



Simulation numérique d'écoulements compressibles 3-D par un schéma décentré en maillage non structuré

Loula Fezoui, Hervé Steve, Vittorio Selmin

► To cite this version:

Loula Fezoui, Hervé Steve, Vittorio Selmin. Simulation numérique d'écoulements compressibles 3-D par un schéma décentré en maillage non structuré. [Rapport de recherche] RR-0825, INRIA. 1988, pp.43. [inria-00075726](https://hal.inria.fr/inria-00075726)

HAL Id: [inria-00075726](https://hal.inria.fr/inria-00075726)

<https://hal.inria.fr/inria-00075726>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 825

**SIMULATION NUMERIQUE
D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES
3-D PAR UN SCHEMA DECENTRE EN
MAILLAGE NON STRUCTURE**

**Loula FEZOU
Hervé STEVE
Vittorio SELMIN**

AVRIL 1988



**SIMULATION NUMERIQUE
D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES
3-D PAR UN SCHEMA DECENTRE
EN MAILLAGE NON STRUCTURE**

**NUMERICAL SIMULATION IN COMPRESSIBLE 3-D FLOWS
WITH AN UPWIND SCHEME ON UNSTRUCTURED MESH**

Loula FEZOUI - Hervé STEVE - Vittorio SELMIN

INRIA Sophia-Antipolis
2004, Route des Lucioles
Parc de Sophia-Antipolis 1 et 2
06560 VALBONNE



SIMULATION NUMERIQUE D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES 3-D PAR UN SCHEMA DECENTRE EN MAILLAGE NON STRUCTURE

Résumé :

Nous présentons dans ce rapport une méthode de résolution numérique d'écoulements compressibles régis par les équations d'Euler à trois dimensions d'espace. L'approche utilisée est une formulation mixte, Eléments Finis / Volumes Finis de type MUSCL s'appliquant à des maillages tétraédriques. Les flux sont calculés par décentrage et l'intégration en temps est réalisée à l'aide d'un schéma à deux pas de type prédicteur-correcteur. On présente quelques comparaisons numériques avec des résultats obtenus par une méthode de type Taylor-Galerkin en Eléments Finis.

NUMERICAL SIMULATION IN COMPRESSIBLE 3-D FLOWS WITH AN UPWIND SCHEME ON UNSTRUCTURED MESH

Abstract :

This paper deals with numerical simulations of 3-D Euler compressible flows. The scheme used relies on a MUSCL Finite Volume approach with a Finite Element tetrahedrization. Fluxes are evaluated with an upwind formulation and the time stepping is a predictor-corrector scheme. Numerical results are compared with Taylor-Galerkin calculations.

Table des Matières

1.	Introduction	1
2.	Modèle mathématique	2
	2.1. Les équations	2
	2.2. Conditions aux limites	2
	2.3. Forme quasi-linéaire et hyperbolicité	3
3.	Discrétisation	4
	3.1. Maillage et Volumes de contrôle	4
	3.2. Formulation Variationnelle	5
4.	Décomposition de flux	6
	4.1. Schéma du premier ordre	6
	4.2. Schéma précis au second ordre	8
	4.3. Schéma à deux pas	9
5.	Conditions aux bords	10
6.	Calcul du pas de temps	11
7.	Tests numériques	11
	7.1. Problème du tube à choc de Sod	11
	7.2. Ecoulement supersonique dans un canal	12
	7.3. Ecoulement transsonique dans un canal	13
	7.4. Ecoulement supersonique autour d'une aile delta	13

1. Introduction

L'utilisation des schémas décentrés pour la résolution numérique des équations d'Euler se développe considérablement depuis une dizaine d'années et la littérature sur ce sujet est très abondante. Ces schémas conçus et étudiés dans un cadre de différences et/ou Volumes finis ont été, pour beaucoup d'entre eux, étendus au cas des maillages non structurés en deux ou trois dimensions d'espace [2], [4], [14], [19] ...

Des calculs d'écoulements supersoniques à grand nombre de Mach autour d'un engin spatial ont été réalisés en appliquant une méthode associant le schéma décentré d'Osher à une formulation implicite dans laquelle le préconditionneur est construit à partir de la décomposition de flux de Steger et Warming [15].

Le but de ce rapport est d'une part de décrire l'implémentation d'une version explicite de la méthode présentée en [15], d'autre part de proposer plusieurs résultats comparant la précision du schéma avec celle de quelques schémas centrés.

Par rapport à [15] les points suivants sont nouveaux :

- Adaptation de la méthode de la décomposition de flux de B. van Leer [17].
- Etude sur quelques cas tests de l'action des limiteurs en instationnaire et en stationnaire notamment lorsque ces limiteurs sont intégrés dans une formulation explicite prédicteur-correcteur peu coûteuse.

Il existe plusieurs travaux utilisant la décomposition de van Leer en maillages structurés; nous citerons, parmi d'autres [1],[18], et plus récemment, pour calculer des écoulements réactifs [3], [6].

L'extension au cas non structuré est décrite dans [8] dans le cas bidimensionnel. Nous montrons ici que la méthode se généralise sans difficulté supplémentaire au cas tridimensionnel.

Dans la première partie, nous écrivons les équations et rappelons la discrétisation spatiale utilisée.

Les notations étant précisées, nous écrivons dans la deuxième partie le schéma explicite du premier ordre avec la décomposition de flux de van Leer.

L'extension au second ordre de précision en espace et le limiteur de pente seront décrits dans la troisième partie de ce rapport. Pour renforcer la stabilité et accélérer la convergence dans le cas stationnaire, nous utiliserons un schéma à deux pas de type prédicteur / correcteur.

La quatrième partie de ce rapport sera consacrée au traitement des conditions

aux bords : condition de glissement sur les parois et décentrage à l'infini.

Le schéma sera d'abord testé sur un cas instationnaire, le problème du tube à choc et les résultats numériques seront comparés à la solution exacte du problème monodimensionnel.

Quelques calculs stationnaires seront ensuite présentés dans la dernière partie avec une comparaison avec des résultats obtenus par une méthode de Galerkin en Éléments Finis [11] : nous présenterons d'abord un calcul sur une géométrie qui étend au cas tridimensionnel la géométrie classique d'un canal avec un dos d'âne ; puis, nous calculerons la solution stationnaire d'un écoulement supersonique autour d'une aile d'avion sans incidence à l'aide de raffinements successifs (maillage adaptatif).

2. Modèle mathématique

2.1. Les équations

Les équations d'Euler à trois dimensions d'espace s'écrivent en formulation conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(W) = 0 \quad (1)$$

où W et le flux $\vec{F} = {}^t(F, G, H)$ sont définis par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix} ; G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{pmatrix} ; H = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (E + p)w \end{pmatrix}$$

où ρ est la masse volumique, $\vec{V} = {}^t(u, v, w)$ est le vecteur champ de vitesse du fluide, E l'énergie totale par unité de volume, et où p la pression est donnée par la loi des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho \|\vec{V}\|^2 \right)$$

et γ est le rapport des chaleurs spécifiques ($\gamma = 1.4$ pour un gaz diatomique).

2.2. Conditions aux limites

On considère le problème (1) posé dans un domaine borné noté Ω . Pour un écoulement de type externe (voir figure 1) nous distinguons deux types de frontière.

La première, notée Γ_B est la frontière avec un obstacle ou corps; sur cette frontière, nous imposons une condition de glissement :

$$\vec{V} \cdot \vec{\nu} = 0$$

où $\vec{\nu}$ est la normale extérieure à Γ_B .

Sur la seconde, Γ_∞ , nous supposons que l'écoulement est uniforme :

$$W_\infty = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{V} \\ p \end{pmatrix}_\infty \quad \text{avec } \rho_\infty = 1; \quad \vec{V}_\infty = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \end{pmatrix}; \quad p_\infty = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}$$

où α est l'angle d'incidence, β l'angle de tangage et M_∞ le nombre de Mach à l'infini.

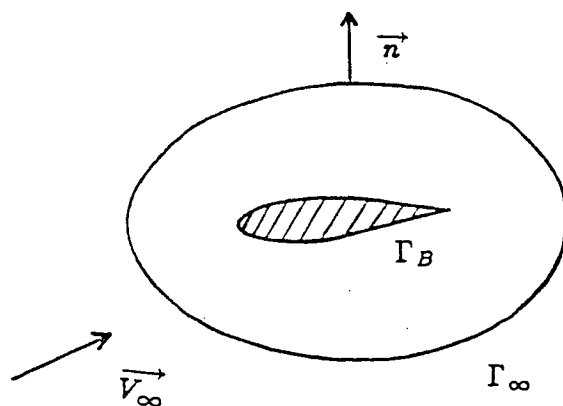


Figure 1 : Domaine de calcul Ω .

2.3. Forme quasi-linéaire et hyperbolicité

La forme quasi-linéaire associée à (1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \vec{A}(W) \cdot \vec{\nabla} W = 0$$

où \vec{A} est un élément de $(\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5)^3$ dont les composantes sont les matrices jacobiniennes des composantes de \mathcal{F} .

Soit la combinaison linéaire de flux : $\mathcal{F}_\mu(W) = \vec{\mathcal{F}}(W) \cdot \vec{\mu}$ où $\vec{\mu}$ est un vecteur non nul quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors, on rappelle que le système quasi-linéaire est hyperbolique si le jacobien $\mathcal{A}_\mu(W) = \vec{A}(W) \cdot \vec{\mu}$ est diagonalisable et à ses valeurs propres λ_k réelles pour tout $\vec{\mu}$ dans \mathbb{R}^3 et W dans \mathbb{R}^5 :

$$\lambda_1 = \vec{V} \cdot \vec{\mu} + c ; \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \vec{V} \cdot \vec{\mu} ; \lambda_5 = \vec{V} \cdot \vec{\mu} - c$$

où c est la vitesse locale du son : $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

Nous notons alors : $A = A_\mu = T^{-1} \Lambda T$ où T est une matrice de transformation inversible et Λ la matrice diagonale des valeurs propres. Posons :

$$A = A^+ + A^- ; |A| = A^+ - A^-$$

avec : $A^\pm = T^{-1} \Lambda^\pm T$ et $\Lambda^+ = \text{Diag}(\max(\lambda_k, 0))$; $\Lambda^- = \Lambda - \Lambda^+$.

3. Discrétisation

3.1. Maillage et Volumes de contrôle

On suppose que le domaine Ω est un polyèdre. On considère une tétraédrisation \mathcal{T}_h de Ω , de type Eléments Finis P_1 :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_T} T_i, \quad T_i \in \mathcal{T}_h, \quad N_T \text{ nombre de tétraèdres}$$

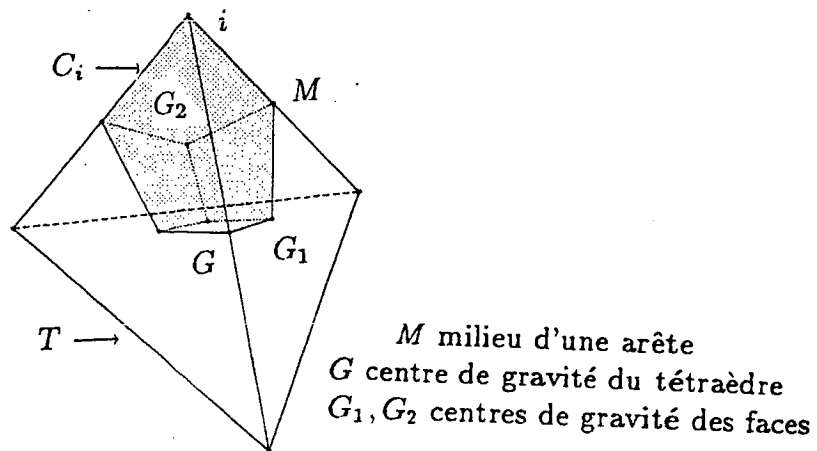


Figure 2 : Volume de contrôle : représentation de $\partial C_i \cap T$

Les noeuds de la tétraédrisation sont les sommets des tétraèdres et les degrés de liberté sont les valeurs de l'inconnue W aux noeuds ; h est la longueur maximale

des arêtes dans tout le maillage. Pour chaque sommet i ($i = 1, \dots, N_S$) de \mathcal{T}_h , on construit un volume de contrôle noté C_i comme suit :

- On subdivise chaque tétraèdre T ayant i pour sommet en 24 sous-tétraèdres ayant pour sommets: un sommet de T , le milieu d'une des trois arêtes aboutissant à ce sommet, le centre de gravité d'une des deux faces ayant cette arête pour côté, et, le centre de gravité du tétraèdre T .
- Le volume de contrôle C_i (appelé encore cellule) est la réunion de tous les sous-tétraèdres dont i est sommet.

3.2. Formulation Variationnelle

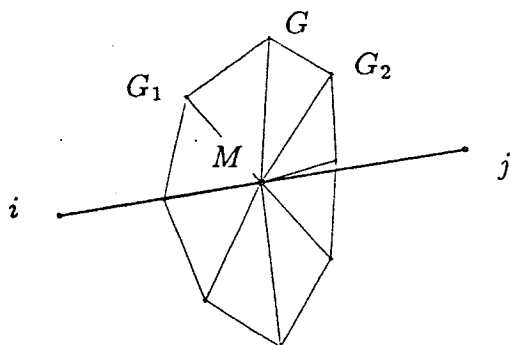
Nous rappelons que nous cherchons les solutions faibles des équations (1) :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} W + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(W) \right) \varphi \, dx dy dz = 0; \quad \varphi \text{ fonction test.} \quad (2)$$

En prenant pour fonctions tests les fonctions caractéristiques des cellules C_i , on obtient après une intégration par parties :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} W \, dx dy dz + \int_{\partial C_i} \vec{F}(W) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = 0; \quad i = 1, \dots, N_S \quad (3)$$

où ∂C_i est la frontière de C_i et $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ est le vecteur normal unitaire extérieure à ∂C_i .



M milieu d'une arête
 G centre de gravité de tétraèdres
 G_1, G_2 centres de gravité de faces

Figure 3 : Interface ∂C_{ij}

Nous utiliserons par la suite les notations suivantes :

On note $K(i)$ l'ensemble des noeuds voisins de i . On décompose la surface ∂C_i en parties ∂C_{ij} , définies par $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j$. D'où on a la relation :

$$\partial C_i = \bigcup_{j \in K(i)} \partial C_{ij}$$

Les équations (3) s'écrivent dans ces notations :

$$\int_{C_i} \frac{\partial}{\partial t} W \, dx dy dz + \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij} = 0$$

avec

$$\Phi_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \vec{F}(W) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

Avec une formule d'intégration à un point, le terme de flux Φ_{ij} se calcule comme suit :

$$\Phi_{ij} = \tilde{F} \cdot \vec{\eta}_{ij}$$

où

$$\vec{\eta}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \vec{\nu} \, d\sigma$$

et \tilde{F} est une valeur *moyenne* de F sur ∂C_{ij} , que nous allons déterminer par un décentrage reposant sur la fonction de flux numérique Φ décrite dans le paragraphe suivant.

4. Décomposition de flux

4.1. Schéma du premier ordre

Appliqué aux équations (3), le schéma explicite à un pas s'écrit :

$$mes(C_i) \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t^n} + \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n = 0 \quad (4)$$

où Φ_{ij}^n est une fonction $\Phi(W_i^n, W_j^n, \vec{\eta}_{ij})$ que nous décrirons plus loin ; $mes(C_i)$ est le volume de la cellule C_i et Δt^n est la différence entre les deux temps consécutifs t^n et t^{n+1} .

Considérons la combinaison linéaire des flux :

$$\vec{F}(W) \cdot \vec{\eta} = \eta_x F(w) + \eta_y G(w) + \eta_z H(w) ; \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix}$$

pour $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, on exprime ces composantes à l'aide des coordonnées sphériques d'angles θ et ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \cos \phi = \frac{\eta_x}{\|\vec{\eta}\|} = \tilde{\eta}_x \\ \sin \theta \cos \phi = \frac{\eta_y}{\|\vec{\eta}\|} = \tilde{\eta}_y \\ \sin \phi = \frac{\eta_z}{\|\vec{\eta}\|} = \tilde{\eta}_z \end{array} \right.$$

(Si $\eta_x = \eta_y = 0$ on prend $\theta = 0$).

On prolonge cette rotation de \mathbb{R}^3 en une transformation de \mathbb{R}^5 qui laisse identique la première et la dernière variable de W (elles sont invariantes pour toute rotation du vecteur vitesse).

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier sans peine qu'on a :

$$\|\vec{\eta}\| R^{-1} F(\vec{W}) = \vec{F}(W) \cdot \vec{\eta} \quad (5)$$

où \vec{W} désigne le produit de l'opérateur R par un vecteur W .

Cette relation, qui exprime l'invariance par rotation du flux des équations d'Euler, nous permet d'introduire et d'utiliser la décomposition sur une seule des composantes du vecteur flux.

Pour deux états W_L et W_R la fonction de flux numérique de van Leer [17] est donnée par :

$$\Phi_{vl}(W_L, W_R) = F_{vl}^+(W_L) + F_{vl}^-(W_R)$$

Pour toute valeur $W = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)$ nous avons :

$$F_{vl}^+(W) = \begin{cases} \begin{pmatrix} F & \\ & \end{pmatrix} & \text{si } M \geq 1 \\ \begin{pmatrix} +\frac{\rho c}{4} \left(\frac{u}{c} + 1\right)^2 = f_1^+ \\ \frac{f_1^+}{\gamma} ((\gamma - 1)u + 2c) \\ f_1^+ v \\ f_1^+ w \\ f_1^+ \left[\frac{((\gamma - 1)u + 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \frac{v^2 + w^2}{2} \right] \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } |M| < 1 \\ 0 & \text{si } M \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$F_{vl}^-(W) = F(W) - F_{vl}^+(W)$$

où M est le nombre de Mach local défini par $M = \frac{u}{c}$.

D'où nous déduisons le schéma explicite (4) d'ordre un :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{mes(C_i)} \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n \quad (7a)$$

$$\begin{cases} \Phi_{ij}^n = \Phi(W_i^n, W_j^n, \vec{\eta}_{ij}) = \|\vec{\eta}_{ij}\| R^{-1} [F^+(\vec{W}_i) + F^-(\vec{W}_j)] \\ \vec{W} = R \cdot W \end{cases} \quad (7b)$$

Nous renvoyons à [17] et [1] pour une étude détaillée de ce schéma et à [8] pour la version bidimensionnelle.

4.2. Schéma précis au second ordre

La construction d'un flux précis au second ordre se fait de façon analogue au 2-D. Nous rappelons brièvement cette méthode (baptisée MUSCL-FEM), pour plus de détails on se référera par exemple à [4].

On définit des gradients approchés des inconnues W au moyen de l'interpolation de Galerkin. Pour la dérivée en x par exemple, on a pour chaque noeud i :

$$(W_x)_i = \frac{\int_{Supp(\varphi_i)} W_x dx dy}{\int_{Supp(\varphi_i)} dx dy}$$

où φ_i est la fonction de base P_1 au sommet i (son support est la réunion de tous les tétraèdres ayant i comme sommet). On peut calculer ainsi deux valeurs de W sur l'arête $[i, j]$, de part et d'autre de la frontière de la cellule C_i :

$$\begin{cases} W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}W)_i \cdot \vec{i}\vec{j} \\ W_{ji} = W_j - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}W)_j \cdot \vec{i}\vec{j} \end{cases}$$

où $(\vec{\nabla}W)_i$ est le gradient de W en i de composantes $^t((W_x)_i, (W_y)_i)$.

On obtient alors le schéma explicite d'ordre deux en espace en écrivant le flux numérique à l'aide des nouvelles valeurs d'interpolation :

$$\Phi_{ij}^n = \Phi_{ul}(W_{ij}^n, W_{ji}^n, \tilde{\eta}_{ij}) \quad (8a)$$

Le schéma construit à partir des flux définis par (8a) n'est pas monotone. Des oscillations numériques peuvent se produire et la stabilité risque alors d'être fortement perturbée. Pour atténuer ces oscillations, on introduit une limitation de type monodimensionnelle (à partir des valeurs sur la droite (i, j)) ; nous utilisons ici le *limiteur* proposé par B. van Leer [16] pour évaluer de nouvelles valeurs :

$$\begin{cases} W_{ij}^l = W_i + \frac{1}{2} \text{Lim}^{vl}(2(\vec{\nabla}W)_i \cdot \vec{i}_j - (W_j - W_i), W_j - W_i) \\ W_{ji}^l = W_j - \frac{1}{2} \text{Lim}^{vl}(2(\vec{\nabla}W)_j \cdot \vec{i}_j - (W_j - W_i), W_j - W_i) \end{cases}$$

où : $\text{Lim}^{vl}(a, b) = \frac{(a+b)(ab + |ab| + \varepsilon)}{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}$, et ε est un nombre réel positif petit.

Les gradients et la procédure de limitation définie ci-dessus sont appliqués aux variables dites primitives (ρ, \vec{V}, p) , on évalue les flux calculés en variables conservatives : $(\rho, \vec{V}, p) \rightarrow (\rho, \rho\vec{V}, p)$.

Le schéma explicite d'ordre deux avec limiteurs est alors obtenu en remplaçant (7b) par :

$$\Phi_{ij}^n = \Phi_{ul}(W_{ij}^l, W_{ji}^l, \tilde{\eta}_{ij}) \quad (8b)$$

4.3. Schéma à deux pas

Les schémas (7) et (8) reposent sur une approximation d'ordre un en temps. On peut aisément augmenter cette précision en introduisant un schéma à deux pas de type prédictor-correcteur. De plus ce schéma est plus stable que le schéma explicite à un pas quand les flux sont approchés à l'ordre deux. On se référera à [5] pour une étude comparée des stabilités linéaires de ces schémas.

Prédiction : Le calcul est effectué en variables primitives :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_i &= W_i^n + \frac{\Delta t^n}{2} \vec{F}'(W_i^n) \cdot \vec{\nabla} W_i^n \\ \text{avec } \vec{F}' &= \begin{pmatrix} F' \\ G' \\ H' \end{pmatrix} ; \quad F' = \frac{\partial F}{\partial W} ; \quad G' = \frac{\partial G}{\partial W} ; \quad H' = \frac{\partial H}{\partial W} \end{aligned} \quad (9a)$$

Correction : On calcule les valeurs aux interfaces des cellules à partir de \tilde{W}

$$\tilde{W}_{ij} = \tilde{W}_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} W_i^n \cdot \vec{i}_{ij}$$

Après l'utilisation éventuelle des limiteurs, on convertit les champs \tilde{W}_{ij} en variables conservatives et le schéma (4) devient :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t^n}{mes(C_i)} \sum_{j \in K(i)} \tilde{\Phi}_{ij} \quad (9b)$$

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \Phi(\tilde{W}_{ij}^l, \tilde{W}_{ji}^l, \tilde{\eta}_{ij})$$

5. Conditions aux bords

Nous avons considéré jusqu'ici le calcul des seuls flux internes; le schéma (4) avec les termes de bord s'écrit :

$$mes(C_i) \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t^n} + \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_B} \vec{F}(\overline{W}^n) \cdot \vec{\nu} d\sigma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{F}(\overline{W}^n) \cdot \vec{\nu} d\sigma = 0 \quad (10)$$

Les conditions aux bords du problème physique à résoudre sont prises en compte dans le calcul des deux intégrales de bord qui apparaissent dans (10) à travers la définition de \overline{W}^n .

Condition de glissement

Quand on applique la condition $\vec{V} \cdot \vec{\eta} = 0$, seuls les termes de pression interviennent dans le calcul de flux sur le bord Γ_B ; on a :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_B} \vec{F}(\overline{W}^n) \cdot \vec{\nu} d\sigma = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_B} p \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_x \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma$$

où $p = p(W^n)$ est la pression au noeud i .

Remarque : La condition de glissement se trouve ainsi vérifiée de façon seulement variationnelle.

Condition à l'infini

On considère maintenant le deuxième terme de bord de (10).

Nous reprenons le même procédé que pour les flux internes et on écrit :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{F}(\bar{W}^n) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \Phi(W_i^n, W_\infty, \vec{\eta}_i)$$

où W_∞ est défini au paragraphe I.2, et $\vec{\eta}_i$ le vecteur normal moyen sur $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$. Nous allons utiliser à nouveau un décentrage entre le champ W_i^n calculé au noeud i et le champ donné à l'infini W_∞ ; la fonction de flux choisie dans ce cas est celle de Steger-Warming :

$$\Phi(W_i^n, W_\infty, \vec{\eta}_{ij}) = \mathcal{A}^+(W_i^n, \vec{\eta}_{ij})W_i^n + \mathcal{A}^-(W_\infty, \vec{\eta}_{ij})W_\infty$$

On pourra se référer à [10] pour la description détaillée de la décomposition utilisée.

6. Calcul du pas de temps

Pour accélérer la convergence vers l'état stationnaire, quand il existe, nous utilisons un calcul local par cellules du pas de temps introduit en [4] pour des schémas 2-D. Pour chaque cellule C_i nous avons :

$$\Delta t_i^n = CFL \min_{T, i \in T} \left(\frac{h_i}{\max_{k=1,4} \lambda_{max_k}} \right)$$

où CFL désigne un coefficient correspondant au nombre de Courant-Friedrichs-Lewy, h_i est la hauteur minimale issue du tétraèdre T et λ_{max_k} est la valeur propre maximale à l'instant n du k^{ieme} noeud du tétraèdre T . Le minimum est pris pour tous les tétraèdres ayant i pour sommet.

Pour les calculs stationnaires, le pas de temps uniforme Δt^n est évalué par :

$$\Delta t^n = \min_{i=1, \dots, N_s} \Delta t_i^n$$

7. Tests numériques

7.1. Problème du tube à choc de Sod

Nous comparons le comportement des schémas centrés décrits dans [11] et des schémas décentrés sur le problème de tube à choc de Sod en 3-D. La géométrie est

un cube de volume 1 ; la discrétisation est régulière, elle contient (voir Figure 1.1) $101 \times 3 \times 3 = 909$ nœuds. La condition initiale au temps $t = 0$ est donnée :

$$\begin{cases} \rho = 1 ; \vec{V} = \vec{0} ; p = 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \rho = \frac{1}{8} ; \vec{V} = \vec{0} ; p = \frac{1}{10} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Nous présentons la solution au temps $t = 0.16$. Le nombre de Courant (CFL) utilisé est de 0.8. La Figure 1.2 représente la solution obtenue avec le schéma de van Leer d'ordre un : on peut vérifier sur ce résultat que le schéma est bien monotone (absence d'oscillation), le choc est capturé en trois points. Cependant la solution est peu précise sur la discontinuité de contact; cela est dû à une dissipation numérique importante.

Nous avons représenté sur les figures 1.3 les solutions des schémas d'ordre deux (8) et (9) : schémas à un pas en temps, prédictor-correcteur et limiteur. La figure (1.3a) correspond au schéma à un pas avec limiteur. Ce schéma s'est révélé non monotone, les oscillations numériques produites ont été atténuées par le limiteur sans toutefois disparaître ; seules les discontinuités sont bien capturées (choc sur un point). Les solutions des figures (1.3b) et (1.3c) sont obtenues par le schéma prédictor-correcteur (9a)-(9b) respectivement sans et avec limiteurs : une amélioration sensible est observée par rapport au résultat précédent. En effet, le schéma sans prédictor est linéairement instable comme le montre aisément une analyse de Fourier [13]. Dans le cas non linéaire, l'introduction d'un limiteur tend à le stabiliser. La présence d'oscillations dans la solution obtenue par le schéma à deux pas sans limiteur montre un défaut de monotonie (1.3b). Ces oscillations peuvent être atténuées ou même disparaître par application des limiteurs (1.3c).

Nous comparons maintenant ces résultats avec ceux obtenus avec des schémas centrés dont la description est donnée dans [11]. Une solution avec un schéma centré TVD est représentée sur la figure (1.4). Cette solution est moins précise que les précédentes (schémas décentrés), le choc est cependant bien capturé sur deux points. Les schémas centrés avec viscosité artificielle [11] donne des résultats plus précis (Figures 1.5 et 1.6) avec toutefois des oscillations parasites.

7.2. *Ecoulement supersonique dans un canal*

La géométrie utilisée est un canal avec un obstacle en arc de cercle. La discrétisation est très grossière : $31 \times 8 \times 3$ nœuds. Nous cherchons la solution stationnaire d'un écoulement dans le canal avec un nombre de Mach de $M_\infty = 2.0$. Nous avons mené la convergence jusqu'au zéro machine (voir Figure 2) en ordre un et en ordre

deux avec un schéma prédicteur-correcteur avec limiteurs (nous avons observé que la phase de prédiction est essentielle pour obtenir la convergence). De plus, les vitesses de convergence sont voisines en ordre un et deux, ce résultat n'est pas d'une portée très générale dans la mesure où ce maillage est très grossier.

7.3. *Ecoulement transsonique dans un canal*

La géométrie est semblable à celle utilisée précédemment : Le pavé est de dimensions $5 \times 2 \times 1/2$. La hauteur maximale de l'obstacle est de 4,2%. La discrétisation (maillage à directions privilégiées) est différente de celle utilisée dans [2] (maillage croisé dans certaines directions). Le nombre de nœuds utilisé est de $73 \times 21 \times 3 = 4599$ (Figure 3.1). L'écoulement choisi est transsonique : $M_\infty = 0.85$.

Nous comparons à nouveau les différents schémas : décentrés ordre un (Figure 3.2), ordre deux (Figure 3.3) et centré avec viscosité artificielle (Figure 3.4). Le schéma de van Leer en ordre deux ne laisse qu'un seul point dans le choc (voir les courbes de Mach le long du profil), ce qui n'est pas le cas des autres schémas. De plus, la convergence vers la solution stationnaire est difficile à obtenir dans le cas centré quelque soit la méthode utilisée (méthode TVD ou méthode avec viscosité artificielle) : voir la courbe de convergence 3.5b. La quasi-convergence (avec une erreur résiduelle de 10^{-4}) est obtenue dans le cas décentré en 5600 itérations en ordre un pour une valeur du CFL de 0.7. En ordre deux, le calcul est très coûteux : nous estimons à 8000 le nombre d'itérations nécessaire à l'obtention de la solution stationnaire pour le même niveau de convergence, ce qui nécessiterait plus de 1 heure CPU de calcul sur Cray-2 en monoprocesseur avec une version *vectorielle* (le coût de l'itération est de 108 microsecondes par sommet) : ce chiffre s'explique en partie par la raideur du problème. La solution précise à l'ordre deux présentée ici (Figure 3.3) a été calculée, en réalité, à l'aide d'un code 3-D beaucoup plus performant (de type multigrille, présenté dans [9]).

Des calculs sur cette géométrie ont été réalisés par V. Billey [2] à l'aide d'un schéma explicite décentré dû à Vijayasundaram. Ce auteur obtient la convergence en ordre un avec une erreur résiduelle divisée par 1000 après 6000 itérations, ce qui est moins rapide que le schéma présenté, car, pour un nombre identique d'itérations l'état stationnaire est atteint avec un ordre de grandeur supplémentaire dans la convergence.

7.4. *Ecoulement supersonique autour d'une aile delta*

Dans cette expérience, on considère un écoulement supersonique (le nombre de Mach à l'infini est de 1.5) autour d'une demi-aile d'avion de type delta de flèche 45 degrés, d'épaisseur maximale relative 4,2% et sans incidence. Pour des raisons

de symétrie, nous nous sommes limités à un calcul de l'extrados (partie supérieure de l'aile). Cette fois, l'écoulement est réellement tridimensionnel de par la flèche de l'aile.

Le maillage est obtenu par la déformation d'un cube, il contient 3597 nœuds (Figure 4.2). Nous avons au préalable opéré un raffinement local à partir d'un maillage régulier et uniforme de 1056 nœuds (Figure 4.1). La technique de raffinement est décrite dans [11] : elle consiste à subdiviser un tétraèdre en 2,4 ou 8 suivant le nombre d'arêtes du tétraèdre vérifiant le critère du raffinement; puis les régions divisées et non divisées sont raccordées par un découpage *ad hoc* des éléments riverains.

Le nombre de Courant utilisé est de 0.6. Avec le schéma de van Leer, nous obtenons la solution stationnaire après 500 itérations en ordre un et après 650 itérations en ordre deux avec le schéma à deux pas (prédiction-correction) (Voir courbes de convergence 4.3a et 4.3b)

A partir de ce résultat, nous avons raffiné localement le maillage suivant les zones de création d'entropie de cette solution. Nous avons obtenu un nouveau maillage peu différent de celui d'un maillage provenant d'un calcul centré (Figures 4.4a et 4.4b) : le nombre de nœuds est de 5960 (en décentré) et de 5891 (en centré). Les vues globales du maillage avant et après la division locale sont présentées sur les Figures 4.5a et 4.5b.

Nous calculons alors la solution stationnaire précise à l'ordre deux après initialisation de la solution calculée à partir du premier maillage. Les vitesses de convergence restent du même ordre en centré (méthode de la viscosité artificielle et TVD) et en décentré (voir courbes de convergence 4.6). Toutefois, nous tenons à préciser que la partie supérieure du domaine de calcul est absorbante dans le cas des schémas centrés tandis qu'elle représente une paroi solide dans le cas des schémas décentrés. Les solutions centrées et décentrées sont très voisines en ce qui concerne les lignes de C_p (coefficient de pression) : (Figures 4.7a et 4.7b) et les lignes de Mach (Figures 4.8a et 4.8b); cependant, le niveau maximal de création d'entropie est différent : presque deux fois plus élevé avec le schéma de van Leer (très visqueux) qu'avec le schéma centré pour un bon ajustement de la viscosité artificielle (Figures 4.9a et 4.9b).

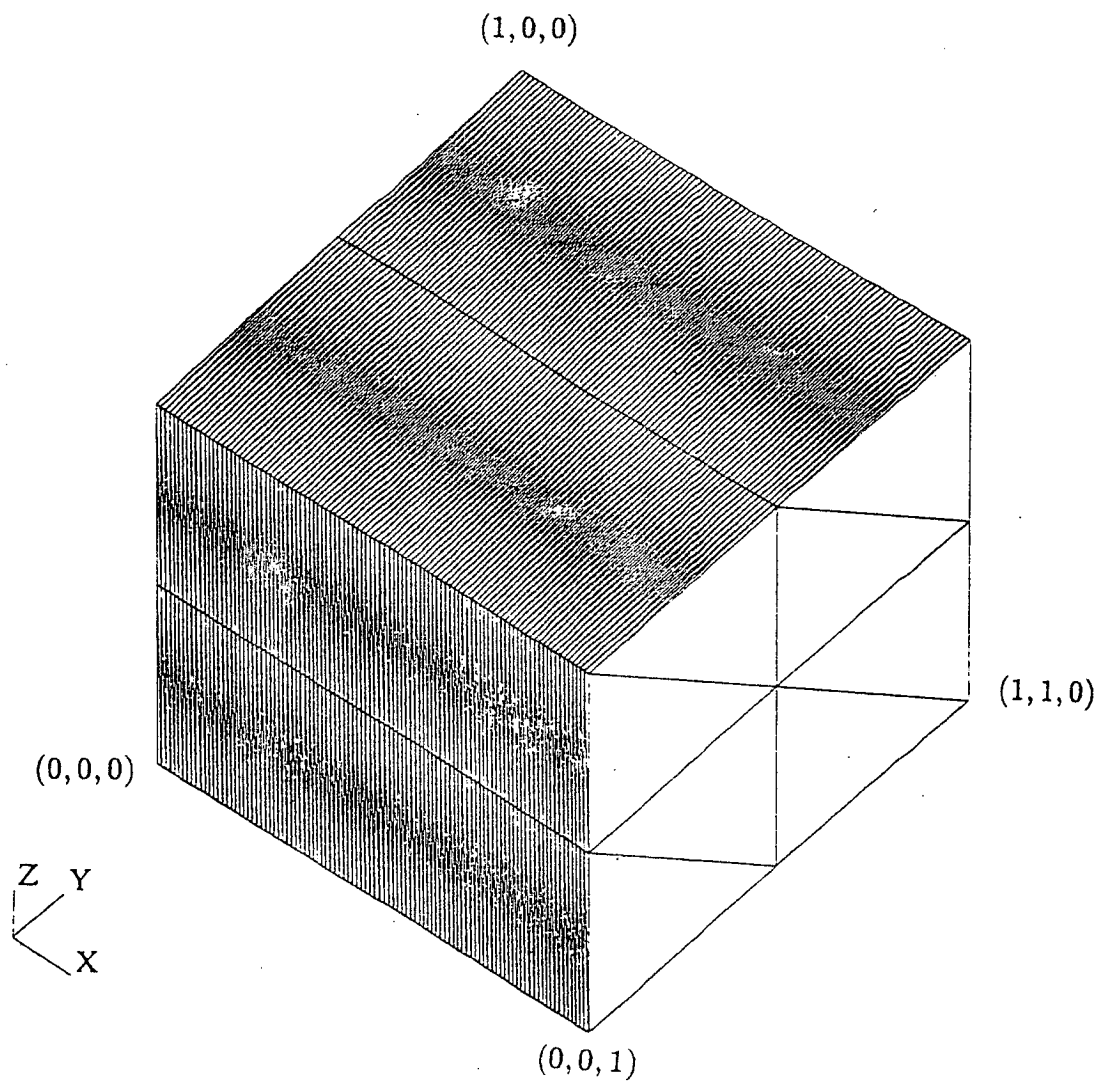


Figure 1.1 : MAILLAGE DU TUBE A CHOC 3-D : 909 points

Solutions calculées en $Y = Z = 0.5$

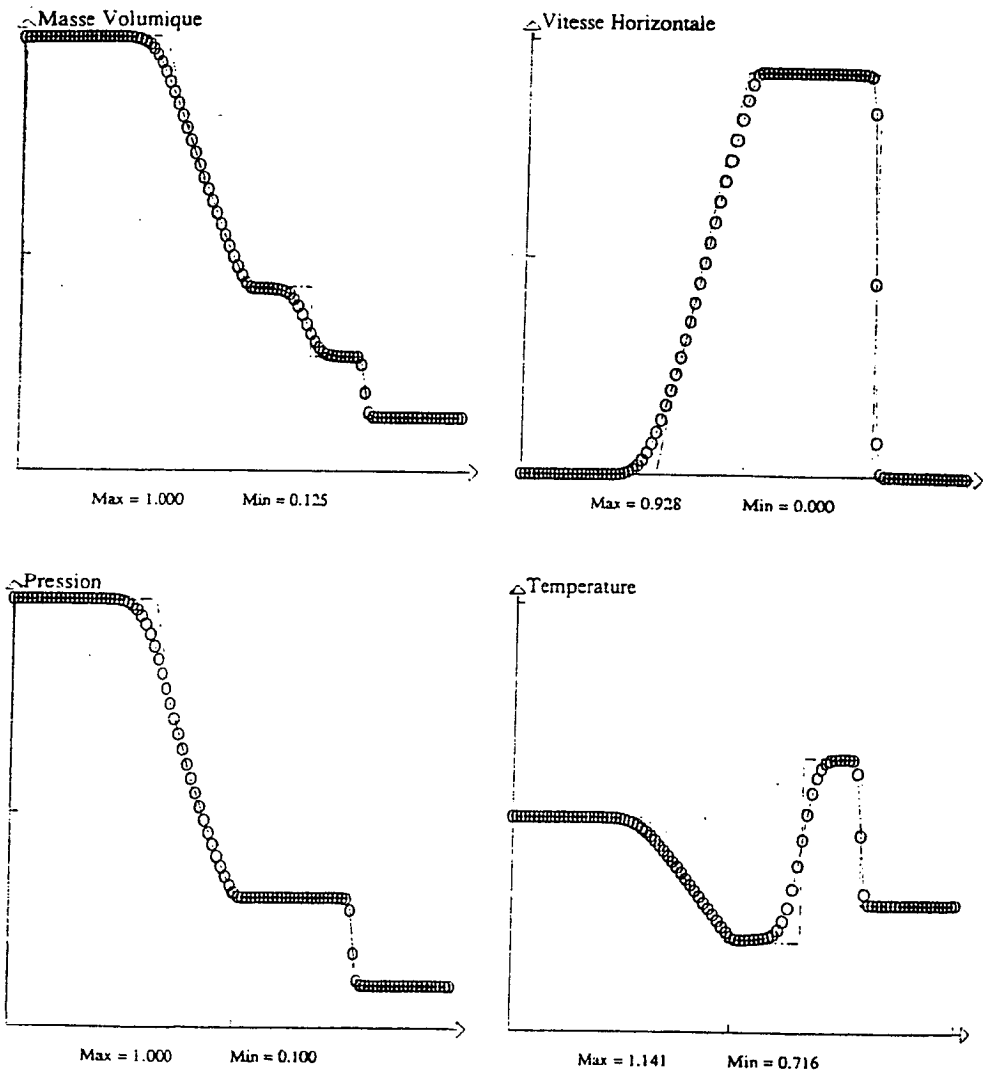


Figure 1.2 : TUBE A CHOC 3-D, Schéma de van Leer ordre un, $CFL = 0.8$

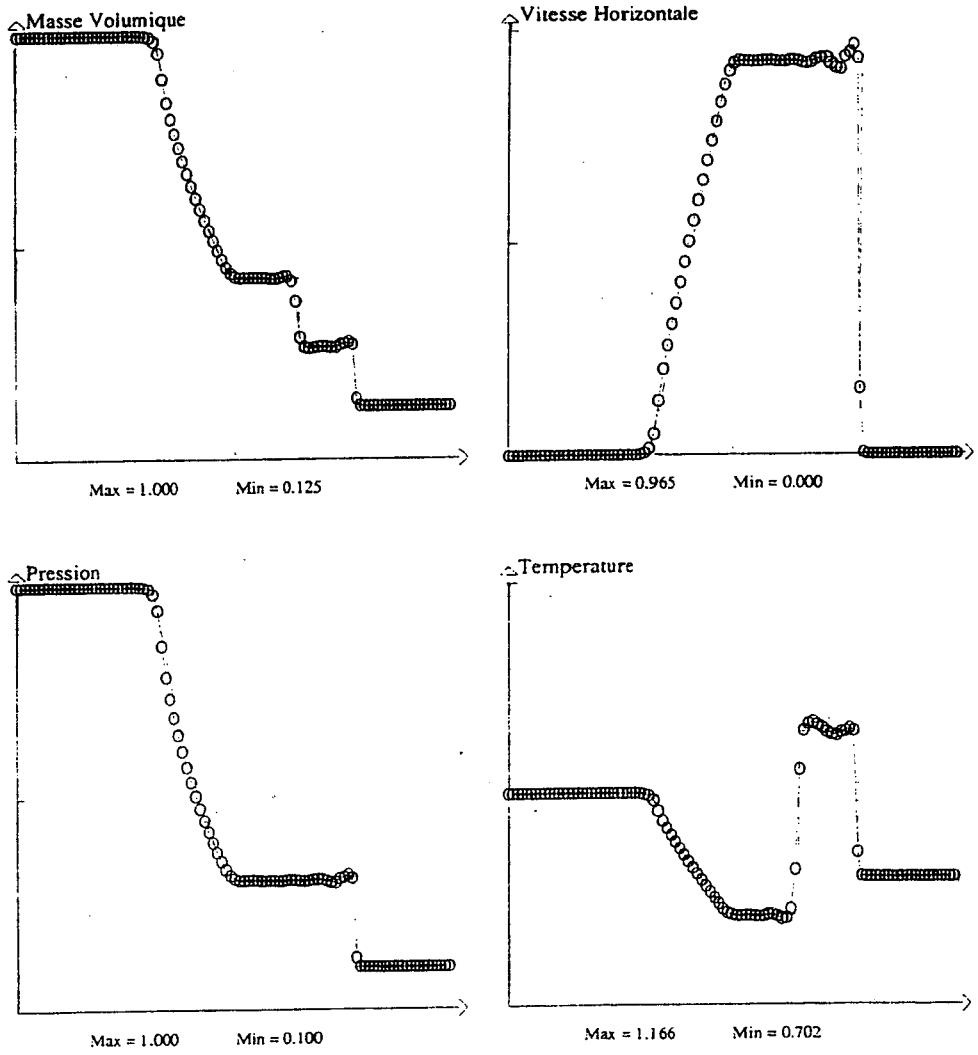


Figure 1.3a : TUBE A CHOC 3-D, Schéma de van Leer ordre deux à un pas avec limiteur, $CFL = 0.8$

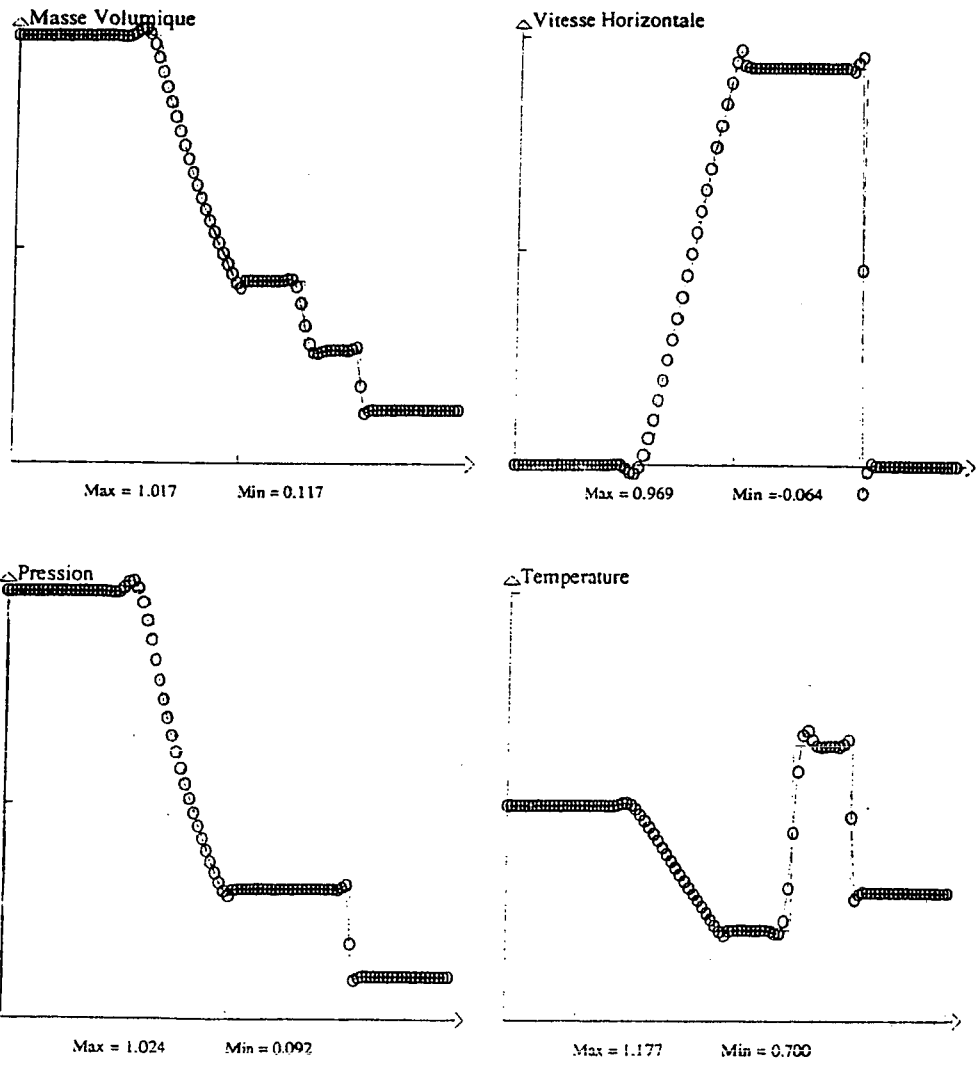


Figure 1.3b : TUBE A CHOC 3-D, Schéma de van Leer ordre deux à deux pas sans limiteur, $CFL = 0.8$

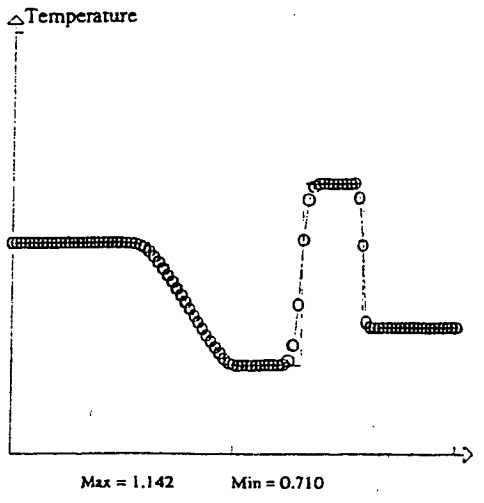
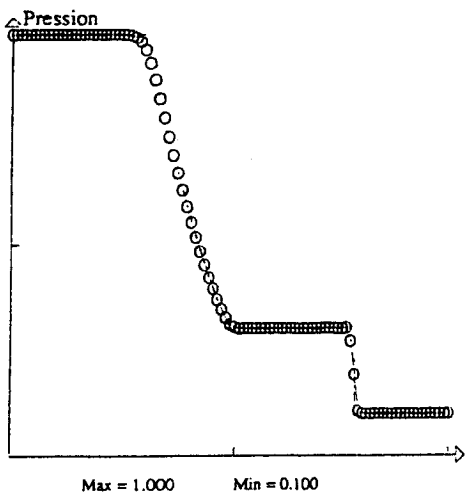
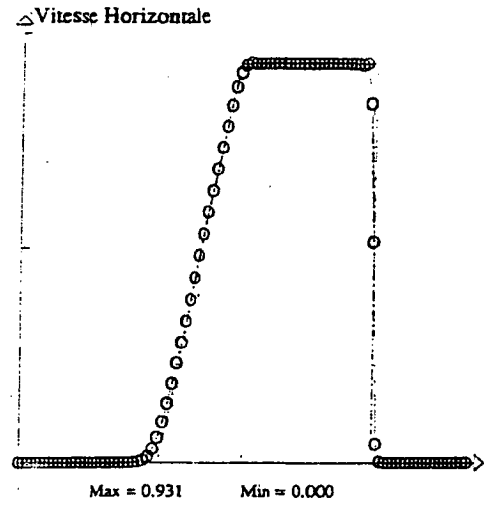
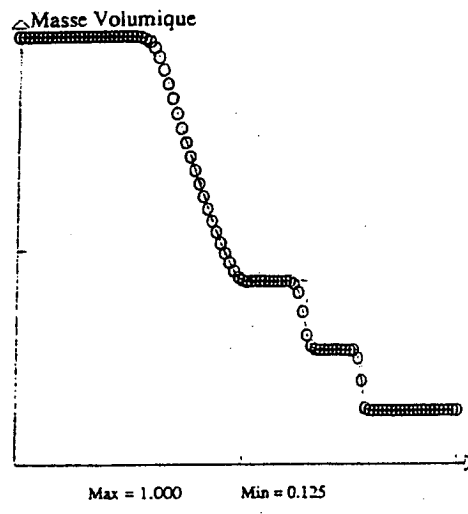


Figure 1.3c : TUBE A CHOC 3-D, Schéma de van Leer ordre deux à deux pas avec limiteur, $CFL = 0.8$

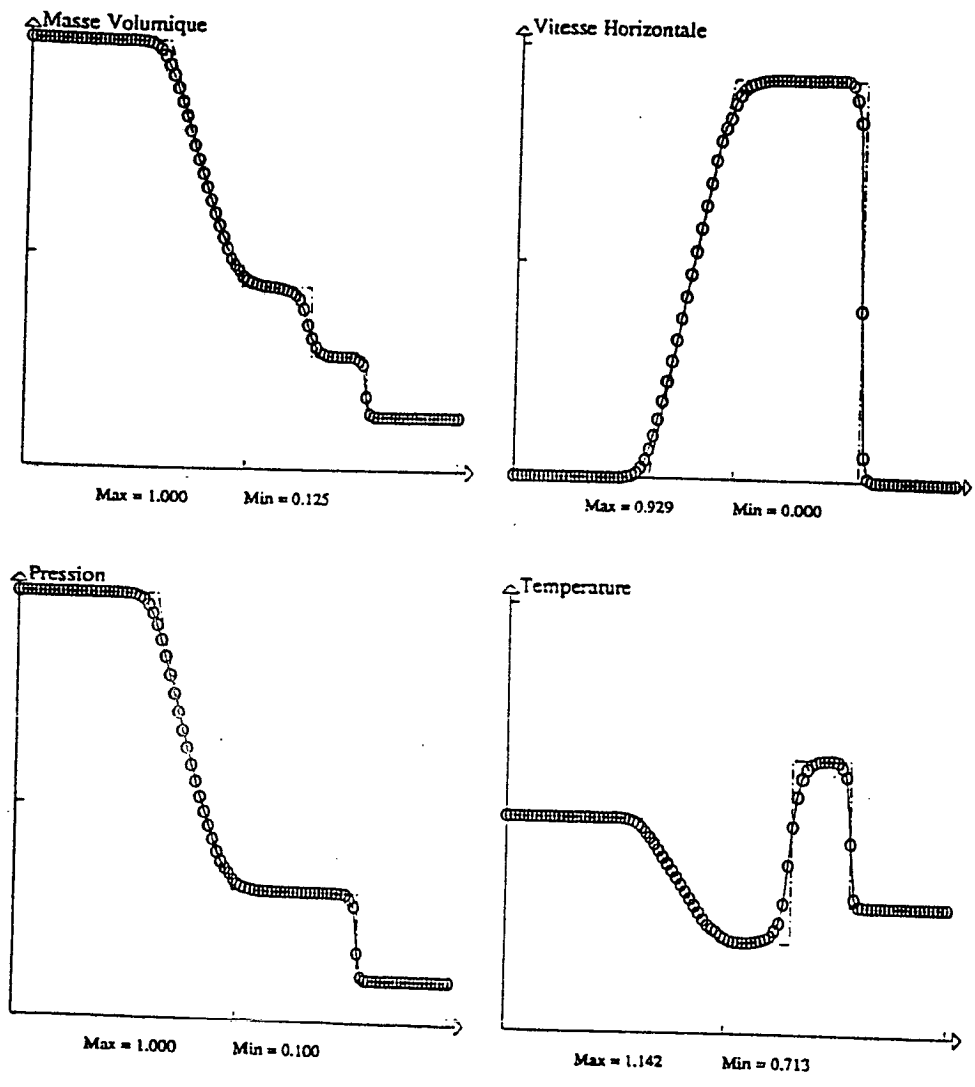


Figure 1.4 : TUBE A CHOC 3-D, Schéma centré TVD, $CFL = 0.8$

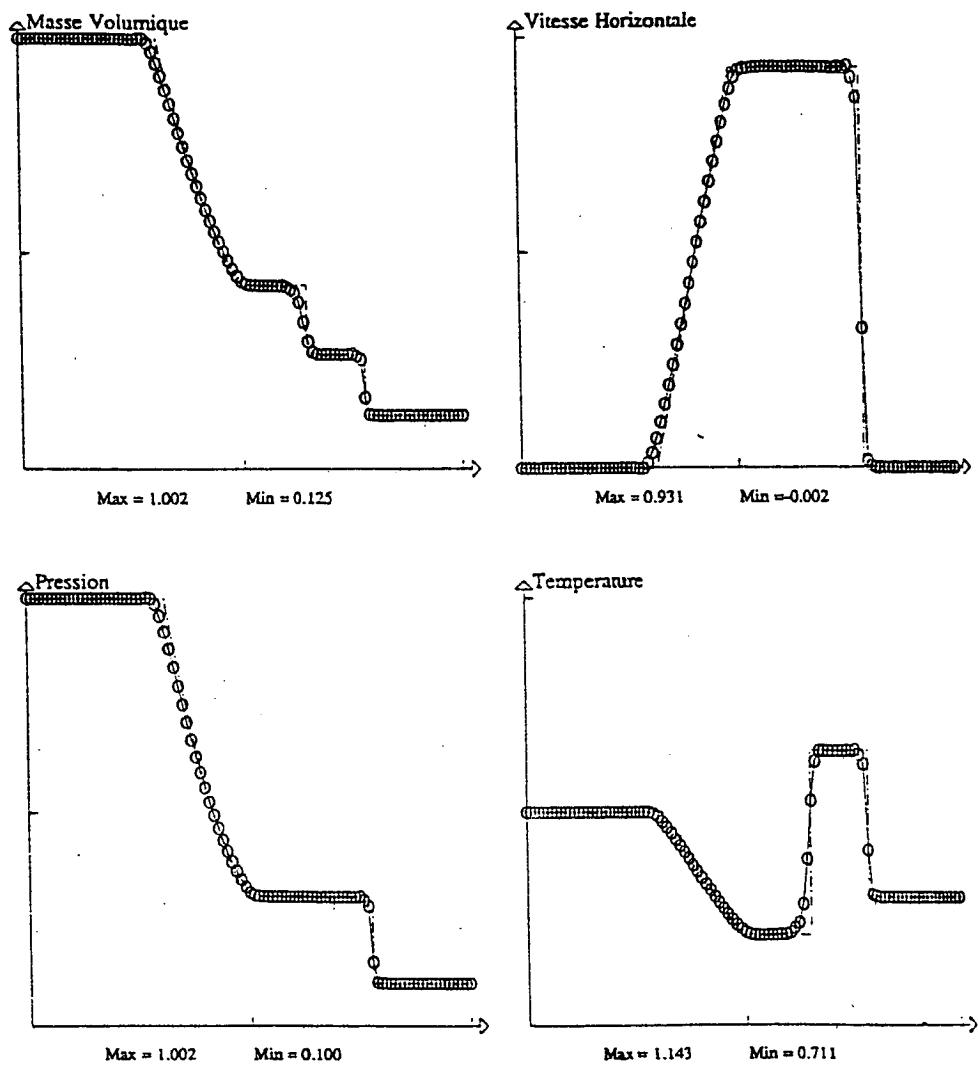


Figure 1.5 : TUBE A CHOC 3-D, Schéma centré $\chi = 3.0$, matrice de masse constante, $CFL = 0.55$

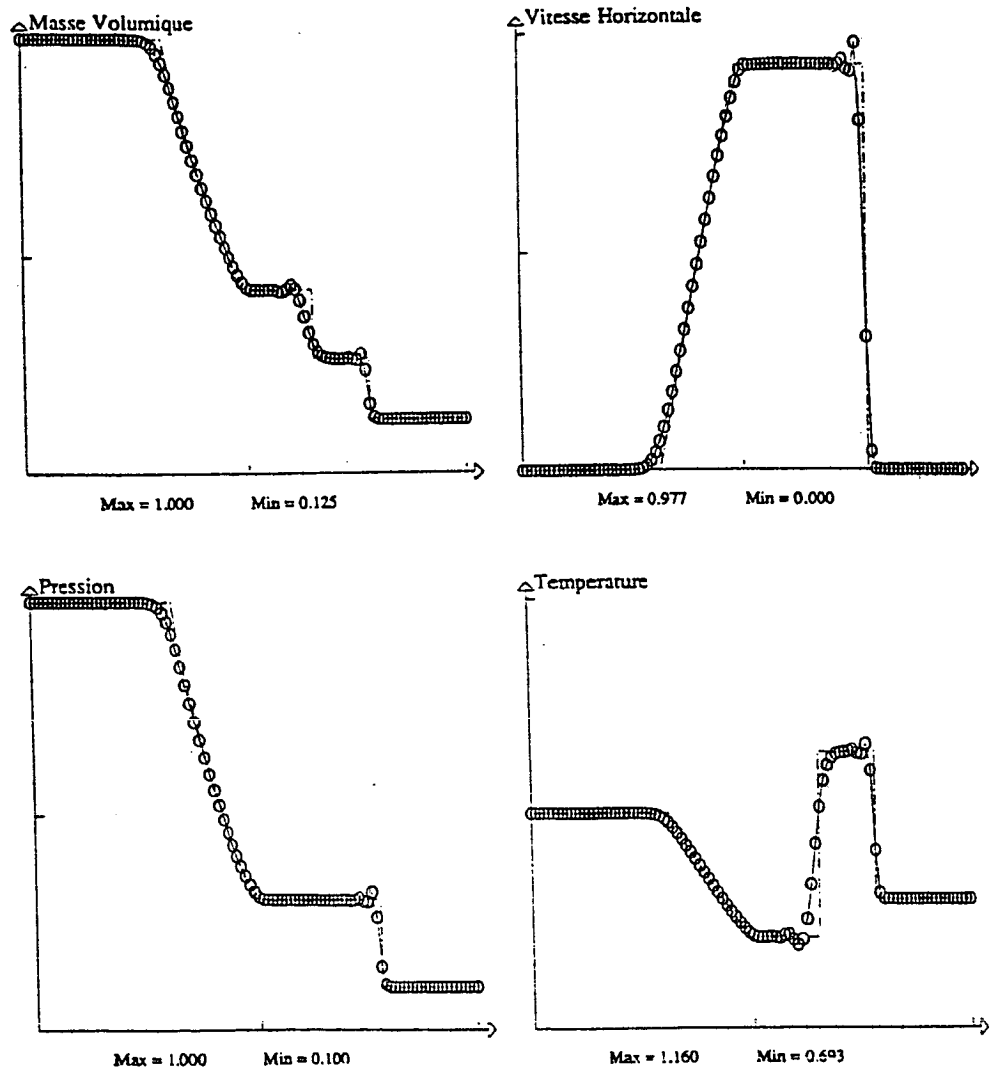


Figure 1.6 : TUBE A CHOC 3-D, Schéma centré $\chi = 3.0$, matrice de masse projetée, $CFL = 0.8$

- MACH= 2.00 - INCIDENCE= 0.00 -

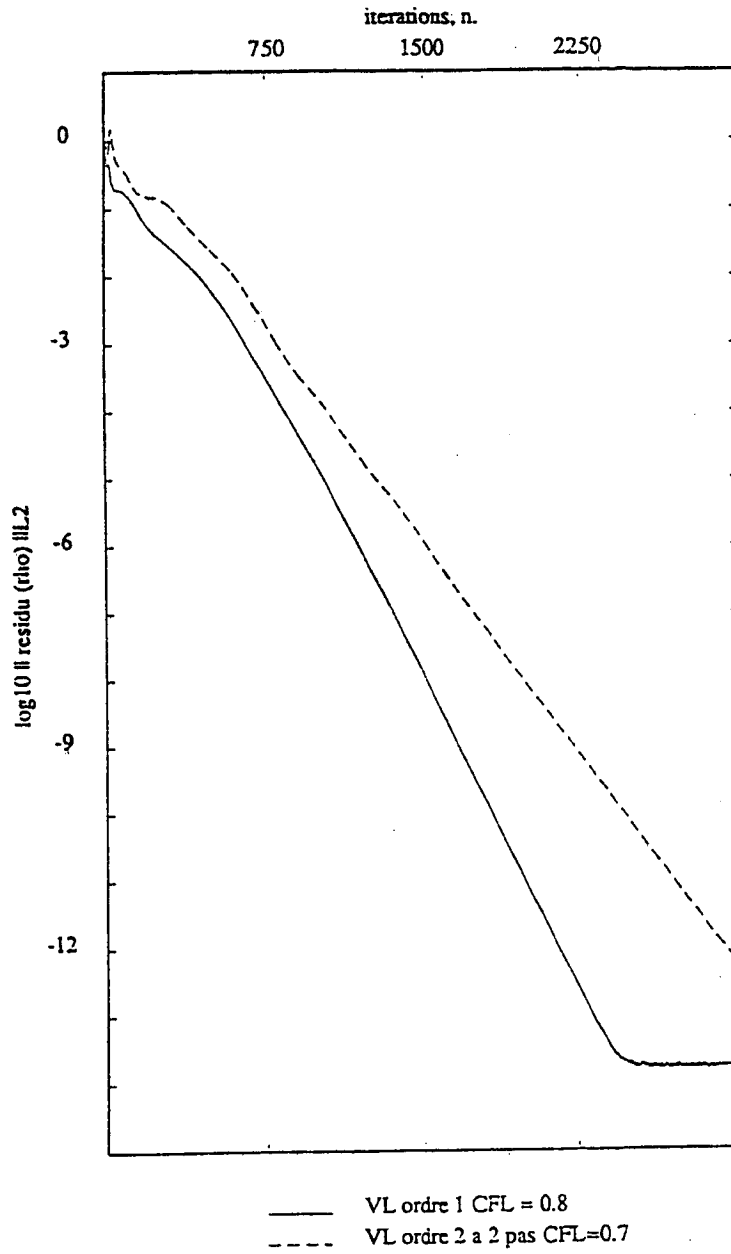


Figure 2 ; CANAL AVEC DOS D'ANE 754 points, Courbe de convergence: schéma de van Leer

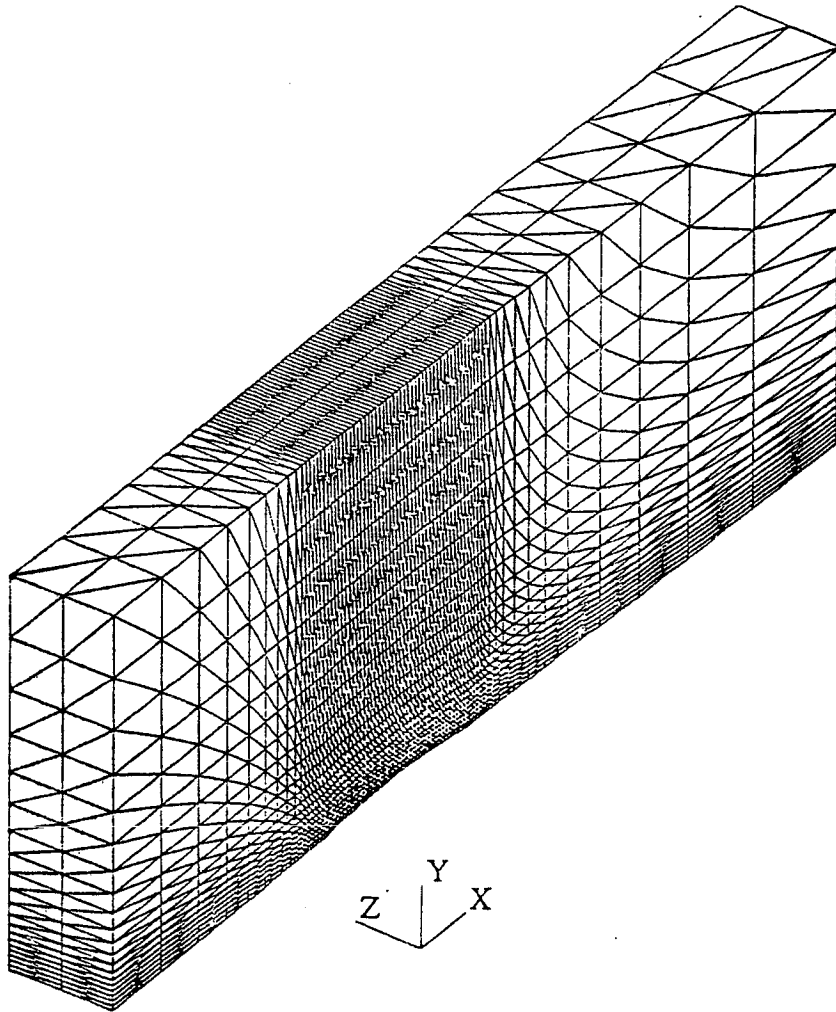
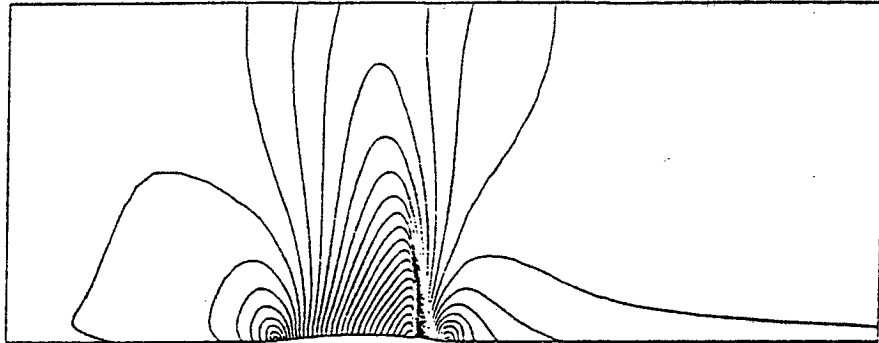


Figure 3.1 : MAILLAGE DU CANAL : 4599 points

LIGNES ISOMACHS

MIN = 0.681 MAX = 1.261 DLTA = 0.0200



COUPE DU NOMBRE DE MACH

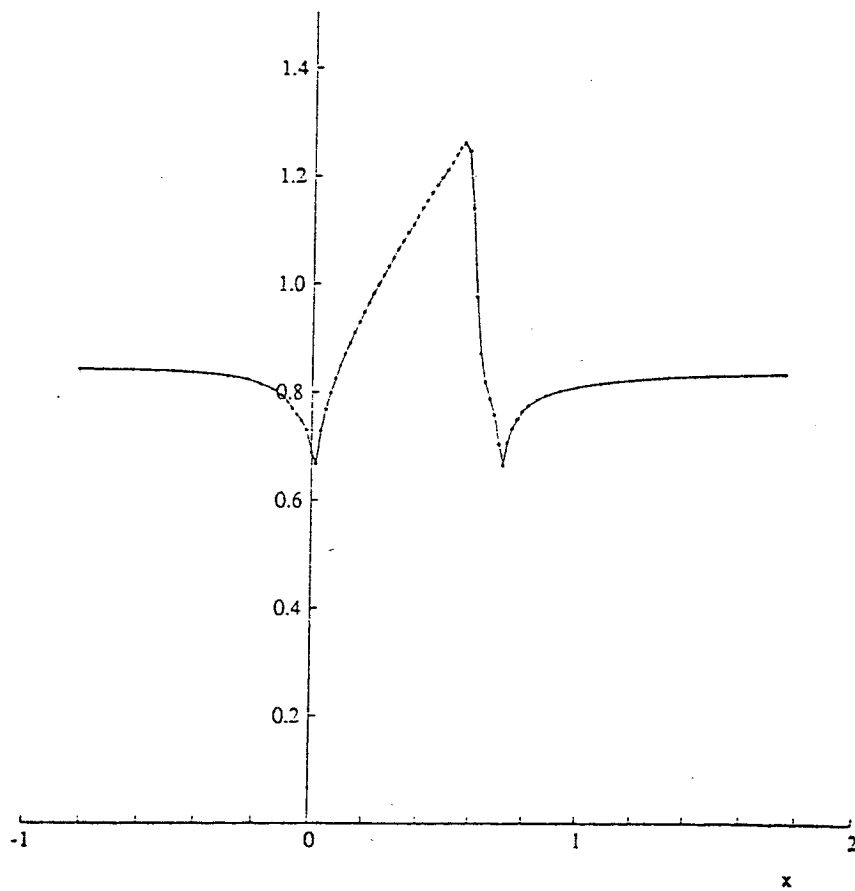
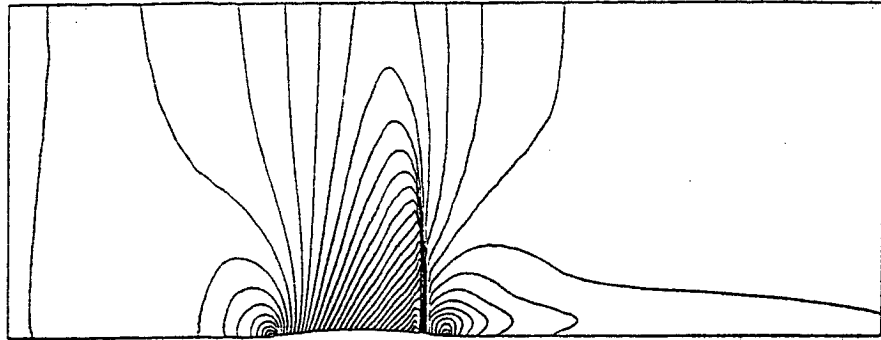


Figure 3.2 : CANAL, Schéma de van Leer ordre un, $M_\infty = 0.85$

LIGNES ISOMACHS

MIN = 0.641 MAX = 1.341 DLTA = 0.0200



COUPE DU NOMBRE DE MACH

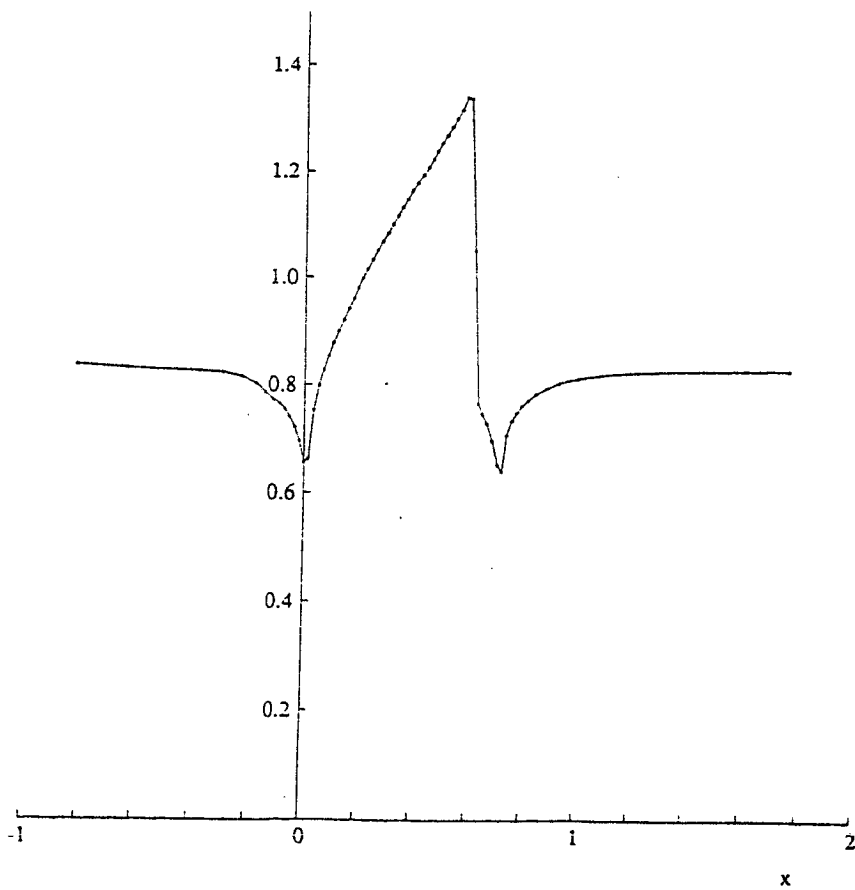
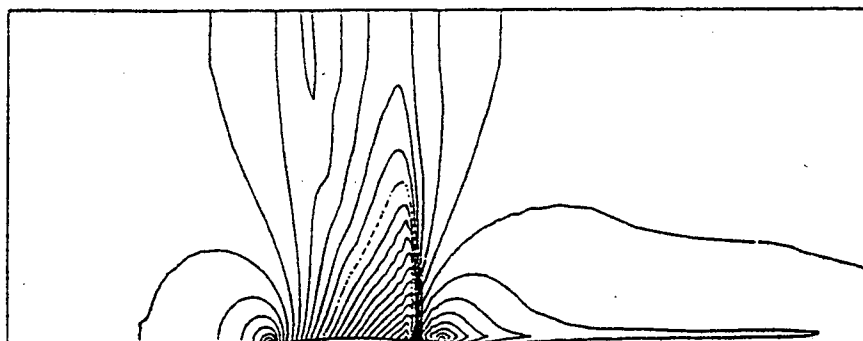


Figure 3.3 : CANAL, Schéma de van Leer ordre deux, $M_\infty = 0.85$

LIGNES ISOMACHS

MIN=0.650 MAX=1.300 DELTA=0.025



COUPE DU NOMBRE DE MACH

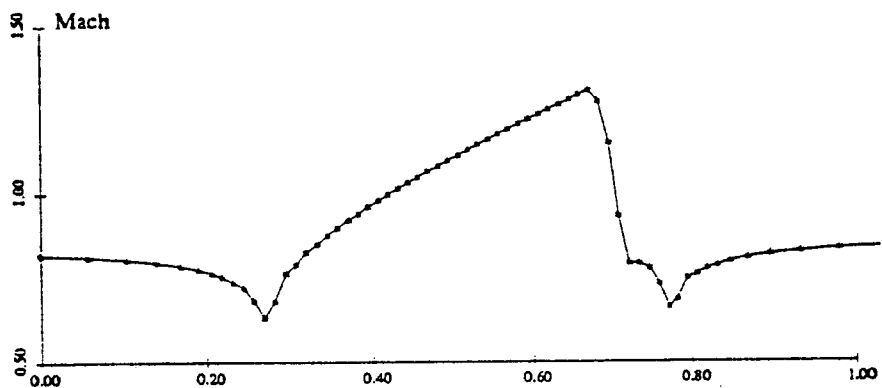


Figure 3.4 : CANAL., Schéma centré $\chi = 4.0$, matrice de masse projetée, $M_\infty = 0.85$

MACH= 0.85

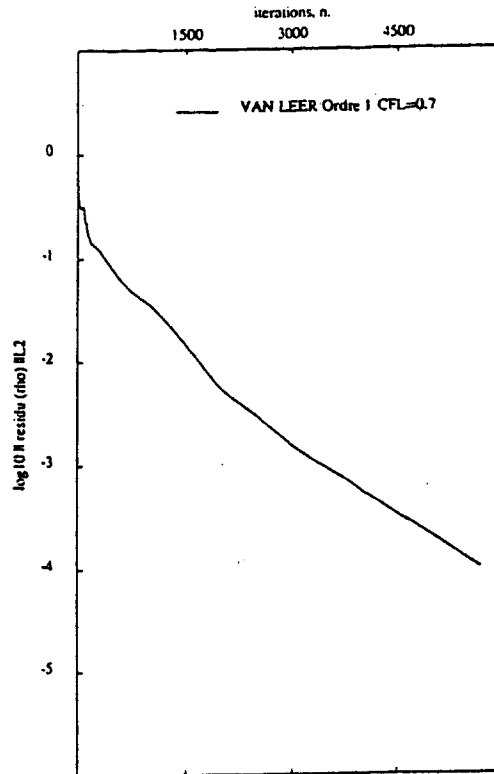


Figure 3.5a : CANAL, Courbe de convergence, Schéma de van Leer

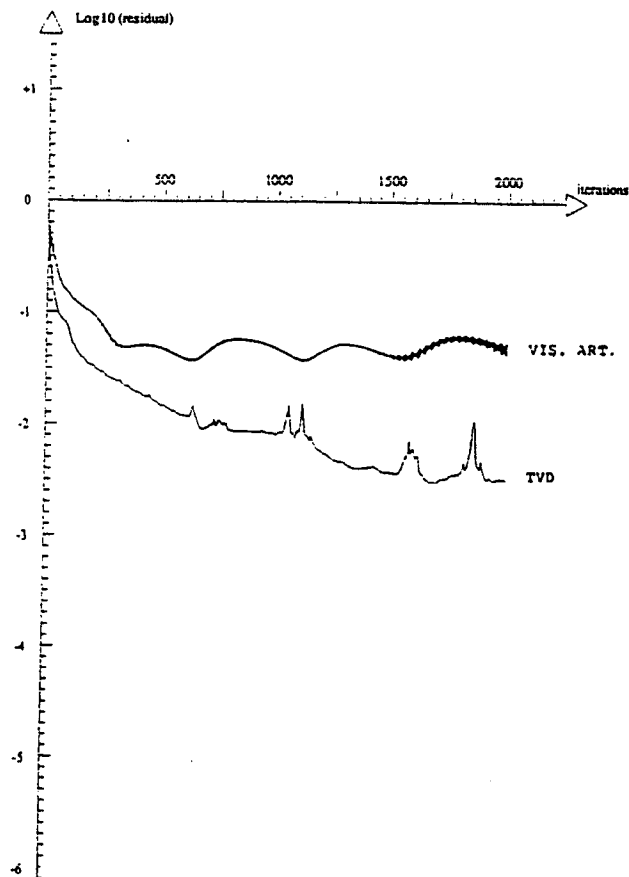
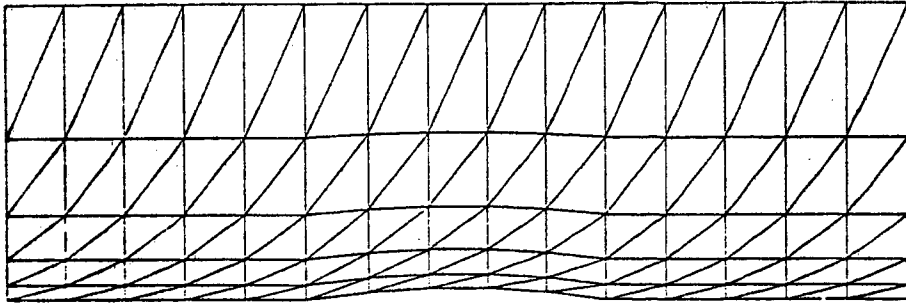


Figure 3.5b : CANAL, Courbe de convergence, Schémas centrés

COUPE A X=0



COUPE A Z=ZMIN

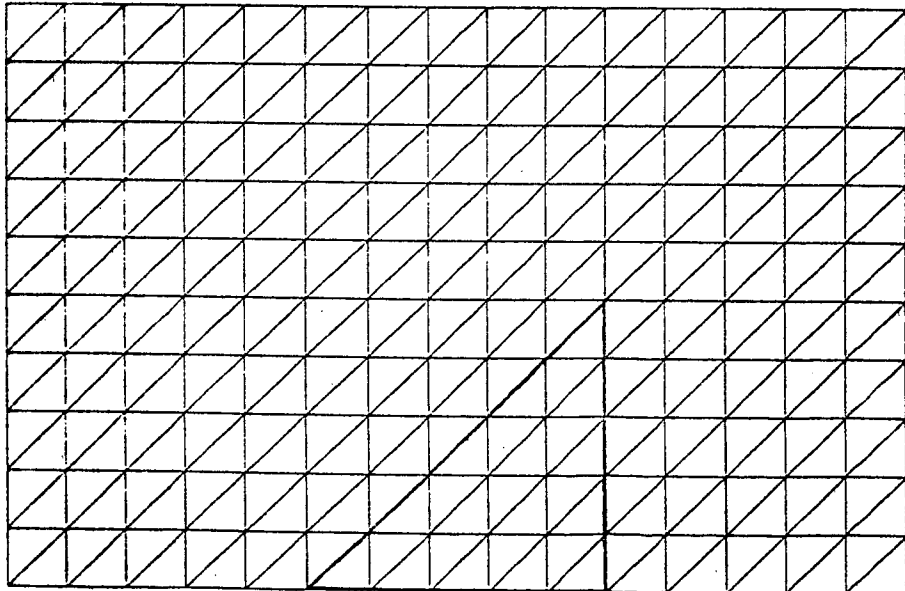
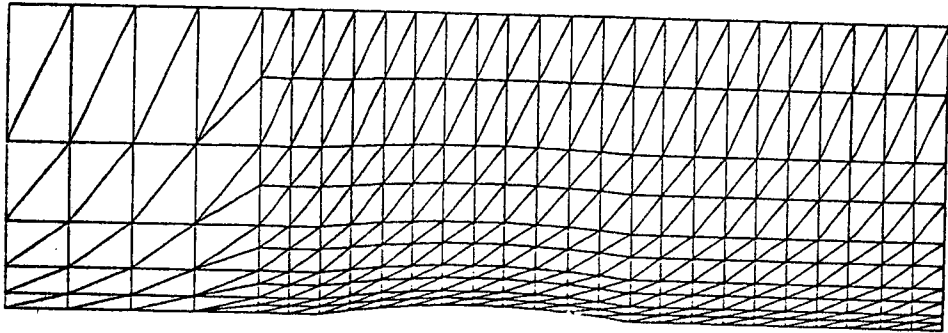


Figure 4.1 : AILE DELTA 1056 points, Maillage initial

COUPE A X=0



COUPE A Z=ZMIN

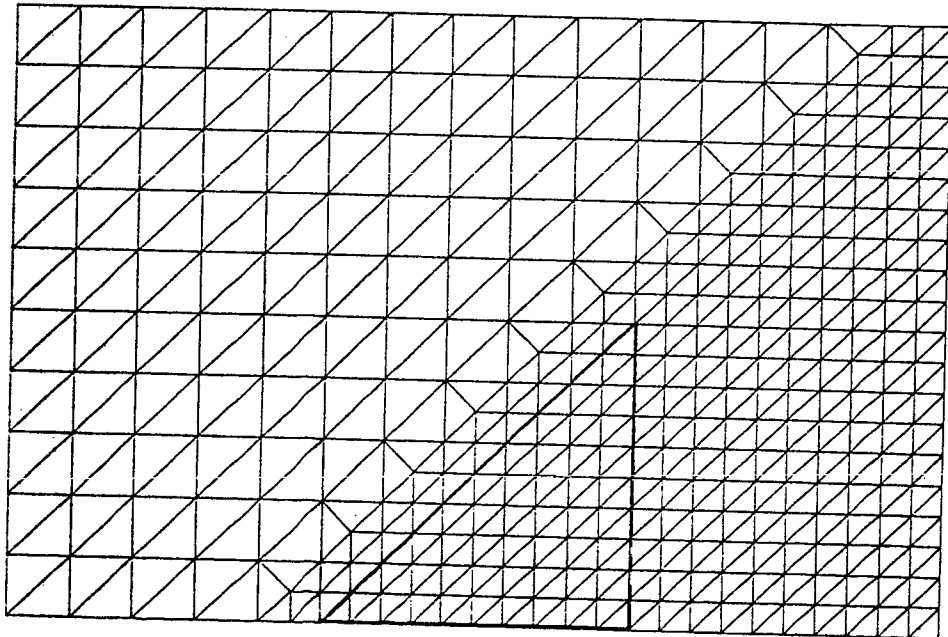


Figure 4.2 : AILE DELTA 3597 points, Premier Maillage

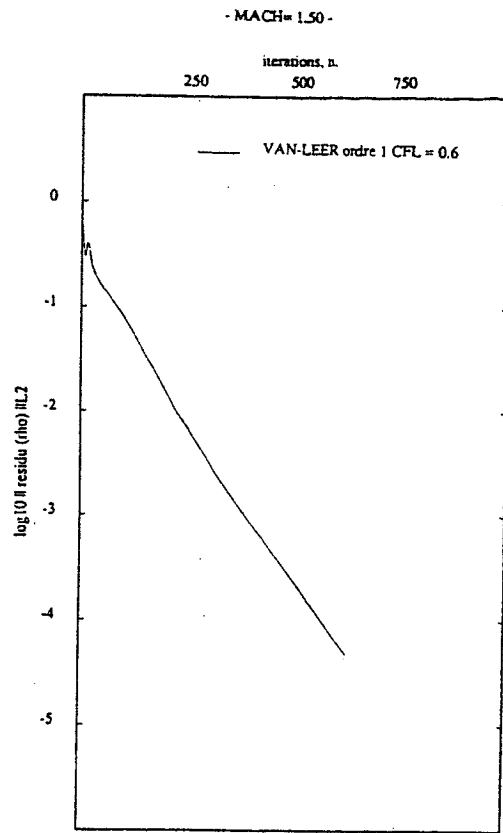


Figure 4.3a : AILE DELTA 3597 points, Schéma de van Leer ordre un

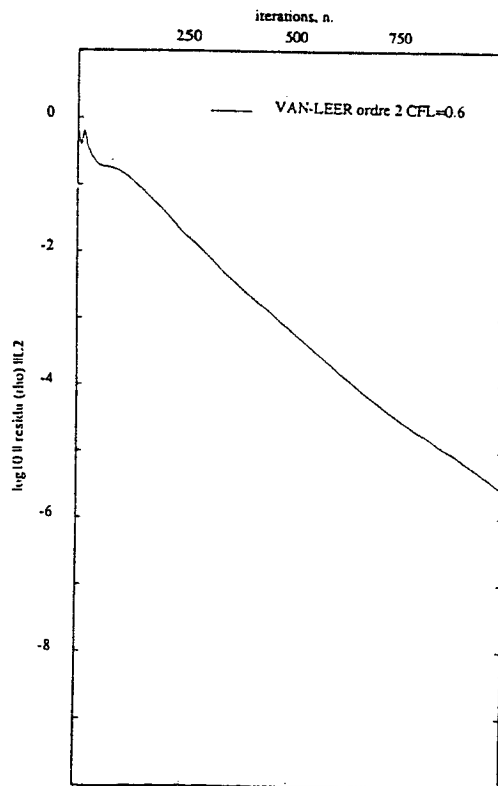
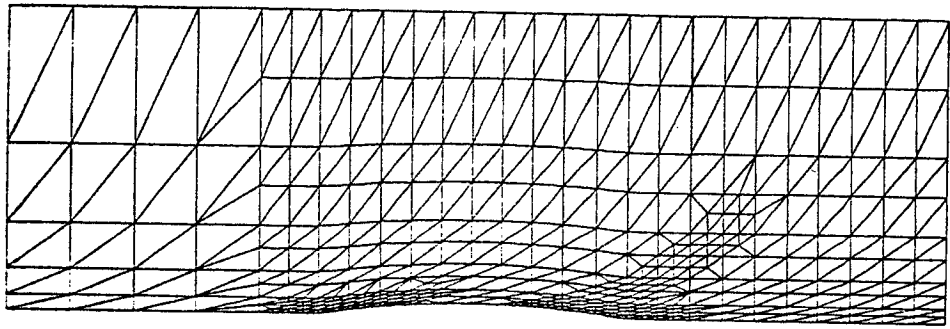


Figure 4.3b : AILE DELTA 3597 points, Schéma de van Leer ordre deux

COUPE A X=0



COUPE A Z=ZMIN

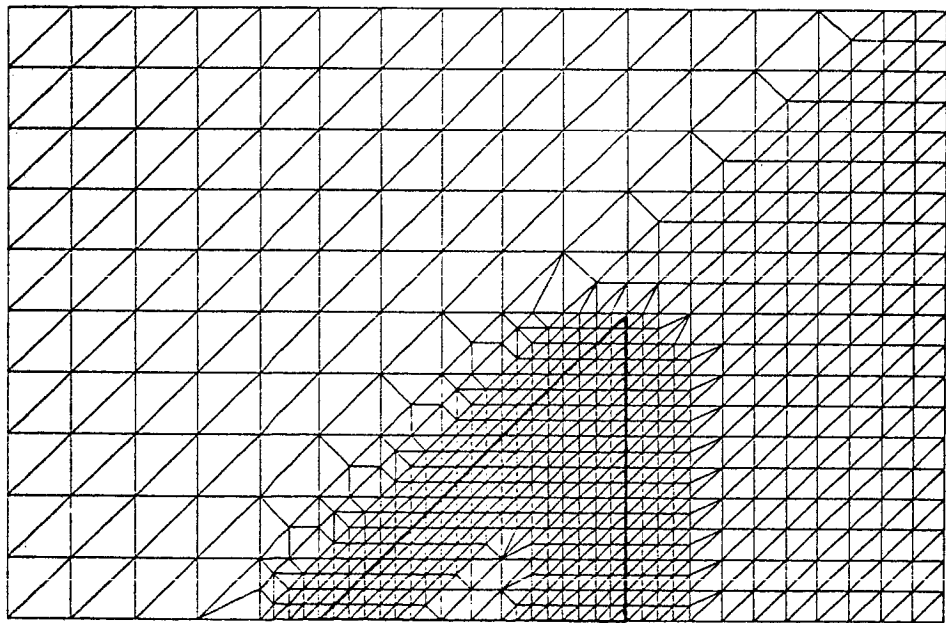
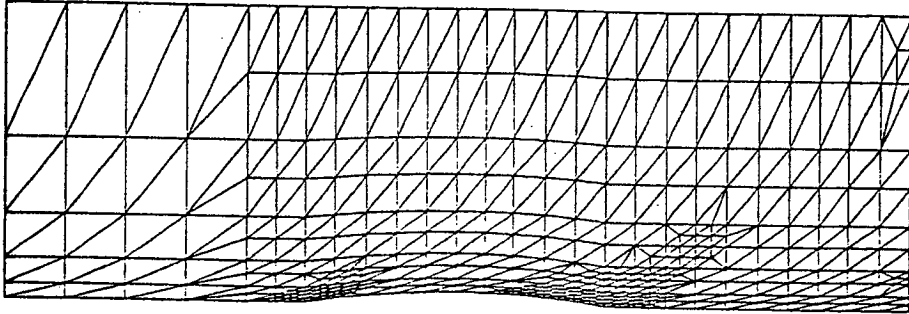


Figure 4.4a : AILE DELTA 5960 points, Second Maillage, adaptation solution décentrée : $COEF = 0.085$

COUPE A X=0



COUPE A Z=ZMIN

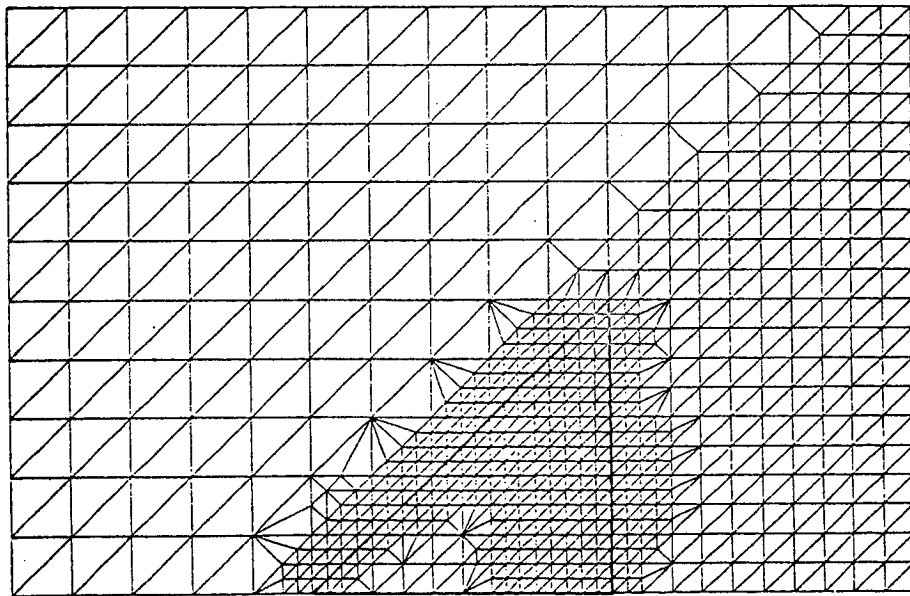


Figure 4.4b : AILE DELTA 5891 points, Second Maillage, adaptation solution centrée : $COEF = 0.1$

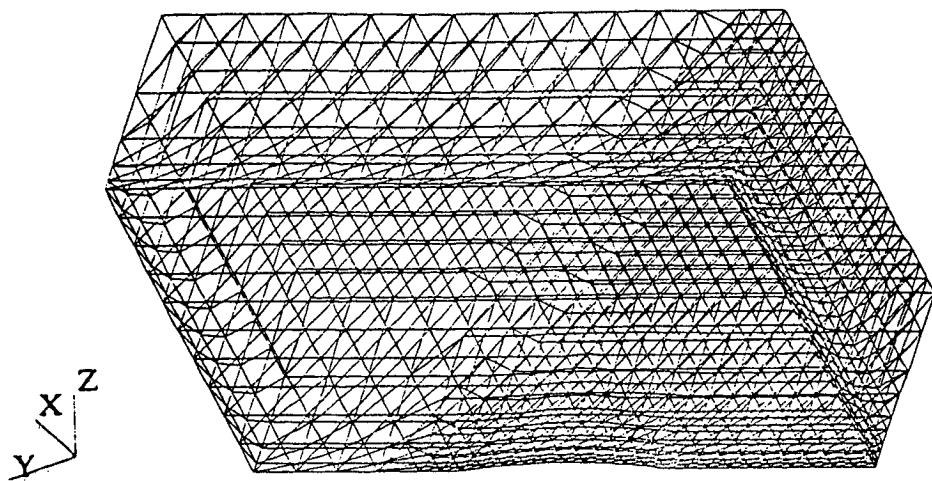


Figure 4.5a : AILE DELTA 3597 points, avant la division locale

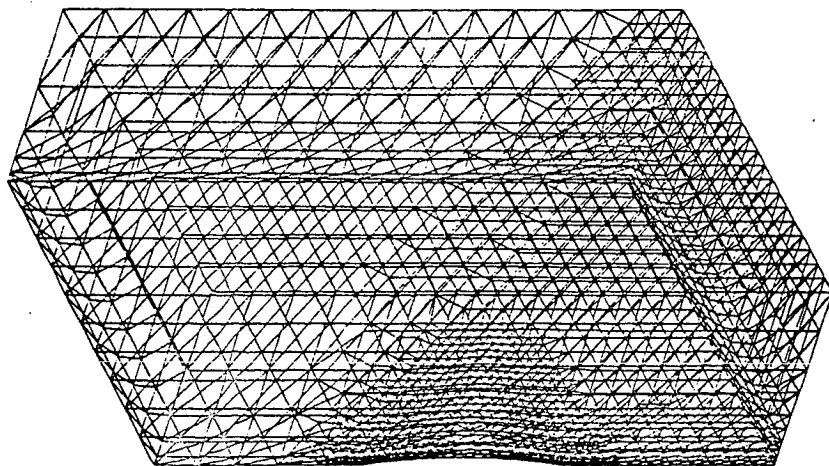


Figure 4.5b : AILE DELTA 5960 points, après la division locale

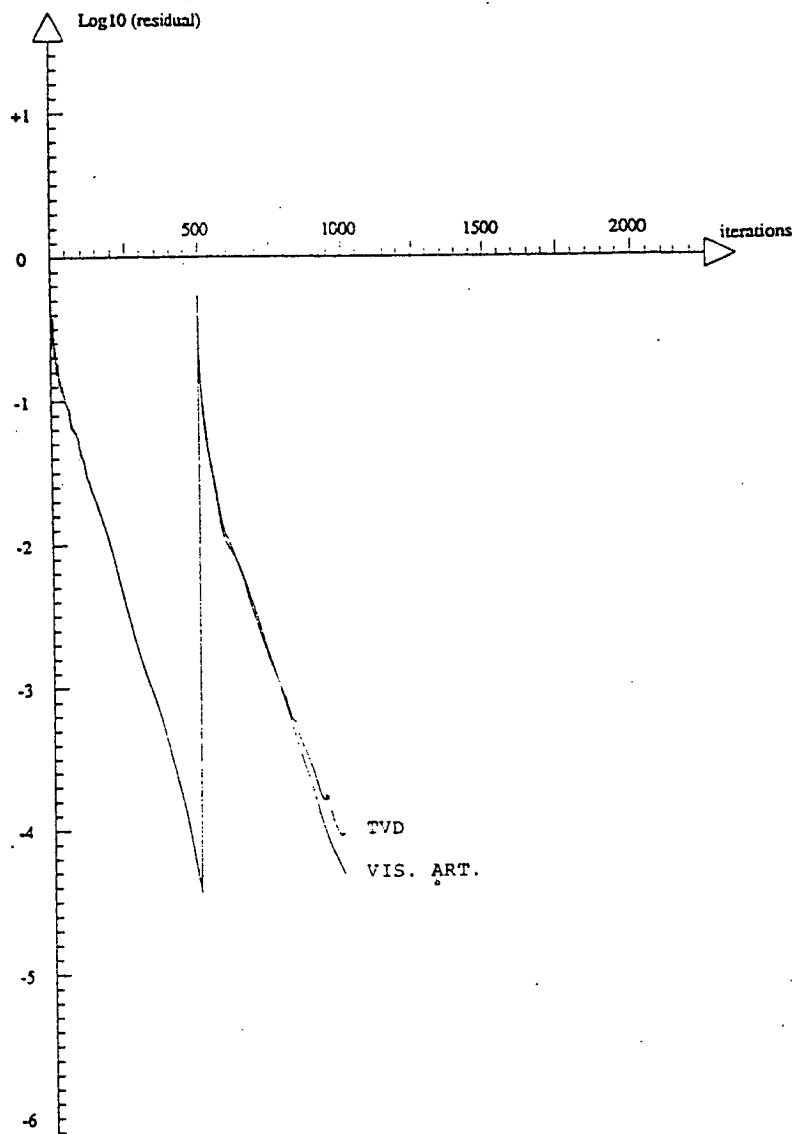
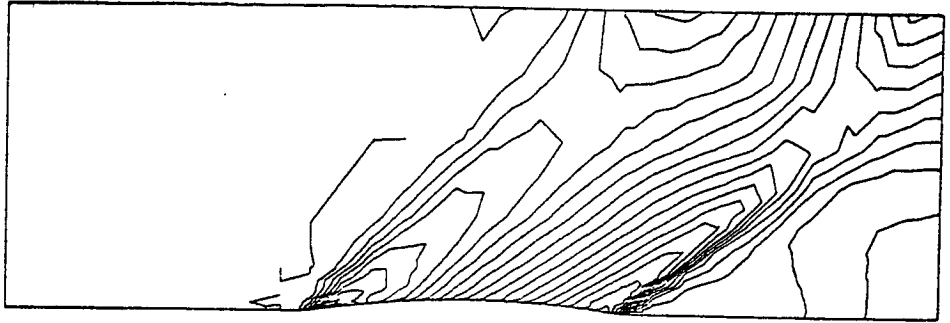


Figure 4.6 : AILE DELTA, Courbes de convergences avant et après la division locale, schémas centrés.

CP-LINES : MIN = -0.220 MAX = 0.200 DLTA = 0.020



CP-LINES : MIN = -0.300 MAX = 0.240 DLTA = 0.020

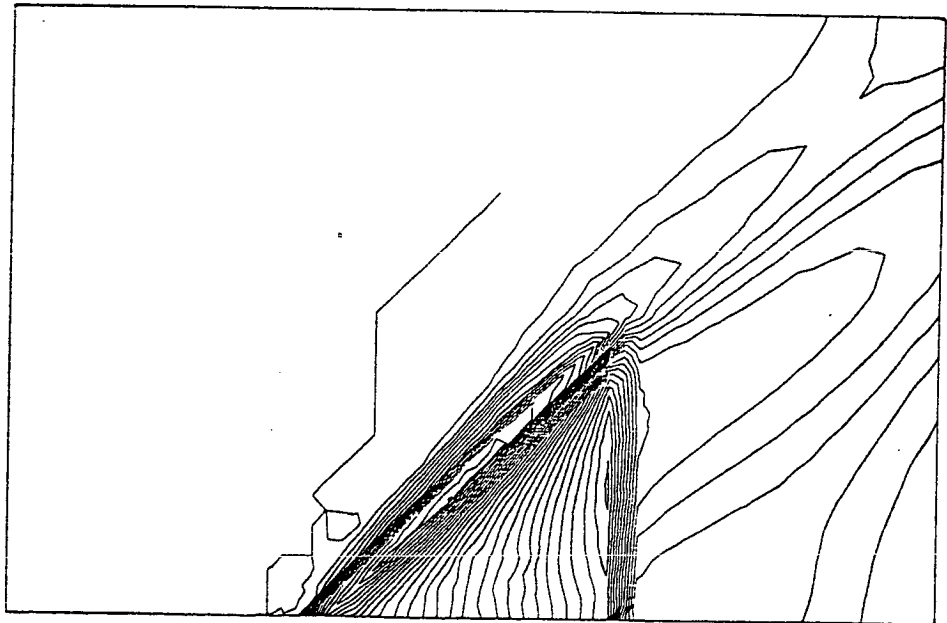
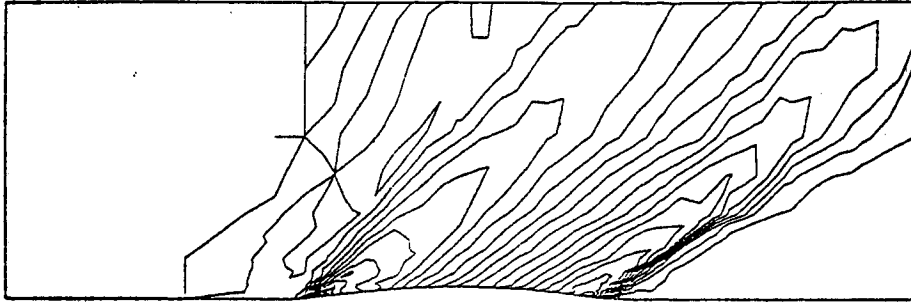


Figure 4.7a : AILE DELTA , Schéma de van Leer ordre deux, $M_\infty = 1.5$

CP-LINES : MIN=-0.220 MAX=0.200 DLTA=0.020

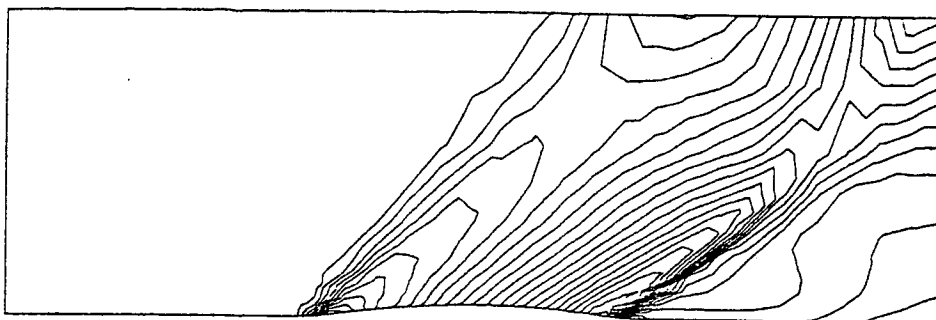


CP-LINES : MIN=-0.280 MAX=0.240 DLTA=0.020



Figure 4.7b : AILE DELTA, Schéma centré $\chi = 4.0$, matrice de masse projetée, $M_\infty = 1.5$

MACH-LINES : MIN = 1.300 MAX = 1.760 DLTA = 0.020



MACH-LINES : MIN = 1.220 MAX = 1.780 DLTA = 0.020

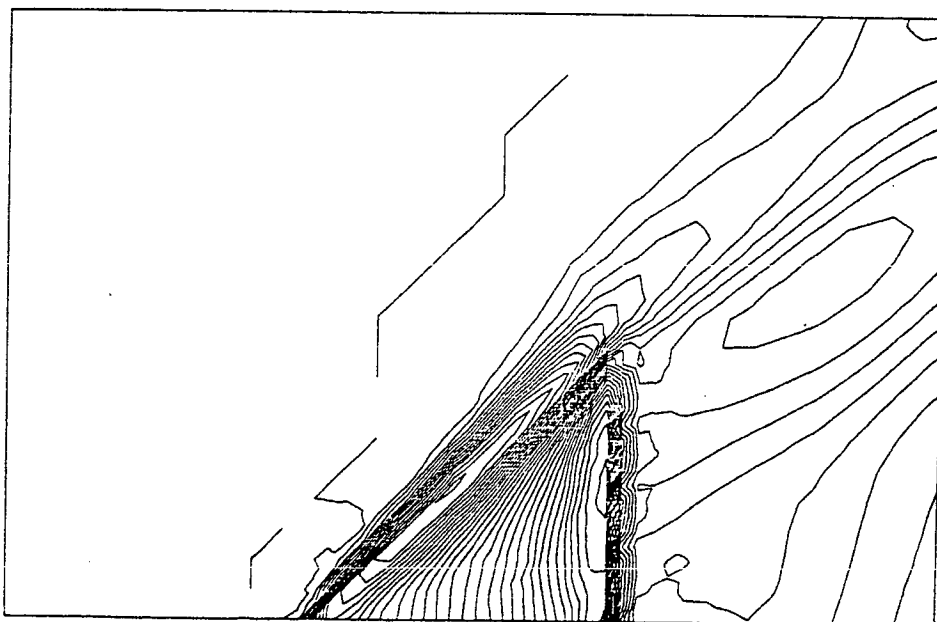
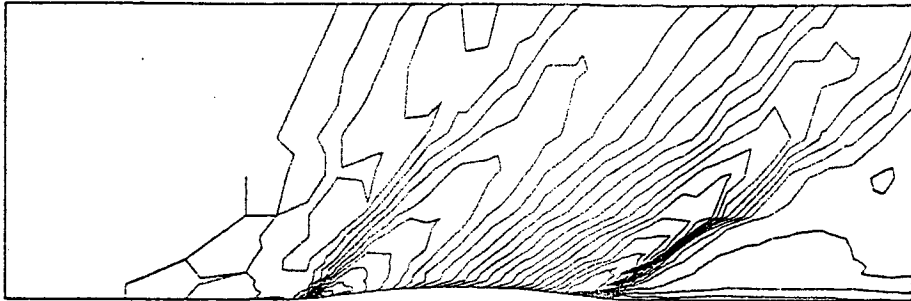


Figure 4.8a : AILE DELTA , Schéma de van Leer ordre deux, $M_\infty = 1.5$

MACH-LINES : MIN=1.300 MAX=1.760 DLTA=0.020

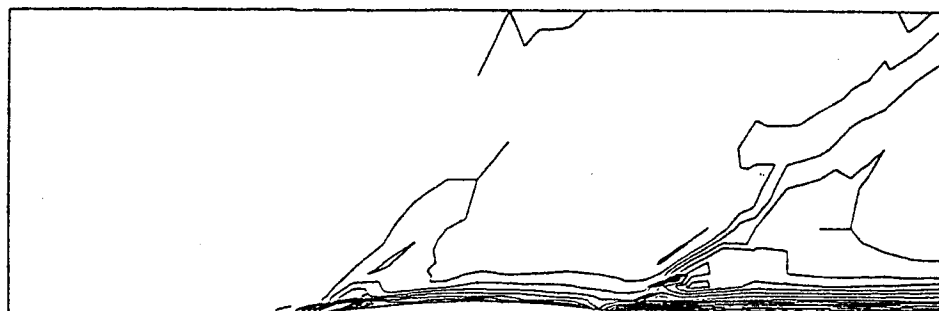


MACH-LINES : MIN=1.200 MAX=1.800 DLTA=0.020



Figure 4.8b : AILE DELTA , Schéma centré $\chi = 4.0$, matrice de masse projetée, $M_\infty = 1.5$

ENTROPY-LINES : MIN = 0.000 MAX = 0.023 DLTA = 0.001



ENTROPY-LINES : MIN = 0.000 MAX = 0.046 DLTA = 0.001

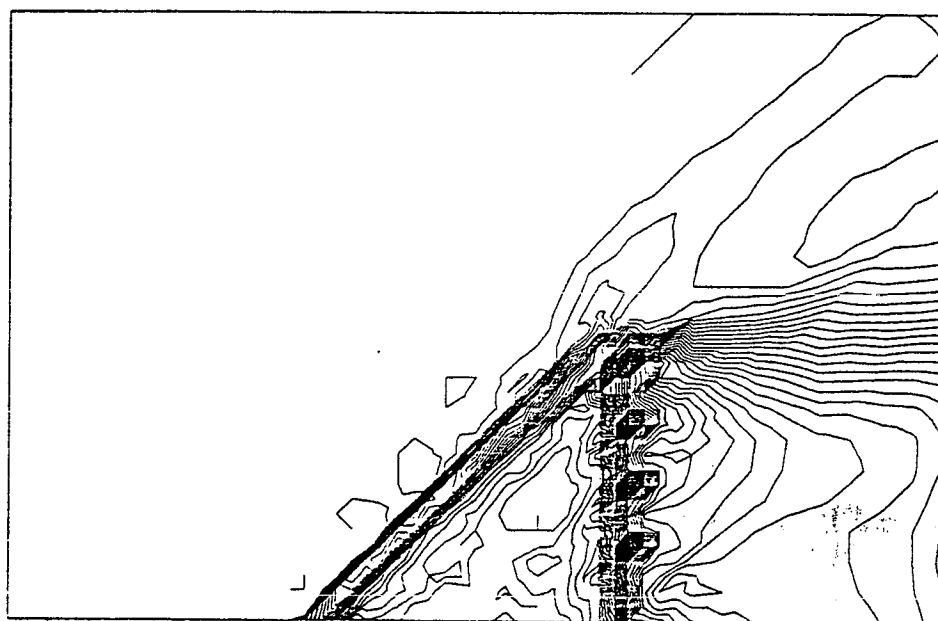
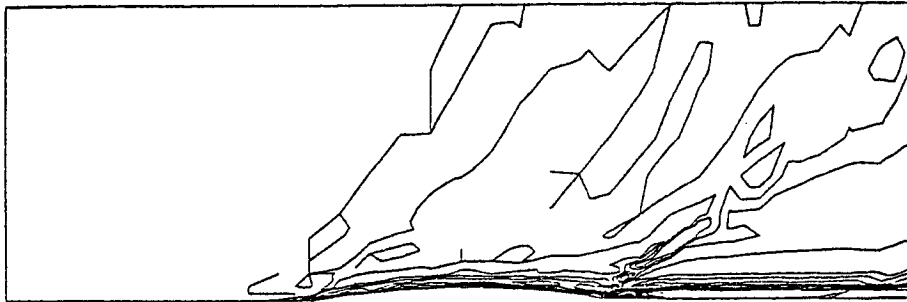


Figure 4.9a : AILE DELTA, Schéma de van Leer ordre deux, $M_\infty = 1.5$

ENTROPY-LINES : MIN=0.000 MAX=0.015 DLTA=0.001



ENTROPY-LINES : MIN=0.000 MAX=0.023 DLTA=0.001

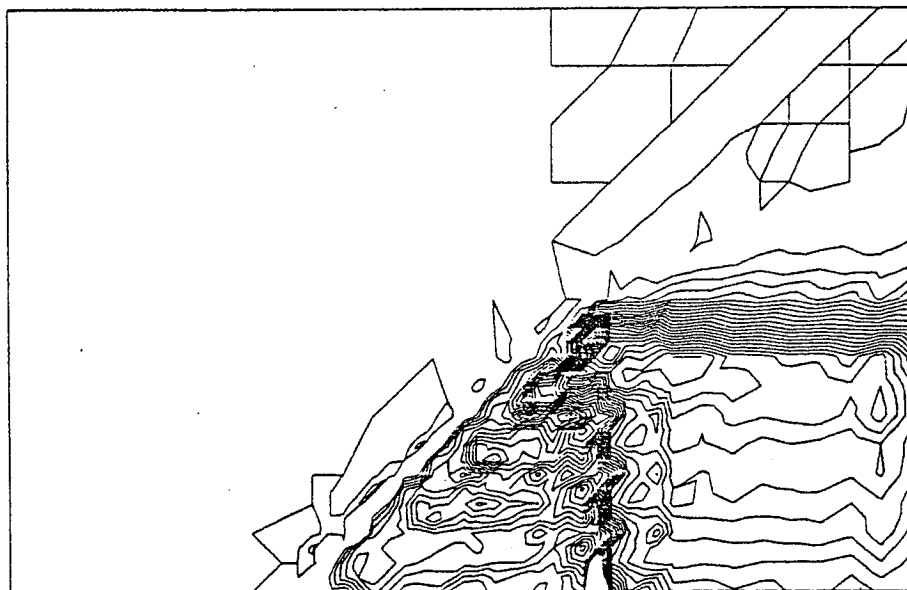


Figure 4.9b : AILE DELTA , Schéma centré $\chi = 4.0$, matrice de masse projetée, $M_\infty = 1.5$

Conclusion

La méthode décrite dans ce rapport aboutit à un schéma explicite tridimensionnel appartenant à la famille des schémas T.V.D.. Les principaux ingrédients utilisés : décentrage, techniques M.U.S.C.L., permettent d'obtenir à un schéma robuste donnant de bons résultats en évolutif sur des maillages tétraédriques non structurés. Les comparaisons avec une approche centrée sur les mêmes maillages, nous permettent de constater que la viscosité numérique induite par l'approximation décentrée est moins importante que celle du schéma centré TVD, mais en général le schéma décentré utilisé ici est plus diffusif que le schéma centré avec viscosité artificielle. Enfin, la convergence vers l'état stationnaire est satisfaisante avec le schéma décentré.

D'autres méthodes de résolution plus efficaces pour la recherche de solutions stationnaires que le schéma explicite Euler peuvent être utilisées ; citons comme exemples dans le cas stationnaire les méthodes de résolution multigrille [9], et les schémas implicites linéarisés [13], [15].

Références

- [1] ANDERSON W.K. - THOMAS J.L. - VAN LEER B.,
A comparison of Finite Volume Flux-Vector Splittings for the Euler Equations
AIAA paper 85-0122 (1985).
- [2] BILLEY V. ,
Résolution des équations d'Euler par des méthodes d'éléments finis - Applications aux écoulements 3-D de l'aérodynamique
Thèse troisième cycle, Paris 6 (1984)
- [3] BORREL M. - MONTAGNE J.L. ,
Numerical study of a non-centered scheme with application to aerodynamics
AIAA Cincinatti 85-1497 pp. 88-97 (1985)
- [4] DERVIEUX A. ,
Steady Euler simulations using unstructured meshes
Cours au Von Karman Institute Lectures Series 85-04 (1985). Publié dans *Partial Differential Equations of Hyperbolic Type and Applications*, G. Geymonat Ed., World Scientist pp. 34-105 (1985).
- [5] DESIDERI J.A.,
Preliminary results on results on iterative convergence of a class of implicit schemes
Rapport de recherche N°490, INRIA Rocquencourt (1986)
- [6] DESIDERI J.A. - HETTENA E.,
Numerical simulation of hypersonic equilibrium-air reactive flow
Rapport de recherche INRIA Sophia Antipolis No 716 (1987)
- [7] FEZOU F. ,
Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis
Rapport de recherche N°358 INRIA Rocquencourt (1985)
- [8] FEZOU F. - STEVE H.,
Décomposition d'un flux Van-Leer pour résoudre les équations d'Euler en éléments finis
Rapport de recherche INRIA. A paraître.
- [9] FEZOU L. - LALLEMAND M.H. - STEVE H. - DERVIEUX A.,
New développements in fast Euler finite element solvers
8ieme Conference sur les méthodes numériques en mécanique des fluides, en cours de publication par Vieweg (1988)

- [10] STEGER J. - WARMING R.F.,
Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite difference methods
Journal Comp. Physics, Vol. 40 N°2, pp 263-293 (1981)
- [11] SELMIN V^e,
Numerical Simulation of 3-D flows with a finite element method
Rapport de Recherche N°706, INRIA Sophia-Antipolis (1987)
- [12] STEVE H. ,
Efficient implicit solvers for the resolution of Euler equation in finite element method
Rapport de recherche N°779, INRIA Sophia-Antipolis (1987)
- [13] STEVE H. ,
Thèse en préparation (1988).
- [14] STOUFFLET B. ,
Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis
Thèse troisième cycle, Paris 6 (1984)
- [15] STOUFFLET B. - PERIAUX J. - FEZOU F. - DERVIEUX A.,
Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around spaces vehicules
AIAA paper 87-0560 Reno, Nevada (1987)
- [16] VAN LEER B. ,
Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity
Lecture notes in Physics, Vol 18 page 163 (1972)
- [17] VAN LEER B.,
Flux Vector Splitting for the Euler equations
Lecture Notes in Physics, vol. 170. page 405-512 (1982)
- [18] B. VAN LEER - W. A. MULDER ,
Relaxation methods for hyperbolic conservation laws
Numerical Methods for the Euler Equation of Fluid Dynamics SIAM.
Edité par INRIA pp. 312-333 (1985) Philadelphia.
- [19] VIJAYASUNDARAM G. ,
Résolution numérique des équations d'Euler pour des écoulements transsoniques avec un schéma de Godunov en éléments finis
Thèse troisième cycle, Paris 6 (1982)

ISSN 0249 - 6399