



# Calcul de geodesiques par une methode de projection

Ch. Duflos, P. Meheut, J.Ch. Weill

## ► To cite this version:

Ch. Duflos, P. Meheut, J.Ch. Weill. Calcul de geodesiques par une methode de projection. RR-0907, INRIA. 1988. inria-00075649

**HAL Id: inria-00075649**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075649>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

UNITE DE RECHERCHE  
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tel (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 907

### CALCUL DE GEODESIQUES PAR UNE METHODE DE PROJECTION

*Programme 7*

**Christine DUFLOS  
Pascal MEHEUT  
Jean-Christophe WEILL**

Octobre 1988



★ R R . 0 9 0 7 ★

# Calcul de géodésiques par une méthode de projection

*Christine Duflos, Pascal Méheut, Jean-Christophe Weill  
(ENS Cachan, 61 av du Pdt Wilson 94230 Cachan)*

## Résumé :

*Une méthode de projection est introduite pour le calcul de géodésiques sur une variété donnée et appliquée au cas du tore. La motivation de cette étude est l'introduction récente par Y. Brenier d'une méthode similaire pour le calcul des écoulements de fluides parfaits incompressibles.*

## A projection method to compute geodesics

## Abstract :

*A projection method is introduced to compute geodesics on a given manifold and applied to the particular case of the torus. This study is motivated by the recent introduction by Y. Brenier of a related scheme for the computation of inviscid incompressible flows.*

## Sommaire

### Introduction

#### I Présentation d'une méthode de différences finies décentrée d'ordre 2 pour résoudre $X'' = -AX$ .

1. Calcul des différences finies à gauche pour  $x''$  au second ordre.
2. Consistance de la méthode.
3. Stabilité.

#### II Calcul de géodésiques par une méthode de projection d'ordre 2.

1. Présentation du problème.
2. Equivalence du problème avec la recherche de géodésiques de  $S$ .
3. Résolution numérique du problème.
  - a) Schéma de projection
  - b) Consistance de la méthode.
  - c) Démarrage de la méthode.
    - 1) Calcul de  $X_1$
    - 2) Calcul de  $X_2$

#### III Calcul des géodésiques du tore.

1. Equations du tore.
2. Equations différentielles des géodésiques.
3. Calculs nécessaires à la mise en oeuvre du schéma de projection décrit en II.3.
  - a) Calcul de  $\lambda(t)$
  - b) Projection sur le tore :  $\Pi_{\perp}$
  - c) Résultats sur les géodésiques
4. Résultats numériques sur les géodésiques du tore.
  - a) Le grand cercle.
  - b) Comparaison

### Conclusion

### Bibliographie

## Introduction.

Ce rapport est le résultat d'une recherche menée à l'INRIA au printemps 1988 sous la direction de Y. Brenier pour calculer les géodésiques sur une variété donnée. L'objectif ultime de ce type de méthode est la résolution des équations des fluides parfaits incompressibles. Il est connu, en effet, au moins depuis Arnold, que ce problème est équivalent à la recherche des courbes géodésiques sur la variété (de dimension infinie) des difféomorphismes conservant les volumes, pour la métrique associée à l'énergie cinétique (ou plus généralement à l'action) [Arnold]. Cette approche des fluides parfaits a été utilisée dans [Brenier] pour définir une méthode numérique ayant les deux aspects suivants :

- i) Un schéma semi-discret en temps pour le calcul des géodésiques sur la variété des difféomorphismes conservant les volumes.
- ii) Une discrétisation de cette variété à l'aide de matrices de permutations.

Seul le premier aspect est ici considéré. Le schéma semi-discret s'applique à n'importe quelle variété  $S$ . Connaissant les positions successives d'une particule se déplaçant sur  $S$  suivant une géodésique, à savoir  $X_0, X_1, \dots, X_n$ , on extrapole les deux derniers points pour définir  $\tilde{X}_{n+1} = 2 X_n - X_{n-1}$ . Ce nouveau point se retrouve a priori hors de la variété  $S$ . On effectue ensuite la projection orthogonale de  $\tilde{X}_{n+1}$  sur  $S$  pour obtenir la nouvelle position  $X_{n+1}$ .

Dans la mesure où la métrique sur  $S$  est induite par la norme hilbertienne de l'espace ambiant, cette méthode numérique "de projection" est consistante à l'ordre un.

L'objectif du présent travail est :

- 1) de définir une méthode du même type, mais d'ordre deux;
- 2) de l'appliquer au calcul des géodésiques sur une variété simple : le tore en dimension trois ("chambre à air").

Dans la première partie, on définit un schéma stable d'ordre deux pour l'équation modèle  $X'' = -A X$  (où  $A$  est positif); ce schéma a la propriété d'être complètement décentré à gauche.

Dans la seconde partie, à partir du schéma décentré, on définit une méthode de projection pour le calcul des géodésiques et on vérifie sa consistance à l'ordre deux.

Enfin dans la troisième partie, on considère la cas du tore et on effectue des comparaisons avec des méthodes plus classiques (en particulier le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 appliqué aux équations explicites des géodésiques que l'on connaît dans le cas du tore sous une forme simple), ainsi qu'avec la méthode de projection d'ordre un.

**I Présentation d'une méthode de différences finies décentrée d'ordre 2 pour résoudre  $X'' = -AX$ , (où A est positive)**

**1. Calcul des différences finies à gauche pour  $x''$  au second ordre.**

Soit  $x(t)$  une fonction au moins  $C^3$ ,  $t_0$  un réel,  $\Delta t$  un pas.

On suppose connues les valeurs  $x_n = x(t_0 + n \Delta t)$ .

On se propose de déterminer la valeur de la dérivée seconde en  $t_0 + (n+1) \Delta t$ , c'est à dire  $x''_{n+1}$  au second ordre près en fonction de  $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ .

Le développement en série de Taylor à l'ordre 2 donne

$$\begin{aligned} x_n &= x(t_0 + (n) \Delta t) = x(t_0 + (n+1) \Delta t - \Delta t) \\ &= x_{n+1} - \Delta t (x_{n+1})' + \frac{\Delta t^2}{2} (x_{n+1})'' - \frac{\Delta t^3}{6} (x_{n+1})''' + O(\Delta t^4) \end{aligned}$$

$$x_{n-1} = x_{n+1} - 2 \Delta t (x_{n+1})' + 2 \Delta t^2 (x_{n+1})'' - \frac{8}{6} \Delta t^3 (x_{n+1})''' + O(\Delta t^4)$$

$$x_{n-2} = x_{n+1} - 3 \Delta t (x_{n+1})' + \frac{9}{2} \Delta t^2 (x_{n+1})'' - \frac{27}{6} \Delta t^3 (x_{n+1})''' + O(\Delta t^4)$$

On recherche  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tels que

$$\alpha x_{n-2} + \beta x_{n-1} + \gamma x_n + \delta x_{n+1} = \Delta t^2 (x_{n+1})'' + O(\Delta t^4)$$

On obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 9\alpha + 4\beta + \gamma = 2 \\ 27\alpha + 8\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

La solution est unique et vaut : ( $\alpha = -1, \beta = 4, \gamma = -5, \delta = 2$ )

Nous obtenons donc

$$\frac{-x_{n-2} + 4x_{n-1} - 5x_n + 2x_{n+1}}{\Delta t^2} = (x_{n+1})'' + O(\Delta t^2)$$

D'où l'idée d'une méthode pour résoudre numériquement les équations différentielles du type  $x'' = -A x$  ( $A$  positive)

Connaissant  $x_0, x_1, x_2$  on résoud alors

$$x''_{n+1} = -A x_{n+1} = \frac{-x_{n-2} + 4x_{n-1} - 5x_n + 2x_{n+1}}{\Delta t^2}$$

ce qui donne des solutions à l'ordre 2 près

## 2. Consistance de la méthode.

Prenons  $y$  une fonction vérifiant  $\forall n, y(n \Delta t) = x_n$ .

On a donc :

$$\frac{-y((n-2) \Delta t) + 4 y((n-1) \Delta t) - 5 y(n \Delta t) + 2 y((n+1) \Delta t)}{\Delta t^2} = -A y((n+1) \Delta t)$$

d'où

$$y''((n+1) \Delta t) + O(\Delta t^2) = -A y((n+1) \Delta t) \text{ d'après 1.}$$

d'où

$$y'' + A y = O(\Delta t^2)$$

La méthode est donc consistante car  $y$  vérifie  $y'' + A y = 0$  à l'ordre 2.

## 3. Stabilité.

On a

$$-x_{n-2} + 4 x_{n-1} - 5 x_n + 2 x_{n+1} = -a \Delta t^2 x_{n+1} \text{ où } a > 0$$

On sait alors que la méthode est stable si les racines du polynôme

$$-1 + 4 Z - 5 Z^2 + 2 Z^3 = -a \Delta t^2 Z^3$$

sont de modules strictement inférieurs à 1 si  $a > 0$ .

On pose  $\alpha = a \Delta t^2 \geq 0$

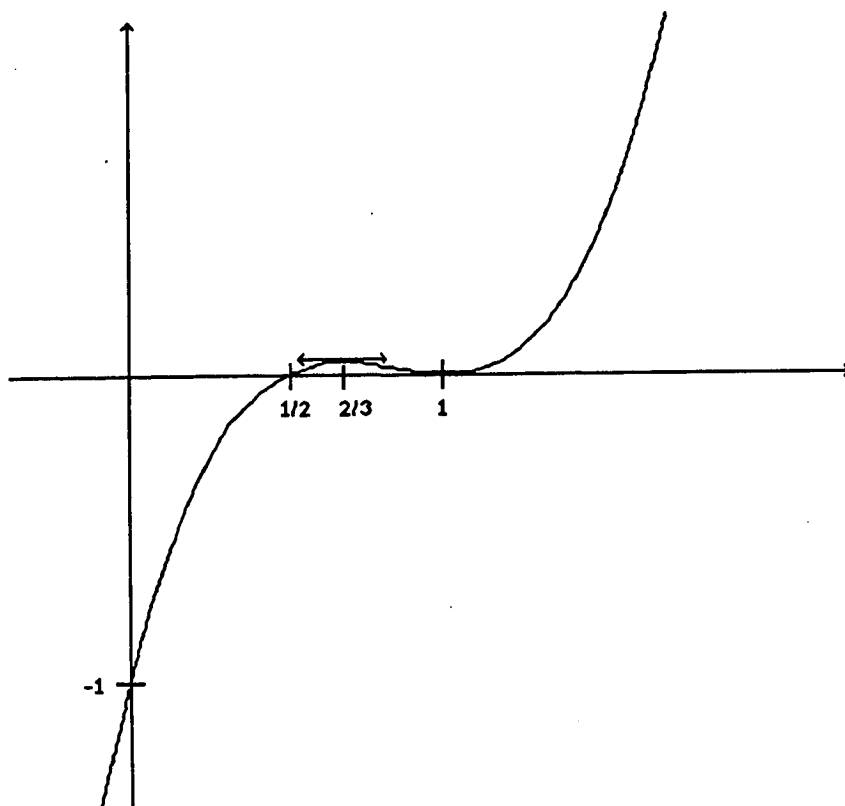
Etudier la stabilité revient à étudier le module des racines du polynôme

$$P_\alpha(Z) = -1 + 4 Z - 5 Z^2 + 2 Z^3 + \alpha Z^3 = (Z - 1)^2 (2 Z - 1) + \alpha Z^3$$

Etudions rapidement  $P_0(Z) = (Z - 1)^2 (2 Z - 1)$

$$P'_0(Z) = (Z - 1) (4 Z - 2 + 2 Z - 2) = (Z - 1) (6 Z - 4)$$

Le graphe de  $P_0$  est le suivant :



Revenons à l'étude de  $P_\alpha$ . On a :

$$P_\alpha(Z) = P_0(Z) + \alpha Z^3 \quad \alpha > 0$$

On distingue 3 cas

-  $Z \leq 0$

$$\alpha Z^3 \leq 0 \text{ donc } P_\alpha(Z) \leq P_0(Z) < 0$$

-  $0 \leq Z \leq \frac{1}{2}$

$$P_\alpha(Z) = P_0(Z) + \alpha Z^3 \quad \text{or } P_0(Z) \text{ et } \alpha Z^3 \text{ sont croissantes sur } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

donc  $P_\alpha(Z)$  est croissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$P_\alpha(0) = -1$$

$$P_\alpha\left(\frac{1}{2}\right) > P_0\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$$

donc  $\exists! Z_\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  tel que  $P_\alpha(Z_\alpha) = 0$

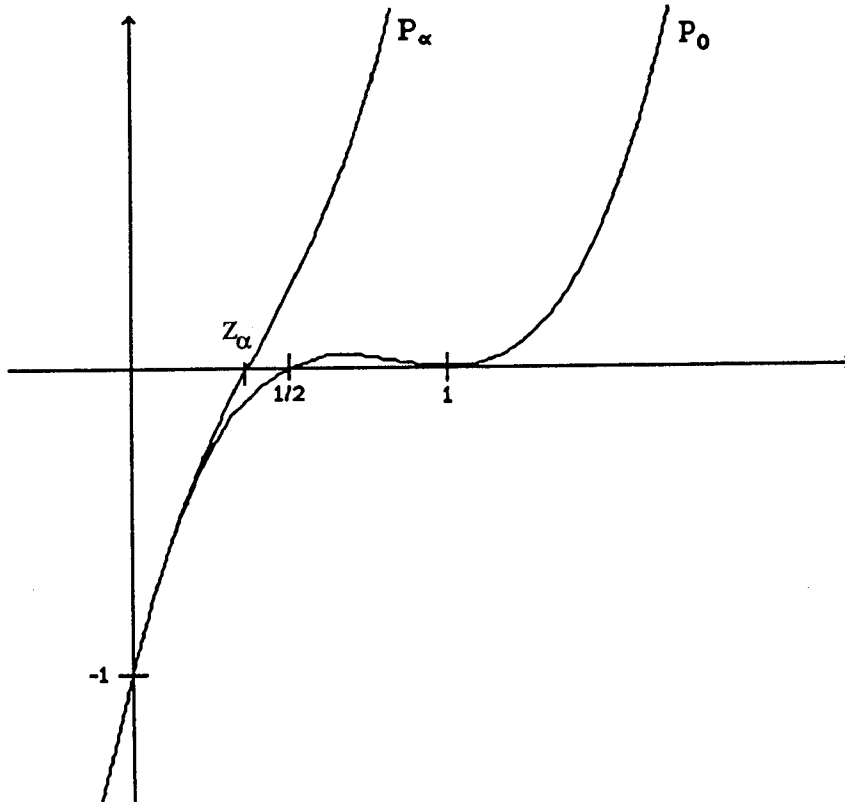
-  $Z \geq \frac{1}{2}$

$$P_0(Z) \geq 0 \text{ et } \alpha Z^3 > 0 \Rightarrow P_\alpha(Z) > 0$$



Donc  $P_\alpha(Z)$  possède une unique racine réelle  $Z_\alpha$  comprise entre 0 et  $\frac{1}{2}$

Le graphe de  $P_\alpha(Z)$  a donc l'allure suivante :



Ainsi pour  $\alpha > 0$ ,  $P_\alpha$  possède une unique racine réelle de module  $\leq \frac{1}{2}$

Intéressons nous maintenant aux racines complexes

$P_\alpha$  est à coefficients réels donc ses racines complexes sont conjuguées.

On les note  $u$  et  $\bar{u}$ .

Les relations entre coefficients de  $P_\alpha$  et racines donnent :

$$Z_\alpha \text{ u } \bar{u} = \frac{-\text{terme constant}}{\text{coefficient en } x^3} = \frac{-(-1)}{\alpha + 2} = \frac{1}{\alpha + 2}$$

$$\text{d'où } Z_\alpha |u|^2 = \frac{1}{\alpha + 2}$$

$$\text{donc } Z_\alpha = \frac{1}{(\alpha + 2) |u|^2}$$

On a  $P_\alpha(Z_\alpha) = 0$ ; remplaçons  $Z_\alpha$  par  $\frac{1}{(\alpha + 2) |u|^2}$  alors on obtient

$$(2 + \alpha)^2 (|u|^2)^3 - 4(2 + \alpha) (|u|^2)^2 + 5 |u|^2 - 1 = 0$$

Ainsi  $|u|^2$  est une racine réelle strictement positive du polynôme

$$F_\alpha(x) = (2 + \alpha)^2 x^3 - 4(2 + \alpha) x^2 + 5x - 1$$

On étudie donc  $F_\alpha$  pour avoir le module de ses racines.

$$\text{On a : } F_\alpha(x) = (x - 1)(2x - 1)^2 + \alpha(\alpha + 4)x^3 - 4\alpha x^2$$

$$\text{Posons : } G_\alpha(x) = \alpha(\alpha + 4)x^3 - 4\alpha x^2$$

$$\begin{aligned} \text{On a } G'_\alpha(x) &= 3\alpha(\alpha + 4)x^2 - 8\alpha x \\ &= x(3\alpha(\alpha + 4)x - 8\alpha) \end{aligned}$$

d'où le tableau de variation de  $G_\alpha$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3(\alpha + 4)}$	$\frac{4}{\alpha + 4}$	$+\infty$
$G'_\alpha(x)$	+	-	+	+	
$G_\alpha(x)$	-	0	-	0	+

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{4}{\alpha + 4}$	1	$+\infty$
$G_\alpha(x)$	-	0	+	+
$(x-1)(2x-1)^2$	-	-	0	+
$F_\alpha(x)$	-			+

Donc les racines réelles du polynôme  $F_\alpha$  sont dans  $\left[\frac{4}{(\alpha + 4)}, 1\right[$

Ainsi  $|u|^2 < 1$ ,  $|u|$  étant le module des racines complexes de  $P_\alpha$ .

Ainsi toutes les racines de  $P_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) sont de modules inférieurs à 1.

La méthode proposée est donc stable

## II Calcul de géodésiques par une méthode de projection d'ordre 2.

### 1. Présentation du problème.

Soit  $S$  une variété définie par  $S = \{ X \in \mathbb{R}^d / H(X) = 0 \}$  où  $H$  est une application donnée régulière de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{d'}$ ,  $d' < d$  telle que  $DH(X)$  soit en tout point de  $S$  une matrice rectangulaire de rang  $d'$ .  
On recherche la trajectoire d'un point matériel assujetti à se déplacer sur la surface  $S$  en étant soumis à aucune force extérieure.

Soit  $t \rightarrow X(t)$  la trajectoire de ce point. On a  $\forall t, H(X(t)) = 0$ .

Le principe de moindre action nous dit donc que  $X(t)$  minimise localement l'énergie cinétique, c'est à dire :

$\forall t_0, t_1$  suffisamment proches on a :

Pout toute courbe  $Y$  vérifiant  $H(Y) = 0$ ,  $Y(t_0) = X(t_0)$  et  $Y(t_1) = X(t_1)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{X}\|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{Y}\|^2 dt$$

Posons alors  $Y(t) = X(t) + \delta X(t)$ .

Faisons un développement limité de  $H(Y) = 0$  :

$$H(X(t) + \delta X(t)) = H(X) + \text{Grad } H(X) \cdot \delta X(t) + O(\|\delta X(t)\|^2)$$

or  $H(X) = 0$

donc  $\forall t \in [t_0, t_1]$ ,  $\forall \delta X$  on a  $\text{Grad } H(X(t)) \cdot \delta X(t) = 0$  à l'ordre 1. (1)

On a par hypothèse :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{Y}(t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{X}(t) + \delta \dot{X}(t)\|^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{X}(t)\|^2 dt, \forall \delta X$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{X}(t) + \delta \dot{X}(t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{X}(t)\|^2 dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{X} \cdot \dot{X} dt \text{ au premier ordre en } \delta X$$

$$\text{d'où } \forall \delta X, \int_{t_0}^{t_1} 2 \delta \dot{X} \cdot \dot{X} dt \geq 0$$

et si l'on change  $\delta X$  en  $-\delta X$  alors  $\delta \dot{X}$  est changé en  $-\delta \dot{X}$ .

on en tire la relation  $\int_{t_0}^{t_1} 2 \delta \dot{X} \cdot \dot{X} dt = 0$  au premier ordre en  $\delta X$ .

D'où, en intégrant par parties

$$\left[ \delta X \cdot \dot{X} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta X \cdot \ddot{X} dt = 0 \text{ au premier ordre en } \delta X.$$

$$\text{Or } \delta X(t_0) = \delta X(t_1) = 0$$

Donc on a  $\int_{t_0}^{t_1} 2 \delta X \cdot \ddot{X} dt = 0 \quad \forall \delta X$  au premier ordre en  $\delta X$ .

D'où  $\forall t \in [t_0, t_1], \forall \delta X, \delta X(t) \cdot \ddot{X} = 0$  (2) au premier ordre en  $\delta X$ .

Nous obtenons deux relations (1) et (2)

$$\forall t \in [t_0, t_1], \forall \delta X, \left. \begin{array}{l} \delta X(t) \cdot \ddot{X} = 0 \\ \text{Grad } H(X(t)) \cdot \delta X(t) = 0 \end{array} \right\} \text{ au premier ordre en } \delta X.$$

$$\text{Ainsi } \forall t, \ddot{X}(t) \in {}^{\perp}\text{Ker}(\text{Grad } H(X(t))) = \text{Im}[\text{Grad } H(X(t))]^{\perp}$$

On en déduit que  $\exists \lambda(t) /$

$$\ddot{X}(t) = \lambda(t) \text{Grad } H(X(t)) \quad (\text{A}) \text{ où } \lambda(t) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^{d'}$$

Nous avons donc que la trajectoire décrite par le point soumis à la moindre action vérifie (1) et  $H(X) = 0$ .

## 2. Equivalence du problème avec la recherche de géodésiques sur une surface de $\mathbb{R}^3$ .

Définition : Une géodésique  $\Gamma$  d'une surface (S) de  $\mathbb{R}^3$  est une courbe tracée sur S telle qu'en tout point son plan osculateur contienne la normale à la courbe.

Ce qui se traduit par : si  $\Gamma : t \rightarrow X(t)$  alors on a

$$I : \begin{cases} (1) H(X(t)) = 0 \\ (2) |\dot{X}, \ddot{X}, \vec{\nabla} H(X(t))| = 0 \end{cases}$$

pour tout paramétrage  $t \rightarrow X(t)$  admissible.

a) Soit une courbe vérifiant le système suivant :

$$II : \begin{cases} H(X(t)) = 0 \\ \ddot{X} = \lambda(t) \vec{\nabla} H(X(t)) \text{ où } \lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que  $II \Rightarrow I$ .

Nous pouvons encore déduire de II :

en dérivant  $H(X(t)) = 0$  on obtient  $\dot{X} \cdot \text{Grad } H(X(t)) = 0$

d'où comme  $\ddot{X}(t) = \lambda(t) \text{Grad } H(X(t))$ ,  $\dot{X} \cdot \ddot{X} = 0$  donc  $\|\dot{X}\|^2 = \text{constante} > 0$

Donc les courbes vérifiant (II) sont des géodésiques parcourues de telle façon que

$$\|\dot{X}\|^2 = \text{constante.}$$

b) Soit maintenant une géodésique  $\Gamma$  et un paramétrage de  $\Gamma$  tel que  $\|\dot{X}(t)\|^2 = k > 0$  (par exemple  $t =$  abscisse curviligne de la courbe)

de  $H(X(t)) = 0$  on tire en dérivant que  $\dot{X}(t) \cdot \text{grad } H(X(t)) = 0$

de  $\|\dot{X}(t)\|^2 = k$  on tire  $\dot{X}(t) \cdot \ddot{X}(t) = 0$

Le paramétrage étant admissible on a  $\dot{X} \neq 0 \Rightarrow \ddot{X}$  et  $\text{Grad } H(X(t))$  sont perpendiculaires à  $\dot{X}$ , et comme  $\dot{X}$ ,  $\ddot{X}$ ,  $\text{Grad } H(X(t))$  sont dans un même plan, on a  $\ddot{X}$  et  $\text{Grad } H(X(t))$  colinéaires.

Donc  $\Gamma$  et son paramétrage  $t$  vérifient (II).

On a donc montré que le problème physique revient à chercher les géodésiques avec un paramétrage tels que  $\|\dot{X}(t)\|^2 = k > 0$ .

### 3. Résolution numérique du problème.

#### a) Schéma de projection

Soit  $S$  une surface telle que tout point de l'espace possède une projection orthogonale unique sur  $S$ .

On adapte le schéma de I à l'équation différentielle  $\ddot{X} = \lambda(t) \vec{\nabla} H(X)$  de la manière suivante :

Connaissant  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$  où  $X_n \approx X(n \Delta t)$ , on calcule

$$\tilde{X}_{n+1} / \ddot{X}((n+1) \Delta t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \tilde{X}_{n+1} - X_{n-2} + 4 X_{n-1} - 5 X_n = 0 \quad (\text{cela revient à poser } A = 0 \text{ dans le schéma du I})$$

puis  $X_{n+1} = \Pi_{\perp}(\tilde{X}_{n+1})$  où  $\Pi_{\perp}$  est la projection orthogonale de  $X$  sur la variété  $S$ .

b) Consistance de la méthode.

Soient les points  $X_0, \dots, X_n, X_p$  calculés à partir du schéma ci dessus avec le pas  $\Delta t$ .

Soit  $Y$  une fonction  $C^3$  telle que  $Y(n \Delta t) = X_n$ , on a alors :

$$\tilde{X}_{n+1} = \frac{1}{2} (Y((n-2)\Delta t) - 4 Y((n-1)\Delta t) + 5 Y(n\Delta t)) \text{ et } X_{n+1} = \Pi_{\perp}(\tilde{X}_{n+1})$$

d'où

$$\exists \mu_{n+1} \text{ tel que } X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1} = \mu_{n+1} \vec{\nabla} H(X_{n+1})$$

d'où

$$Y((n+1)\Delta t) = \mu_{n+1} \vec{\nabla} Y((n+1)\Delta t) + \frac{1}{2} (Y((n-2)\Delta t) - 4 Y((n-1)\Delta t) + 5 Y(n\Delta t))$$

d'où

$$-Y((n-2)\Delta t) + 4 Y((n-1)\Delta t) - 5 Y(n\Delta t) + 2 Y((n+1)\Delta t) = 2 \mu_{n+1} \vec{\nabla} Y((n+1)\Delta t)$$

or d'après le I, on a:

$$\frac{-Y((n-2)\Delta t) + 4 Y((n-1)\Delta t) - 5 Y(n\Delta t) + 2 Y((n+1)\Delta t)}{\Delta t^2} = Y''((n+1)\Delta t) + O(\Delta t^2)$$

d'où

$$Y''((n+1)\Delta t) + o(\Delta t^2) = \frac{2 \mu_{n+1}}{\Delta t^2} \vec{\nabla} Y((n+1)\Delta t)$$

d'où  $\exists \lambda_{n+1} = \frac{2 \mu_{n+1}}{\Delta t^2}$  tel que

$$Y''((n+1)\Delta t) = \lambda_{n+1} \vec{\nabla} Y((n+1)\Delta t) + o(\Delta t^2)$$

Le schéma de projection est donc consistant pour le calcul des géodésiques.

c) Démarrage de la méthode.

On suppose connus  $X_0$  et  $\dot{X}_0$ . Sachant que pour appliquer le schéma, il faut connaître  $X_1$  et  $X_2$ , on cherche à en obtenir une approximation au même ordre.

1) Calcul de  $X_1$

On veut appliquer le schéma de projection donc on calcule  $\ddot{X}_1$  au second ordre à partir de  $X_0$  et  $\dot{X}_0$ .

En développant en série de Taylor à l'ordre 2, on a :

$$X_1 = X_0 + \Delta t \dot{X}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda(0) \text{Grad } H(X_0) + O(\Delta t^3)$$

$$H(X_1) = 0$$

$$\text{d'où } H(X_0 + \Delta t \dot{X}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda(0) \text{Grad } H(X_0) + O(\Delta t^3)) = 0$$

d'où, en faisant un développement limité à l'ordre 2

$$\text{On pose } V = \Delta t \dot{X}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda(0) \vec{\nabla} H(X_0) + O(\Delta t^3)$$

$$H(X_0) + \vec{\nabla} H(X_0) \cdot V + \frac{\nabla^2 H(X_0)}{2} (V, V) + O(\|V\|^3) = 0$$

d'où

$$H(X_0) + \vec{\nabla} H(X_0) \cdot (\Delta t \dot{X}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda(0) \vec{\nabla} H(X_0)) + \frac{(\Delta t \dot{X}_0)^t}{2} \nabla^2 H(X_0) (\Delta t \dot{X}_0) = o(\Delta t^3)$$

$$\text{or } H(X_0) = 0 \text{ et en dérivant } \vec{\nabla} H(X_0) \cdot \dot{X}_0 = 0$$

d'où

$$\frac{\Delta t^2}{2} \lambda(0) \|\vec{\nabla} H(X_0)\|^2 + \frac{\Delta t^2}{2} (\dot{X}_0)^t \nabla^2 H(X_0) (\dot{X}_0) + O(\Delta t^3) = 0$$

$$\text{d'où } \lambda(0) = - \left( \frac{(\dot{X}_0)^t \nabla^2 H(X_0) (\dot{X}_0)}{\|\vec{\nabla} H(X_0)\|^2} \right)$$



$$\text{d'où } \ddot{X}_0 = - \frac{(\dot{X}_0)^t \nabla^2 H(X_0) (\dot{X}_0)}{\|\nabla H(X_0)\|^2} \vec{\nabla} H(X_0)$$

On connaît donc  $X_0$ ,  $\dot{X}_0$  et  $\ddot{X}_0$

d'où, en effectuant des développements en série de Taylor :

$$X_0 = X_1 - \Delta t \dot{X}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_1 - \frac{\Delta t^3}{6} X_1^{(3)} + O(\Delta t^4)$$

$$\dot{X}_0 = \dot{X}_1 - \Delta t \ddot{X}_1 + \frac{\Delta t^2}{2} X_1^{(3)} + O(\Delta t^3)$$

$$\ddot{X}_0 = \ddot{X}_1 - \Delta t X_1^{(3)} + O(\Delta t^2)$$

On recherche donc  $\ddot{X}_1$  en fonction de  $X_0$ ,  $\dot{X}_0$  et  $\ddot{X}_0$  et  $X_1$ , c'est à dire  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  tels que

$$\ddot{X}_1 = \frac{\alpha X_0 + \beta \Delta t \dot{X}_0 + \gamma \Delta t^2 \ddot{X}_0 + \delta X_1}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

d'où

$$\ddot{X}_1 = \frac{6 X_1 - 6 X_0 - 6 \Delta t \dot{X}_0 - 2 \Delta t^2 \ddot{X}_0}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

d'où le démarrage :

On calcule  $\tilde{X}_1$  tel que  $\ddot{X}_1 = 0$ , c'est à dire

$$\tilde{X}_1 \text{ tel que } 6 \tilde{X}_1 - 6 X_0 - 6 \Delta t \dot{X}_0 - 2 \Delta t^2 \ddot{X}_0 = 0 \text{ d'où}$$

$$\tilde{X}_1 = X_0 + \Delta t \dot{X}_0 + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{X}_0$$

$$X_1 = \Pi_1(\tilde{X}_1)$$

## 2) Calcul de $X_2$

On connaît  $X_0$ ,  $\dot{X}_0$  et  $X_1$

On recherche  $\ddot{X}_2$  en fonction de  $X_0$ ,  $\dot{X}_0$ ,  $X_1$  et  $X_2$ .

En développant en série de Taylor, on obtient

$$X_0 = X_2 - 2 \Delta t \dot{X}_2 + 2 \Delta t^2 \ddot{X}_2 - \frac{8}{6} \Delta t^3 X_2^{(3)} + O(\Delta t^4)$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_0 &= \dot{X}_2 - 2 \Delta t \ddot{X}_2 + 2 \Delta t^2 X_2^{(3)} + O(\Delta t^3) \\ X_1 &= X_2 - \Delta t \dot{X}_2 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_2 - \frac{\Delta t^3}{6} X_2^{(3)} + O(\Delta t^4)\end{aligned}$$

On recherche donc  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tels que :

$$\ddot{X}_2 = \frac{\alpha X_0 + \beta \Delta t \dot{X}_0 + \gamma X_1 + \delta X_2}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

d'où

$$\ddot{X}_2 = \frac{1}{2 \Delta t^2} [11 X_0 + 6 \Delta t \dot{X}_0 - 16 X_1 + 5 X_2] + O(\Delta t^2)$$

d'où le calcul de  $\tilde{X}_2 / \ddot{X}_2 = 0$  c'est à dire

$$\tilde{X}_2 / 5 \tilde{X}_2 = 16 X_1 - 6 \Delta t \dot{X}_0 - 11 X_0$$

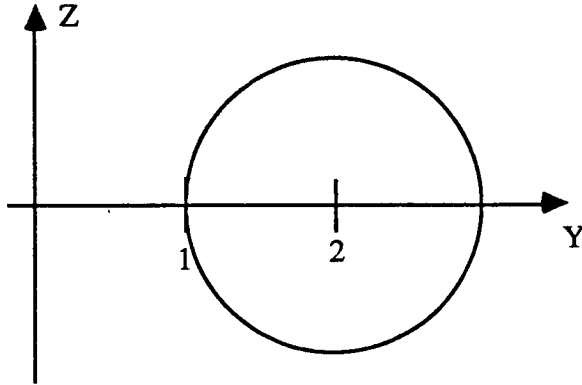
et de  $X_2 = \Pi_{\perp}(\tilde{X}_2)$

Les calculs de  $X_1$  et de  $X_2$  étant réalisés, on poursuit la méthode avec le schéma de projection décrit en a).

### III Calcul des géodésiques du tore.

#### 1. Equations du tore.

Nous considérerons le tore engendré par la rotation autour de l'axe des Z du cercle appartenant au plan Oyz, centré en (0, 1, 0) et de rayon 1.



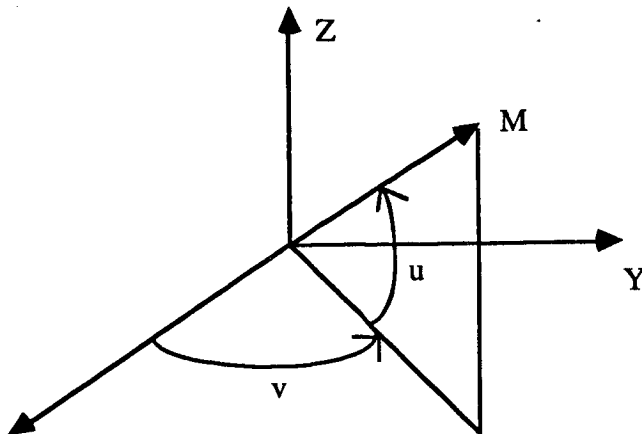
Son équation implicite est  $z^2 + \left( (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2 \right)^2 = 1$

On en déduit une équation paramétrée :

on a  $0 \leq |z| \leq 1$  donc

$$\begin{aligned} & \begin{cases} z = \sin u \\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2 = \cos u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = \sin u \\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = 2 + \cos u \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = \sin u \\ \left( \frac{x^2 + y^2}{(2 + \cos u)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} z = \sin u \\ y = (\cos u + 2) \sin v \\ x = (\cos u + 2) \cos v \end{cases} \end{aligned}$$

Les paramètres  $u$  et  $v$  étant définis comme suit :



## 2. Equations différentielles des géodésiques.

$X$  un point du tore,  $H(X) = 0$

$$X \begin{vmatrix} (\cos u + 2) \cos v \\ (\cos u + 2) \sin v \\ \sin u \end{vmatrix}$$

On recherche les géodésiques sous la forme

$$t \rightarrow X(t) = \begin{vmatrix} (\cos u(t) + 2) \cos v(t) \\ (\cos u(t) + 2) \sin v(t) \\ \sin u(t) \end{vmatrix}$$

où  $t$  est un paramétrage admissible (par exemple l'abscisse curviligne de la géodésique).

On sait que si  $X(t)$  décrit une géodésique, alors on a avec un paramétrage bien choisi

$$\ddot{X}(t) = \lambda(t) \text{Grad } H(X(t)) \text{ ce qui équivaut à } \ddot{X} \wedge \text{Grad } H(X) = 0$$

Exprimons  $\text{Grad } H(X)$  puis  $\ddot{X}$

$$\text{Grad } H(X) = K \left( \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right) \text{ (où } K \text{ constante réelle)}$$

On vérifie que

$$\text{Grad } H(X) = K \begin{vmatrix} -\cos u \cos v (\cos u + 2) \\ -\cos u \sin v (\cos u + 2) \\ -(\cos u + 2) \sin u \end{vmatrix}$$

De même le calcul montre que

$$\ddot{X} = \begin{cases} -\sin v (\cos u + 2) v'' - \cos v \sin u u'' \\ \quad - (\cos u \cos v (u'^2 + v'^2) - \cos v v'^2 + 2 \sin u \sin v u' v') \\ (\cos u + 2) \cos v v'' - \sin u \sin v u'' - \cos u \sin v (u'^2 + v'^2) \\ \quad - 2 \sin v v'^2 - 2 \cos v \sin u u' v' \\ \cos u u'' - \sin u u'^2 \end{cases}$$

Remarque : Ces 2 deux calculs ont été effectués sur IBM PC<sup>®</sup> grâce au logiciel de

calcul symbolique MUMATH<sup>®</sup>.

Rappelons que nous cherchons à expliciter :  $\ddot{X} \wedge \text{Grad } H(X) = 0$   
Ceci nous donne 3 équations mais 2 d'entre elles sont équivalentes.  
Ainsi après simplifications, nous obtenons :

$$\ddot{X} \wedge \text{Grad } H(X) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v'' - \frac{2 \sin u}{2 + \cos u} u' v' = 0 & (1) \\ u'' + \sin u (\cos u + 2) v'^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Nous allons maintenant rechercher une forme intégrale de ces équations.

Pour (1) :

multiplions (1) par  $(2 + \cos u)^2$  (qui est toujours non nul). On obtient :

$$(2 + \cos u)^2 v'' - (2 + \cos u) \sin u u' v' = 0$$

d'où, en remarquant que  $((2 + \cos u)^2)' = -2(2 + \cos u) \sin u u'$  on tire que

$$(2 + \cos u)^2 v' = k, \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

Pour (2) :

Nous allons montrer que si  $u' \neq 0$ , alors  $(2) \Leftrightarrow u'^2 + v'^2 (\cos u + 2)^2 = h$ ,  $h$  constante réelle.

$$\begin{aligned} u'^2 + v'^2 (\cos u + 2)^2 &= h \\ \Leftrightarrow 2 u' u'' + 2 v' v'' (\cos u + 2)^2 - 2 \sin u (\cos u + 2) v'^2 u' &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 u' u'' + v' (\cos u + 2)^2 \frac{2 \sin u}{2 + \cos u} u' v' - 2 \sin u (\cos u + 2) v'^2 u' &= 0 \\ &\text{(en utilisant (1) pour remplacer } v') \\ \Leftrightarrow u' (u'' + \sin u (\cos u + 2) v'^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2) \text{ si } u' \neq 0. \end{aligned}$$

Donc si  $u' \neq 0$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + \cos u)^2 v' = k \\ u'^2 + v'^2 (\cos u + 2)^2 = h > 0 \end{cases}$$

Etudions le cas où  $u' = 0$ .

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$(1) \Leftrightarrow v'' = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin u (\cos u + 2) v'^2 = 0 \Leftrightarrow \sin u v'^2 = 0 \text{ car } \forall u, (\cos u + 2) \neq 0$$

Si  $v' = 0$  alors comme  $u' = 0$ ,  $v$  et  $u$  sont des constantes et la courbe se réduit à un seul point.

Sinon on a  $\sin u = 0$  alors  $\cos u = 1$  ou  $\cos u = -1$

$$v'' = 0 \Rightarrow v = a t + b$$

$$\text{si } \cos u = 1 \text{ alors } X(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos(a t + b) \\ 3 \sin(a t + b) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ il s'agit du grand cercle du tore.}$$

$$\text{si } \cos u = -1 \text{ alors } X(t) = \begin{pmatrix} \cos(a t + b) \\ \sin(a t + b) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ il s'agit du petit cercle du tore.}$$

Donc le cas  $u' = 0$  donne deux géodésiques : le grand et le petit cercle du tore.

Revenons au cas où  $u' \neq 0$

$$\text{Nous avons } \dot{X} = \begin{pmatrix} -\sin v v' (\cos u + 2) - \sin u u' \cos v \\ \cos v v' (\cos u + 2) - \sin u u' \sin v \\ \cos u u' \end{pmatrix}$$

alors  $\|\dot{X}\|^2 = (\cos u + 2)^2 v'^2 + u'^2 = h$ , on retrouve que le paramétrage de la géodésique est tel que  $\|\vec{OM}\|^2 = \text{constante}$ , comme nous l'avons vu en II.2.

A titre indicatif, le système différentiel vérifié par les géodésiques en coordonnées cartésiennes est

$$\begin{cases} H(X) = 0 \\ x y' - x' y = k \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = h \end{cases} \quad \text{où } h \text{ et } k \text{ sont les mêmes constantes que précédemment}$$

3. Calculs nécessaires à la mise en oeuvre du schéma de projection décrit en II.3.

Remarque : pour toute la suite, on prend  $h = 1$

a)

$$\text{Grad H} \left| \begin{array}{l} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} ((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2) \\ \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} ((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2) \\ 2z \end{array} \right.$$

$$D^2H = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & 2 - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

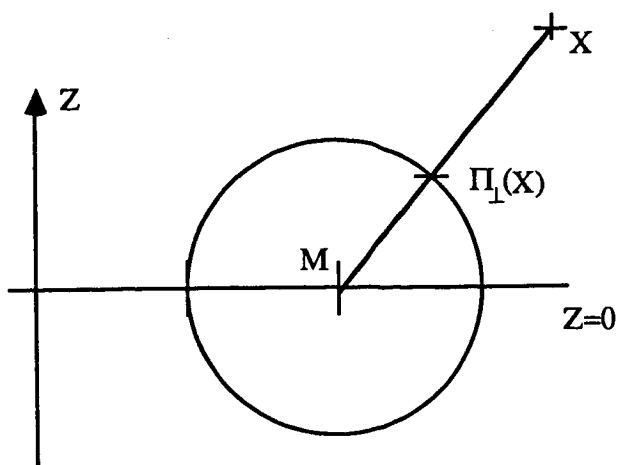
$\|\text{Grad H}\|^2 = 4$  et après calcul et simplifications, on obtient :

$$D^2H(\dot{X}, \dot{X}) = {}^t\dot{X} D^2H \dot{X} = 2 - \frac{4(yx' - xy')^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{d'où } \lambda(t) = \frac{D^2H(\dot{X}, \dot{X})}{\|\text{Grad H}\|^2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2(yx' - xy')^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

b) Projection sur ce tore :  $\Pi_{\perp}$

$$\text{Soit le point } X \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right., \text{ définissons } M \left| \begin{array}{l} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 \end{array} \right.$$



$$\text{d'où } \vec{O\Pi_{\perp}(X)} = \vec{OM} + \frac{\vec{MX}}{\|\vec{MX}\|}$$

$$\text{On a } \vec{MX} \begin{cases} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} ((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2) \\ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} ((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2) \\ z \end{cases} \quad \text{d'où } \|\vec{MX}\| = \left( z^2 + \left( (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et donc } \Pi_{\perp}(X) \begin{cases} \frac{x}{\|\vec{MX}\| (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{y}{\|\vec{MX}\| (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{z}{\|\vec{MX}\|} \end{cases}$$

ceci n'étant pas défini si  $x^2 + y^2 = 0$  car alors la projection n'est pas unique.

c) Résultats sur les géodésiques (types de géodésiques suivant  $k$ )

si  $u' \neq 0$  on a :

$$(2 + \cos u)^2 v' = k \quad (1)$$

$$u'^2 + v'^2 (\cos u + 2)^2 = 1 \quad (2)$$

On peut supposer  $k \geq 0$  (car en changeant le signe de  $k$  on ne fait que changer le sens de parcours de la géodésique)



On a alors :

$$u'^2 + \frac{k^2}{(\cos u + 2)^2} = 1 \quad (2') \quad (\text{en exprimant } v' \text{ à partir du 1 et en substituant dans (2)})$$

$$\text{donc } 1 - \frac{k^2}{(\cos u + 2)^2} = u'^2$$

$$\text{d'où } \underline{0 \leq k \leq (\cos u + 2) \leq 3} \text{ et } \underline{k \leq \inf_t (\cos u(t) + 2) = \cos u(t_0) + 2}$$

$$\text{On a } \cos u(t_0) + 2 = \inf_t (\cos u(t) + 2) \Rightarrow u'(t_0) \sin u(t_0) = 0$$

deux cas se présentent :

1. Soit  $u'(t_0) = 0$  alors (2') devient  $\frac{k^2}{(\cos u(t_0) + 2)^2} = 1$

$$\text{d'où } k = \cos u(t_0) + 2 \leq \inf_t (\cos u(t) + 2)$$

$t_0$  réalise donc bien un minimum et de plus on a que  $k = \inf_t (\cos u(t) + 2)$

$$\text{d'où } 1 \leq k \leq 3$$

2. soit  $\sin u(t_0) = 0$

Soit

a)  $\cos u(t_0) = -1$ , on a alors que  $\underline{k \leq 1}$  c'est bien un minimum.

b)  $\cos u(t_0) = 1$ , donc  $\cos u(t_0) + 2 = 3$ , cela ne peut pas être un minimum mais c'est un maximum

En résumé :

Pour  $1 \leq k \leq 3$  on a

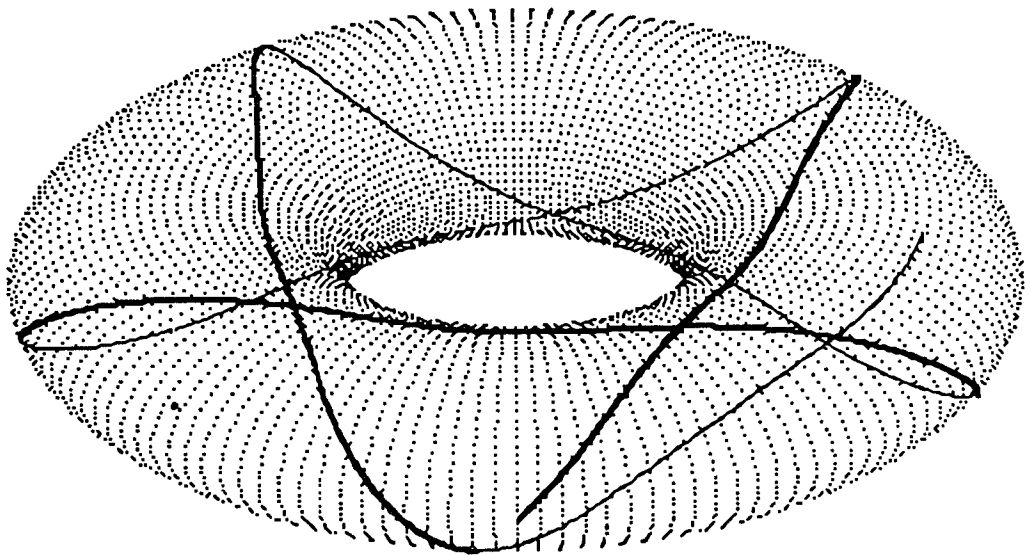
$$\begin{cases} \inf_t (\cos u + 2) = k \\ \sup_t (\cos u(t) + 2) = 3 \end{cases}$$

Or nous savons que  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \cos u + 2$

d'où  $k \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq 3$  ce qui délimite une région sur le tore.

Exemple :

(Les parties visibles sont en trait gras, les parties cachées en trait fin)



Pour  $k \leq 1$

$$\begin{aligned} u'^2 &= 1 - \frac{k^2}{(\cos u + 2)^2} \quad (1) \\ &= \left(1 - \frac{k}{(\cos u + 2)}\right) \left(1 + \frac{k}{(\cos u + 2)}\right) \end{aligned}$$

si  $k < 1$  alors

$$\forall u, \left(1 - \frac{k}{(\cos u + 2)}\right) \neq 0 \text{ et } \left(1 + \frac{k}{(\cos u + 2)}\right) > 0$$

donc  $\forall t, u'(t) \neq 0$  et comme  $u'$  continue on en déduit que  $u'$  est de signe constant.

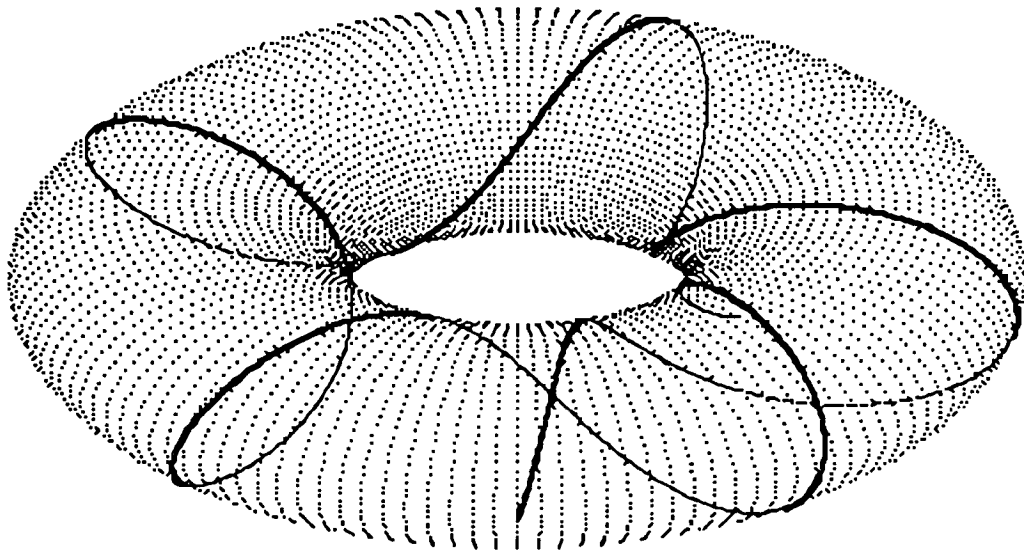
Supposons que  $u$  soit bornée.

Alors, comme  $u'$  de signe constant,  $u$  est bornée et monotone donc admet une limite lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  notée  $u_1$ .

Donc comme  $u'$  de signe constant on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u' = 0$ .

En utilisant (1), on a par continuité et passage à la limite :  $k^2 = \cos(u_1 + 2)^2$   
Or ceci est impossible car  $k < 1$  donc  $u$  est non bornée donc la géodésique s'enroule sur le tore.

Exemple :



si  $k = 1$ , alors en supposant que l'on n'est pas sur le petit cercle

si  $\cos u = -1$  alors  $u' = 0$  et d'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz et III 2) on est sur le petit cercle.

Donc  $\forall t$ , on a  $\cos u \neq -1$ .

Donc d'après (1)  $\forall t$ ,  $u' \neq 0$ .

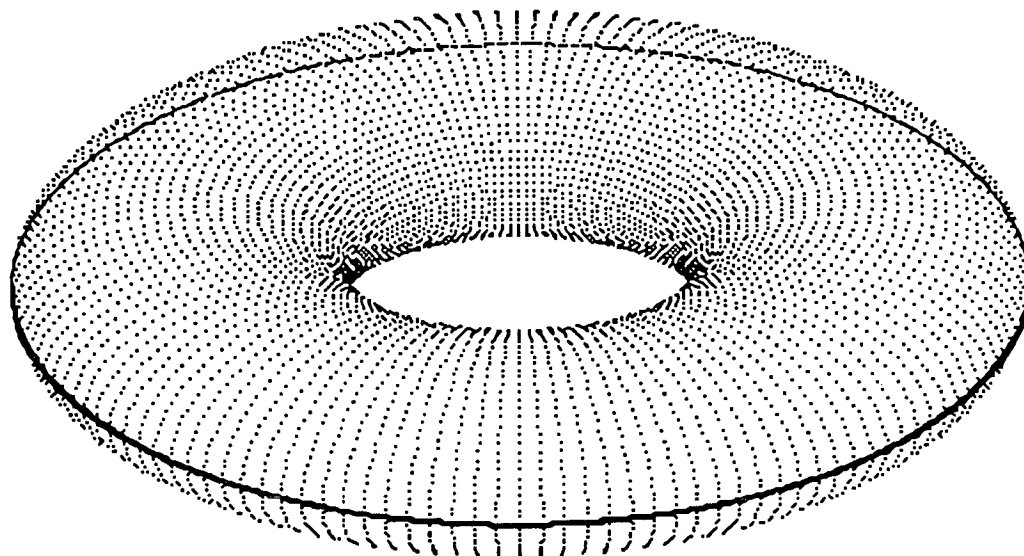
En utilisant le même raisonnement que ci avant, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u' = 0 \text{ et donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos u = -1$$

Donc la géodésique admet le petit cercle pour asymptote.

#### 4. Résultats numériques sur les géodésiques du tore.

##### a) Le grand cercle. (k=3)



L'équation de cette courbe est  $X \begin{vmatrix} 3 \cos \frac{t}{3} \\ 3 \sin \frac{t}{3} \\ 0 \end{vmatrix}$ , sa période est donc  $6\pi \approx 18,84955$

Nous allons étudier la période des courbes obtenues par notre méthode de résolution en fonction du pas de temps, en la comparant avec les résultats de la même méthode, mais à l'ordre 1 seulement.

Remarque : Tous les calculs ont été effectués avec un Macintosh<sup>®</sup>, en utilisant la librairie SANE (Standard Apple Numeric Environment) qui est conforme aux standards IEEE 754 et 854. Elle offre une précision d'environ 18 chiffres décimaux.

pas	ordre 2	ordre 1
1	18	38
0,5	18,5	28,5
0,1	18,7	20,8
0,05	18,75	19,8
0,01	18,83	19,04
0,002	18,846	18,888

On constate que la précision de la méthode à l'ordre 2 est excellente puisque la différence entre la valeur théorique et la valeur calculée est toujours de l'ordre de grandeur du pas de temps, ce qui correspond à l'incertitude sur le point à prendre pour clore une période.

A l'inverse, la même méthode au premier ordre donne des résultats médiocres car le schéma de projection entraîne une erreur systématique qui fait que les points sont de plus en plus proches.

Ainsi la période croît avec le nombre de tours pour la méthode d'ordre 1, alors qu'elle reste remarquablement stable avec la méthode d'ordre 2 comme le démontre le tableau suivant, obtenu pour  $\Delta t = 0,05$

tour	1	2	3	4	5	6
ordre 1	19,8	21,8	23,8	25,75	27,75	29,7
ordre 2	18,75	18,9	18,85	18,85	18,85	18,85

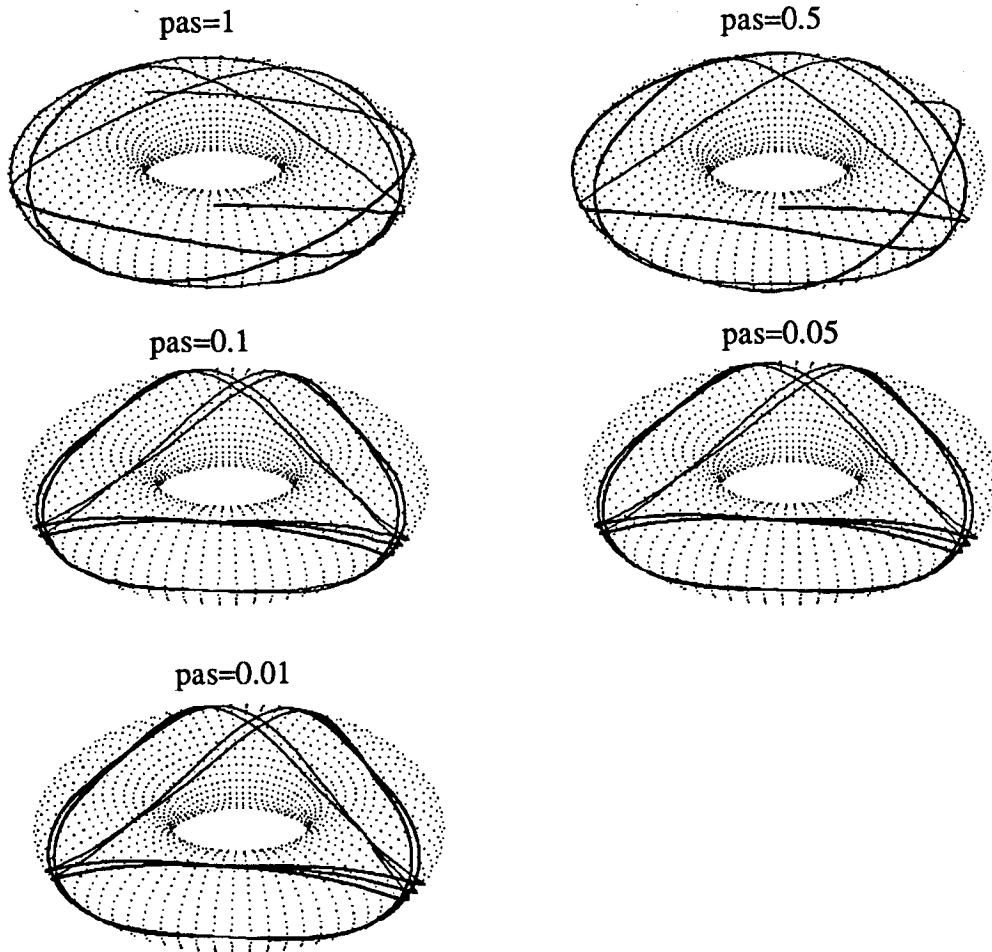
#### b) Comparaison

On va maintenant comparer cette méthode avec la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 que l'on applique à la forme intégrale des équations différentielles déterminées au III.2.

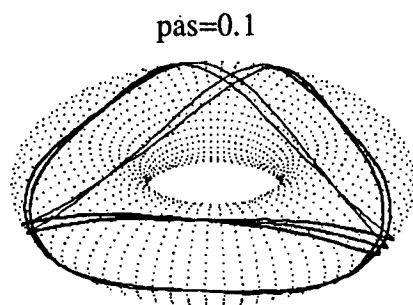
Pour cela on s'intéresse à la géodésique passant par le point  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et admettant en ce

point le vecteur dérivé  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  . ( $k=2$ )

On la trace d'abord en utilisant le schéma de projection à l'ordre 2



On trace la même courbe avec la méthode de Runge-Kutta



On constate que la méthode de Runge-Kutta (désormais noté RK4) est plus précise que le schéma de projection à pas égal mais elle est également au moins 4 fois plus lente.

En fait on constate sur cet exemple que le schéma de projection tolère mal les pas élevés.

En revanche, dès que le pas est suffisamment petit, la précision et la stabilité deviennent excellentes et on obtient des courbes identiques.

On vérifie ceci en étudiant les variations de la norme du vecteur dérivé. Théoriquement, elle est constante et vaut 1 dans nos exemples. En fait lors du tracé du grand cercle, on constate qu'elle décroît d'une valeur constante à chaque étape de la méthode. Le tableau ci dessous montre l'évolution de cette valeur avec le pas.

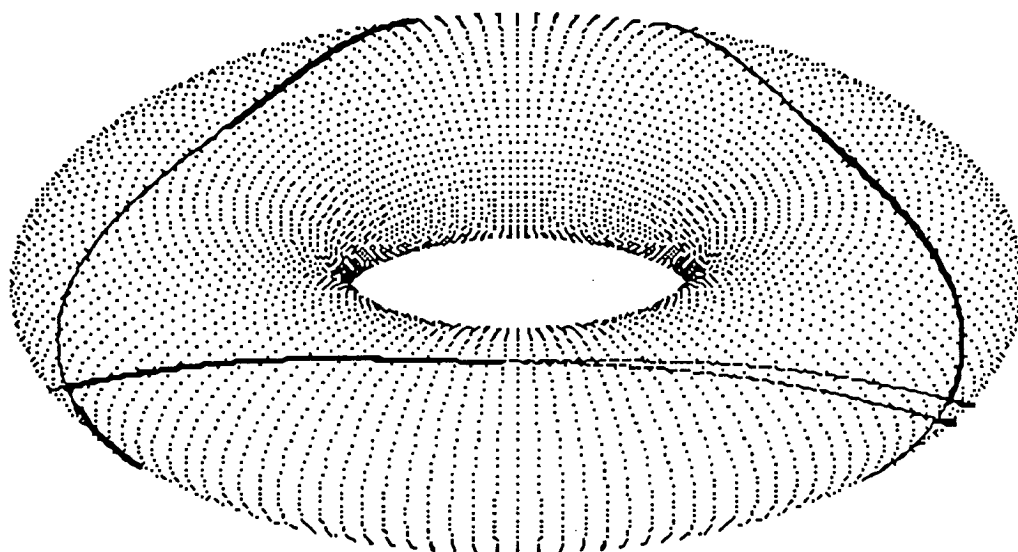
pas	1	0.1	0.01	0.01	0.001
$\Delta\ \vec{OM}'\ $	varie	$-1.2 \cdot 10^{-6}$	$-1.2 \cdot 10^{-10}$	$-1.2 \cdot 10^{-14}$	$\approx 10^{-18}$

La décroissance est rapide puisque en puissance 4<sup>ème</sup> par rapport à celle du pas. On arrive ainsi donc très vite à la limite de la précision de la machine, rejoignant en précision RK4 qui est à cette limite quelque soit le pas, mais sans que l'erreur soit systématique.

Ainsi pour un pas de 10 avec RK4,  $\Delta\|\vec{OM}'\|$  est presque toujours proche de  $10^{-20}$  mais est exceptionnellement du même ordre de grandeur que 1.

Il est à noter  $\Delta\|\vec{OM}'\|$  n'est pas ainsi stable pour toutes les géodésiques. Si son ordre de grandeur varie peu pour des pas inférieurs à 1, en revanche son signe change dans le cas de courbes moins particulières que le grand cercle.

Sur le tore suivant, on n'a pas tracé les parties cachées, mais on a représenté en trait gras les portions de géodésiques où  $\Delta\|\vec{OM}'\| \geq 0$  et en trait fin les autres. (pas =  $2 \cdot 10^{-2}$ )

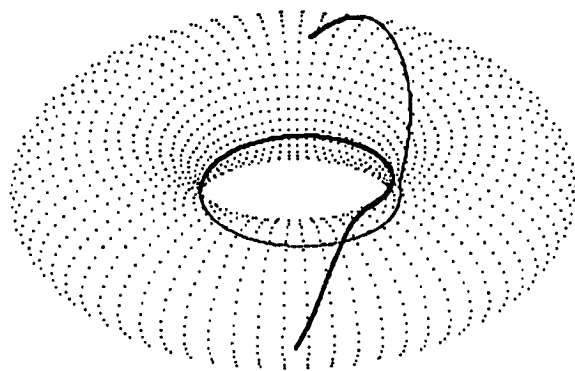


On constate que le signe est directement lié à la région du tore parcourue et est donc bien lié à une erreur systématique.

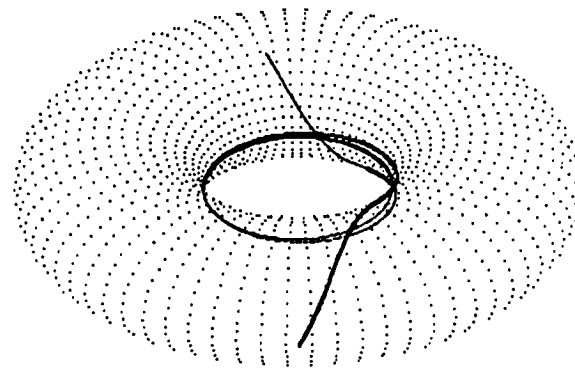
Remarque : Dans les cas étudiés ci avant, pour un pas suffisamment faible ( $\approx 0.1$ ), les deux méthodes donnent graphiquement exactement les mêmes résultats (ceci a été vérifié en superposant les courbes à l'aide d'un logiciel graphique). Afin de mettre en évidence graphiquement la plus grande précision de RK4, on a tracé ci dessous une géodésique critique ( $k=1$ ) qui admet théoriquement pour asymptote le petit cercle. (cf III. 3) c.)

(pas =  $2 \cdot 10^{-2}$ )

schéma de projection



Runge-Kutta





## Conclusion

La méthode de projection, même si elle est inférieure en précision à la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 est tout de même très intéressante. En effet, sa précision est tout à fait suffisante dans la plupart des cas étudiés ici, à l'exception peut-être de la géodésique critique où il faudrait diminuer le pas. Elle est simple à mettre en oeuvre, rapide et sa précision croît vite avec le pas. En fait elle est intéressante pour des pas faibles, puisque alors ses erreurs systématiques deviennent plus faibles que la précision de la machine et donc négligeables. Alors elle est encore utilisable grâce à sa vitesse tandis que RK4 devient inacceptable.

Enfin, il faut noter que cette supériorité en vitesse s'affirmerait sans doute sur une surface quelconque car les équations différentielles des géodésiques deviendraient plus complexes (où même inexprimables) ce qui pénaliserait RK4, alors que la méthode considérée ici n'a besoin que de la projection sur la surface.

## Bibliographie

- A combinatorial algorithm for the Euler equations of incompressible flows  
Y. Brenier  
(VIII<sup>th</sup> International conference of computing methods in applied sciences and engineering. Versailles - 14/18 Dec 1987)
- Méthodes mathématiques de la mécanique classique.  
V.I. Arnold  
(Editions MIR)
- Problèmes ergodiques de la mécanique classique.  
V.I. Arnold et A. Avez  
(Gauthier Villars)
- Analyse numérique des équations différentielles.  
M. Crouzeix et A.L. Mignot  
(Masson)
- Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.  
P.A. Raviart et J.M. Thomas  
(Masson)
- Schéma aux différences.  
S. Godounov et V. Riabenki  
(Editions MIR)
- Elementary numerical analysis.  
S.D. Conte  
(Mac Graw Hill)
- Méthodes de calcul numérique.  
J.P Nougier  
(Masson)

