Gestion de production à moyen terme : une approche heuristique

Klaus Meier

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-LORRAINE

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 823

GESTION DE PRODUCTION A MOYEN TERME : UNE APPROCHE HEURISTIQUE

Klaus MEIER

AVRIL 1988

RR 823

GESTION DE PRODUCTION A MOYEN TERME :

UNE APPROCHE HEURISTIQUE

Klaus Meier

Projet SAGEP
Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique
Technopole de Nancy-Brabois
Campus Scientifique, Bd des Aiguillettes, BP 239,
54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex
France

Résumé

L'objectif de cette étude consiste à déterminer des quantités de produits à fabriquer sur un système de production à capacité limitée. Les quantités produites doivent satisfaire la demande de la clientèle de manière optimale pour un critère économique qui tient compte des coûts de stockage et des coûts dûs aux retards de livraison. Nous allons montrer que le problème peut être résolu par le biais de la programmation linéaire. Nous proposons une heuristique pour resoudre les problèmes de grande dimension. Un exemple numérique illustre la démarche.

Mots Clés

Gestion de production, Systèmes de grande dimension, Programmation linéaire, Méthodes heuristiques

MEDIUM TERM PRODUCTION MANAGEMENT : A HEURISTIC APPROACH

Abstract

The aim of this study is to determine quantities to manufacture using a limited capacity production system. The quantities produced have to satisfy the customer demand in an optimal manner. The criterion of optimality takes shortage costs and storage costs into account. It is shown that the problem can be solved using linear programming. A heuristic is proposed in order to solve large scale problems. A numerical example illustrates the heuristic.

SOMMAIRE

1. Introduction

Dans cette étude, nous présentons une approche de la gestion de production à moyen terme. La production est effectuée par un ensemble de ressources (ouvriers, machines, ressources de transport etc.) qui constitue le système de production. Le flux de matières à travers le système de production est modélisé de manière continue. Le contrôle a pour but de déterminer les quantités à fabriquer sur chaque période élémentaire.

Le problème qui nous intéresse est le suivant : étant donnée une période de planification décomposée en périodes élémentaires de durées égales, nous cherchons à déterminer les quantités à produire sur chacune de ces périodes élémentaires en tenant compte de la capacité du système de production, de la demande et des stocks initiaux, de manière à minimiser la somme des coûts de stockage et des coûts associés aux retards de livraison.

Ce problème entre dans cadre de la gestion hiérarchisée de la production. En utilisant la terminologie d'ANTONY [1965], dans laquelle la gestion hiérarchisée va de la planification stratégique.du long terme au contrôle opératoire du court terme via la planification tactique du moyen terme, le problème se situe plus précisément dans le cadre de la planification tactique. Les aspects conceptuels pour obtenir un système de gestion hiérarchisée sortent du cadre de cette étude. Nous renvoyons le lecteur au groupe de chercheurs AXÄTER [1979,1981], BITRAN et all. [1977,1981], CANDEA [1977], GRAVE [1981], ERSCHLER et all. [1985] et HAX [1978], qui s'intéresse à la conception des systèmes de gestion hiérarchisée pour les sytèmes de production par lots, et au groupe de chercheurs AKELLA et all. [1984], GERSHWIN [1987] et KIMEMIA et all. [1980,1982], qui s'intéresse à la gestion hiérarchisée des sytèmes de production flexibles.

Une formulation mathématique du problème se trouve dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, nous montrons qu'il est théoriquement possible de résoudre le problème à l'aide de la programmation linéaire. Dans le paragraphe 4, nous proposons une heuristique. Le but de cette heuristique consiste à trouver rapidement une solution proche de la solution optimale. L'exemple donné dans le paragraphe 5 illustre le déroulement de cette heuristique.

2. Position du problème

Nous considérons la production de n types de produits par un système de production qui est constitué de m machines. La période de planification est décomposée en T périodes élémentaires de durées égales Δt. Désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_T \in IR^{+n}$ le contrôle de la production. La composante u_{jt} du vecteur U_t détermine la quantité de produits de type j à fabriquer sur la t-ième période élémentaire.

Nous définissons le domaine dans lequel U_t est admissible en utilisant la matrice $\tau \in IR^{+m,n}$, où l'élément τ_{ij} est le temps de fabrication d'une unité de produits de type j sur la machine i, et en utilisant le vecteur $\varphi_t \in [\, 0, \Delta t\,]^m$ où la composante φ_{it} est la durée de disponibilité de la machine i sur la t-ième période élémentaire. L'inégalité (1) indique que les quantités fabriquées sont compatibles avec les performances des machines.

$$\tau\, U_t \leq \varphi_t \qquad (1)$$

Soit $D_1, D_2, \ldots, D_T \in IR^{+n}$ la demande de la clientèle. La composante d_{jt} du vecteur D_t est la quantité de produit de type j demandée sur la t-ième période élémentaire. La différence cumulée entre les quantités produites et les quantités demandées caractérise l'état du stock de produits. Soit $X_t \in IR^n$ l'état du stock de produits à la fin de la t-ième période élémentaire. L'équation d'états s'écrit :

$$X_t = X_{t-1} + U_t - D_t \qquad (2)$$
$$X_0 = \text{donné}$$

Remarquons qu'il existe des situations dans lesquelles il est impossible de satisfaire la demande dans les délais. Dans ce modèle, nous autorisons des retards à la livraison. Une composante du vecteur X_t peut être positive, négative ou nulle. Des retards à la livraison, ainsi que le stockage des produits, engendrent un coût. Nous pondérons l'état X_t par une fonction de coût $g(X_t)$ qui pénalise les retards à la livraison et le stock. Cette fonction est definie par

$$g(X_t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_{jt}) \qquad (3)$$

avec

$$g_j(x_{jt}) = \begin{cases} -c_j^- x_{jt} & \text{si} \quad x_{jt} < 0 \\ c_j^+ x_{jt} & \text{si} \quad x_{jt} \geq 0 \end{cases}$$

où $c_j^- \in \mathbb{R}^+$ est le coût dû au retard de livraison d'une unité de produit de type j sur une période élémentaire et $c_j^+ \in \mathbb{R}^+$ est le coût du stockage d'une unité de produit de type j sur une période élémentaire. Une illustration graphique de g_j est donnée par la figure 1.

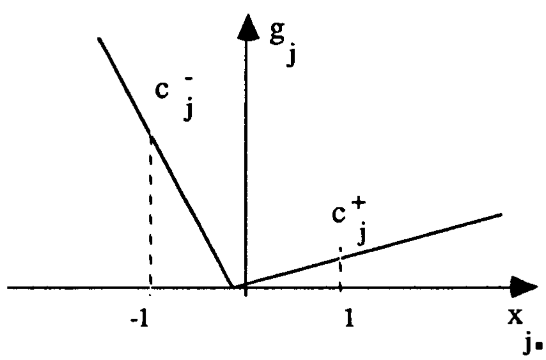

figure 1

Le problème initial, noté (PI), s'écrit :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{t=1}^{T} g(X_t) \qquad (PI)$$

sous les contraintes (1) et (2)

3. Etude préliminaire

Il existe toujours une solution au problème initial. En effet, on a $\varphi_t \geq 0$ quel que soit la période élémentaire. En conséquence le contrôle déterminé par $U_1 = U_2 = \ldots = U_T = 0$ est admissible. Sachant que les coûts c_j^- et c_j^+ sont positifs ou nuls quel que soit le type de produit, les fonctions g_j sont convexes et peuvent s'écrire $g_j(x_{jt}) = \max\{-c_j^- x_{jt}, c_j^+ x_{jt}\}$. Il est alors possible de résoudre le problème initial par les méthodes de la programmation linéaire.

Introduisons les vecteurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T \in IR^n$. Les composantes de ces vecteurs peuvent être considerées comme des paramètres de coût. Le programme linéaire, noté (PL), est le suivant :

$$\text{Minimiser} \sum_{t=1}^{T} e' \, Y_t \qquad (PL)$$

sous les contraintes (1), (2) et

$$Y_t \geq -C^- X_t \qquad (4)$$

$$Y_t \geq C^+ X_t \qquad (5)$$

où e' est la transposée du vecteur unitaire de dimension n et les matrices $C^- \in IR^{+n,n}$ et $C^+ \in IR^{+n,n}$ sont deux matrices diagonales avec $C^- = \text{diag}[c_1^-, c_2^-, \ldots, c_n^-]$ et $C^+ = \text{diag}[c_1^+, c_2^+, \ldots, c_n^+]$.

Pour pouvoir appliquer une méthode de programmation linéaire, nous transcrivons le programme linéaire dans sa forme canonique. Introduisons les vecteurs d'écart $\alpha_t, \beta_t \in IR^{+n}$ et $\gamma_t \in IR^{+m}$. Le programme linéaire s'écrit :

$$\text{Minimiser } \sum_{t=1}^{T} e' \, Y_t \qquad (PL')$$

sous les contraintes (2) et

$$\tau U_t + \gamma_t = \varphi_t \qquad (7)$$

$$Y_t = -C^- X_t + \alpha_t \qquad (8)$$

$$Y_t = C^+ X_t + \beta_t \qquad (9)$$

$$\alpha_t \, , \; \beta_t \, , \; \gamma_t , \; U_t \geq 0$$

Les équations (8) et (9) impliquent

$$(C^- + C^+) X_t = \alpha_t - \beta_t \qquad (10)$$

Si $c_j^- + c_j^+ > 0$ pour chaque type de produit, l'inverse de la matrice $(C^- + C^+)$ existe. Il est donné par $(C^- + C^+)^{-1} = \text{diag}[1 / (c_1^- + c_1^+), 1 / (c_2^- + c_2^+), \ldots, 1 / (c_n^- + c_n^+)]$. Dans ce cas le couple (α_t, β_t) détermine l'état X_t de manière unique par

$$X_t = (C^- + C^+)^{-1} \, (\alpha_t - \beta_t) \qquad (11)$$

Si $c_j^- + c_j^+ = 0$ pour un (ou plusieurs) type(s) de produits, c.à.d. si ni les retards à la livraison, ni le stockage, n'engendrent de coût, il existe une solution optimale de (PL') où la production de ces types de produits est nulle. Nous ne considérons pas cette situation dans la suite.

Remplaçons dans (PL') le vecteur Y_t par le second membre de (8) et ensuite le vecteur X_t par le second membre de (11). La forme canonique, notée (PLC), peut s'écrire :

$$\text{Minimiser} \sum_{t=1}^{T} e' [(I - C^- (C^-+C^+)^{-1}) \alpha_t + C^- (C^-+C^+)^{-1} \beta_t] \qquad \text{(PLC)}$$

sous les contraintes

$$(\alpha_t - \beta_t) = (\alpha_{t-1} - \beta_{t-1}) + (C^- + C^+) (U_t - D_t) \qquad (12)$$

$$\tau U_t + \gamma_t = \varphi_t \qquad (13)$$

$$\alpha_t , \beta_t , \gamma_t , U_t \geq 0$$

où I est la matrice unitaire de dimension n x n et le couple (α_0, β_0) est choissit tel que

$$\alpha_0 - \beta_0 = (C^- + C^+) X_0 \qquad (14)$$

Du point de vue théorique il est possible de résoudre (PLC) par une méthode de la programmation linéaire sans tenir compte de la structure particulière. Le nombre de variables de base est nb = T (n + m) et le nombre de variables hors de base est nh = 2 T n. En utilisant la méthode du simplexe, nous manipulons un tableau qui contient nb x nh éléments. Pour un problème avec 10 types de produits, 10 machines et 10 périodes élémentaires, nous avons alors un tableau qui contient 200 x 200 éléments. Cet exemple montre que les problèmes de grande dimension sont difficiles à résoudre par la méthode du simplexe sans tenir compte de la structure particulière du problème.

(PLC) est muni d'une "structure escalier" (angl. staircase structure) ou "structure multi phase" (angl. multi stage structure). Pour illustrer cette structure nous regroupons les vecteurs α_t, β_t, γ_t, U_t comme suit

$$Z_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ U_t \end{pmatrix}$$

En introduisant des matrices $\mathcal{A}_t$ et $\mathcal{B}_t$ et des vecteurs $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{D}_t$, le programme linéaire (PLC) peut s'écrire :

$$\text{Minimiser} \quad \mathcal{C}_1 Z_1 + \mathcal{C}_2 Z_2 + \mathcal{C}_3 Z_3 + \mathcal{C}_4 Z_4 + \dots + \mathcal{C}_{T-1} Z_{T-1} + \mathcal{C}_T Z_T$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{llllll} \mathcal{A}_1 Z_1 & & & & & = \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{B}_1 Z_1 & + \mathcal{A}_2 Z_2 & & & & = \mathcal{D}_2 \\ & \mathcal{B}_2 Z_2 & + \mathcal{A}_3 Z_3 & & & = \mathcal{D}_3 \\ & & \mathcal{B}_3 Z_3 & + \mathcal{A}_4 Z_4 & & = \mathcal{D}_4 \\ & & & \dots & & \\ & & & & \mathcal{B}_{T-1} Z_{T-1} + \mathcal{A}_T Z_T & = \mathcal{D}_T \end{array}$$

$$Z_1 , \quad Z_2 , \quad Z_3 , \quad Z_4 , \quad \dots \quad Z_{T-1} , \quad Z_T \geq 0$$

Plusieures méthodes de décomposition explorent cette structure de manière à décomposer le problème global en sous-problèmes. Nous citons en particulier la méthode de décomposition imbriquée (angl. nested decomposition method) présentée par C.R. Glassey [1973] et J.K. Ho et A.S. Manne [1974] et l'extension de cette méthode aux progammes non-linéaires convexes présentée par O. Neil [1976]. Les auteurs appliquent le principe de décomposition proposé par Danzig et Wolfe [1960]. Une deuxième méthode de décomposition qui explore la structure escalier est la méthode de factorisation de la base (angl. basis factorization method) présentée par A.F. Pérold et G.B. Danzig [1978].

De nombreuses comparaisons empiriques de la méthode de décomposition imbriquée et de la méthode de factorisation de la base avec la méthode simplexe sont connues. Ces comparaisons montrent que chacune des méthodes de décomposition est globalement entre deux et trois fois plus rapide que la méthode de simplexe. La place mémoire utilisée par les méthodes de décompositions est globalement égale au tiers de la place mémoire utilisée par la méthode simplexe.

Remarquons que la place de mémoire utilisée et le temps de calcul nécessité par ces méthodes peuvent être réduits, si on tient compte des informations complémentaires du problème traité. Pour la méthode de décomposition imbriquée il est possible de réduire la place de mémoire utilisée et le temps de calcul si une solution proche de la solution optimale est connue. Rappelons que la méthode de décomposition imbriquée détermine la solution optimale de manière itérative. A chaque itération, on génère une solution en déterminant (entre autre) une combinaisons convexe de l'ensemble des solutions déterminées par les itérations précédentes.

4. Une heuristique

Nous proposons une heuristique qui consiste à rechercher une solution initiale qui est ensuite améliorée en effectuant des optimisations locales. Cette heuristique est bien adaptée aux problèmes de grande dimension.

Première étape : recherche d'une solution initiale

Nous introduisons un modèle agrégé dans lequel le contrôle $U_1, U_2, \ldots, U_T \in IR^{+n}$ est remplacé par un contrôle global $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_T \in IR^+$ et l'état du stock des produits est décrit de manière globale par $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_T \in IR$. Pour établir le modèle agrégé, nous définissons le ratio de la production $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)'$ par

$$r_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} d_{jt} - x_{j0}}{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{T} d_{kt} - x_{k0} \right)} \qquad (15)$$

Dans cette formule, la différence $\sum_{t=1}^{T} d_{jt} - x_{j0}$ est la demande effective en produits de type j cumulée sur la période de planification. Nous supposons, que cette différence est positive pour chaque type de produit. Le ratio R est alors muni des propriétés suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = 1 \qquad (16)$$

$$r_j > 0$$

En utilisant ce ratio, nous déterminons le contrôle $U_1, U_2, \ldots, U_T \in IR^{+n}$ en fonction du contrôle global $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_T \in IR^+$ par

$$U_t = R\,\underline{u}_t \tag{17}$$

Cette détermination conduit à un contrôle admissible si et seulement si :

$$\begin{aligned} \tau\, R\,\underline{u}_t &\leq \varphi_t \\ R\,\underline{u}_t &\geq 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Posons

$$\underline{\tau}_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}\; r_j \tag{19}$$

et

$$\underline{S}_t = \min\{\, \varphi_t / \underline{\tau}_1 \,, \varphi_t / \underline{\tau}_2 \,, \ldots, \varphi_t / \underline{\tau}_m \,\} \tag{20}$$

Les conditions (18) peuvent s'écrire

$$0 \leq \underline{u}_t \leq \underline{S}_t \tag{21}$$

Le contrôle global détermine la transition de l'état du stock $X_t \in IR^n$ à l'état $X_{t+1} \in IR^n$ de manière unique par le système

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + R\,\underline{u}_t - D_t \\ X_0 &= \text{donné} \end{aligned} \tag{22}$$

Dans le modèle agrégé, nous considérons l'état du stock de produits de manière globale. Nous autorisons la détermination multivoque

$$e' X_t = e' X_{t-1} + e' R \underline{u}_t - e' D_t$$
$$X_0 = \text{donné} \qquad (23)$$

et posons $\underline{x}_t = e' X_t$ et $\underline{d}_t = e' D_t$. $\underline{x}_t \in \mathbb{R}$ est l'état global du stock de produits à la fin de la période élémentaire t et $\underline{d}_t \in \mathbb{R}_+$ est la demande totale de l'agrégat de tous les produits sur la période élémentaire t.

En considérant les propriétés du ratio R, on a $e'R \underline{u}_t = \underline{u}_t$. Le système d'équations d'états s'écrit :

$$\underline{x}_t = \underline{x}_{t-1} + \underline{u}_t - \underline{d}_t$$
$$\underline{x}_0 = \text{donné} \qquad (24)$$

Remarquons qu'avec l'état global du stock de produits, il n'est généralement pas possible d'évaluer le coût de manière exacte. En utilisant le ratio R nous faisons l'approximation :

$$\sum_{t=1}^{T} g(X_t) \approx \sum_{t=1}^{T} g(R \underline{x}_t) \qquad (25)$$

En d'autres termes, nous prenons pour acquis que l'état X_t est égal à $R \underline{x}_t$. On montre que cette approche est exacte, c.à.d. que l'on a égalité, si

$$(I_n - R e')(X_0 + \sum_{s=1}^{t} (R \underline{u}_s - D_s)) = 0 \qquad (26)$$

La fonction coût $g(R\,\underline{x}_t)$ peut être simplifiée. Nous obtenons

$$\begin{aligned} g(R\,\underline{x}_t) &= \sum_{j=1}^{n} g_j(r_j\,\underline{x}_t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \max\,\{-c_j^-\,r_j\,\underline{x}_t,\; c_j^+\,r_j\,\underline{x}_t\} \\ &= \max\,\{-\sum_{j=1}^{n} c_j^-\,r_j\,\underline{x}_t,\; \sum_{j=1}^{n} c_j^+\,r_j\,\underline{x}_t\} \end{aligned}$$

Posons

$$\underline{c}^- = \sum_{j=1}^{n} c_j^-\,r_j \qquad \underline{c}^+ = \sum_{j=1}^{n} c_j^+\,r_j \tag{27}$$

$\underline{c}^-$ est la moyenne pondérée des coûts $c_1^-, c_2^-, \dots, c_n^-$ et $\underline{c}^+$ est la moyenne pondérée des coûts $c_1^+, c_2^+, \dots, c_n^+$. Définissons la fonction de coût $\underline{g}(\underline{x}_t)$ comme suit :

$$\underline{g}(\underline{x}_t) = \begin{cases} -\underline{c}^-\,\underline{x}_t & \text{si } \underline{x}_t < 0 \\ \underline{c}^+\,\underline{x}_t & \text{si } \underline{x}_t \geq 0 \end{cases} \tag{28}$$

Le problème agrégé, noté (PA), s'écrit

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{t=1}^{T} \underline{g}(\underline{x}_t) \tag{PA}$$

sous les contraintes

$$\underline{x}_t = \underline{x}_{t-1} + \underline{u}_t - \underline{d}_t$$

$$\underline{x}_0 = \text{donné}$$

$$0 \leq \underline{u}_t \leq \underline{S}_t$$

La recherche de la solution optimale du problème agrégé est relativement simple. Elle peut être trouvée à l'aide de la programmation linéaire ou à l'aide de la programmation dynamique.

Soit $\underline{u}_1^*$, $\underline{u}_2^*,\ldots,\underline{u}_T^*$ le contrôle optimal du problème agrégé. Une solution du problème initial peut se déduire de celle du problème agrégé par les relations

$$U_t^0 = R\,\underline{u}_t^* \tag{29}$$

L'état du stock des produits est alors donné par

$$X_t^0 = X_0 + \sum_{s=1}^{t} [\,U_s^0 - D_s\,] \tag{30}$$

Deuxième étape : amélioration de la solution initiale

Considérons, pour donner l'idée de base de l'approche, le problème d'optimisation suivant: soit un graphe séquentiel valué donné. $S_0,S_1,\ldots,S_T$ étant des ensembles de sommets, et l'ensemble S_0 contient un seul sommet. Le sommet $X_t \in S_t$ correspond à un état du stock de produits à la fin de la période élémentaire t. Les arcs sont donnés par les ensembles $A_1,A_2,\ldots,A_T$. L'ensemble A_t contient les arcs partant des sommets de l'ensemble S_{t-1} et allant vers les sommets de l'ensemble S_t. A chaque sommet X_t est associé un coût $g(X_t)$. Le problème consiste à trouver le chemin le plus court partant du sommet de l'ensemble S_0 et allant vers un des sommets de S_T.

Admettons que nous connaissions un chemin de S_0 à S_T. La suite des sommets sur ce chemin est notée X_0^0, $X_1^0,\ldots,X_T^0$. Nous cherchons maintenant un chemin plus court par optimisation locale. Partant du sommet X_{t-1}^0 , nous cherchons le sous-chemin le moins long qui va au sommet X_{t+1}^0. Une illustration de l'optimisation locale est donnée par la figure 2

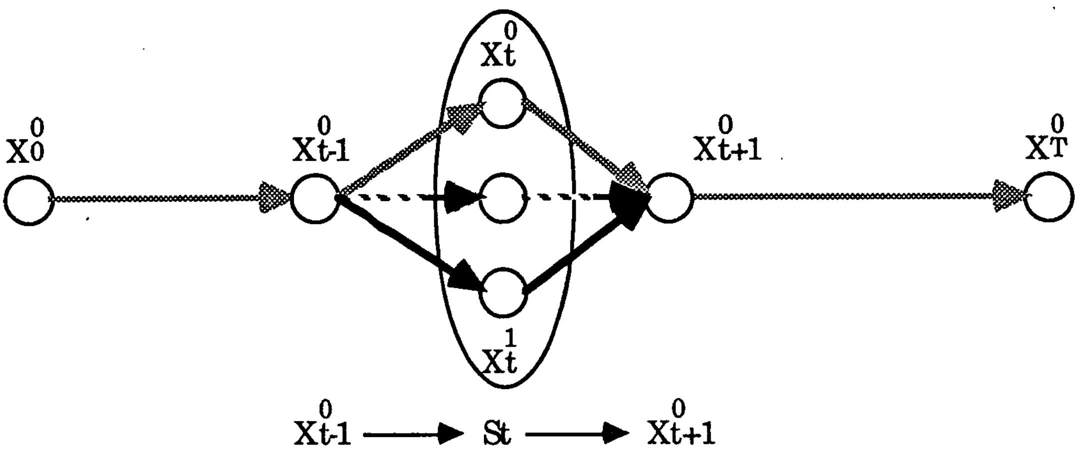

figure 2

Soit X_t^1 le sommet sur ce sous-chemin. Le nouveau chemin de X_0^0 à X_T^0 est noté par la suite des sommets $X_0^0,X_1^0,\ldots X_{t-1}^0,X_t^1,X_{t+1}^0,\ldots,X_T^0$. Le coût associé au nouveau chemin global obtenu est inférieur ou égal à celui associé au chemin de départ. Voyons maintenant comment appliquer ce principe pour améliorer la solution de départ de notre problème.

Soit U_1^0, $U_2^0,\ldots$, U_T^0 un contrôle déterminé par la première étape et soit X_1^0, $X_2^0,\ldots$, X_T^0 la suite des états correspondants. Nous décomposons le problème global en T sous-problèmes. En allant vers le passé, nous partons avec la dernière période. Le sous-problème, noté (SP_T), consiste à déterminer un couple (U_T , X_T) de manière à

Minimiser $g(X_T)$ (SP_T)

sous les contraintes

$$X_T = X_{T-1}^0 + U_T - D_T$$
$$\tau U_T \leq \varphi_T$$
$$U_T \geq 0$$

La solution optimale du sous-problème (SP_T) est notée (U_T^1, X_T^1). Ensuite nous considérons succsessivement pour t =T-1,T-2,...,1 , le sous-problème (SP_t) qui consiste à déterminer un triplet (U_t, X_t, U_{t+1}) de manière à

Minimiser $g(X_t)$ (SP_t)

sous les contraintes

$$X_t = X_{t-1}^0 + U_t - D_t$$
$$X_{t+1}^1 = X_t + U_{t+1} - D_{t+1}$$
$$\tau U_t \leq \varphi_t$$
$$\tau U_{t+1} \leq \varphi_{t+1}$$
$$U_t,\ U_{t+1} \geq 0$$

La solution optimale du sous-problème (SP_t) est notée $(U_t^1, X_t^1, U_{t+1}^1)$. La valeurs du critère de la solution globale obtenue est inférieur ou égal à celle de la solution précédente. Si

$$\sum_{t=1}^{T} g(X_t^0) > \sum_{t=1}^{T} g(X_t^1) \qquad (31)$$

on peut relancer les calculs de l'optimisation locale avec la solution obtenue. Sachant que la valeur minimale du critère est positive, on montre que la procédure converge. On vérifie également que la solution finale dépend du choix de la solution de départ.

5. Exemple numérique

Pour pouvoir donner une interprétation géométrique du déroulement de l'heuristique nous considérons un exemple de petite dimension. Deux types de produits sont à fabriquer sur un système de production constitué de trois machines. Les temps fabrication sont donnés par le tableau 1.

temps	produit 1	produit 2
machine 1	1/4 h	0 h
machine 2	1/5 h	1/10 h
machine 3	1/12 h	1/6 h

tableau 1

La période de planification est constituée de 4 périodes élémentaires, dont chacune est d'une durée de $\Delta t = 100$ heures. Les machines sont disponibles à cent pour cent c'est à dire :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \end{pmatrix}$$

La demande des produits sur les 4 périodes élémentaires est donnée par le tableau 2.

demande	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	350	200	350	500
produit 2	100	300	500	300

tableau 2

L'état inital du stock de produits est nul pour chaque type de produits : $x_{10} = x_{20} = 0$. Les coûts dûs aux retards de livraison sont $c_1^- = c_2^- = 1$ F / h par produit, et les coûts de stockage $c_1^+ = c_2^+ = 0{,}01$ F / h par produit.

En considérant la demande et l'état initial du stock de produits, nous calculons d'abord le ratio de la production. La demande effective cumulée sur les quatre périodes est 1400 de produits du type 1 et 1200 de produits du type 2. Le ratio de la production est alors

$$r_1 = \frac{1400}{1400 + 1200} \approx 0.54 \qquad r_2 = \frac{1200}{1400 + 1200} \approx 0.46$$

Avec ce ratio nous calculons pour chaque machine le temps moyen de fabrication par agrégat des produit.

$$\underline{\tau}_1 = \tau_{11}\, r_1 + \tau_{12}\, r_2 = 0.135 \text{ h / produit}$$

$$\underline{\tau}_2 = \tau_{21}\, r_1 + \tau_{22}\, r_2 = 0.154 \text{ h / produit}$$

$$\underline{\tau}_3 = \tau_{31}\, r_1 + \tau_{32}\, r_2 = 0.122 \text{ h / produit}$$

Pour ce ratio la machine 2 est le goulot d'étranglement de la production. Cette machine donne une borne supérieure à la production maximale. A chaque période élémentaire on a

$$\underline{S}_t = \min\{ \varphi_t / \underline{\tau}_1 , \varphi_t / \underline{\tau}_2 , \varphi_t / \underline{\tau}_3 \} = 650 \text{ produits / période}$$

Le coût moyen dû aux retards de livraison et le coût de stockage sont donnés par $\underline{c}^- = 1.00$ F / produit / heure et $\underline{c}^+ = 0.01$ F / produit / heure. Finalement, la demande totale par période est donnée par le tableau 3.

demande	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1-2	450	500	850	800

tableau 3

Le problème agrégé s'écrit

$$\text{Minimiser } \{ \max\{-\underline{x}_1, \underline{x}_1/100\} + \max\{-\underline{x}_2, \underline{x}_2/100\} + \max\{-\underline{x}_3, \underline{x}_3/100\} + \max\{-\underline{x}_4, \underline{x}_4/100\} \}$$

sous les contraintes

$$\underline{x}_1 = \underline{u}_1 - 450$$

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \underline{u}_2 - 500$$

$$\underline{x}_3 = \underline{x}_2 + \underline{u}_3 - 850$$

$$\underline{x}_4 = \underline{x}_3 + \underline{u}_4 - 800$$

$$0 \leq \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4 \leq 650$$

La solution optimale du problème agrégé peut être trouvée par la méthode du simplexe. La solultion optimale consiste à produire le maximum dans chacune des périodes élémentaires, c.à.d. $\underline{u}_1^* = \underline{u}_2^* = \underline{u}_3^* = \underline{u}_4^* = 650$ produits / période. Avec le ratio de la production, cette solution peut être traduite sur le plan du problème initial par :

$$U_t^0 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.46 \end{pmatrix} u_t^*$$

Le résultat arrondi de ce calcul et la suite des états du stock de produits se trouve dans le tableau 4 .

production	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	350	350	350	350
produit 2	300	300	300	300

stock	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	0	150	150	0
produit 2	200	200	0	0

tableau 4

Le coût total associé à cette solution est 700 F. Considérons cette solution comme étant un point de départ pour appliquer la deuxième étape de l'algorithme. Les solutions proposées par la méthode pour les deux prémières itérations sont regroupées dans les tableaux 5 et 6.

production	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	400	350	300	350
produit 2	200	300	400	300

stock	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	50	200	150	0
produit 2	100	100	0	0

tableau 5

production	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	400	383,33	366,66	350
produit 2	200	233,33	466,66	300

stock	période 1	période 2	période 3	période 4
produit 1	50	233,33	150	0
produit 2	100	33,33	0	0

tableau 6

Le coût total associé à la solution proposée par la première itération est 600 F et celui associé à la deuxième itération est 566,66 F. Cette deuxième solution est un optimum local qui ne peut plus être amélioré par la méthode. On peut vérifier que, dans ce cas, on a atteint l'optimum global.

Les trajectoires d'états des stocks pour les solutions trouvées à l'aide des itérations successives sont illustrées dans la figure 3.

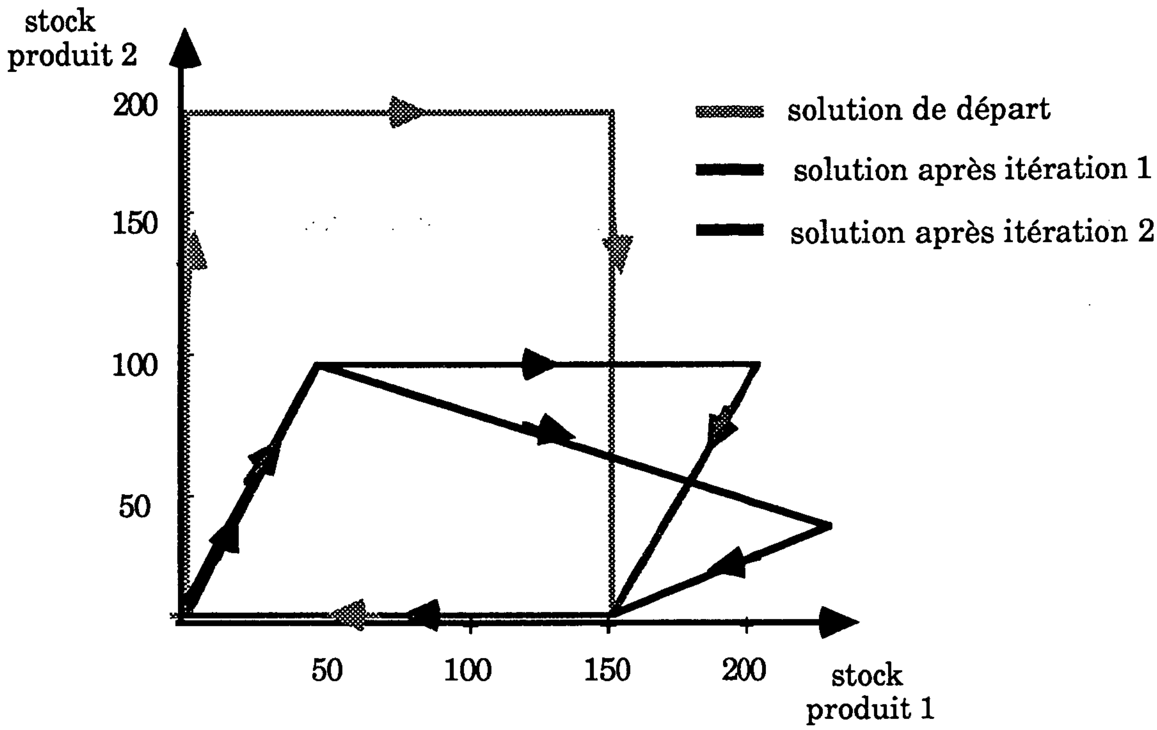

figure 3

6. Conclusion

Nous venons d'étudier un modèle de gestion de la production à moyen terme. Dans ce modèle, le flux de matière à travers le système de production apparaît comme un flux continu. Nous avons montré que l'objectif : minimiser la somme des coûts de stockage et des coûts dûs aux retards de livraison sous des contraintes de capacité, peut s'écrire comme un programme linéaire. Du point de vu théorique il est alors possible de résoudre le problème par une méthode exacte.

Pour les problèmes de grande dimension, nous avons proposé une heuristique qui est bien adaptée à la structure du modèle. La première étape est l'optimisation d'un modèle agrégé. C'est une approche classique pour traiter des problèmes complexes. La traduction de la solution proposée par le modèle agrégé en solution du modèle détaillé est un problème fondamental. L'amélioration proposée pour la deuxième étape conduit dans certains cas à la solution optimale.

Bibliographie

[1984] AKELLA R., CHOONG Y.F. et GERSHWIN S.B. : "Performance of Hierarchical Production Scheduling Policy", IEEE Trans. on Comp., Hybrids and Manufacturing Technology, vol CHMT-7, n° 3,1984

[1965] ANTONY R.N. : "Planning and Control Systems : A Framework for Analysis", Havard University, Graduate School of Buisiness Administration, Boston, 1965

[1979] AXSÄTER S. : "On the Design of the Aggregate Model in a Hierarchical Production Planning System", Engineering Proc. Econ., vol 4, n° 2/3, 1979

[1981] AXSÄTER S. : "Aggregation of Product Data for Hierarchical Production Planning", Operations Research, vol 29, n° 4, 1981

[1981] BITRAN G., HAAS E. et HAX A. : "Hierarchical Production Planning: A Single Stage System", Operations Research, vol 29, n° 4, 1981

[1977] BITRAN G. et HAX A. : " On the Design of Hierarchical Production Planning Systems", Decision Sciences, vol 8, n° 1, 1977

[1977] CANDEA D. : "Issues of Hierarchical Planning in Multi-Stage Production Systems", Thèse Ph D, Massachusetts Institute of Technologie, 1977

[1960] DANZIG G.B., WOLFE P. : " Decomposition Principle for Linear Programs", Operations Research, vol. 8, pp. 101-111, 1960

[1985] ERSCHLER J., FONTAN G. et MERCE C. : " Consistency of the disaggregation Process in Hierarchical Planning", Operations Research, vol. 34, n° 3, 1985

[1979] GABBAY H. : "Multi-Stage Production Planning", Management Science, vol 25, n° 11, 1979

[1987] GERSHWIN S.B. : "A Hierarchical Framework for Manufacturing Systems Scheduling", Proceedings of the 26-th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, December 1987

[1973] GLASSEY R.C. : "Nested Decomposition and Multistage Linear Programs", Management Science, vol. 20, no. 3, pp 282-292, 1973

[1982] GRAVES S.C. : "Using Lagrangean Techniques to solve Hierarchical Production Planning Problems", Management Science,vol 28, n° 3, 1982

[1978] HAX A.C. : "Aggregate Production Planning", Handbook of Operations Research, Moder J. et Elmaghraby S. (editeurs), van Nostrand, Reinhold Company, New York, 1978

[1974] HO J.K. , MANNE A.S. : "Nested Decomposition for Dynamic Models", Mathematical Programming, vol. 6, pp. 121-140, 1974

[1982] KIMEMIA J., GERSHWIN S.B. et BERTSEKAS D. : "Computation of production control policies by a dynamic programming technique", Lecture Notes in Control and Transformation Sciences, 5 th Conference on Analysis and Optimization of Systems, Springer, vol 44, 1982

[1980] KIMEMIA J.G. et GERSHWIN S.B.: "An Algorithm for the Computer Control of Production in Flexible Manufacturing Systems", IEE Trans., vol 15, n° 4, 1983

[1976] O NEIL R.P. : "Nested Decomposition of Multistage Convex Programs", SIAM J. Control and Optimisation, vol. 14, pp. 409-418, 1976

[1978] PEROLD A.F., DANZIG G.B. : " A Basis Factorization Method for Block Linear Programs", SIAM, Sparce Matrix Proc. pp. 283-312, 1978

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique