Optimisation de forme d'une coque mince elastique sous differents criteres. 1 ere partie : formulation continue des problemes

Michel Bernadou, F.J. Palma Molina, B. Rousselet

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. : (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 895

OPTIMISATION DE FORME D'UNE COQUE MINCE ELASTIQUE SOUS DIFFERENTS CRITERES

1ère partie : Formulation continue des problèmes

Programme 7

Michel BERNADOU
Francisco PALMA
Bernard ROUSSELET

Septembre 1988

RR_0895

OPTIMISATION DE FORME D'UNE COQUE MINCE ELASTIQUE SOUS DIFFERENTS CRITERES

1ère partie : Formulation continue des problèmes

Michel BERNADOU(*), Francisco PALMA(**) et Bernard ROUSSELET(***)

RESUME : L'objet de cette étude est de proposer une méthodologie d'optimisation de forme d'une coque mince élastique (surface moyenne et épaisseur)

i) sous différents critères : minimisation du poids, des contraintes, de l'énergie de déformation, etc ;

ii) avec ou sans contraintes ; dans l'affirmative, celles-ci peuvent être des bornes sur certains déplacements, sur certaines contraintes (au sens mécanique), etc.

On rencontre constamment ce type de problèmes dans la vie pratique : l'ingénieur se doit de proposer des structures qui aient la meilleure tenue mécanique possible et ceci au moindre coût, ce dernier étant souvent proportionnel au poids de la structure.

Ce travail comporte trois parties : la formulation générale continue (1ère partie), puis discrète (2ème partie) des problèmes, suivie de quelques applications de nature industrielle, proposées par AEROSPATIALE (3ème partie de l'étude). Chacune de ces parties fera l'objet d'un rapport.

(*) INRIA, Domaine de Voluceau, B.P. 105, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay, France

(**) INRIA et Universidad de Málaga, Departamento Análisis Matemático, 29080 Málaga, Espagne

(***) INRIA et Université de Nice, Dépt. de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 Nice, France

SHAPE OPTIMIZATION OF AN ELASTIC THIN SHELL UNDER DIFFERENT CRITERIA

Part I : Continuous formulation of the problems

ABSTRACT : The aim of this study is to propose a methodology for optimizing the shape (middle surface and thickness) of an elastic thin shell

i) under different criteria : minimization of the weight, of the stresses, of the strain energy,... ;

ii) with or without constrainsts : if any, these can be bounds on some displacements, on some stresses,... ;

This is a common problem in real life : the engineer has to construict structures which have the best mechanical behaviour and the best price, the last one being often proportional to the weight of the structure.

This work contains three parts (a report for each part) : the general continuous formulation of the problems (first part), then the corresponding discrete formulation (second part), and finally some industrial applications proposed by AEROSPATIALE (third part of the study).

PLAN

REMERCIEMENTS :

Les Auteurs tiennent à remercier

i) AEROSPATIALE qui a soutenu financièrement ce travail, en particulier Messieurs AURIEL et BRETON des Mureaux et MARRO de Cannes la Bocca ;

ii) Maryse DESNOUS qui a remarquablement dactylographié le manuscrit.

1 - INTRODUCTION

La géométrie Φ d'une coque peut être définie à l'aide de deux applications :

(i) l'application $\vec{\phi}$ définissant la surface moyenne de la coque comme l'image de l'adhérence d'un domaine borné du plan ;

(ii) l'application e définissant l'épaisseur en tout point de la surface moyenne suivant la direction normale à cette surface.

Par la suite on posera $\Phi = (\vec{\phi}, e)$.

Suivant la théorie de coques minces de W.T. KOITER [1966, 1970], sous quelques hypothèses de base, l'équilibre de la coque, supposée encastrée sur une partie de sa frontière latérale et soumise à l'action de différentes forces, est caractérisée par le champ de déplacements $\vec{u}_\Phi$ des points situés sur la surface moyenne. Nous posons $\vec{u}_\Phi$ car cette déformation dépend naturellement de la géométrie Φ de la coque.

Le champ $\vec{u}_\Phi$ minimise l'énergie potentielle totale de la coque dans l'espace de déplacements admissible ou, de façon équivalente, est la (seule) solution de l'équation d'état régissant les déformations de la structure. Donc, nous appelons $\vec{u}_\Phi$ l'état du système. On remarque que l'équation d'état définit implicitement l'application $\Phi \rightarrow \vec{u}(\Phi) = \vec{u}_\Phi$; la connaissance explicite de cette application est en général hors d'atteinte.

Considérons maintenant un problème d'optimisation de la géométrie Φ de la coque (optimisation de forme) en vue de minimiser une certaine fonctionnelle (par exemple le poids de la coque) en respectant quelques contraintes (bornes sur les déplacements, sur l'épaisseur, sur l'énergie de déformation, etc). Pour l'utilisation d'un algorithme d'optimisation le calcul des dérivées de ces fonctionnelles par rapport à la géométrie Φ s'avère nécessaire. Ce calcul peut être délicat en particulier lorsque ces fonctionnelles dépendent de $\vec{u}_\Phi$ (de plus, en pratique, pour une valeur de Φ on ne dispose que d'une approximation $\vec{u}_{\Phi h}$, par éléments finis par exemple, de $\vec{u}_\Phi$).

La dérivée d'une fonctionnelle par rapport à Φ peut toutefois se calculer en résolvant une équation analogue à celle que fournit l'état $\vec{u}_\Phi$, ceci pour un autre cas de charge ; c'est la méthode classique de l'état adjoint.

Dans la première partie de cette étude nous allons donner la formulation continue du problème considéré. Nous rappelons tout d'abord dans le paragraphe 2 la formulation générale des équations de coques minces de W.T. Koiter. Puis, dans le paragraphe 3, nous décrivons la méthode de l'état adjoint qui permet de calculer la dérivée d'une fonctionnelle quelconque par rapport à la géométrie de la coque ; en particulier, on explicite ce calcul dans le cas où on utilise une théorie linéaire de coques minces. Finalement, dans le paragraphe 4 nous donnons quelques exemples de fonctionnelles et le calcul explicite de leurs dérivées.

Signalons enfin que lorsqu'on dispose de la dérivée de la fonctionnelle à minimiser d'une part, des contraintes d'autre part, et que l'on restreint les variables à optimiser (dans notre cas $\Phi = (\vec{\phi}, e)$) à un espace de dimension finie, on peut utiliser un algorithme de programmation non linéaire pour déterminer un incrément $\delta\Phi$ tel que $\Phi + \delta\Phi$ réduise la valeur de la fonctionnelle tout en satisfaisant les contraintes. On peut utiliser une adaptation de l'algorithme classique du gradient projeté (voir ROUSSELET [1986]) ou un algorithme de Lagrangien augmenté (voir FORTIN-GLOWINSKI [1982]).

2 - FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DE COQUES MINCES DE W.T. KOITER

Nous nous limitons ici à un bref rappel de la formulation variationnelle du problème telle qu'elle apparait dans KOITER [1966], BERNADOU-CIARLET [1976] ou BERNADOU-BOISSERIE [1982].

2.1. Définition géométrique de la coque mince

Soit Ω un domaine borné du plan $\mathscr{E}^2$, de frontière Lipschitzienne $\Gamma = \partial\Omega$. Nous supposons que la surface moyenne $\bar{S}$ de la coque est l'image de l'ensemble $\bar{\Omega}$ par une application $\vec{\phi}$, i.e.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\phi} : (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} \subset \mathscr{E}^2 \rightarrow \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) \in \bar{S} \subset \mathscr{E}^3 \\ \\ \bar{S} = \vec{\phi}(\bar{\Omega})\end{array}\right\} \quad (2.1.1)$$

où $\mathscr{E}^3$ est l'espace euclidien habituel, rapporté au système orthonormé de référence $\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Par la suite, nous supposerons que l'application $\vec{\phi}$ est assez régulière, au sens

(i) $\vec{\phi}$ est une bijection de $\bar{\Omega}$ sur $\bar{S}$;

(ii) $\vec{\phi} = \phi^i\vec{e}_i$ avec $\phi^i \in C^3(\bar{\Omega};\mathbb{R})$;

(iii) pour tous les points $(\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega}$ les deux vecteurs

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha} \quad (2.1.2)$$

sont linéairement indépendants.

On définit ainsi en chaque point de la surface moyenne $\bar{S}$ la base covariante $\{\vec{a}_i\}$ en introduisant

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \quad . \quad (2.1.3)$$

Les composantes covariantes $(a_{\alpha\beta})$ de la première forme fondamentale de la surface $\bar{S}$ sont alors données par

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha . \vec{a}_\beta \quad (2.1.4)$$

et on note

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|^2 > 0 \quad (2.1.5)$$

le déterminant (strictement positif grâce à (iii)) de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. On considère aussi en chaque point de $\bar{S}$ la base contravariante $\{\vec{a}^i\}$ définie à l'aide des relations

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta}\vec{a}_\beta \\ \\ \vec{a}^3 = \vec{a}_3\end{array}\right\} \quad (2.1.6)$$

où $(a^{\alpha\beta})$ sont les composantes contravariantes de la première forme fondamentale, i.e.

$$\left.\begin{aligned} (a^{\alpha\beta}) &= (a_{\alpha\beta})^{-1} \\ a^{11} &= a_{22}/a \\ a^{22} &= a_{11}/a \\ a^{12} &= a^{21} = -a_{12}/a \quad . \end{aligned}\right\} \quad (2.1.7)$$

De (2.1.6) et (2.1.7) on déduit

$$\vec{a}^i.\vec{a}_j = \delta^i_j \text{ (symbole de Kronecker)} \qquad (2.1.8)$$

$$\vec{a}^\alpha.\vec{a}^\beta = a^{\alpha\beta} \qquad (2.1.9)$$

Les composantes covariantes $(b_{\alpha\beta})$ et mixtes (b^α_β) de la seconde forme fondamentale de la surface $\bar{S}$ sont données par

$$\left.\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha.\vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3.\vec{a}_{\alpha,\beta} \\ b^\alpha_\beta &= a^{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.10)$$

et les symboles de Christoffel par les relations

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \vec{a}^\alpha.\vec{a}_{\beta,\gamma} \quad . \qquad (2.1.11)$$

Finalement <u>l'épaisseur</u> e de la coque peut être définie comme une application

$$e : (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} \subset \mathscr{E}^2 \rightarrow e(\xi^1,\xi^2) \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \qquad (2.1.12)$$

que nous supposons régulière, au sens suivant :

$$e \in C^0(\bar{\Omega};\mathbb{R}) \quad . \qquad (2.1.13)$$

Alors la <u>coque</u> $\mathscr{C}$ est l'ensemble

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{C} = \{M \in \mathscr{E}^3 \;:\; \vec{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) + \xi^3\vec{a}_3(\xi^1,\xi^2) \;,\; (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} \;, \\ -\tfrac{1}{2}\, e(\xi^1,\xi^2) \le \xi^3 \le \tfrac{1}{2}\, e(\xi^1,\xi^2)\} \;. \end{aligned}\right\} \quad (2.1.14)$$

2.2. Déformation d'une coque mince

L'idée de base des théories de coques minces de W.T. Koiter est de ramener l'étude de la déformation d'une coque mince à la détermination du champ de déplacements $\vec{u}$ des particules de la surface moyenne $\bar{S}$.

Pour cela, Koiter utilise les deux hypothèses de base suivantes : Au cours de la déformation

(i) la normale à la surface moyenne non déformée, considérée comme un ensemble de points, reste normale à la surface moyenne déformée ;

(ii) les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne.

D'autre part, en utilisant la carte $\vec{\phi}$, on exprime le champ de déplacements $\vec{u}$ directement sur le domaine $\bar{\Omega}$; de plus on décomposera $\vec{u}$ dans la base locale contravariante $(\vec{a}^i)$, i.e.

$$\vec{u} = u_i \vec{a}^i \quad . \tag{2.2.1}$$

Les inconnues du problème sont alors les composantes covariantes du déplacement $\vec{u}$ de la surface moyenne $\bar{S}$, i.e. les trois fonctions

$$u_i : (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \to u_i(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R} \quad , \; i = 1,2,3 \; . \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1 : Par la suite, l'utilisation de la carte $\vec{\phi}$ permettra d'associer à toute fonction g définie sur la surface moyenne $\bar{S}$, une fonction $h = g \circ \vec{\phi}$ définie sur le domaine $\bar{\Omega}$.

□

2.3. Energie potentielle totale de la coque

On notera Γ_o une partie mesurable de Γ telle que $\mathrm{mes}(\Gamma_o) > 0$ et on posera $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_o$.

En utilisant les hypothèses du paragraphe 2.2 et la remarque 2.2.1, toutes les charges et les conditions aux limites sont ramenées au domaine plan $\bar{\Omega}$. Ainsi, dans ce qui suit nous supposerons que la coque est :

(i) <u>encastrée</u> sur la partie de sa frontière correspondante à Γ_o, ce qui entraine

$$u_i = 0 \quad \text{et} \quad \partial u_3/\partial n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o \tag{2.3.1}$$

où n est la normale extérieure unitaire à Γ_o ;

(ii) <u>chargée</u> par une distribution de forces dont la résultante est $\vec{p}$ et dont le moment résultant est $\vec{0}$ sur $\bar{\Omega}$;

(iii) <u>chargée</u> sur la partie libre Γ_1 de sa frontière, par une distribution de forces dont la résultante est $\vec{N}$ et dont le moment résultant est $\vec{M}$;

(iv) <u>chargée</u> orthogonalement à sa surface moyenne en quelques points de coordonnées $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2) \in \bar{\Omega}$, $i = 1,\dots,r$, par des forces concentrées de valeur f^i, $i = 1,\dots,r$.

Par la suite, tous ces champs de forces sont décomposés par rapport aux bases locales, i.e.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{p} = p^i \vec{a}_i \\ &\vec{N} = N^i \vec{a}_i \\ &\vec{M} = \sqrt{a}(M^2 \vec{a}^1 - M^1 \vec{a}^2) \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

<u>Hypothèses complémentaires</u> : En outre, nous supposons que la coque est élastique, homogène, isotrope et que les déformations sont petites.

Alors, <u>l'énergie potentielle totale de la coque</u> pour un champ de déplacements admissible $\vec{v} = v_i \vec{a}^i$ est donnée par

$$\left.\begin{aligned} P(\vec{v}) = &\frac{1}{2} \int_\Omega [n^{\alpha\beta}(\vec{v})\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) + m^{\alpha\beta}(\vec{v})\rho_{\alpha\beta}(\vec{v})] \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 \\ &- \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 - \int_{\Gamma_1} [N^i v_i + M^\alpha \varphi_\alpha(\vec{v})] \left|\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma \\ &- \sum_{i=1}^{r} f^i v_3(\xi_i^1, \xi_i^2) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

où :

$(n^{\alpha\beta})$ = tenseur symétrique des résultantes de contraintes ;

$(m^{\alpha\beta})$ = tenseur symétrique des couples de contraintes ;

$(\gamma_{\alpha\beta})$ = tenseur symétrique de déformation de la surface moyenne ;

$(\rho_{\alpha\beta})$ = tenseur symétrique de changement de courbure de la surface moyenne ;

(φ_{α}) = composantes tangentielles du vecteur de rotation du champ $\vec{v}$.

Dans l'expression (2.3.3) on a supposé que nous avons une paramétrisation "régulière" du bord chargé Γ_1, i.e.

$$\left.\begin{aligned} &F : s \in [a,b] \to F(s) = (F^1(s), F^2(s)) \in \Gamma_1 \\ &F([a,b]) = \Gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.4)$$

et on note par $t = t(s)$ le vecteur tangent unitaire à cette courbe

$$t = \frac{dF/ds}{|dF/ds|} \quad . \qquad (2.3.5)$$

Donc, $d\gamma$ représente l'élément de longueur sur Γ_1, ce qui entraine que

$$d\sigma = \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma = \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| . |F'| ds = |(\vec{\phi}\circ F)'| ds = \sqrt{a_{\alpha\beta} \frac{dF^{\alpha}}{ds} \frac{dF^{\beta}}{ds}}\, ds \qquad (2.3.6)$$

représente l'élément de longueur sur $\vec{\phi}(\Gamma_1) \subset \bar{S}$.

D'autre part, toutes les hypothèses précédentes entrainent

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{\alpha}(\vec{v}) = v_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta} \\ &n^{\alpha\beta}(\vec{v}) = eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}\, \gamma_{\lambda\gamma}(\vec{v}) \\ &m^{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{e^3}{12}\, E^{\alpha\beta\lambda\gamma}\, \rho_{\lambda\gamma}(\vec{v}) \end{aligned}\right\} \quad (2.3.7)$$

où $E^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ désigne le tenseur de module élastique de la surface moyenne $\bar{S}$, i.e.

$$E^{\alpha\beta\lambda\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\gamma} + a^{\alpha\gamma} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\gamma}) \qquad (2.3.8)$$

E et ν désignant le module de Young et le coefficient de Poisson de la coque. Sur l'expression (2.3.8) on vérifie les symétries suivantes :

$$E^{\alpha\beta\lambda\gamma} = E^{\lambda\gamma\alpha\beta} \tag{2.3.9}$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\gamma} = E^{\beta\alpha\lambda\gamma} \quad . \tag{2.3.10}$$

En particulier, de (2.3.10) nous déduisons les symétries des tenseurs des résultantes de contraintes et des couples de contraintes

$$\left.\begin{aligned} n^{\alpha\beta}(\vec{v}) &= n^{\beta\alpha}(\vec{v}) \\ m^{\alpha\beta}(\vec{v}) &= m^{\beta\alpha}(\vec{v}) \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.3.11}$$

En reportant (2.3.7) et (2.3.8) dans (2.3.3), nous vérifions qu'il reste seulement à définir les tenseurs

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &\to \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) \\ \vec{v} &\to \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) \end{aligned}\right\} \tag{2.3.12}$$

afin de déterminer complètement la fonctionnelle P. Nous verrons plus loin quelques choix possibles.

<u>Remarque 2.3.1</u> : La fonctionnelle d'énergie (2.3.3) doit être comprise comme suit : les <u>paramètres fondamentaux de la fonctionnelle P</u> sont les trois composantes covariantes v_i du champ de déplacement $\vec{v}$ sur la base contravariante $\{\vec{a}^i\}$. Naturellement, la carte $\vec{\phi}$, l'épaisseur e, le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont aussi des paramètres de la fonctionnelle P.

Chacune des composantes v_i sera prise dans un espace fonctionnel adéquat donnant un sens à l'intégrale d'énergie (2.3.3) et prenant en compte les conditions aux limites (2.3.1). Bien sûr, de la connaissance des composantes v_i on déduit ensuite le champ de déplacements $\vec{v}$. Cette distinction entre les trois composantes covariantes et le vecteur associé s'avèrera fondamentale lors de l'étude d'optimisation. Cependant, pour condenser les notations, nous utiliserons la plupart du temps la notation vectorielle $\vec{v}$ au lieu de la notation par composantes v_i.

□

2.4. Formulation variationnelle "unifiée" de quelques problèmes de coques minces

Les solutions admissibles $\vec{u}$ du problème de déformation de la coque $\mathcal{C}$ minimisent, au moins localement, l'énergie potentielle totale P sur un espace de déplacements admissibles $\vec{V}$. Pour une fonctionnelle suffisamment régulière, ces solutions $\vec{u}$ peuvent être caractérisées de manière équivalente comme les solutions de l'équation variationnelle

$$DP(\vec{u}).\vec{v} = 0 \ , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \tag{2.4.1}$$

où $DP(\vec{u})$ est la dérivée de Fréchet de P au point $\vec{u}$.

Remarque 2.4.1 : En accord avec la remarque 2.3.1, la dérivée de P qui apparait dans (2.4.1) doit être lue comme la somme des dérivées partielles par rapport à chacune des trois composantes v_i ; de la même façon l'espace $\vec{V}$ est un produit de trois espaces fonctionnels adéquats, attachés à chacune des composantes v_i.

□

Remarque 2.4.2 : La caractérisation des minima de la fonctionnelle P comme les solutions de l'équation variationnelle (2.4.1) peut être obtenue, par exemple, à partir des conditions de régularité suivantes sur P :

(i) P deux fois dérivable dans $\vec{V}$;

(ii) P $\vec{V}$-coercive au sens suivant : pour chaque $\vec{v} \in \vec{V}$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$D^2P(\vec{v}).(\vec{w},\vec{w}) \geq \alpha\|\vec{w}\|^2 \quad , \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \ . \tag{2.4.2}$$

On remarque que, sous ces hypothèses, les éventuels minima sont stricts. D'autre part, étant donné que (i) et (ii) entrainent la convexité (et même la stricte convexité) de P, on peut démontrer que le minimum, s'il existe, est unique et global.

□

En supposant des conditions de régularité suffisantes (dérivabilité des tenseurs (2.3.12), régularité des données (2.3.2), choix de l'espace $\vec{V}$, etc) et grâce aux relations (2.3.7) à (2.3.9), nous obtenons à partir de (2.3.3) :

$$\left.\begin{aligned} DP(\vec{u}).\vec{v} &= \int_\Omega [n^{\alpha\beta}(\vec{u})(D\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}).\vec{v}) + m^{\alpha\beta}(\vec{u})(D\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}).\vec{v})] \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 \\ &- \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 - \int_{\Gamma_1} [N^i v_i + M^\alpha \varphi_\alpha(\vec{v})] \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma \\ &- \sum_{i=1}^{r} f^i v_3(\xi_i^1, \xi_i^2) \quad . \end{aligned}\right\} \quad (2.4.3)$$

Les équations (2.4.1) et (2.4.3) sont tout fait générales. Elles donnent ainsi une formulation variationnelle unifiée de différents types de problèmes de coques minces, et ceci dès que les tenseurs (2.3.12) sont définis et dès que les conditions de régularité nécessaires sont satisfaites.

Nous donnons ci-après quelques exemples de définitions des tenseurs (2.3.12) correspondants aux cas de petites déformations dans toute la coque.

2.5. Quelques choix possibles pour les tenseurs $\vec{v} \to \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})$ et $\vec{v} \to \rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$

2.5.1. Equations linéaires générales

Dans KOITER [1966] on trouve les expressions suivantes :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v_\nu - b_{\alpha\beta} v_3 \qquad (2.5.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) &= v_{3,\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v_{3,\nu} - b^\lambda_\alpha b_{\beta\lambda} v_3 + b^\nu_\beta v_{\nu,\alpha} + b^\nu_\alpha v_{\nu,\beta} \\ &+ (b^\nu_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} b^\nu_\lambda - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} b^\lambda_\beta) v_\nu \quad . \end{aligned}\right\} \quad (2.5.2)$$

On notera que dans KOITER [1966], l'expression (2.5.2) est notée $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ au lieu de $\rho_{\alpha\beta}$.

2.5.2. Equations linéaires générales (une autre alternative)

Dans KOITER [1966] on trouvera une autre alternative "équivalente" sur le plan mécanique, consistant à remplacer l'expression $\rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$ de la relation (2.5.2) par la suivante

$$\left.\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) &= v_{3,\alpha\beta} - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v_{3,\nu} + b^\nu_\beta(\frac{3}{4} v_{\nu,\alpha} - \frac{1}{4} v_{\alpha,\nu}) + b^\nu_\alpha(\frac{3}{4} v_{\nu,\beta} - \frac{1}{4} v_{\beta,\nu}) \\ &+ (b^\nu_{\alpha;\beta} + \frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\beta\lambda} b^\lambda_\alpha - \frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} b^\lambda_\beta - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} b^\nu_\lambda) v_\nu \quad . \end{aligned}\right\} \quad (2.5.3)$$

2.5.3. Equations linéaires de coques peu profondes

Dans le cas de coques peu profondes, il est possible de simplifier l'expression de $\rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$, i.e.

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3,\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} v_{3,\nu} \quad . \tag{2.5.4}$$

Remarque 2.5.1 : Etant donné que les expressions (2.5.1) à (2.5.4) sont linéaires par rapport à $\vec{v}$ (et continues si on fait un bon choix de l'espace $\vec{V}$), ses dérivées en un point $\vec{u} \in \vec{V}$ sont données par

$$\left.\begin{aligned} D\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}).\vec{v} &= \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) \\ D\rho_{\alpha\beta}(\vec{u}).\vec{v} &= \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) \end{aligned} \qquad \forall\vec{v} \in \vec{V} \quad . \right\} \tag{2.5.5}$$

2.5.4. Equations non linéaires de coques générales

Nous donnons ci-après un exemple d'équations non linéaires s'appliquant à des coques minces de forme géométrique quelconque. Elles correspondent d'après PIETRASZKIEWICZ et SZWABOWICZ [1981] à des rotations "modérées"

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = {} & \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} v_{\nu} - b_{\alpha\beta} v_3 \\ & + \frac{1}{2}(v_{3,\alpha} + b^{\nu}_{\alpha} v_{\nu})(v_{3,\beta} + b^{\nu}_{\beta} v_{\nu}) + \frac{a_{\alpha\beta}}{8a}(v_{2,1} - v_{1,2})^2 \\ & - \frac{1}{4} a^{\lambda\gamma}[(\frac{1}{2}(v_{\alpha,\gamma} + v_{\gamma,\alpha}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma} v_{\nu} - b_{\alpha\gamma} v_3)(v_{\beta,\lambda} - v_{\lambda,\beta}) \\ & \qquad + (\frac{1}{2}(v_{\beta,\gamma} + v_{\gamma,\beta}) - \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} v_{\nu} - b_{\beta\gamma} v_3)(v_{\alpha,\lambda} - v_{\lambda,\alpha})] \end{aligned}\right\} \tag{2.5.6}$$

Pour le tenseur de changement de courbure nous prenons la relation (2.5.2). Naturellement dans le cas de "grandes" rotations ou de rotations "finies", l'expression de ce tenseur se complique et elle devient alors non linéaire.

2.5.5. Equations non linéaires de coques peu profondes

Dans le cas de coques peu profondes, les équations peuvent être simplifiées comme suit

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\,(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} v_{\nu} - b_{\alpha\beta} v_3 + \frac{1}{2}\, v_{3,\alpha} v_{3,\beta} \tag{2.5.7}$$

et pour $\rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$ on prend la relation (2.5.4).

Remarque 2.5.2 : Les relations (2.5.6) et (2.5.7) ne sont pas linéaires par rapport à $\vec{v}$. Elles se présentent comme la somme d'un terme linéaire et d'un autre quadratique (et continues avec un bon choix de l'espace $\vec{V}$). Donc, le calcul de leur dérivée est simple. Ainsi pour le choix (2.5.7) nous avons

$$\left.\begin{aligned} D\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}).\vec{v} = \frac{1}{2}\,(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} v_{\nu} - b_{\alpha\beta} v_3 \\ + \frac{1}{2}\, v_{3,\alpha} u_{3,\beta} + \frac{1}{2}\, u_{3,\alpha} v_{3,\beta} \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2.5.8}$$

Pour le choix (2.5.6) on procèderait de la même façon.

□

2.6. Quelques résultats d'existence de solutions

Une revue des résultats d'existence de solutions, dans un cadre fonctionnel approprié, pour les problèmes de déformations de coques minces définis dans les exemples du paragraphe 2.5. figure dans BERNADOU [1986]. Indiquons seulement que l'on dispose d'un résultat d'existence et d'unicité pour les cas 2.5.1 et 2.5.2 (voir BERNADOU-CIARLET [1976]). Il en va de même pour le cas 2.5.3 lorsque la coque est "suffisamment" peu profonde (voir BERNADOU-LALANNE [1986]). Concernant le cas 2.5.5, il est établi dans BERNADOU-ODEN [1980], l'existence de solutions lorsque la coque est "suffisamment" peu profonde et les charges tangentielles "suffisamment" petites. En ajoutant à ces hypothèses, une hypothèse de charge normale "suffisamment" petite, on peut établir l'unicité de la solution pour le problème associé aux expressions (2.5.7) et (2.5.4). Enfin, l'utilisation de méthodes incrémentales semi-discrètes devrait permettre d'établir l'existence de solutions dans le cas 2.5.4 ; dans cette direction, on pourra consulter BERNADOU-CIARLET-HU [1984].

2.7. Le cas linéaire général. Une autre expression de la formulation variationnelle bien adaptée à l'implémentation

Nous nous limitons ici au cas 2.5.1 des équations linéaires générales pour lequel l'énergie potentielle totale (2.3.3) est quadratique de la forme

$$P(\vec{v}) = \frac{1}{2}\, a(\vec{v},\vec{v}) - f(\vec{v}) \ , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \tag{2.7.1}$$

avec a(.,.) une forme bilinéaire symétrique et f(.) une forme linéaire. De (2.3.3) et (2.3.7) on déduit

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{v}) + \frac{e^2}{12}\rho_{\alpha\beta}(\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{v})]\sqrt{a}\; d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.7.2}$$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{v}) = \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\; d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} [N^i v_i + M^\alpha(v_{3,\alpha} + b^\beta_\alpha v_\beta)] \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma \\ + \sum_{i=1}^{r} f^i v_3(\xi^1_i,\xi^2_i) \ . \end{aligned}\right\} \tag{2.7.3}$$

La linéarité de f(.) est immédiate tandis que la bilinéarité de a(.,.) est une conséquence du choix linéaire de $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})$ et $\rho_{\alpha\beta}(\vec{v})$. D'autre part, la symétrie de a(.,.) se déduit de la relation (2.3.9).

Dans BERNADOU-CIARLET [1976] on démontre l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace

$$\left.\begin{aligned} \vec{V} = \{\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \ : \\ v_i = 0 \text{ et } \partial v_3/\partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_o\} \end{aligned}\right\} \tag{2.7.4}$$

pour des données vérifiant

$$p^i \in L^2(\Omega) \ , \ N^i \in L^2(\Gamma_1) \ , \ M^\alpha \in L^2(\Gamma_1) \ . \tag{2.7.5}$$

De (2.7.4) et (2.7.5) on déduit la dérivabilité de la fonctionnelle P et on obtient pour $\vec{u} \in \vec{V}$

$$DP(\vec{u}).\vec{v} = a(\vec{u},\vec{v}) - f(\vec{v}) \ , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \ . \tag{2.7.6}$$

Les conditions de régularité de la remarque 2.4.2 étant satisfaites, la seule solution $\vec{u} \in \vec{V}$ du problème est caractérisée par l'équation variationnelle

$$a(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v}) \ , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \ . \tag{2.7.7}$$

<u>Remarque 2.7.1</u> : L'introduction de forces ponctuelles dans l'expression du second membre n'ajoute pas de difficultés dans la démonstration de la continuité de f(.) car on a l'injection continue de $H^2(\Omega)$ dans $C^o(\bar{\Omega})$.

□

Nous donnons ci-après une autre expression de (2.7.7) particulièrement bien adaptée à l'implémentation. Cette présentation est largement inspirée de celle de BERNADOU-BOISSERIE [1982] avec quelques modifications :

- on conserve explicitement les termes $E^{\alpha\beta\lambda\gamma}$ pour se réserver la possibilité de considérer d'autres lois de comportement ;

- on conserve les composantes covariantes des tenseurs de déformation et de changement de courbure, ce qui permet de rester assez général.

2.7.1. Expression de la forme bilinéaire

Nous prenons les relations (2.5.1) et (2.5.2) que nous écrivons sous la forme vectorielle

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) &= \Lambda_{\alpha\beta}\, V \\ \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) &= M_{\alpha\beta}\, V \end{aligned}\right\} \quad (2.7.8)$$

où les matrices, de dimension 1x12, $\Lambda_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ et le vecteur à 12 composantes V sont donnés par

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta} = [&- \Gamma^1_{\alpha\beta} \;;\; \delta^1_\alpha\delta^1_\beta \;;\; \tfrac{1}{2}\,(\delta^1_\alpha\delta^2_\beta + \delta^2_\alpha\delta^1_\beta) \;;\; - \Gamma^2_{\alpha\beta} \;; \\ &\tfrac{1}{2}\,(\delta^2_\alpha\delta^1_\beta + \delta^1_\alpha\delta^2_\beta) \;;\; \delta^2_\alpha\delta^2_\beta \;;\; - b_{\alpha\beta} \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; 0] \end{aligned}\right\} \quad (2.7.9)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{\alpha\beta} = [&b^1_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} b^1_\lambda - \Gamma^1_{\alpha\lambda} b^\lambda_\beta \;;\; \delta^1_\alpha b^1_\beta + \delta^1_\beta b^1_\alpha \;;\; \delta^2_\alpha b^1_\beta + \delta^2_\beta b^1_\alpha \;; \\ &b^2_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} b^2_\lambda - \Gamma^2_{\alpha\lambda} b^\lambda_\beta \;;\; \delta^1_\alpha b^2_\beta + \delta^1_\beta b^2_\alpha \;;\; \delta^2_\alpha b^2_\beta + \delta^2_\beta b^2_\alpha \;; \\ &- b^\lambda_\alpha b_{\beta\lambda} \;;\; - \Gamma^1_{\alpha\beta} \;;\; - \Gamma^2_{\alpha\beta} \;;\; \delta^1_\alpha\delta^1_\beta \;;\; \delta^1_\alpha\delta^2_\beta + \delta^2_\alpha\delta^1_\beta \;;\; \delta^2_\alpha\delta^2_\beta] \end{aligned}\right\} \quad (2.7.10)$$

$$\left.\begin{aligned} V = {}^t[&v_1 \;;\; v_{1,1} \;;\; v_{1,2} \;;\; v_2 \;;\; v_{2,1} \;;\; v_{2,2} \;; \\ &v_3 \;;\; v_{3,1} \;;\; v_{3,2} \;;\; v_{3,11} \;;\; v_{3,12} \;;\; v_{3,22}] \;. \end{aligned}\right\} \quad (2.7.11)$$

On vérifie alors que

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega {}^tU\ [A_{IJ}]\ V\ d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.7.12}$$

où la matrice symétrique $[A_{IJ}]$, de dimension 12×12, est donnée par

$$[A_{IJ}] = eE^{\alpha\beta\lambda\gamma} \sqrt{a}\ ({}^t\Lambda_{\alpha\beta}\Lambda_{\lambda\gamma} + \frac{e^2}{12}\ {}^tM_{\alpha\beta}M_{\lambda\gamma}) \quad . \tag{2.7.13}$$

2.7.2. Expression de la forme linéaire

Au niveau de l'implémentation on se restreint à quelques exemples de charges classiques.

a) Les charges de type pression

En désignant par $-p\vec{n}$ la densité surfacique de charge sur la paroi externe chargée (disons ici la paroi correspondant à $\xi^3 = +e/2$, avec $\vec{n}$ vecteur normal unitaire à cette paroi) il vient (voir BERNADOU-BOISSERIE [1982]) :

$$\vec{p} = p^i\vec{a}_i = p[\frac{1}{2}\ e_{,\beta}\ a^{\alpha\beta}\vec{a}_\alpha - (1 - \frac{1}{2}\ e\ b^\alpha_\alpha)\vec{a}_3] \quad . \tag{2.7.14}$$

Cependant, pour une coque "assez mince" on pourra se limiter à

$$\vec{p} = p^i\vec{a}_i = -p\vec{a}_3 \quad . \tag{2.7.15}$$

Nous écrivons la forme linéaire sous la forme vectorielle

$$f_1(\vec{v}) = \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\ d\xi^1 d\xi^2 = \int_\Omega [F_{I1}]\ V\ d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.7.16}$$

où la matrice, de dimension 1×12, $[F_{I1}]$ est donnée par

$$\left.\begin{aligned} [F_{I1}] = p\sqrt{a}\ [\ &\frac{1}{2}\ e_{,\alpha}\ a^{1\alpha}\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\ e_{,\alpha}\ a^{2\alpha}\ ;\ 0\ ;\ 0 \\ &-1 + \frac{1}{2}\ e\ b^\alpha_\alpha\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0] \end{aligned}\right\} \tag{2.7.17}$$

ou bien pour le cas de coques "assez minces"

$$[F_{I1}] = p\sqrt{a}\ [0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0] \tag{2.7.18}$$

b) Les charges de type gravitationnel

Il s'agit de charges de type poids propre ; donc

$$\vec{p} = p^i \vec{a}_i = \rho_1 g_o e \, \vec{e}_3 = \rho_1 g_o e \, (\vec{e}_3 . \vec{a}^i) \, \vec{a}_i \qquad (2.7.19)$$

où : ρ_1 = densité surfacique de masse

g_o = accélération de la pesanteur

$\vec{e}_3$ = le vecteur "vertical" .

Cette fois-ci

$$f_2(\vec{v}) = \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a} \, d\xi^1 d\xi^2 = \int_\Omega [F_{I2}] \, V \, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (2.7.20)$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} [F_{I2}] = \rho_1 g_o e \sqrt{a} \, [\vec{e}_3 . \vec{a}^1 \; ; 0 \; ; 0 \; ; \vec{e}_3 . \vec{a}^2 \; ; 0 \; ; 0 \; ; \\ \qquad \vec{e}_3 . \vec{a}_3 \; ; 0 \; ; 0 \; ; 0 \; ; 0 \; ; 0] \, . \end{array}\right\} (2.7.21)$$

c) Les charges générales dépendantes de la géométrie

Il s'agit de charges surfaciques ou linéîques ou bien de moments linéîques, dont la densité peut s'exprimer sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = p^i \vec{a}_i \\ \vec{N} = N^i \vec{a}_i \\ \vec{M} = \sqrt{a} \, (M^2 \vec{a}^1 - M^1 \vec{a}^2) \end{array}\right\} (2.7.22)$$

où on suppose que les composantes contravariantes des forces, i.e. les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} p^i : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \\ N^i : \Gamma_1 \to \mathbb{R} \\ M^\alpha : \Gamma_1 \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (2.7.23)$$

sont connues explicitement et qu'elles sont indépendantes de $\vec{\phi}$ et de e.

Aux trois chargements (2.7.22) il correspond les expressions :

$$\left.\begin{aligned} f_3(\vec{v}) &= \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 = \int_\Omega [F_{I3}]\ V\, d\xi^1 d\xi^2 \\ f_4(\vec{v}) &= \int_{\Gamma_1} N^i v_i \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma = \int_a^b [F_{I4}]\ V\, ds \\ f_5(\vec{v}) &= \int_{\Gamma_1} M^\alpha (v_{3,\alpha} + b^\beta_\alpha v_\beta) \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma = \int_a^b [F_{I5}]\ V\, ds \end{aligned}\right\}\quad (2.7.24)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} [F_{I3}] &= \sqrt{a}\ [p^1 ; 0 ; 0 ; p^2 ; 0 ; 0 ; p^3 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0] \\ [F_{I4}] &= L[N^1 ; 0 ; 0 ; N^2 ; 0 ; 0 ; N^3 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0] \\ [F_{I5}] &= L[M^\alpha b^1_\alpha ; 0 ; 0 ; M^\alpha b^2_\alpha ; 0 ; 0 ; 0 ; M^1 ; M^2 ; 0 ; 0 ; 0] \end{aligned}\right\}\quad (2.7.25)$$

<u>Remarque 2.7.2</u> : Ici, et par la suite, nous utilisons la notation

$$L = L(s) = \sqrt{a_{\alpha\beta} \frac{dF^\alpha}{ds} \frac{dF^\beta}{ds}} \qquad s \in [a.b] \qquad (2.7.26)$$

(voir (2.3.4) à (2.3.6)).

□

d) <u>Les charges générales indépendantes de la géométrie</u>

Il s'agit de charges surfaciques ou linéiques dont la densité peut s'exprimer sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= p^i \vec{a}_i = \bar{p}^j \vec{e}_j = \bar{p}^j (\vec{e}_j . \vec{a}^i) \vec{a}_i \\ \vec{N} &= N^i \vec{a}_i = \bar{N}^j \vec{e}_j = \bar{N}^j (\vec{e}_j . \vec{a}^i) \vec{a}_i \end{aligned}\right\}\quad (2.7.27)$$

où les fonctions

$$\left.\begin{aligned} \bar{p}^j &: \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \\ \bar{N}^j &: \Gamma_1 \to \mathbb{R} \end{aligned}\right\}\quad (2.7.28)$$

sont connues explicitement et supposées indépendantes de $\vec{\phi}$ et de e.

Nous écrivons à nouveau :

$$\left.\begin{aligned} f_6(\vec{v}) &= \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 = \int_\Omega [F_{I6}]\ V\ d\xi^1 d\xi^2 \\ f_7(\vec{v}) &= \int_{\Gamma_1} N^i v_i \left|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right| d\gamma = \int_a^b [F_{I7}]\ V\ ds \end{aligned}\right\} \quad (2.7.29)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} [F_{I6}] &= \bar{p}^j \sqrt{a}\ [\vec{e}_j.\vec{a}^1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \vec{e}_j.\vec{a}^2\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\ &\qquad \vec{e}_j.\vec{a}_3\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0] \\ [F_{I7}] &= \bar{N}^j\ L[\vec{e}_j.\vec{a}^1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \vec{e}_j.\vec{a}^2\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\ &\qquad \vec{e}_j.\vec{a}_3\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0] \end{aligned}\right\} \quad (2.7.30)$$

e) <u>Les charges ponctuelles</u>

Pour les charges ponctuelles nous écrivons

$$f_8(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{r} f^i v_3(\xi_i^1,\xi_i^2) = \sum_{i=1}^{r} [F_{IP}^i]\ V(\xi_i^1,\xi_i^2) \quad (2.7.31)$$

avec

$$[F_{IP}^i] = [\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ f^i\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\ . \quad (2.7.32)$$

En <u>résumé</u> nous avons

$$f(\vec{v}) = \int_\Omega [F_{IS}]\ V\ d\xi^1 d\xi^2 + \int_a^b [F_{IL}]\ V\ ds + \sum_{i=1}^{r} [F_{IP}^i]\ V(\xi_i^1,\xi_i^2) \quad (2.7.33)$$

où les matrices $[F_{IS}]$ et $[F_{IL}]$, de dimension 1x12, sont données par

$$\left.\begin{aligned} [F_{IS}] &= [F_{I1}] + [F_{I2}] + [F_{I3}] + [F_{I6}] \\ [F_{IL}] &= [F_{I4}] + [F_{I5}] + [F_{I7}]\ . \end{aligned}\right\} \quad (2.7.34)$$

3 - CALCUL DE LA DERIVEE D'UNE FONCTIONNELLE PAR RAPPORT A LA GEOMETRIE DE LA COQUE

Considérons un problème d'optimisation de forme d'une coque, conduisant à minimiser une fonctionnelle sous certaines contraintes. Pour l'utilisation d'un algorithme d'optimisation, le calcul de la dérivée de cette fonctionnelle (et des contraintes) par rapport à la géométrie (surface moyenne et épaisseur) de la coque s'avère nécessaire. Dans ce paragraphe, nous donnons une méthodologie de calcul de cette dérivée pour une fonctionnelle quelconque.

La méthodologie que nous décrivons repose sur la technique générale de l'introduction d'un état adjoint. Cette technique est classique en théorie de contrôle optimal (voir LIONS [1969]) et elle est devenue également classique en optimisation de structures (voir CEA [1986] ou HAUG-CHOI-KOMHOV [1986]) ; une présentation de cette technique pour les problèmes discrets et continus se trouve dans ROUSSELET [1987].

Il est commode d'introduire un état adjoint car les fonctionnelles que nous considérons dépendent en général de l'état $\vec{u}_\Phi$ du système.

La justification théorique de l'existence de la dérivée de la fonctionnelle repose sur la dérivabilité des applications implicites $\Phi \to \vec{u}_\Phi$. Dans le contexte des équations de coques minces, il convient de signaler les trois études suivantes :

(i) Pour un modèle d'arche, CHENAIS-ROUSSELET [1984] ont établi la dérivabilité de l'état par rapport à la ligne moyenne ;

(ii) Pour le modèle de coque de Budiansky-Sanders, CHENAIS [1987] a établi la dérivabilité de l'état par rapport à la surface moyenne ;

(iii) Dans le cas de coques de révolution, citons HLAVACEK [1983], et MOTA SOARES-MOTA SOARES-MATEUS [1987] et pour les coques peu profondes BANICHUK-LARICHEV [1984].

3.1. Le principe général du calcul de la dérivée d'une fonctionnelle

Considérons une coque mince $\mathcal{C}$ dont la surface moyenne est l'image de l'adhérence $\bar{\Omega}$ d'un domaine borné du plan par une carte régulière $\vec{\phi}$ et dont l'épaisseur e est elle aussi une application régulière définie en tout point de la surface moyenne. On pose désormais

$$\Phi = (\vec{\phi}, e) \quad . \tag{3.1.1}$$

Nous supposons que Φ appartient à un ensemble ouvert de géométries admissibles de la coque (prise en compte de la régularité, coques "minces", etc)

$$\Phi \in G_{ad} \subset G \tag{3.1.2}$$

où G est un espace vectoriel normé, par exemple

$$G = [C^3(\bar{\Omega})]^3 \times C^o(\bar{\Omega}) \quad . \tag{3.1.3}$$

Conformément aux formulation données dans le paragraphe précédent, les déformations de la coque $\mathscr{C}$ sont caractérisées par les champs de déplacements $\vec{u}$ des particules situées sur la surface moyenne. Les composantes covariantes de ces champs $\vec{u}$ (voir remarques 2.3.1 et 2.4.1) sont caractérisées de façon équivalente comme les solutions de l'équation variationnelle (2.4.1), i.e.

$$DP(\vec{u}).\vec{v} = 0 \ , \qquad \forall \vec{v} \in \vec{V} \tag{3.1.4}$$

où la fonctionnelle P (supposée assez régulière) donne l'énergie potentielle totale de la coque pour un champ de déplacements admissibles $\vec{v} \in \vec{V}$ (voir (2.3.3)), i.e.

$$P \, : \, \vec{v} \in \vec{V} \rightarrow P(\vec{v}) \in \mathbb{R} \quad . \tag{3.1.5}$$

On peut vérifier sur les expressions (2.3.3) à (2.3.12) que la fonctionnelle P est formulée sur le domaine plan $\bar{\Omega}$; la géométrie de la coque apparait sous la forme de coefficients variables qui dépendent de $\vec{\phi}$ et e et de certaines de ses dérivées. Pour faire apparaître explicitement cette dépendance on va écrire

$$P \, : \, (\Phi;\vec{v}) \in G_{ad} \times \vec{V} \rightarrow P(\Phi;\vec{v}) \in \mathbb{R} \quad . \tag{3.1.6}$$

Alors, l'équation variationnelle (3.1.4) devient : Etant donné $\Phi \in G_{ad}$, trouver $\vec{u}_\Phi \in \vec{V}$ tel que

$$\partial_{\vec{u}} P(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{v} = 0 \ , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \ . \tag{3.1.7}$$

Nous avons noté $\vec{u}_\Phi$ et non $\vec{u}$, car la solution du problème (3.1.7) dépend naturellement de la géométrie Φ. Conformément à la remarque 2.3.1 nous devrions en fait écrire $(u_{\Phi 1}, u_{\Phi 2}, u_{\Phi 3})$ au lieu de $\vec{u}_\Phi$.

Considérons maintenant une <u>fonctionnelle</u> j. Cette fonctionnelle est définie sur la coque $\mathscr{C}$ et elle dépend de la géométrie Φ et du champ de déplacement $\vec{u}_\Phi$ solution de l'équation (3.1.7) ; on pose

$$j(\Phi) = J(\Phi;\vec{u}_\Phi) \tag{3.1.8}$$

où

$$\left.\begin{array}{l} j \ : \ \Phi \in G_{ad} \rightarrow j(\Phi) \in \mathbb{R} \\ J \ : \ (\Phi;\vec{v}) \in G_{ad} \times \vec{V} \rightarrow J(\Phi;\vec{v}) \in \mathbb{R} \ . \end{array}\right\} \tag{3.1.9}$$

Pour calculer la dérivée de j il est commode d'introduire le <u>Lagrangien</u> (voir CEA [1986])

$$L \ : \ (\Phi;\vec{u},\vec{v}) \in G_{ad} \times \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow L(\Phi;\vec{u},\vec{v}) \in \mathbb{R} \tag{3.1.10}$$

où

$$L(\Phi;\vec{u},\vec{v}) = J(\Phi;\vec{u}) - \partial_{\vec{u}} P(\Phi;\vec{u}).\vec{v} \ . \tag{3.1.11}$$

Par la suite, nous supposons que le Lagrangien (3.1.10) est dérivable par rapport à chacune de ses composantes, ce qui équivaut à imposer les mêmes conditions de régularité à la fonctionnelle J et à l'énergie P.

Avec la terminologie usuelle, nous rappelons maintenant les résultats classiques suivants :

a) <u>Equation d'état (problème direct)</u>

Pour $\Phi \in G_{ad}$ et $\vec{v} \in \vec{V}$ donnés, on considère le problème

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_\Phi \in \vec{V} \text{ tel que} \\ \partial_{\vec{v}} L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}).\vec{w} = 0 \ , \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \ . \end{array}\right\} \tag{3.1.12}$$

De (3.2.11) on déduit

$$\partial_{\vec{v}} L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}).\vec{w} = - \partial_{\vec{u}} P(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} \qquad (3.1.13)$$

ce qui montre que l'équation d'état (3.1.12) n'est autre que l'équation variationnelle (3.1.7). On remarque aussi que cette équation ne dépend pas du champ $\vec{v} \in \vec{V}$ fixé initialement.

b) Equation d'état adjoint (problème adjoint)

Pour $\Phi \in G_{ad}$ donné et pour $\vec{u}_\Phi \in \vec{V}$, solution de l'équation d'état (3.1.12), nous considérons le nouveau problème

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{v}_\Phi \in \vec{V} \text{ tel que} \\ \partial_{\vec{u}} L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\vec{w} = 0 \ , \quad \forall \vec{w} \in \vec{V} \ . \end{array}\right\} (3.1.14)$$

A nouveau, de (3.1.11) on déduit

$$\partial_{\vec{u}} L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\vec{w} = \partial_{\vec{u}} J(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} - \partial^2_{\vec{u},\vec{u}} P(\Phi;\vec{u}_\Phi).(\vec{v}_\Phi,\vec{w}) \ . \qquad (3.1.15)$$

Remarque 3.1.1 : Ici encore, les dérivées du Lagrangien par rapport à $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ sont à lire composante par composante comme dans la remarque 2.4.1.

□

Pour le moment on va supposer l'existence et l'unicité de la solution du problème direct ($\vec{u}_\Phi$ état du système) et du problème adjoint ($\vec{v}_\Phi$ état adjoint du système). On va supposer aussi la dérivabilité des fonctionnelles

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} : \Phi \in G_{ad} \rightarrow \vec{u}(\Phi) = \vec{u}_\Phi \in \vec{V} \\ \vec{v} : \Phi \in G_{ad} \rightarrow \vec{v}(\Phi) = \vec{v}_\Phi \in \vec{V} \ . \end{array}\right\} (3.1.16)$$

A l'aide de l'état direct et de l'état adjoint du problème, nous donnons une expression commode de la dérivée de j. Tout d'abord les relations (3.1.8) et (3.1.11) à (3.1.13) entrainent

$$j(\Phi) = J(\Phi;\vec{u}_\Phi) = L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi) \qquad (3.1.17)$$

d'où l'on déduit pour tout $\Psi \in G$ que

$$\left.\begin{aligned} Dj(\Phi).\Psi &= D_\Phi\, L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi = \partial_\Phi\, L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi \\ &+ \partial_{\vec{u}}\, L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).(D\vec{u}(\Phi).\Psi) + \partial_{\vec{v}}\, L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).(D\vec{v}(\Phi).\Psi) \end{aligned}\right\} \quad (3.1.18)$$

Mais grâce aux relations (3.1.12) et (3.1.14) il vient finalement (ceci explique le choix de $\vec{v}_\Phi$ dans (3.1.17))

$$Dj(\Phi).\Psi = \partial_\Phi\, L(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi \qquad (3.1.19)$$

soit avec (3.1.11)

$$Dj(\Phi).\Psi = \partial_\Phi\, J(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi - \partial^2_{\vec{u},\Phi}\, P(\Phi;\vec{u}_\Phi).(\vec{v}_\Phi,\Psi) \quad . \qquad (3.1.20)$$

3.1.1. Le cas linéaire

Comme dans le paragraphe 2.7 nous développons ici le cas linéaire pour lequel la fonctionnelle de l'énergie est quadratique, i.e.,

$$P(\Phi;\vec{v}) = \frac{1}{2}\, a(\Phi;\vec{v},\vec{v}) - f(\Phi;\vec{v}) \quad . \qquad (3.1.21)$$

A l'encontre de (2.7.1), nous avons fait apparaître explicitement dans (3.1.21) la dépendance en Φ de la forme bilinéaire symétrique $a(\Phi;.,.)$ et de la forme linéaire $f(\Phi;.)$.

Dans ce cas on a les conditions de régularité suivantes :

- La dérivabilité de l'énergie P par rapport à $\vec{v}$ se déduit à l'aide des conditions de continuité de la forme bilinéaire $a(\Phi;.,.)$ et de la forme linéaire $f(\Phi;.)$;
- L'existence et l'unicité de la solution $\vec{u}_\Phi$ du problème direct se déduit à l'aide d'une condition de $\vec{V}$-coercivité uniforme de la forme bilinéaire, car l'équation d'état (3.1.12) s'écrit

$$a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{w}) = f(\Phi;\vec{w}) \quad , \quad \forall\vec{w}\in\vec{V} \quad . \qquad (3.1.22)$$

- Pour une fonctionnelle $J(\Phi;\vec{u})$ dérivable, l'équation d'état adjoint (3.1.14) s'écrit

$$a(\Phi;\vec{v}_\Phi,\vec{w}) = \partial_{\vec{u}}\, J(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} \quad , \quad \forall\vec{w}\in\vec{V} \quad . \qquad (3.1.23)$$

Donc, l'existence et l'unicité de l'état adjoint $\vec{v}_\Phi$ se déduit à partir de la même hypothèse de coercivité, si l'on suppose que $\partial_{\vec{u}} J(\Phi;\vec{u}_\Phi)$ est une forme linéaire et continue sur V.

- La dérivabilité par rapport à Φ de l'énergie P se déduit à partir de celle de la forme bilinéaire et de celle de la forme linéaire. Pour tous les choix indiqués des tenseurs (2.3.12), cette dérivabilité peut être déduite de celle des quantités élémentaires (formes fondamentales de la surface, symboles de Christoffel, etc) ;

- D'après CHENAIS-ROUSSELET [1984] ou CHENAIS [1987], la dérivabilité des applications (3.1.16) peut être déduite à partir de quelques conditions de régularité supplémentaires (choix de l'espace de géométries admissibles G_{ad}, coercivité $\vec{V}$ et G_{ad}-uniforme de la forme bilinéaire, continuité $\vec{V}$ et G_{ad}-uniforme du second membre respectif, bornes des dérivées par rapport à Φ de la forme bilinéaire et des seconds membres, etc) ;

- Des trois points précédents, on déduit l'expression de la dérivée de j :

$$Dj(\Phi).\Psi = \partial_\Phi J(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi - \partial_\Phi a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi + \partial_\Phi f(\Phi;\vec{v}_\Phi).\Psi \quad . \qquad (3.1.24)$$

Cependant, cette relation est très générale. Pour l'utiliser il convient de préciser :

- La fonctionnelle $J(\Phi;\vec{u})$ à étudier. Dans le paragraphe 4 nous donnons quelques exemples de fonctionnelles ;

- La forme bilinéaire $a(\Phi;\vec{u},\vec{v})$. Dans le paragraphe 3.2 on donne une expression de la dérivée par rapport à Φ pour le choix d'équations linéaires générales présenté dans la section 2.5.1 ;

- La forme linéaire $f(\Phi;\vec{v})$. Dans le paragraphe 2.7 on a donné l'expression de f pour quelques types particuliers de charges. Dans le paragraphe 3.3 on va donner une expression de la dérivée par rapport à Φ pour ces cas de charges.

3.2. Calcul de la dérivée : $\partial_\Phi a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\Psi$

Nous partons de la relation (2.7.2)

$$\left.\begin{aligned} a(\Phi;\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega & eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\ & + \frac{e^2}{12}\rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})]\sqrt{a(\vec{\phi})}\,d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned}\right\}(3.2.1)$$

où l'on précise de manière systématique la dépendance en $\Phi = (\vec{\phi}, e)$. Dès lors, en supposant $\Phi \in G_{ad}$ et en posant $\Psi = (\vec{\psi}, \epsilon) \in G$, il vient

$$\partial_{\Phi} a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\Psi = \partial_{\vec{\phi}} a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\vec{\psi} + \partial_e a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\epsilon \tag{3.2.2}$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
\partial_{\vec{\phi}} a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\vec{\psi} = &\int_{\Omega} e[\partial_{\vec{\phi}} (E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi}) \sqrt{a(\vec{\phi})}).\vec{\psi}] \\
&\times [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) + \frac{e^2}{12} \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})] \, d\xi^1 d\xi^2 \\
&+ \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})[(\partial_{\vec{\phi}} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&+ \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})(\partial_{\vec{\phi}} \gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}).\vec{\psi}) + \frac{e^2}{12} ((\partial_{\vec{\phi}} \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&+ \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})(\partial_{\vec{\phi}} \rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}).\vec{\psi}))] \sqrt{a(\vec{\phi})} \, d\xi^1 d\xi^2
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\partial_e a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\epsilon = &\int_{\Omega} \epsilon E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&+ \frac{e^2}{4} \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})] \sqrt{a(\vec{\phi})} \, d\xi^1 d\xi^2
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.4}$$

ce qui ramène le calcul de (3.2.3) à celui des dérivées partielles

$$\partial_{\vec{\phi}} (E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi}) \sqrt{a(\vec{\phi})}).\vec{\psi} \tag{3.2.5}$$

$$\partial_{\vec{\phi}} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi} \tag{3.2.6}$$

$$\partial_{\vec{\phi}} \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi} \quad . \tag{3.2.7}$$

Le calcul de ces dérivées se fait automatiquement à partir du lemme technique suivant :

<u>Lemme 3.2.1</u> : Soit $\vec{\phi} \in (C^3(\bar{\Omega}))^3$ tel que $\vec{a}_{\alpha}(\vec{\phi})$, $\alpha = 1,2$ sont linéairement indépendants (i.e. il existe $\vec{a}_3(\vec{\phi}) = \vec{a}_1(\vec{\phi}) \times \vec{a}_2(\vec{\phi})/|\vec{a}_1(\vec{\phi}) \times \vec{a}_2(\vec{\phi})|$). Alors pour tout $\vec{\psi} \in (C^3(\bar{\Omega}))^3$ on vérifie :

$$\partial_{\vec{\phi}} \vec{a}_{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = \vec{\psi}_{,\alpha} \tag{3.2.8}$$

$$\partial_{\vec{\phi}} a_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = \vec{a}_{\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\alpha} + \vec{a}_{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\beta} \tag{3.2.9}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, a(\vec{\phi}).\vec{\psi} = 2a(\vec{\phi})(\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) \tag{3.2.10}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi} = -\,(\vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}) \tag{3.2.11}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = -\,(\vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}) + a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})(\vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}_3(\vec{\phi}) \tag{3.2.12}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, a^{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = -\,[a^{\beta\mu}(\vec{\phi})\vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}) + a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})\vec{a}^{\beta}(\vec{\phi})].\vec{\psi}_{,\mu} \tag{3.2.13}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = \vec{\psi}_{,\alpha\beta} \tag{3.2.14}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\vec{\phi}).\vec{\psi} &= \vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\beta\gamma}\\ &+ [-\,\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}) + a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})b_{\beta\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}_3(\vec{\phi})].\vec{\psi}_{,\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3.2.15}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, b_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} = \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) \tag{3.2.16}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\alpha}_{\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} &= a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})(\vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\beta\mu}) - [b^{\mu}_{\beta}(\vec{\phi})\vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi})\\ &+ a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})b_{\beta\lambda}(\vec{\phi})\vec{a}^{\lambda}(\vec{\phi}) + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}(\vec{\phi})a^{\alpha\lambda}(\vec{\phi})\vec{a}_3(\vec{\phi})].\vec{\psi}_{,\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3.2.17}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\alpha}_{\beta,\gamma}(\vec{\phi}).\vec{\psi} &= a^{\alpha\mu}(\vec{a}_3.\vec{\psi}_{,\beta\gamma\mu})\\ &- [a^{\alpha\mu}b_{\gamma\lambda}\vec{a}^{\lambda} + (\Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}a^{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\lambda}a^{\alpha\lambda})\vec{a}_3].\vec{\psi}_{,\beta\mu}\\ &- [b^{\mu}_{\beta}\vec{a}^{\alpha} + a^{\alpha\mu}b_{\beta\lambda}\vec{a}^{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}a^{\alpha\lambda}\vec{a}_3].\vec{\psi}_{,\gamma\mu}\\ &- [b^{\mu}_{\beta,\gamma}\vec{a}^{\alpha} + a^{\alpha\mu}(b^{\lambda}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\lambda}_{\gamma\delta}b^{\delta}_{\beta})\vec{a}_{\lambda}\\ &\qquad - (\Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}b^{\mu}_{\beta} + b_{\beta\lambda}(\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta}a^{\mu\delta} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\delta}a^{\alpha\delta}) + \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}a^{\alpha\delta}b_{\gamma\lambda})\vec{a}^{\lambda}\\ &\qquad + (b^{\mu}_{\beta}b^{\alpha}_{\gamma} + b^{\alpha}_{\beta}b^{\mu}_{\gamma} + a^{\alpha\mu}b^{\lambda}_{\beta}b_{\gamma\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta}a^{\lambda\delta}\\ &\qquad + a^{\alpha\lambda}((\vec{a}^{\mu}.\vec{\phi}_{,\beta\gamma\lambda}) - \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\lambda} - \Gamma^{\delta}_{\beta\lambda}\Gamma^{\mu}_{\gamma\delta}))\vec{a}_3].\vec{\psi}_{,\mu}\end{aligned}\right\} \tag{3.2.18}$$

(dans cette dernière formule on a omis la dépendance en $\vec{\phi}$ pour simplifier l'expression).

Démonstration :

- Pour (3.2.8) : on utilise la linéarité de $\vec{a}_\alpha(\vec{\phi}) = \vec{\phi}_{,\alpha}$.

- Pour (3.2.9) : on part de la relation (2.1.4) et on applique (3.2.8) .

- Pour (3.2.10) : de (2.1.5) et (3.2.9), on déduit

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, a(\vec{\phi}).\vec{\psi} = 2[&(a_{22}(\vec{\phi})\vec{a}_1(\vec{\phi}) - a_{12}(\vec{\phi})\vec{a}_2(\vec{\phi})).\vec{\psi}_{,1} \\ &+ (a_{11}(\vec{\phi})\vec{a}_2(\vec{\phi}) - a_{12}(\vec{\phi})\vec{a}_1(\vec{\phi})).\vec{\psi}_{,2}] \ .\end{aligned}\right\} \tag{3.2.19}$$

Puis on utilise (2.1.6) et (2.1.7) pour obtenir (3.2.10).

- Pour (3.2.11) : de (2.1.8) (avec i = 3) et de (3.2.8), il vient

$$\left.\begin{aligned}&(\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}).\vec{a}_\mu(\vec{\phi}) = - \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu} \\ &(\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}).\vec{a}_3(\vec{\phi}) = 0\end{aligned}\right\} \tag{3.2.20}$$

d'où (3.2.11).

- Pour (3.2.12) : par un raisonnement analogue au cas précédent on obtient

$$\left.\begin{aligned}&(\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}^\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}).\vec{a}_\mu(\vec{\phi}) = - \vec{a}^\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu} \\ &(\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}^\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}).\vec{a}_3(\vec{\phi}) = a^{\alpha\mu}(\vec{\phi})(\vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\end{aligned}\right\} \tag{3.2.21}$$

d'où l'on déduit (3.2.12).

- Pour (3.2.13) : il suffit d'appliquer (3.2.12) dans la relation (2.1.9).

- Pour (3.2.14) : immédiat à partir de la linéarité de

$$\vec{a}_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}) = \vec{\phi}_{,\alpha\beta} \ . \tag{3.2.22}$$

- Pour (3.2.15) : on utilise la relation (2.1.11) et on applique les dérivées déjà calculées (3.2.12) et (3.2.14).

- Pour (3.2.16) : analogue au cas précédent ; dans la relation (2.1.10) on applique (3.2.11) et (3.2.14).

- Pour (3.2.17) : analogue aussi aux cas précédents ; dans la relation (2.1.10) on applique (3.2.13) et (3.2.16).

- Pour (3.2.18) : on l'obtient à partir de (3.2.17) simplement par dérivation par rapport à ξ^β. Pourtant nous rappelons quelques relations que nous avons utilisé dans le développement

$$\left.\begin{aligned}
&a^{\alpha\beta}_{,\gamma} = -(a^{\beta\lambda}\Gamma^\alpha_{\gamma\lambda} + a^{\alpha\lambda}\Gamma^\beta_{\gamma\lambda}) \\
&\vec{a}^\alpha_{,\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\vec{a}^\lambda + b^\alpha_\beta\vec{a}_3 \\
&\vec{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\lambda}\vec{a}^\lambda = -b^\lambda_\alpha\vec{a}_\lambda \\
&\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\lambda} = -\Gamma^\alpha_{\lambda\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} + b^\alpha_\lambda b_{\beta\gamma} + (\vec{a}^\alpha.\vec{\phi}_{,\beta\gamma\lambda}) \\
&\vec{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\vec{a}_\lambda + b_{\alpha\beta}\vec{a}_3 \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (3.2.23)$$

□

<u>3.2.1. Calcul de</u> $\partial_{\vec{\phi}}\,(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\,\sqrt{a(\vec{\phi})}).\vec{\psi}$

A l'aide de la relation (2.3.8), on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\partial_{\vec{\phi}}\,(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\,\sqrt{a(\vec{\phi})}).\vec{\psi} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\,[(\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\alpha\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi})a^{\beta\gamma}(\vec{\phi}) \\
&+ a^{\alpha\lambda}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\beta\gamma}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\alpha\gamma}(\vec{\phi}).\vec{\psi})a^{\beta\lambda}(\vec{\phi}) \\
&+ a^{\alpha\gamma}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\beta\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + \frac{2\nu}{1-\nu}\,((\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})a^{\lambda\gamma}(\vec{\phi}) \\
&+ a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\,a^{\lambda\gamma}(\vec{\phi}).\vec{\psi}))]\,\sqrt{a(\vec{\phi})} + E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\,\frac{\partial_{\vec{\phi}}\,a(\vec{\phi}).\vec{\psi}}{2\sqrt{a(\vec{\phi})}} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (3.2.24)$$

On utilise maintenant (3.2.10) et (3.2.13), d'où

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_{\vec{\phi}}\,(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\,\sqrt{a(\vec{\phi})}).\vec{\psi} \\
&\quad = \sqrt{a(\vec{\phi})}\,[E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^\mu(\vec{\phi}) - E^{\mu\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^\alpha(\vec{\phi}) \\
&\quad - E^{\alpha\mu\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^\beta(\vec{\phi}) - E^{\alpha\beta\mu\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^\lambda(\vec{\phi}) - E^{\alpha\beta\lambda\mu}(\vec{\phi})\vec{a}^\gamma(\vec{\phi})].\vec{\psi}_{,\mu} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (3.2.25)$$

3.2.2. Calcul de $\partial_{\vec{\phi}}\, \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi}$

Le calcul effectif de cette dérivée suppose que l'on ait défini au préalable le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$. Or nous avons vu dans le paragraphe 2.5 différents choix possibles. Nous nous limiterons ici au cas 2.5.1 correspondant à des équations linéaires générales. Un calcul analogue permettrait d'obtenir cette dérivée dans les autres cas, linéaires ou non. Nous partons donc de l'expression (2.5.1), i.e.

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}) = \frac{1}{2}\,(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_{\nu} - b_{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_3 \quad . \tag{3.2.26}$$

Dans cette expression nous avons explicitement indiqué les dépendances en $\vec{\phi}$ des divers paramètres ; notons en particulier que les composantes u_i sont indépendantes de $\vec{\phi}$ (voir remarque 2.3.1). Il s'ensuit

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi} = &- (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})u_{\nu} \\ &- (\partial_{\vec{\phi}}\, b_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})u_3 \quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.2.27}$$

En reportant les relations (3.2.15) et (3.2.16) dans (3.2.27) on obtient une expression finale de la dérivée (3.26). Pourtant nous préférons (3.2.27), sous la forme d'une fonction de fonction, qui est bien adaptée à l'implémentation.

3.2.3. Calcul de $\partial_{\vec{\phi}}\, \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi}$

Comme dans la section précédente nous retenons l'expression (2.5.2) de $\rho_{\alpha\beta}$ correspondant à des équations linéaires générales, i.e.

$$\left.\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}) = u_{3,\alpha\beta} &- \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_{3,\nu} - b^{\lambda}_{\alpha}(\vec{\phi})b_{\beta\lambda}(\vec{\phi})u_3 + b^{\nu}_{\beta}(\vec{\phi})u_{\nu,\alpha} \\ &+ b^{\nu}_{\alpha}(\vec{\phi})u_{\nu,\beta} + [b^{\nu}_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}) - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(\vec{\phi})b^{\nu}_{\lambda}(\vec{\phi}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}(\vec{\phi})b^{\lambda}_{\beta}(\vec{\phi})]u_{\nu} \quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.2.28}$$

D'où, il vient

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi} = &- (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})u_{3,\nu} \\ &- [(\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\lambda}_{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi})b_{\beta\lambda}(\vec{\phi}) + b^{\lambda}_{\alpha}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b_{\beta\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi})]u_3 \\ &+ (\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\nu}_{\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})u_{\nu,\alpha} + (\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\nu}_{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi})u_{\nu,\beta} \\ &+ [\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\nu}_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} - (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})b^{\nu}_{\lambda}(\vec{\phi}) - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\nu}_{\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \\ &- (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi})b^{\lambda}_{\beta}(\vec{\phi}) - \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\lambda}_{\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi})]u_{\nu} \quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.2.29}$$

A nouveau, à l'aide du lemme 3.2.1 nous pouvons obtenir une expression finale de la dérivée (3.2.7).

En résumé nous écrivons

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_{\Phi}\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\Psi = \partial_{\vec{\phi}}\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\vec{\psi} + \partial_{e}\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\epsilon \\
&\quad = \int_{\Omega} e[(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}) - E^{\mu\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^{\alpha}(\vec{\phi}) - E^{\alpha\mu\lambda\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^{\beta}(\vec{\phi}) \\
&\qquad\qquad - E^{\alpha\beta\mu\gamma}(\vec{\phi})\vec{a}^{\lambda}(\vec{\phi}) - E^{\alpha\beta\lambda\mu}(\vec{\phi})\vec{a}^{\gamma}(\vec{\phi})).\vec{\psi}_{,\mu}] \\
&\qquad\qquad \times [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) + \frac{e^2}{12}\,\rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})]\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\,d\xi^1 d\xi^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})[(\partial_{\vec{\phi}}\,\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})(\partial_{\vec{\phi}}\,\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}).\vec{\psi}) \\
&\quad + \frac{e^2}{12}\,((\partial_{\vec{\phi}}\,\rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u}).\vec{\psi})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&\qquad\qquad + \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})(\partial_{\vec{\phi}}\,\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}).\vec{\psi}))]\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\,d\xi^1 d\xi^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \epsilon E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec{\phi})[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v}) \\
&\qquad\qquad + \frac{e^2}{4}\,\rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})]\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\,d\xi^1 d\xi^2
\end{aligned}\right\} (3.2.30)$$

où les dérivées en $\vec{\phi}$ des tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ sont données par les relations (3.2.27) et (3.2.29) respectivement.

<u>Remarque 3.2.1</u> : Optimisation des propriétés mécaniques du matériau. Dans la présentation précédente, nous nous sommes limités à l'optimisation de la forme de la coque en utilisant comme paramètres d'optimisation l'application $\vec{\phi}$ qui définit la surface moyenne et l'application e qui définit l'épaisseur. On pourrait, de façon entièrement analogue, optimiser les propriétés mécaniques du matériau. En se reportant à l'expression (2.3.8), les paramètres d'optimisation pourraient être le module du Young E et le coefficient de Poisson ν.

Pour combiner ces deux types d'optimisation (i.e. la forme et les propriétés mécaniques), on introduirait l'ensemble $\Phi = (\vec{\phi},e,E,\nu)$ des paramètres d'optimisation et l'accroissement correspondant $\Psi = (\vec{\psi},\epsilon,F,\eta)$.

Alors, à l'expression (3.2.2) qui ne prenait en compte que la partie optimisation de forme, il conviendrait de rajouter les dérivées partielles relatives à E et ν, i.e.

$$\left.\begin{aligned}\partial_E\ a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).F = \int_\Omega \frac{eF}{2(1+\nu)}\ &(a^{\alpha\lambda}(\vec{\phi})a^{\beta\gamma}(\vec{\phi}) + a^{\alpha\gamma}(\vec{\phi})a^{\beta\lambda}(\vec{\phi})\\ &+ \frac{2\nu}{1-\nu}\ a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})a^{\lambda\gamma}(\vec{\phi}))[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})\\ &\qquad + \frac{e^2}{12}\ \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})]\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\}(3.2.31)$$

et

$$\left.\begin{aligned}\partial_\nu\ a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\eta = \int_\Omega \frac{-eE\eta}{2(1+\nu)^2}\ &(a^{\alpha\lambda}(\vec{\phi})a^{\beta\gamma}(\vec{\phi}) + a^{\alpha\gamma}(\vec{\phi})a^{\beta\lambda}(\vec{\phi})\\ &- \frac{2(1+\nu)^2}{(1-\nu)^2}\ a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})a^{\lambda\gamma}(\vec{\phi}))[\gamma_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\gamma_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})\\ &\qquad + \frac{e^2}{12}\ \rho_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{u})\rho_{\lambda\gamma}(\vec{\phi};\vec{v})]\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2\ .\end{aligned}\right\}(3.2.32)$$

□

3.3. Calcul de la dérivée $\partial_\Phi\ f(\Phi;\vec{v}).\Psi$

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent nous avons

$$\partial_\Phi\ f(\Phi;\vec{v}).\Psi = \partial_{\vec{\phi}}\ f(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} + \partial_e\ f(\Phi;\vec{v}).\epsilon\ . \qquad (3.3.1)$$

On va développer ci-après le calcul de chacune de ces dérivées partielles pour les différents types de charge décrits dans le paragraphe 2.7.

a) Les charges de type pression

De (2.7.14) à (2.7.16) on déduit

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\ f_1(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega p[\tfrac{1}{2}\ e_{,\beta}(a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ a^{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}))v_\alpha\\ - ((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) - \tfrac{1}{2}\ e((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})b^\alpha_\alpha(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ b^\alpha_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi})))v_3]\\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\}(3.3.2)$$

$$\partial_e\ f_1(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega \frac{p}{2}\ [\epsilon_{,\beta}a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})v_\alpha + \epsilon b^\alpha_\alpha(\vec{\phi})v_3]\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.3.3)$$

ou bien pour le cas de coques "assez minces"

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_1(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = - \int_\Omega p(\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})v_3 \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2 \tag{3.3.4}$$

$$\partial_e\, f_1(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \quad . \tag{3.3.5}$$

Remarque 3.3.1 : A nouveau, ici et par la suite, on prend une expression de la dérivée sous la forme d'une fonction de fonction. A l'aide du lemme 3.2.1 on obtiendra une expression finale des dérivées considérées.

□

b) Les charges de type gravitationnel

A partir de (2.7.19) et (2.7.20), il vient

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, f_2(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega \rho_1 g_o e[\vec{e}_3.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^i(\vec{\phi}) \\ + (\partial_{\vec{\phi}}\, \vec{a}^i(\vec{\phi}).\vec{\psi}))]v_i \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\} \tag{3.3.6}$$

$$\partial_e\, f_2(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega \rho_1 g_o \epsilon(\vec{e}_3.\vec{a}^i(\vec{\phi}))v_i \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2 \quad . \tag{3.3.7}$$

c) Les charges générales dépendantes de la géométrie

De manière analogue, on déduit de (2.7.22) à (2.7.24)

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_3(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega (\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})p^i v_i \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2 \tag{3.3.8}$$

$$\partial_e\, f_3(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \tag{3.3.9}$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_4(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a N^i v_i(\partial_{\vec{\phi}}\, L(\vec{\phi}).\vec{\psi})ds \tag{3.3.10}$$

$$\partial_e\, f_4(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \tag{3.3.11}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\, f_5(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a M^\alpha v_{3,\alpha}(\partial_{\vec{\phi}}\, L(\vec{\phi}).\vec{\psi})ds \\ + \int_b^a M^\alpha v_\beta[(\partial_{\vec{\phi}}\, b_\alpha^\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi})L(\vec{\phi}) + b_\alpha^\beta(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, L(\vec{\phi}).\vec{\psi})]ds\end{aligned}\right\} \tag{3.3.12}$$

$$\partial_e\, f_5(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \quad . \tag{3.3.13}$$

Remarque 3.3.2 : En accord avec la remarque 2.7.2, nous avons

$$\partial_{\vec{\phi}} L(\vec{\phi}).\vec{\psi} = \frac{(\partial_{\vec{\phi}} a_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \frac{dF^\alpha}{ds} \frac{dF^\beta}{ds}}{2L(\vec{\phi})} \quad . \tag{3.3.14}$$

□

d) Les charges générales indépendantes de la géométrie

De (2.7.27) à (2.7.29) on déduit

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}} f_6(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega \bar{p}^j [\vec{e}_j.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^i(\vec{\phi}) \\ + (\partial_{\vec{\phi}} \vec{a}^i(\vec{\phi}).\vec{\psi}))]v_i \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\} \tag{3.3.15}$$

$$\partial_e f_6(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \tag{3.3.16}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}} f_7(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a \bar{N}^j [\vec{e}_j.((\partial_{\vec{\phi}} L(\vec{\phi}).\vec{\psi})\vec{a}^i(\vec{\phi}) + \\ + L(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}} \vec{a}^i(\vec{\phi}).\vec{\psi})]v_i\, ds\end{aligned}\right\} \tag{3.3.17}$$

$$\partial_e f_7(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \quad . \tag{3.3.18}$$

e) Les charges ponctuelles

Etant donné l'indépendance par rapport à Φ des charges ponctuelles on a

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}} f_8(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = 0 \\ \partial_e f_8(\Phi;\vec{v}).\epsilon = 0 \quad .\end{aligned}\right\} \tag{3.3.19}$$

En résumé, en rassemblant tous les résultats on a

$$\partial_{\vec{\phi}} f(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \sum_{I=1}^{7} \partial_{\vec{\phi}} f_I(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} \tag{3.3.20}$$

$$\partial_e f(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \partial_e f_1(\Phi;\vec{v}).\epsilon + \partial_e f_2(\Phi;\vec{v}).\epsilon \quad . \tag{3.3.21}$$

3.4. Une autre expression de la dérivée $\partial_\Phi a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\Psi$ bien adaptée à l'implémentation

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe 2.7.1, nous prenons maintenant chacune des intégrales de la relation (3.2.30), que nous écrivons

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega e[(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\mu}(\vec\phi) - E^{\mu\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\alpha}(\vec\phi) - E^{\alpha\mu\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\beta}(\vec\phi)\\&\qquad - E^{\alpha\beta\mu\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\lambda}(\vec\phi) - E^{\alpha\beta\lambda\mu}(\vec\phi)\vec a^{\gamma}(\vec\phi)).\vec\psi_{,\mu}]\\&\quad\times [\gamma_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u)\gamma_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v) + \frac{e^2}{12}\rho_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u)\rho_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v)]\sqrt{a(\vec\phi)}\,d\xi^1 d\xi^2\\&\qquad = \int_\Omega {}^tU[B_{IJ}(\Phi;\vec\psi)]V\,d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\}(3.4.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)[(\partial_{\vec\phi}\gamma_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u).\vec\psi)\gamma_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v) + \gamma_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u)(\partial_{\vec\phi}\gamma_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v).\vec\psi)\\&\quad + \frac{e^2}{12}((\partial_{\vec\phi}\rho_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u).\vec\psi)\rho_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v) + \rho_{\alpha\beta}(\vec\phi,\vec u)(\partial_{\vec\phi}\rho_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v).\vec\psi))]\\&\qquad\sqrt{a(\vec\phi)}\,d\xi^1 d\xi^2 = \int_\Omega {}^tU[C_{IJ}(\Phi;\vec\psi)]V\,d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\}(3.4.2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega \epsilon E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)[\gamma_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u)\gamma_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v) + \frac{e^2}{4}\rho_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec u)\rho_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec v)]\sqrt{a(\vec\phi)}\,d\xi^1 d\xi^2\\&\quad = \int_\Omega {}^tU[D_{IJ}(\Phi;\epsilon)]V\,d\xi^1 d\xi^2 \quad .\end{aligned}\right\}(3.4.3)$$

Nous faisons maintenant une description des matrices symétriques, de dimension 12×12, $[B_{IJ}]$, $[C_{IJ}]$ et $[D_{IJ}]$

$$\left.\begin{aligned}&[B_{IJ}(\Phi;\vec\psi)] = e[(E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\mu}(\vec\phi) - E^{\mu\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\alpha}(\vec\phi) - E^{\alpha\mu\lambda\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\beta}(\vec\phi)\\&\qquad - E^{\alpha\beta\mu\gamma}(\vec\phi)\vec a^{\lambda}(\vec\phi) - E^{\alpha\beta\lambda\mu}(\vec\phi)\vec a^{\gamma}(\vec\phi)).\vec\psi_{,\mu}]\sqrt{a(\vec\phi)}\\&\qquad\quad\times[{}^t\Lambda_{\alpha\beta}(\vec\phi)\Lambda_{\lambda\gamma}(\vec\phi) + \frac{e^2}{12}{}^tM_{\alpha\beta}(\vec\phi)M_{\lambda\gamma}(\vec\phi)]\end{aligned}\right\}(3.4.4)$$

$$\left.\begin{aligned}&[C_{IJ}(\Phi;\vec\psi)] = eE^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\sqrt{a(\vec\phi)}\,[{}^tD\Lambda_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec\psi)\Lambda_{\lambda\gamma}(\vec\phi)\\&\quad + {}^t\Lambda_{\alpha\beta}(\vec\phi)D\Lambda_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec\psi) + \frac{e^2}{12}({}^tDM_{\alpha\beta}(\vec\phi;\vec\psi)M_{\lambda\gamma}(\vec\phi)\\&\quad + {}^tM_{\alpha\beta}(\vec\phi)DM_{\lambda\gamma}(\vec\phi;\vec\psi))]\end{aligned}\right\}(3.4.5)$$

$$[D_{IJ}(\Phi;\epsilon)] = \epsilon E^{\alpha\beta\lambda\gamma}(\vec\phi)\sqrt{a(\vec\phi)}\,[{}^t\Lambda_{\alpha\beta}(\vec\phi)\Lambda_{\lambda\gamma}(\vec\phi) + \frac{e^2}{4}{}^tM_{\alpha\beta}(\vec\phi)M_{\lambda\gamma}(\vec\phi)] \quad (3.4.6)$$

Les matrices, de dimension 1×12, $\Lambda_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ sont données par les relations (2.7.9) et (2.7.10) respectivement et, d'autre part, de (3.2.27) et (3.2.29) nous déduisons

$$\left.\begin{aligned} D\Lambda_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{\psi}) = [&- \partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^1_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; - \partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^2_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \\ &- \partial_{\vec{\phi}}\, b_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0] \end{aligned}\right\} \quad (3.4.7)$$

$$DM_{\alpha\beta}(\vec{\phi};\vec{\psi}) =$$

$$\left.\begin{aligned} &[\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} - (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) b^1_\lambda(\vec{\phi}) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_\lambda(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \\ &- (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^1_{\alpha\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) b^\lambda_\beta(\vec{\phi}) - \Gamma^1_{\alpha\lambda}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^\lambda_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &\delta^1_\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + \delta^1_\beta(\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &\delta^2_\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + \delta^2_\beta(\partial_{\vec{\phi}}\, b^1_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_{\alpha,\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} - (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) b^2_\lambda(\vec{\phi}) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_\lambda(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \\ &- (\partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^2_{\alpha\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) b^\lambda_\beta(\vec{\phi}) - \Gamma^2_{\alpha\lambda}(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b^\lambda_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &\delta^1_\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + \delta^1_\beta(\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &\delta^2_\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_\beta(\vec{\phi}).\vec{\psi}) + \delta^2_\beta(\partial_{\vec{\phi}}\, b^2_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &- (\partial_{\vec{\phi}}\, b^\lambda_\alpha(\vec{\phi}).\vec{\psi}) b_{\beta\lambda}(\vec{\phi}) - b^\lambda_\alpha(\vec{\phi})(\partial_{\vec{\phi}}\, b_{\beta\lambda}(\vec{\phi}).\vec{\psi}) \; ; \\ &- \partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^1_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} \; ; \; - \partial_{\vec{\phi}}\, \Gamma^2_{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi} \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0] \; . \end{aligned}\right\} \quad (3.4.8)$$

Finalement, à l'aide des matrices $[A_{IJ}]$, $[B_{IJ}]$, $[C_{IJ}]$ et $[D_{IJ}]$, données par (2.7.13), (3.4.4), (3.4.5) et (3.4.6) respectivement, nous pouvons écrire

$$a(\Phi;\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega {}^tU[A_{IJ}(\Phi)]V \; d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.4.9)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_\Phi\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\Psi = \int_\Omega {}^tU(&[B_{IJ}(\Phi;\vec{\psi})] + [C_{IJ}(\Phi;\vec{\psi})] \\ &+ [D_{IJ}(\Phi;\epsilon)])V \; d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned}\right\} \quad (3.4.10)$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega {}^tU([B_{IJ}(\Phi;\vec{\psi})] + [C_{IJ}(\Phi;\vec{\psi})])V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.4.11)$$

$$\partial_e\, a(\Phi;\vec{u},\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega {}^tU[D_{IJ}(\Phi,\epsilon)]V\, d\xi^1 d\xi^2 \quad . \qquad (3.4.12)$$

3.5. Une autre expression de la dérivée $\partial_\Phi\, f(\Phi;\vec{v}).\Psi$ bien adaptée à l'implémentation

Avec la même notation que dans le paragraphe 2.7.2, nous développons maintenant une autre expression vectorielle de la dérivée de la forme linéaire. Pour les différents types de charges étudiés nous avons :

a) Les charges de type pression

A partir de (3.3.2) à (3.3.5) il vient

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_1(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega [D_1\, F_{I1}(\Phi;\vec{\psi})]V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.1)$$

$$\partial_e\, f_1(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega [D_2\, F_{I1}(\Phi;\epsilon)]V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.2)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
&[D_1\, F_{I1}(\Phi;\vec{\psi})] = \\
&\quad p\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\ [\tfrac{1}{2}\, e_{,\beta}(a^{1\beta}(\vec{\phi})(\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) + (\partial_{\vec{\phi}}\, a^{1\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0 \\
&\qquad \tfrac{1}{2}\, e_{,\beta}(a^{2\beta}(\vec{\phi})(\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) + (\partial_{\vec{\phi}}\, a^{2\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0 \\
&\quad -((\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) - \tfrac{1}{2}\, e((\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})b^{\alpha}_{\alpha}(\vec{\phi}) + \\
&\qquad (\partial_{\vec{\phi}}\, b^{\alpha}_{\alpha}(\vec{\phi}).\vec{\psi})))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]
\end{aligned}\right\}(3.5.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[D_2\, F_{I1}(\Phi;\epsilon)] = \tfrac{1}{2}\, p\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\ [\epsilon_{,\beta}a^{1\beta}(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\quad \epsilon_{,\beta}a^{2\beta}(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \epsilon b^{\alpha}_{\alpha}(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\quad .
\end{aligned}\right\}(3.5.4)$$

Pour le cas simplifié, on a

$$\left.\begin{aligned}
&[D_1\, F_{I1}(\Phi;\vec{\psi})] = -\, p\,\sqrt{a(\vec{\phi})}\ (\vec{a}^{\mu}(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) \\
&\quad [0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]
\end{aligned}\right\}(3.5.5)$$

$$[D_2\, F_{I2}(\Phi;\epsilon)] = 0 \quad . \qquad (3.5.6)$$

b) Les charges de type gravitationnel

De (3.3.6) et (3.3.7), on déduit

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_2(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega [D_1\ F_{I2}(\Phi;\vec{\psi})]V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.7)$$

$$\partial_e\, f_2(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega [D_2\ F_{I2}(\Phi;\epsilon)]V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.8)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
&[D_1\ F_{I2}(\Phi;\vec{\psi})] = \\
&\quad \rho_1 g_o e \sqrt{a(\vec{\phi})}\ [\vec{e}_3.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^1(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}^1(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\quad \vec{e}_3.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^2(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}^2(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\quad \vec{e}_3.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}_3(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]
\end{aligned}\right\} (3.5.9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[D_2\ F_{I2}(\Phi;\epsilon)] = \rho_1 g_o \epsilon \sqrt{a(\vec{\phi})}\ [\vec{e}_3.\vec{a}^1(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\quad \vec{e}_3.\vec{a}^2(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \vec{e}_3.\vec{a}_3(\vec{\phi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\ .
\end{aligned}\right\} (3.5.10)$$

c) Les charges générales dépendantes de la géométrie

Les relations (3.3.8), (3.3.10) et (3.3.12) s'écrivent

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_3(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega [D_1\ F_{I3}(\Phi;\vec{\psi})]V\, d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.11)$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_4(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a [D_1\ F_{I4}(\Phi;\vec{\psi})]V\, ds \qquad (3.5.12)$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\, f_5(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a [D_1\ F_{I5}(\Phi;\vec{\psi})]V\, ds \qquad (3.5.13)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
&[D_1\ F_{I3}(\Phi;\vec{\psi})] = (\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu}) \sqrt{a(\vec{\phi})}\ [p^1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\qquad p^2\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ p^3\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]
\end{aligned}\right\} (3.5.14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[D_1\ F_{I4}(\Phi;\vec{\psi})] = (\partial_{\vec{\phi}}\ L(\vec{\phi}).\vec{\psi})[N^1\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ N^2\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\
&\qquad N^3\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]
\end{aligned}\right\} (3.5.15)$$

$$\left.\begin{aligned}&[D_1\ F_{I5}(\Phi;\vec{\psi})] = \\ &\qquad [M^\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\ (b^1_\alpha(\vec{\phi})L(\vec{\phi})).\vec{\psi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ M^\alpha(\partial_{\vec{\phi}}\ (b^2_\alpha(\vec{\phi})L(\vec{\phi})).\vec{\psi})\ ; \\ &\qquad 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ M^1(\partial_{\vec{\phi}}\ L(\vec{\phi}).\vec{\psi})\ ;\ M^2(\partial_{\vec{\phi}}\ L(\vec{\phi}).\vec{\psi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\end{aligned}\right\}(3.5.16)$$

(voir (3.3.14) pour la notation $\partial_{\vec{\phi}}$ L) .

d) <u>Les charges générales indépendantes de la géométrie</u>

A nouveau, à partir de (3.3.15) et (3.3.17), il vient

$$\partial_{\vec{\phi}}\ f_6(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega [D_1\ F_{I6}(\Phi;\vec{\psi})]V\ d\xi^1 d\xi^2 \qquad (3.5.17)$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\ f_7(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_b^a [D_1\ F_{I7}(\Phi;\vec{\psi})]V\ ds \qquad (3.5.18)$$

avec

$$[D_1\ F_{I6}(\Phi;\vec{\psi})] =$$

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{a(\vec{\phi})}\ \bar{p}^j[\vec{e}_j.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^1(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}^1(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ; \\ &\qquad \vec{e}_j.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}^2(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}^2(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0 \\ &\vec{e}_j.((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\vec{a}_3(\vec{\phi}) + (\partial_{\vec{\phi}}\ \vec{a}_3(\vec{\phi}).\vec{\psi}))\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\end{aligned}\right\}(3.5.19)$$

$$\left.\begin{aligned}&[D_1\ F_{I7}(\Phi;\vec{\psi})] = \\ &\qquad \bar{N}^j[\vec{e}_j.(\partial_{\vec{\phi}}\ (L(\vec{\phi})\vec{a}^1(\vec{\phi})).\vec{\psi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \vec{e}_j.(\partial_{\vec{\phi}}\ (L(\vec{\phi})\vec{a}^2(\vec{\phi})).\vec{\psi})\ ; \\ &\qquad 0\ ;\ 0\ ;\ \vec{e}_j.(\partial_{\vec{\phi}}\ (L(\vec{\phi})\vec{a}_3(\vec{\phi})).\vec{\psi})\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0]\ .\end{aligned}\right\}(3.5.20)$$

En <u>résumé</u>, nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned}f(\Phi;\vec{v}) = &\int_\Omega [F_{IS}(\Phi)]V\ d\xi^1 d\xi^2 \\ &+ \int_b^a [F_{IL}(\Phi)]V\ ds + \sum_{i=1}^r [F^i_{IP}]V\ (\xi^1_i,\xi^2_i)\end{aligned}\right\}(3.5.21)$$

$$\partial_\Phi\ f(\Phi;\vec{v}).\Psi = \partial_{\vec{\phi}}\ f(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} + \partial_e\ f(\Phi;\vec{v}).\epsilon \qquad (3.5.22)$$

$$\partial_{\vec{\phi}}\ f(\Phi;\vec{v}).\vec{\psi} = \int_\Omega [D_1\ F_{IS}(\Phi;\vec{\psi})]V\ d\xi^1 d\xi^2 + \int_b^a [D_1\ F_{IL}(\Phi;\vec{\psi})]V\ ds \quad (3.5.23)$$

$$\partial_e\ f(\Phi;\vec{v}).\epsilon = \int_\Omega [D_2\ F_{IS}(\Phi;\epsilon)]V\ d\xi^1 d\xi^2 \tag{3.5.24}$$

où les matrices de dimension 1x12 sont données par

$$[F_{IS}(\Phi)] = [F_{I1}(\Phi)] + [F_{I2}(\Phi)] + [F_{I3}(\Phi)] + [F_{I6}(\Phi)] \tag{3.5.25}$$

$$[F_{IL}(\Phi)] = [F_{I4}(\Phi)] + [F_{I5}(\Phi)] + [F_{I7}(\Phi)] \tag{3.5.26}$$

$$\left.\begin{aligned}[D_1\ F_{IS}(\Phi;\vec{\psi})] = [D_1\ F_{I1}(\Phi;\vec{\psi})] + [D_1\ F_{I2}(\Phi;\vec{\psi})] \\ + [D_1\ F_{I3}(\Phi;\vec{\psi})] + [D_1\ F_{I6}(\Phi;\vec{\psi})]\end{aligned}\right\} \tag{3.5.27}$$

$$[D_1\ F_{IL}(\Phi;\vec{\psi})] = [D_1\ F_{I4}(\Phi;\vec{\psi})] + [D_1\ F_{I5}(\Phi;\vec{\psi})] + [D_1\ F_{I7}(\Phi;\vec{\psi})] \tag{3.5.28}$$

$$[D_2\ F_{IS}(\Phi;\epsilon)] = [D_2\ F_{I1}(\Phi;\epsilon)] + [D_2\ F_{I2}(\Phi;\epsilon)]\ . \tag{3.5.29}$$

4 - EXEMPLES DE FONCTIONNELLES

Nous développons dans ce paragraphe quelques exemples de fonctionnelles "assez régulières". Pour chacune nous donnons son expression explicite, quelques remarques sur le calcul de l'état adjoint et une expression de sa dérivée par rapport à la géométrie Φ de la coque.

Dans la pratique, on peut envisager de résoudre un problème qui utilise ces fonctionnelles ; par exemple : minimiser le poids de la coque avec, comme contraintes, des bornes sur l'épaisseur en quelques points, sur le déplacement normal, sur l'énergie de déformation, etc.

4.1. Le poids de la coque

Avec la notation utilisée dans le paragraphe 2.7, une approximation du poids de la coque est donnée par

$$j_1(\Phi) = J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi) = \int_\Omega \rho_1 g_o e\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2\ . \tag{4.1.1}$$

On remarque que cette fonctionnelle ne dépend pas de l'état $\vec{u}_\Phi$ du système ; donc

$$\partial_{\vec{u}}\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} = 0\ ,\quad \forall\vec{w} \in \vec{V} \tag{4.1.2}$$

et en conséquence pour l'état adjoint on a

$$\vec{v}_\Phi = 0 \quad . \tag{4.1.3}$$

En accord avec la relation (3.1.20) on a

$$\left.\begin{aligned} Dj_1(\Phi).\Psi &= \partial_\Phi\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi \\ &= \partial_{\vec{\phi}}\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} + \partial_e\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon \end{aligned}\right\} \tag{4.1.4}$$

avec

$$\partial_{\vec{\phi}}\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} = \int_\Omega \rho_1 g_o e(\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2 \tag{4.1.5}$$

$$\partial_e\ J_1(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon = \int_\Omega \rho_1 g_o \epsilon\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2 \quad . \tag{4.1.6}$$

4.2. L'épaisseur en un point

Soit $\xi = (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega}$; on considère la fonctionnelle

$$j_2(\Phi) = J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi) = e(\xi) \quad . \tag{4.2.1}$$

Cette fonctionnelle est indépendante de $\vec{u}_\Phi$, d'où

$$\partial_{\vec{u}}\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} = 0 \ , \qquad \forall\vec{w} \in \vec{V} \tag{4.2.2}$$

et

$$\vec{v}_\Phi = 0 \quad . \tag{4.2.3}$$

D'autre part, on a :

$$\left.\begin{aligned} Dj_2(\Phi).\Psi &= \partial_\Phi\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi \\ &= \partial_{\vec{\phi}}\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} + \partial_e\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon \end{aligned}\right\} \tag{4.2.4}$$

avec

$$\partial_{\vec{\phi}}\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} = 0 \tag{4.2.5}$$

$$\partial_e\ J_2(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon = \epsilon(\xi) \quad . \tag{4.2.6}$$

4.3. Le déplacement normal en un point

Pour $\xi = (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega}$, nous considérons maintenant la fonctionnelle

$$j_3(\Phi) = J_3(\Phi;\vec{u}_\Phi) = u_{\Phi 3}(\xi) \quad . \tag{4.3.1}$$

Tout d'abord on remarque que dans le cas où $u_{\Phi 3} \in H^2(\Omega)$, cette fonctionnelle j_3 est bien définie car on a l'injection continue

$$H^2(\Omega) \subset C^o(\bar{\Omega}) \quad . \tag{4.3.2}$$

De (4.3.2) on déduit aussi que la fonctionnelle J_3 est dérivable par rapport à $\vec{u}$ et on a :

$$\partial_{\vec{u}} J_3(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} = w_3(\xi) \quad , \qquad \forall \vec{w} \in \vec{V} \quad . \tag{4.3.3}$$

Donc l'état adjoint est à calculer (il correspond au cas d'une force concentrée de module 1 au point considéré). D'autre part, il n'y a pas dépendance explicite de J_3 par rapport à Φ ; d'où

$$\partial_\Phi J_3(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi = 0 \quad , \qquad \forall \Psi \in G \tag{4.3.4}$$

et en conséquence

$$Dj_3(\Phi).\Psi = - \partial^2_{\vec{u},\Phi} P(\Phi;\vec{u}_\Phi)(\vec{v}_\Phi;\Psi) \tag{4.3.5}$$

ou encore pour le cas linéaire

$$Dj_3(\Phi).\Psi = - \partial_\Phi a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi + \partial_\Phi f(\Phi;\vec{v}_\Phi).\Psi \quad . \tag{4.3.6}$$

4.4. L'énergie de déformation

Nous considérons la fonctionnelle

$$j_4(\Phi) = J_4(\Phi;\vec{u}_\Phi) = \frac{1}{2} a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi) \quad . \tag{4.4.1}$$

Etant donné que dans le cadre des problèmes linéaires la relation (3.1.22) est vérifiée nous pouvons écrire

$$j_4(\Phi) = \frac{1}{2} f(\Phi;\vec{u}_\Phi) \quad . \tag{4.4.2}$$

Par la suite, pour simplifier les notations, nous travaillons avec

$$j_4(\Phi) = f(\Phi;\vec{u}_\Phi) \tag{4.4.3}$$

i.e. avec l'énergie potentielle des forces extérieures.

Pour le calcul de l'état adjoint on remarque que :

$$\partial_{\vec{u}} J_4(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} = f(\Phi;\vec{w}) \quad , \qquad \forall\vec{w} \in \vec{V} \tag{4.4.4}$$

donc

$$\vec{v}_\Phi = \vec{u}_\Phi \quad . \tag{4.4.5}$$

D'autre part on a

$$\partial_\Phi J_4(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi = \partial_\Phi f(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi \tag{4.4.6}$$

donc, finalement de (4.4.5) et (4.4.6) il vient

$$Dj_4(\Phi).\Psi = - \partial_\Phi a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{u}_\Phi) + 2\partial_\Phi f(\Phi;\vec{u}_\Phi) \quad . \tag{4.4.7}$$

Cette fonctionnelle est couramment utilisée en optimisation de structures comme on peut le constater dans les livres de BANICHUCK [1983], HAUG-CHOI-KOMKOV [1986] ou PRAGER [1974].

4.5. L'énergie cinétique

Nous considérons maintenant

$$j_5(\Phi) = J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi) = \frac{1}{2} \int_\Omega (a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_{\Phi\alpha}u_{\Phi\beta} + u_{\Phi3}^2) \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2 \quad . \tag{4.5.1}$$

On remarque que (4.5.1) n'est autre que le développement de

$$j_5(\Phi) = \frac{1}{2} \int_S \vec{u}_\Phi.\vec{u}_\Phi \, dS \quad . \tag{4.5.2}$$

Pour calculer l'état adjoint nous avons

$$\partial_{\vec{u}} J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{w} = \int_\Omega (a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_{\Phi\alpha}w_\beta + u_{\Phi3}w_3) \sqrt{a(\vec{\phi})}\, d\xi^1 d\xi^2 \tag{4.5.3}$$

ce qui conduit à résoudre le problème

$$a(\Phi;\vec{v}_\Phi,\vec{w}) = \int_\Omega a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})u_{\Phi\alpha}w_\beta + u_{\Phi 3}w_3)\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2 \qquad (4.5.4)$$

(dans le cas discret, le second membre donne la "matrice de masse").

Finalement on a

$$Dj_5(\Phi).\Psi = \partial_\Phi\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi - \partial_\Phi\ a(\Phi;\vec{u}_\Phi,\vec{v}_\Phi).\Psi + \partial_\Phi\ f(\Phi;\vec{v}_\Phi).\Psi \qquad (4.5.5)$$

où

$$\partial_\Phi\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\Psi = \partial_{\vec{\phi}}\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} + \partial_e\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon \qquad (4.5.6)$$

avec

$$\left.\begin{aligned}\partial_{\vec{\phi}}\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\vec{\psi} = \frac{1}{2}\int_\Omega [((\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})a^{\alpha\beta}(\vec{\phi})\\ + (\partial_{\vec{\phi}}\ a^{\alpha\beta}(\vec{\phi}).\vec{\psi}))u_{\Phi\alpha}u_{\Phi\beta} + (\vec{a}^\mu(\vec{\phi}).\vec{\psi}_{,\mu})u^2_{\Phi 3}]\ \sqrt{a(\vec{\phi})}\ d\xi^1 d\xi^2\end{aligned}\right\} \qquad (4.5.7)$$

$$\partial_e\ J_5(\Phi;\vec{u}_\Phi).\epsilon = 0 \qquad (4.5.8)$$

BIBLIOGRAPHIE

BANICHUK, N.V. [1983] : **Optimisation of the Shapes of Elastic Bodies**, (english translation by E.J. Haug Ed.), Plenum Press.

BANICHUK, N.V. ; LARICHEV, A.D. [1984] : Optimal design problems for curvilinear shallow elements of structures, Opt. Cont. Applic. & Math., 5, 197-205.

BERNADOU, M. [1986] : Some mathematical results related to nonlinear thin shell problems, Proceedings Euromech 197 : **"Finite Rotations in Structural Mechanics"**, Ed. W. Pietraskiewicz, Lecture Notes in Engineering, 19, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

BERNADOU, M. ; BOISSERIE, J.M. [1982] : **The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations**, Birkhäuser, Boston.

BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. [1976] : Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in **Computing Methods in Applied Sciences and Engineering** (R. Glowinski and J.L. Lions, Ed.), pp. 89-136, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 134, Springer-Verlag, Berlin.

BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. ; HU, J. [1984] : On the convergence of the semi-discrete incremental method in nonlinear three-dimensional elasticity, J. Elasticity 14, pp. 425-440.

BERNADOU, M. ; LALANNE, B. [1986] : On the approximation of thin shells by "B-spline and Finite Element Methods", in **Innovative Numerical Methods in Engineering**, Edited by R.P. Shaw, J. Périaux, A. Chaudouet, J. Wu, C. Marino, C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, pp. 585-592.

BERNADOU, M. ; ODEN, J.T. [1980] : An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems, J. Math. Pures Appl. 60 (1981), pp. 285-308.

CEA, J. [1986] : Conception optimale ou indentification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût, M2AN, Vol. 20, pp. 371-402.

CHENAIS, D. [1987] : Optimal design of midsurface of shells : differentiability proof and sensitivity computation, J. Appl. Math. and Opt.

CHENAIS, D. ; ROUSSELET, B. [1984] : Différentation du champ de déplacements dans une arche par rapport à la forme de la surface moyenne en élasticité linéaire, C.R. Acad. Sci. Paris, 298, pp. 533-536.

FORTIN, M. ; GLOWINSKI, R. [1982] : **Méthodes de Lagrangien Augmenté. Application à la Résolution Numérique de Problèmes aux Limites.** Dunod-Bordas, Paris.

HAUG, E.J. ; CHOI, K.K. ; KOMKOV, V. [1986] : **Structural Design Sensitivity Analisis**, Academic Press, New York.

HLAVACEK, I. [1983] : Optimisation of the shape of axisymmetric shells, Aplikace Matematiky, 269-294.

KOITER, W.T. [1966] : On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., B69, pp. 1-54.

KOITER, W.T. [1970] : On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., B73, pp. 169-195.

LIONS, J.L. [1969] : **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires**, Dunod, Paris.

MOTA SOARES, C.A. ; MOTA SOARES, C.M. ; MATEUS, H.C. [1987] : Optimal design of vertical pressure vessels with supporting cylindrical or conical shirt, Eng. Opt.

PIETRASZKIEWICZ, W. ; SZWABOWICZ, M. [1981] : Entirely lagrangian nonlinear theory of thin shells, Archives of Mechanics 33, n°2, pp. 273-288.

PRAGER, W. [1974] : Introduction to structural optimisation, Int. Centre for Mech. Sci., Udine, n° 212, Springer-Verlag.

ROUSSELET, B. [1986] : Principes d'analyse de sensitivité, utilisation pour la conception optimale, Rapport de Recherche INRIA n° 521.

ROUSSELET, B. [1987] : Shape design sensitivity from partial differential equation to implementation, Eng. Opt. 11, pp. 151-171.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique