments de  $\mathcal{I}'$  qui ne sont pas communes à deux éléments de  $\mathcal{I}'$
- $K_j^* = (F_j, x_{i+1})$ ,  $1 \leq j \leq p$ , les  $p$  simplexes virtuels associés à  $F_j$  et  $x_{i+1}$
- $S(\mathcal{F})$  : l'ensemble des sommets des éléments de  $\mathcal{F}$
- $S(\mathcal{I}')$  : l'ensemble des sommets de  $\bigcup_{K \in \mathcal{I}'} K$ .

Algorithme 1 :

a) Initialisation :  $\mathcal{I}' = \mathcal{I}_\epsilon$ .

b) Pour  $j=1$  à  $p$ ,

si  $\det(K_j^*) > 0$  ne rien faire,

si  $\det(K_j^*) < 0$   $\mathcal{I}' = \mathcal{I}' / (K_j)$ ,

( $K_j$  désignant l'unique simplexe de  $\mathcal{I}'$  dont  $F_j$  est une face)

si  $\det(K_j^*) = 0$   $\mathcal{I}' = \mathcal{I}' \cup (\bar{K}_j)$ ,

( $\bar{K}_j$  désigne le simplexe de  $\mathbb{D}_i$  n'appartenant pas à  $\mathcal{I}'$  et dont  $F_j$  est une face).

Fin de la boucle  $j$ .

c) Si  $\mathcal{I}'$  n'a pas été modifié par l'étape b : aller en d.

Si non : aller en b

d) Si  $\text{card}(S(\mathcal{F})) = \text{card}(S(\mathcal{I}'))$  : aller en e.

Si non, c'est-à-dire si  $\text{card}(S(\mathcal{F})) < \text{card}(S(\mathcal{I}'))$  :

$$\mathcal{I}' = \mathcal{I}' - \{K\} \text{ et aller en b}$$

( $K$  est un élément quelconque de  $\mathbb{D}_i$ , dont un sommet est un point de  $S(\mathcal{I}')$ , qui n'appartient pas à  $S(\mathcal{F})$  et qui est différent de  $x_{i+1}$ ).

e) Fin.

Par construction l'ensemble  $\bigcup_{K \in \mathcal{I}'} K$  est un polyèdre étoilé par rapport à  $x_{i+1}$  et ne contenant pas d'autres points parmi  $x_1, \dots, x_i$ . On obtient alors une nouvelle triangulation  $\mathbb{D}_{i+1}^\epsilon$  à partir de  $\mathbb{D}_i$  en posant :

$$\mathbb{D}_{i+1}^\epsilon = (\mathbb{D}_i / \mathcal{I}') \cup (F_j, x_{i+1})$$

Comme  $\mathcal{S}'$  ne coïncide pas forcément avec  $\mathcal{S}$  il est clair que  $\mathbb{D}_{i+1}^\epsilon$  n'est pas forcément de Delaunay, bien qu'elle soit "proche" d'une triangulation de Delaunay : on peut dire, par abus de langage que  $\mathbb{D}_{i+1}^\epsilon$  est une triangulation "presque" de Delaunay à " $\epsilon$  près". Quand on observe l'algorithme 1 on remarque qu'il ne fait intervenir que des calculs exacts de déterminants à coefficients entiers du type  $\det(K)$ .

#### 4.4. Reconnaissance d'une position :

Quel que soit la méthode employée il est logique, pour déterminer  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{S}_\epsilon$ , de trouver d'abord les éléments du maillage  $\mathbb{D}_i$  qui contiennent  $x_{i+1}$ . A partir de ces éléments on peut ensuite déterminer, par exploration des éléments voisins, l'ensemble des éléments de  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{S}_\epsilon$ .

Le but de ce paragraphe est de présenter une méthode qui optimise la recherche des éléments de  $\mathbb{D}_i$  contenant  $x=x_{i+1}$  (sur ce type de méthode, voir [Pre] par exemple).

Soit  $K$  un simplexe et  $K_j^* = (F_j, x_{i+1})$ ,  $1 \leq j \leq d+1$ , les simplexes virtuels associées aux faces  $F_j$  de  $K$  et au point  $x_{i+1}$ . On remarque que :

- $\forall j, 1 \leq j \leq p, \det(K_j^*) > 0 \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{K}$ ,
- $\exists j_1, \dots, j_q, 1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_q \leq p$ , tels que  $\det(K_{j_1}^*) = \dots = \det(K_{j_q}^*) = 0 \Leftrightarrow x$  appartient à l'intersection des  $q$   $d$ -plans définis par les faces  $F_{j_1}, \dots, F_{j_q}$ .

Ces résultats permettent de caractériser la position de  $x_{i+1}$  par rapport aux  $2^{d+1}-1$  régions déterminées par  $K$  (voir figure 11).

Considérons l'algorithme suivant :

#### Algorithme 2

- a) Début : initialisation  $K=K_0$ , ou  $K_0$  est un simplexe quelconque de  $\mathbb{D}_i$
- b) Si, pour tout  $j \det(K_j^*) > 0$ , alors  $x_{i+1} \in K$ , aller en e),
- c) S'il existe  $j$  tel que  $\det(K_j^*) < 0$ , chercher le simplexe  $K'$ , voisin de  $K$  par la face  $j$ , faire  $K=K'$  et aller en b),
- d) S'il existe  $j_1, \dots, j_q$  tels que  $\det(K_{j_1}^*) = \dots = \det(K_{j_q}^*) = 0$ , alors  $x \in \mathcal{C}(\bigcap_{k=1, q} F_{j_k})$  ou  $\mathcal{C}(\bigcap_{k=1, q} F_{j_k})$  désigne l'ensemble des éléments de  $\mathbb{D}_i$  admettant  $\bigcap_{k=1, q} F_{j_k}$  comme face
- e) Fin.

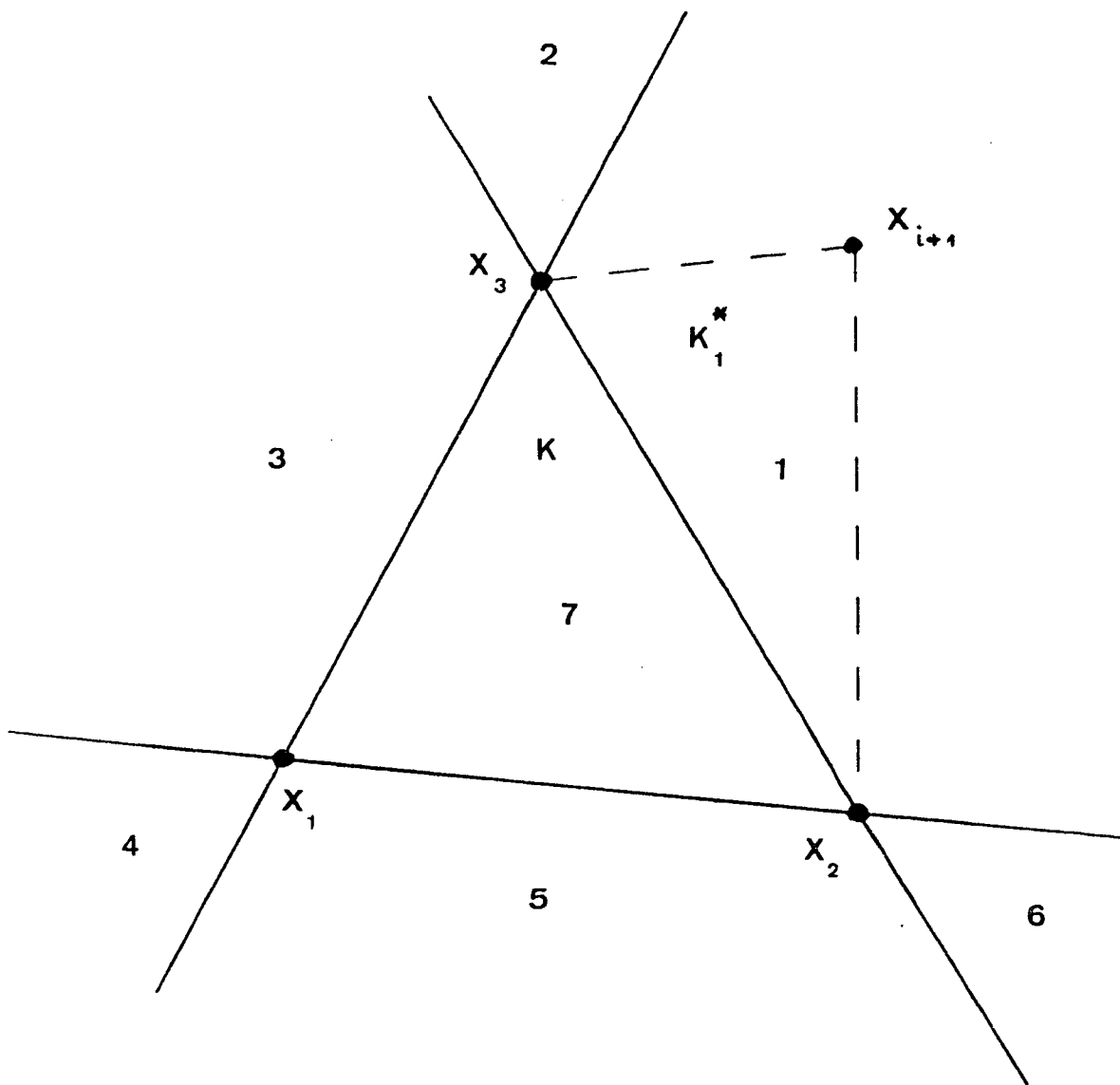


Figure 11

Il est clair que cet algorithme permet de trouver tous les éléments de  $\mathbb{D}_i$  qui contiennent  $x_{i+1}$ .

En dimension  $d=3$ , par exemple, il existe quatre situations possibles :

- $\forall j, \det(K_j^*) > 0 : x_{i+1} \in \overset{\circ}{K}$  (Figure 12 a),
- $\exists j$ , unique, tel que  $\det(K_j^*) = 0 : x_{i+1} \in K \cap K'$  où  $K'$  est le voisin de  $K$  par la face  $F_j$  (figure 12 b),
- $\exists j, k$  tels que  $\det(K_j^*) = \det(K_k^*) = 0 : x_{i+1} \in \mathcal{C}(F_j \cap F_k)$ , ensemble des éléments de  $\mathbb{D}_i$  admettant  $F_j \cap F_k$  comme arête commune (figure 12 c),
- $\exists j, k, l$  tels que  $\det(K_j^*) = \det(K_k^*) = \det(K_l^*) = 0$ , cette dernière situation n'est pas possible car  $x_{i+1}$  est supposé distinct des points  $x_1, \dots, x_i$  précédemment insérés.

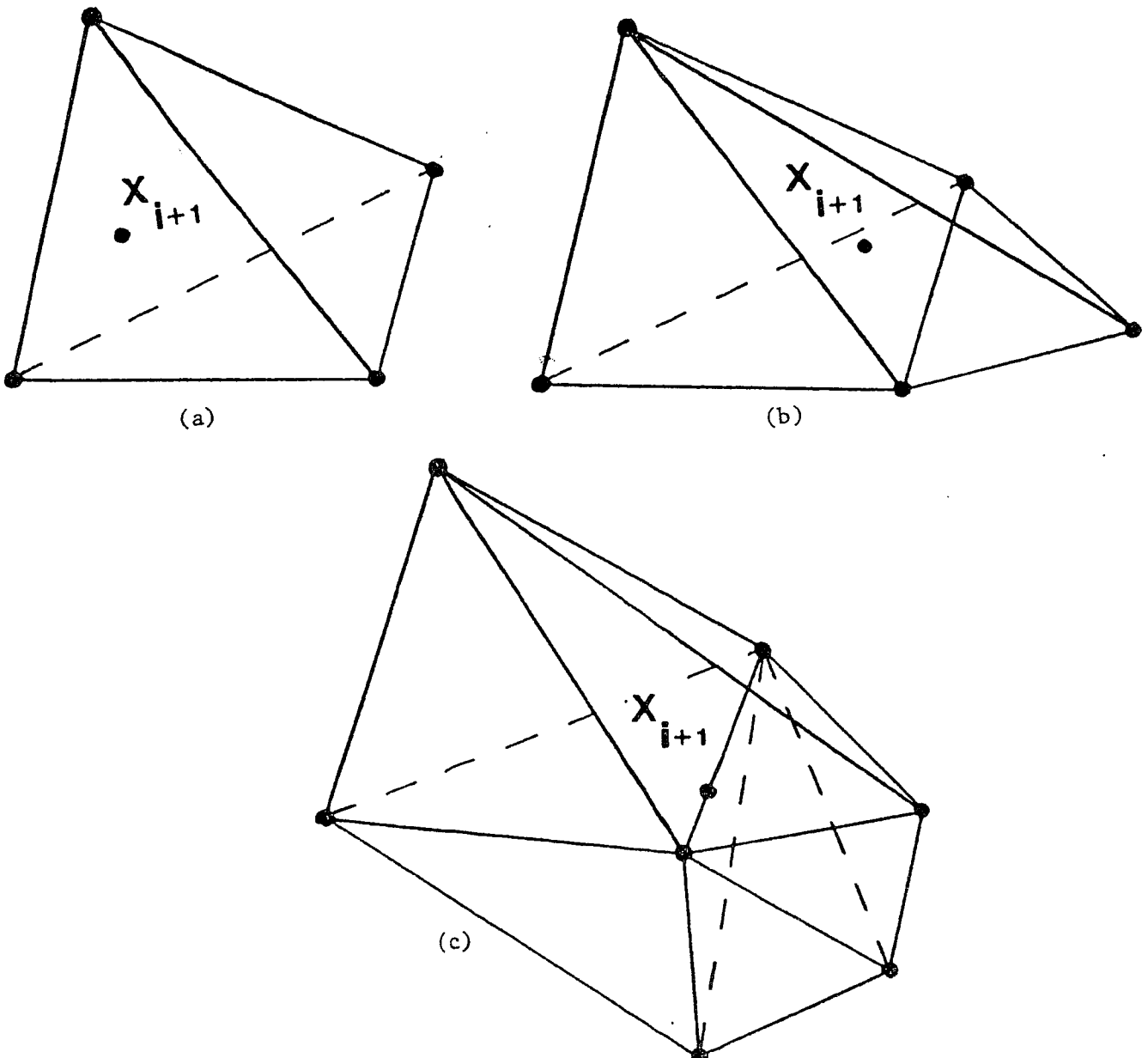


Figure 12



Il reste à préciser le choix de l'élément de départ servant à initialiser la recherche. Plusieurs approches sont envisageables :

- i) choisir  $K^0$  de manière aléatoire
- ii) choisir  $K^0$  de telle sorte que le point  $x_{i+1}$  considéré en soit "voisin". Pour ce faire une technique de pavage grossier de l'espace peut être employée couplée avec un tri rapide des positions respectives de  $x_{i+1}$  avec par exemple le centre de gravité des pavés.
- iii) une méthode analogue peut être préconisée qui utilise la connaissance des points O centres des boules B.

La figure suivante, pour  $d=2$ , illustre le cheminement entre un élément de départ  $K^0$  quelconque et l'élément contenant  $x_{i+1}$ .

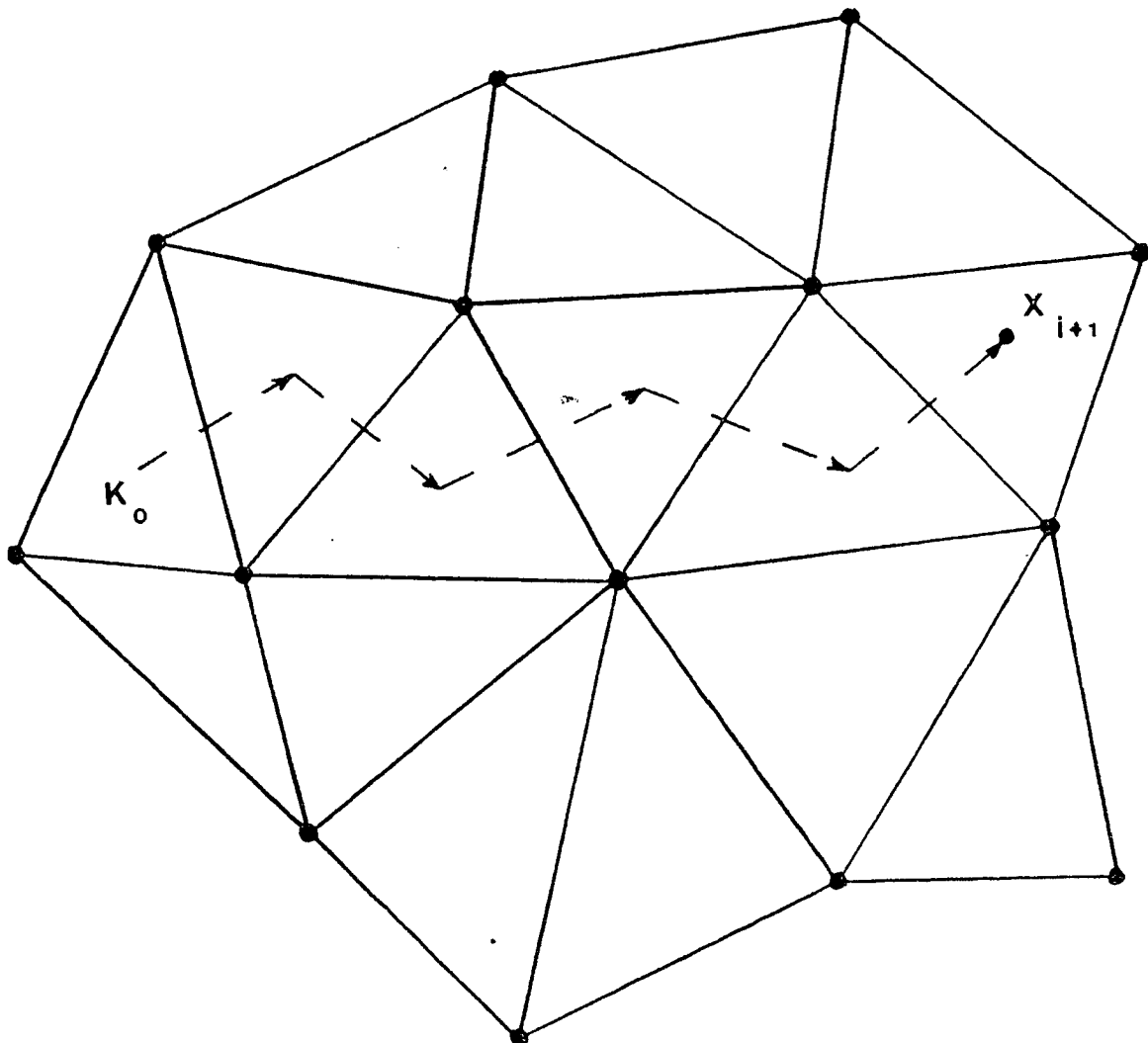


Figure 13

Il nous reste à rassembler l'ensemble de ces résultats pour obtenir un "mailleur de points" dans le cadre de la dimension 2 ou 3.

## 5. METHODE DE MAILLAGE D'UN ENSEMBLE DE POINTS EN DIMENSION 3

La mise en oeuvre informatique de la méthode comprend donc les phases suivantes :

### Phase 1 :

Calculer les extrema des coordonnées des points de l'ensemble de points donnés.

### Phase 2 :

En déduire les 8 points de la boîte englobante.

### Phase 3 :

Normaliser toutes les coordonnées des points pour obtenir une évaluation exacte des déterminants qui interviennent dans le calcul au moment de la prise en compte d'un nouveau point.

### Phase 4 :

Trianguler cette boîte avec 5 (ou 6) tétraèdres.

### Phase 5 :

Insérer un à un les points du nuage :

- chercher le ou les éléments contenant le point à insérer
- initialiser l'ensemble  $\mathcal{S}$  avec ce (ces) élément(s)
- déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  exact (au sens défini plus haut)
- construire la triangulation s'appuyant sur les points déjà introduits et sur le point à insérer.

Le résultat obtenu est alors un maillage de la boîte englobante contenant comme sommets de simplexes les 8 points de cette boîte et l'ensemble des points donnés.

### Phase 6 :

Éliminer tous les simplexes dont l'un des sommets est aussi un sommet de la boîte englobante.

En général le maillage obtenu est alors celui de l'enveloppe convexe des points donnés mais ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple de la figure 14 : la face  $[x_1, x_2]$  du polyèdre  $x_1 \dots x_7$  ou de son

enveloppe convexe  $x_1x_2x_5x_7x_8$  n'est pas respectée à cause de la proximité du sommet  $a_1$  de la boîte englobante. Dans ce cas l'algorithme construit les triangles  $a_1x_2x_3$  et  $a_1x_3x_1$  qui sont donc éliminés et le maillage obtenu est un maillage du polyèdre  $x_1x_3x_4x_5x_6x_7$ .

Pour éviter ce problème il faut imposer que les faces du polyèdre traité soient régulières relativement à l'ensemble des points donnés et des sommets de la boîte englobante. Dans la pratique cette condition est remplie dès que la boîte englobante est suffisamment éloignée : sur l'exemple de la figure 9 la face  $x_1x_2$  est respectée si on éloigne la boîte  $a_1b_1c_1d_1$  en lui substituant la boîte  $a_2b_2c_2d_2$ .

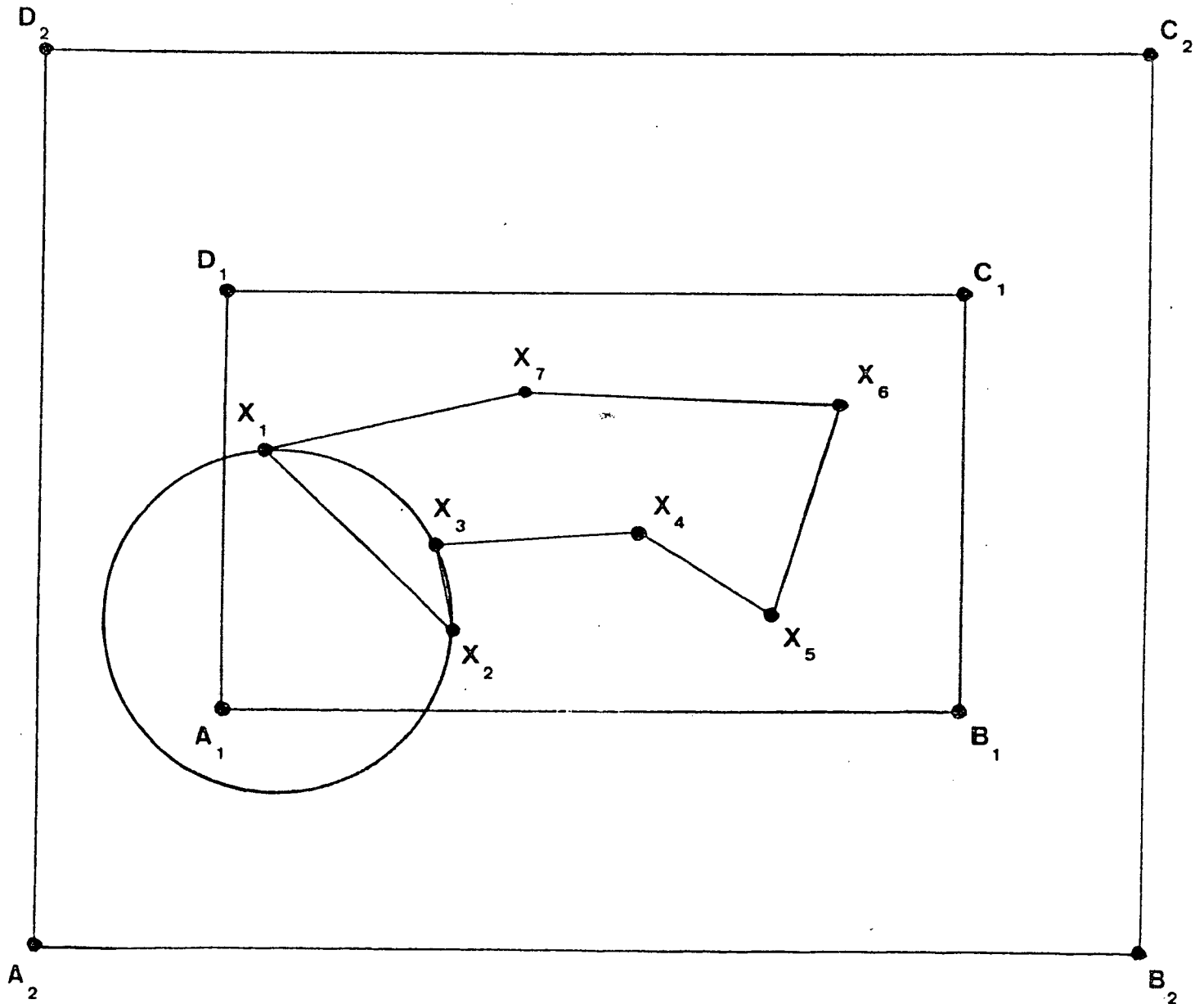


Figure 14

## 6) GENERALISATION AU CAS D'UN POLYEDRE NON CONVEXE QUELCONQUE

Si l'on veut généraliser l'algorithme au cas d'un polyèdre non convexe  $\Omega$  quelconque l'idée la plus directe consiste à procéder en deux étapes :

a) construire une triangulation de Delaunay  $\mathcal{D}$  de l'enveloppe convexe de  $\Omega$  à l'aide de l'algorithme du chapitre 3.

b) chercher un sous-ensemble  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{D}$  qui soit aussi une triangulation de  $\Omega$ .

Malheureusement l'étape b impose que  $\Omega$  soit Delaunay-admissible. On a vu au chapitre 2 quelles sont les conditions pour que le polyèdre  $\Omega$  soit Delaunay-admissible : dans la pratique on constate, particulièrement en dimension 3, que la grande majorité des polyèdres non convexes ne sont pas Delaunay-admissibles.

Il existe deux démarches pour surmonter cette difficulté.

Dans toute la suite on supposera que la frontière de  $\Omega$  est donnée par un ensemble  $\mathcal{F}$  de  $(d-1)$ -simplexes, tel donc que pour toute face  $F$  de  $\Omega$  on puisse trouver un sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  dont les éléments forment un maillage de  $F$ . On notera  $P$  l'ensemble des points qui sont sommets d'éléments de  $\mathcal{F}$ .

### 6.1. Modification de la description de la frontière de $\Omega$

Etant donné un polyèdre  $\Omega$  non Delaunay-admissible il est toujours possible de rajouter des points sur la frontière de  $\Omega$ , essentiellement sur les faces singulières de  $\Omega$ , afin de rendre  $\Omega$  Delaunay-admissible pour un nouvel ensemble de points  $P'$  contenant strictement  $P$  ([Her], [Per]). Il est clair qu'en procédant de cette manière il faut abandonner l'idée de construire une triangulation qui respecte la liste  $\mathcal{F}$  des  $(d-1)$ -simplexes fournie par l'utilisateur pour décrire la frontière de  $\Omega$ .

Sur l'exemple de la figure 3 il suffit de rajouter le point milieu  $x$  du segment  $[x_1, x_2]$  : on obtient ainsi deux nouvelles sous-faces (à savoir les segments  $([x_1, x]$  et  $[x, x_2])$ ) qui ne sont plus singulières. En revanche la face  $[x_1, x_2]$  initialement fournie par l'utilisateur ne peut plus être une face d'un triangle du futur maillage de  $\Omega$ .

Un algorithme général de division des faces singulières en dimension 2 et 3, est proposé dans [Per].

Dans le cas où le polyèdre  $\Omega$  est Delaunay-admissible et où sa frontière est décrite par une liste  $\mathcal{F}$  de  $(d-1)$  simplexes il est également possible, pour des dimensions supérieures ou égales à 3, qu'une face  $F \in \mathcal{F}$ , fournie par l'utilisateur ne soit pas la face d'un simplexe du futur maillage de  $\Omega$ . En dimension 3 par exemple cette situation se produit dès que  $\Omega$  admet une face admettant au moins 4 sommets cocycliques  $abcd$  (voir figure 5). Dans ce cas, suivant l'ordre dans lequel les points  $a, b, c, d$  sont pris en compte, l'algorithme du chapitre 3 va construire une triangulation de Delaunay dont les tétraèdres admettront comme faces  $abc$  et  $acd$ , ou  $abd$  et  $bcd$ .

Dans l'un des deux cas les faces fournies par l'utilisateur ne sont donc pas respectées.

Etant donné un polygone  $\Omega$  Delaunay-admissible pour  $P$  et un ensemble  $\mathcal{F}$  de  $(d-1)$ -simplexes décrivant la frontière de  $\Omega$  nous ignorons s'il existe un ordre de prise en compte des points de  $P$  par l'algorithme du chapitre 3 tel que pour tout  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F$  soit la face d'un  $d$ -simplexe de la triangulation de Delaunay obtenue après épuisement des points de  $P$ .

Pour éviter ce problème il faut "préciser" la description de la frontière de  $\Omega$  en construisant, à partir de  $\mathcal{F}$ , une nouvelle liste  $\mathcal{F}'$  de  $(d-1)$ -polytopes qui coïncide avec la réunion des polytopes de Delaunay constituant le maillage de Delaunay de chaque face de  $\Omega$ . Pour reprendre l'exemple de la figure 5 il faut remplacer la donnée de deux triangles  $abc$  et  $acd$ , en  $abd$  et  $bcd$ , par la donnée "globale" de  $abcd$ .

Cette manière de faire se généralise immédiatement au cas des dimensions supérieures à 3.

## 6.2. Méthode de George, Hecht, Saltel

La deuxième méthode consiste à construire à partir de la triangulation de Delaunay  $\mathcal{D}$ , par une suite de procédures de reconnexion locale, une nouvelle triangulation  $\mathcal{T}$ , qui n'est plus de Delaunay mais qui est telle que chaque face de la liste  $\mathcal{F}$  fournie par l'utilisateur est aussi une face d'un élément de  $\mathcal{T}$ . Pour une explication de cette méthode nous renvoyons à [GHS<sub>1</sub>].

### 6.3. Création de points internes

Une fois construit un maillage de  $\Omega$  à l'aide des algorithmes décrits précédemment il est clair qu'il faut rajouter des points internes à  $\Omega$  afin d'obtenir un maillage "convenable" de  $\Omega$ , c'est-à-dire un maillage dont les simplexes sont pas trop éloignés de simplexes équilatéraux. Sur ces procédures de création de points internes nous renvoyons à [GHS<sub>2</sub>].

## 7. RESULTATS ET APPLICATIONS

Dans son principe la méthode de maillage proposée s'applique à des espaces de dimension quelconque.

Sa mise en oeuvre informatique n'a été faite qu'en dimension 2 ou 3. Elle devient difficile à considérer pour des dimensions supérieures car la limite de précision de l'ordinateur impose une restriction sur la taille des objets que l'on peut traiter.

Telle quelle, cette méthode permet de construire l'enveloppe convexe d'un nuage de points (cf remarque 5 section 6).

Programmée en Fortran sur un APOLLO DN4000, elle a été testée sur plus d'une centaine d'exemples correspondant à des nuages de 68 à près de 9000 points en dimension 3.

### 7.1. Vitesse

Le tableau ci-dessous précise en fonction du nombre de points du nuage le nombre d'éléments de la triangulation obtenue ainsi que le temps d'exécution sur APPOLO DN 4000 :

Cas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	68	964	1313	1378	1542	1984	2160	3315	3486	4452
ne	176	4766	9001	6334	6743	7360	13701	18719	20664	25333
CPU	25.3	187.9	395.2	238.6	273.5	450.2	504.8	582.9	689.9	795.8

Tableau 1 : triangulation en dimension 3.

avec

n : nombre de points

ne : nombre d'éléments

CPU : temps en secondes (Apollo DN 4000)

La vitesse de la méthode peut être appréciée sur la courbe suivante :

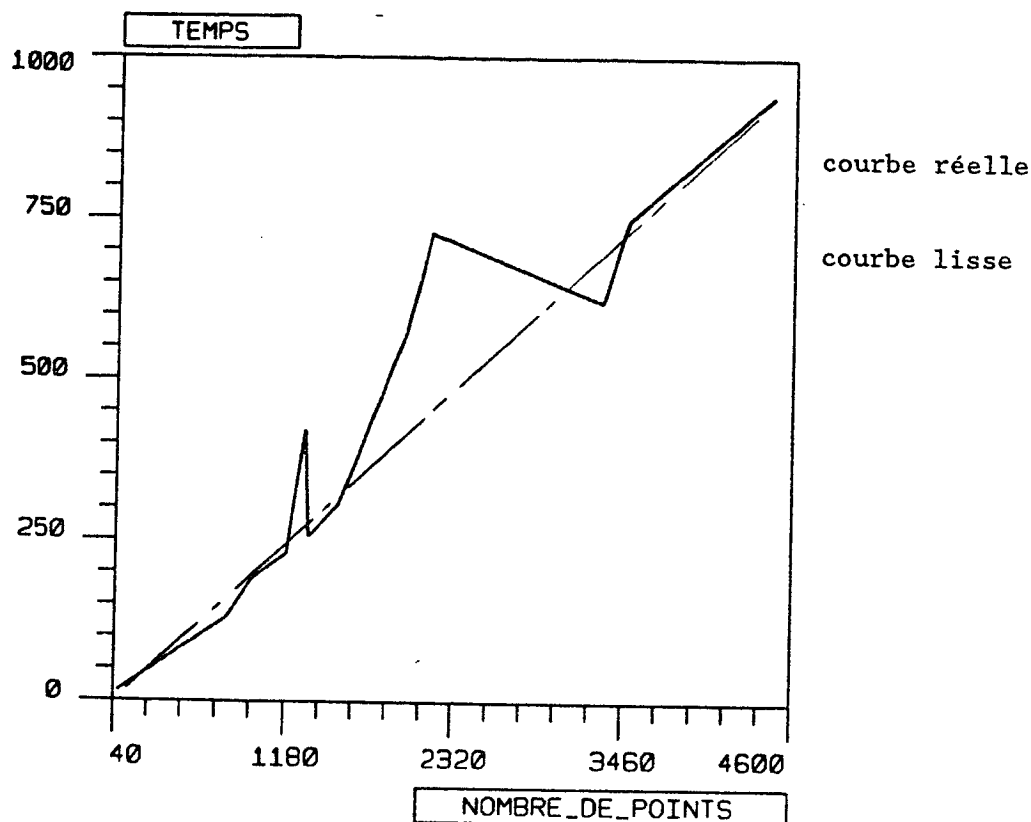


Figure 15

L'allure générale de la courbe (courbe lissée en pointillé) nous donne la vitesse moyenne de la méthode qui semble donc très proche d'une méthode linéaire.

Les pics correspondent à des objets présentant de nombreux points coplanaires ou cosphériques qui obligent à utiliser les algorithmes 1 et 2 (voir 4.3) qui ralentissent le processus.

La présence de ces pics nous empêche d'évaluer numériquement la vitesse de la méthode : le choix de tel ou tel objet pour cette mesure faussant le calcul correspondant.

### 7.2. Un exemple d'objet tridimensionnel traité :

Parmi les plus de 100 exemples testés, nous présentons celui correspondant à un objet que nous avons maillé [Mod] en utilisant une autre approche. Cet objet présente de nombreux points coplanaires et de ce fait présente un caractère très concret, il comprend 1338 points.



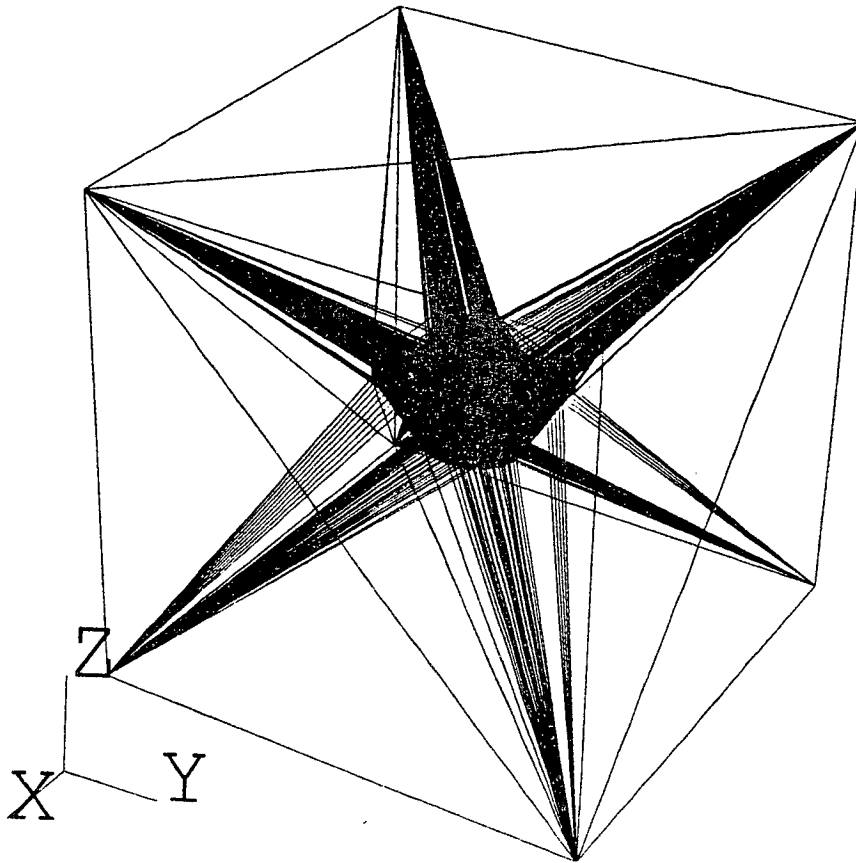


Figure 16 : Nuage de points dans sa boîte : tracé de toutes les arêtes.

A l'issue de la phase 5 (voir chapitre 5) nous obtenons la triangulation de la figure 16 qui comprend 7828 tétraèdres.

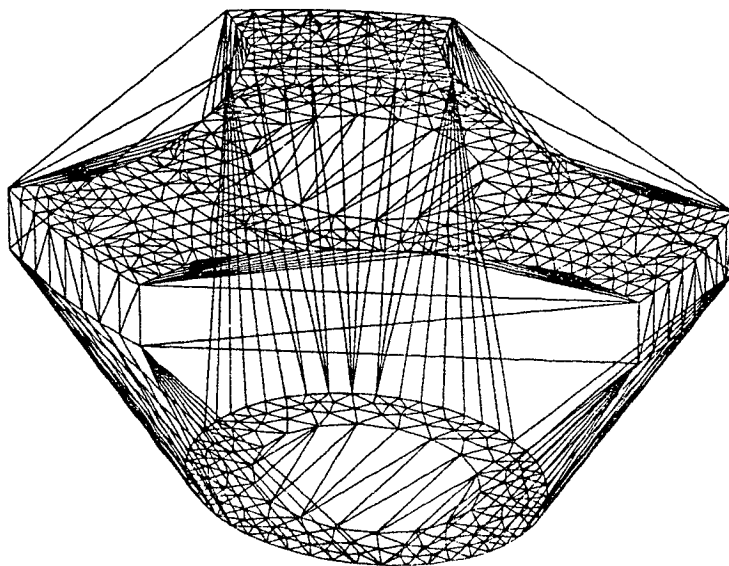


Figure 17 : arêtes de la peau

Après la phase d'élimination des éléments s'appuyant sur la boîte, nous obtenons (voir figure 17) le maillage de l'enveloppe du nuage qui se compose de 6334 tétraèdres.

### 7.3. Applications

Parmi les différentes applications de ce mailleur "de points" nous pouvons mentionner :

- I) le maillage d'un polyèdre convexe (et par conséquent le maillage de l'enveloppe convexe d'un objet quelconque)
- II) le calcul du volume d'un polyèdre convexe
- III) le maillage d'un objet quelconque ou de son "extérieur" afin de résoudre, par des méthodes d'éléments finis, un problème physique donné.
- IV) le calcul du volume d'un polyèdre quelconque.

De fait, ce travail a été développé, dans la perspective de réaliser un mailleur automatique en tétraèdres de tout objet tridimensionnel (ou de son extérieur) décrit par la donnée d'une triangulation de sa surface.

La méthode de maillage correspondante inclut donc naturellement le travail présenté dans ce papier de la manière suivante :

- i) phase préparatoire : extraire du maillage de la surface du domaine le nuage de points correspondant,
- ii) appliquer la méthode proposée
- iii) sans éliminer la boîte (phase 6) poursuivre le processus, ce qui se fait par élimination des éléments extérieurs à l'objet après forçage et reconnaissance de sa frontière [GHS<sub>1</sub>].
- iv) créer des points internes à l'objet et utiliser le même processus d'actualisation d'une triangulation existante due à l'insertion d'un point interne de manière à construire des éléments de taille et de forme adéquate [Cia] pour la méthode de volumes finis ou d'éléments finis qui sera appliquée sur le maillage résultant [GHS<sub>2</sub>] [Per].

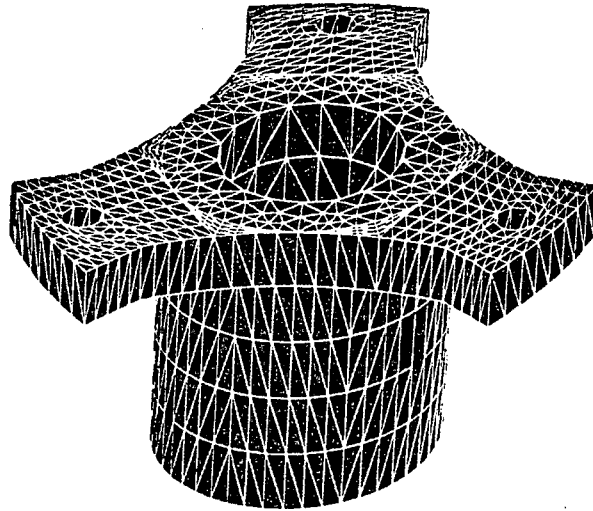


Figure 18

La figure 18 montre le maillage final obtenu par application du mailleur  $[GHS_2]$  qui utilise comme maillage initial la méthode développée dans ce papier. Cette triangulation comprend 4468 tétraèdres et 1406 points.

#### 7.4. Conclusions

Le mailleur "de points" décrit ici a l'ambition de résoudre de façon fiable et rapide les problèmes posés. La fiabilité est due au calcul exact de déterminants du type  $\det(K)$  (où  $K$  est un simplexe) sur lequel repose la méthodologie introduite. La rapidité est claire dès qu'il n'existe pas trop de points coplanaires ou cosphériques et reste acquise quand cette situation ne se présente pas trop fréquemment.

Indépendamment de ce critère de vitesse la méthode a été testée dans de nombreux cas (en particulier sur des exemples de complexités intéressantes, venant d'un système de CAO, qui ont tous été traités avec succès) et n'a jamais été prise en défaut.

Fort de ces résultats positifs ce mailleur a été intégré dans un programme de maillage automatique de domaines tridimensionnels de forme quelconque dont une maquette, en cours de test, (la figure 18 montre un résultat obtenu par ce mailleur) est présentée dans l'article [GHS<sub>2</sub>].

Bibliographie

- [Ber] M. BERGER : "Géométrie", North Holland, Paris 1977.
- [Boi] J.N. BOISSONNAT : "Geometric structures for 3-dimensional shape representation", ACM Transactions on Graphics 3, n°4, 1984.
- [Cav] J.C. CAVENDISH : "Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method", Int. J. Num. Meth. Engng 8, 1974.
- [Cia] P.G. CIARLET : "The finite element method for elliptic problems", North Holland, 1977.
- [Cox] H.S.M. COXETER, L. FEW, C.A. ROGERS : "Covering space with equal spheres" Mathematika 6, 1959.
- [Geo] P.L. GEORGE : "Modulef : generation automatique de maillages", 2nd édition, INRIA 1988.
- [GHS<sub>1</sub>] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL : "Automatic mesh generator with specified boundary", submitted in Computer Methods in applied mechanics and Engineering, 1989.
- [GHS<sub>2</sub>] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL : "Full automatic mesh generator for 3D domains of any shape", to appear.
- [Her] F. HERMELINE : "Une méthode automatique de maillage en dimension n", Thèse, Paris VI, 1980
- [Her] F. HERMELINE : "Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N" RAIRO, Numerical Analysis vol 16, n°3, 1982.
- [Mac] Macsyma (précision infinie)
- [Mod] MODULEF et All : "Une bibliothèque modulaire d'éléments finis", INRIA, 1985.
- [Per] A. PERRONNET : "Tétraédrisation d'un objet multimatériaux ou de l'extérieur d'un objet", Paris VI, LAN 189, 1988.
- [Pre] I. SHAMOS, F. PREPARATA : "Computational geometry", Yale University, 1978.

