

# Un schéma multigrille en éléments finis décentré pour les équations d'Euler

Marie-Helene Lallemand, Loula Fezoui, Eric Perez

► **To cite this version:**

Marie-Helene Lallemand, Loula Fezoui, Eric Perez. Un schéma multigrille en éléments finis décentré pour les équations d'Euler. [Rapport de recherche] RR-0602, INRIA. 1987. inria-00075952

**HAL Id: inria-00075952**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075952>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE  
SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

## Rapports de Recherche

N° 602

### UN SCHÉMA MULTIGRILLE EN ÉLÉMENTS FINIS DÉCENTRÉ POUR LES ÉQUATIONS D'EULER

Marie-Hélène LALLEMAND  
Fatima FEZOU  
Eric PEREZ

Février 1987

# Un Schéma Multigrille en Éléments Finis Décentré pour les Equations d'Euler

An Upwind Finite Element Multigrid Scheme  
for the Euler Equations

*Marie-Hélène Lallemand(\*), Fatima Fezoui(\*) et Eric Perez(\*\*)*

(\*) INRIA Sophia-Antipolis  
Avenue Émile Hugues  
(Anc. Route des Lucioles)  
Sophia Antipolis  
06565 VALBONNE

(\*\*) 3, allée des Rosiers  
94260 FRESNE

## ABSTRACT

We are considering explicit finite-element multigrid techniques for the computation of two-dimensional steady flowfields governed by the Euler equations.

The originality of the present study lies in the utilization of an upwind finite-element approximation, which can be first-order or second-order accurate, and which is combined with a Runge-Kutta time-stepping integration scheme.

The successive grid-levels are nested and the discretization is performed by unstructured triangulation.

Illustrative numerical experiments have been carried out to compare the efficiency of a Full Multigrid technique with a computation using a single fine grid. In these experiments, two test cases have been considered : the transonic flow in a channel with a circular bump, and the subsonic flow about a lifting NACA0012 airfoil.

A noticeable improvement in efficiency is realized by the Full Multigrid approach.

## RESUME

On s'intéresse aux techniques multigrilles explicites en éléments finis pour la résolution numérique de problèmes d'écoulements bidimensionnels stationnaires régis par les équations d'Euler.

L'originalité de cette étude réside dans l'utilisation d'une approximation spatiale en éléments finis décentrée d'ordre un ou deux que l'on associe à un schéma Runge-Kutta pour intégrer en temps.

Les grilles successives sont emboîtées et la discrétisation se fait par triangulation non structurée.

Des expériences numériques ont été effectuées à titre illustratif en comparant l'efficacité d'une technique "Full Multigrid" à une technique monogrille, sur deux problèmes tests : écoulement transsonique dans un canal avec obstacle en arc de cercle, écoulement subsonique autour d'un profil NACA0012.

On a observé que l'approche "Full Multigrid" a apporté une amélioration notable en efficacité.

## Table des Matières

	Page
1. INTRODUCTION . . . . .	1
2. LE MODELE MATHEMATIQUE . . . . .	4
2.1. Equations . . . . .	4
2.2. Conditions aux bords . . . . .	4
3. APPROXIMATION SPATIALE . . . . .	6
3.1. Maillage : Eléments Finis . . . . .	6
3.2. Formulation variationnelle : Volumes Finis . . . . .	6
3.3. Schéma d'ordre un . . . . .	8
3.4. Schéma d'ordre deux . . . . .	8
4. LE SCHEMA EN TEMPS . . . . .	10
5. ALGORITHME MONOGRILLE . . . . .	11
6. METHODE MULTIGRILLE . . . . .	12
6.1. Les ingrédients . . . . .	12
6.2. Opérateurs de transferts . . . . .	12
6.2.1. Restrictions . . . . .	13
6.2.2. Prolongement . . . . .	13
6.3. Algorithme multigrille de base . . . . .	15
6.4. Multigrilles complètes ("Full Multigrid") . . . . .	19

<b>7. RESULTATS NUMERIQUES</b>	<b>21</b>
<b>7.1. Un calcul précis à l'ordre un</b>	<b>21</b>
<b>7.2. Un calcul précis à l'ordre deux</b>	<b>21</b>
<b>7.3. Evaluation préliminaire des résultats</b>	<b>22</b>
<b>8. CONCLUSIONS GENERALES</b>	<b>33</b>
<b>9. REFERENCES</b>	<b>34</b>
<b>10. APPENDICE A : Organigramme de l'algorithme multigrille de base</b>	<b>38</b>
<b>11. APPENDICE B : Organigramme de l'algorithme "Full Multigrid"</b>	<b>39</b>

## 1. INTRODUCTION

On présente dans ce rapport la construction et l'implémentation d'une méthode multigrille explicite pour la résolution des équations d'Euler stationnaires (cas compressible non visqueux), qui utilise des maillages de type éléments finis non structurés.

Depuis quelques années, les techniques multigrilles ont permis des réductions importantes de coût de nombreux calculs concernant :

- les problèmes elliptiques (cf. [4],[11] et [14]), (où l'on possède une théorie solide prouvant l'efficacité des techniques multigrilles);

- plus récemment, les problèmes hyperboliques, en particulier les problèmes d'écoulements compressibles non visqueux, régis par les équations d'Euler.

Nous nous intéressons ici à la deuxième famille de problèmes.

On peut distinguer deux types d'approches pour évaluer par des techniques multigrilles les solutions numériques stationnaires des équations d'Euler :

L'approche stationnaire où l'on cherche à résoudre le problème écrit sous forme stationnaire en utilisant, comme en contexte elliptique, une technique de relaxation (cf. [5],[8],[13],[20] et [23]);

L'approche instationnaire où l'on désire atteindre une solution asymptotique stationnaire du problème formulé de façon instationnaire, qui dans ce cas est de type hyperbolique, quelque soit le régime de l'écoulement.

Ni [26] a établi le premier un algorithme multigrille pseudo-instationnaire. Il utilise un solveur explicite de type Lax-Wendroff, par une formulation en volumes finis; une viscosité artificielle est introduite afin de permettre la convergence de l'algorithme; celle-ci joue aussi le rôle d'amortisseur des oscillations causées par les découplages pairs/impairs (amortissement nécessaire dans les calculs en régime transsonique ou hypersonique).

Cet algorithme a donné lieu à de nombreux développements. Nous citerons l'adaptation par Johnson au schéma de Mac Cormack [21], l'étude théorique menée par Couailler et Peyret dans [6], les applications à des problèmes aérodynamiques en trois dimensions d'espace par Koeck et Chattot [22] et la version basée sur la notion de raffinement local par Usab et Murman décrite dans [32].

Jameson ([15] et [16]) a construit un algorithme multigrille en utilisant une méthode des lignes en volumes finis. L'approximation spatiale est centrée, précise au second ordre, et combinée à une viscosité artificielle d'ordre quatre; l'intégrateur temporel est une méthode de Runge-Kutta linéarisée.

Un point commun entre l'algorithme de Ni et celui de Jameson réside dans la construction des différents niveaux de grilles emboîtées :

Ils utilisent tous deux une formulation en volumes finis liée à des maillages de type différences finies; les différentes grilles sont donc obtenues à partir d'un maillage initial arbitraire correspondant à la grille la plus fine : chaque maille d'une grille plus grossière est obtenue par assemblage de mailles plus fines.

Parce qu'il utilise une méthode des lignes, l'algorithme de Jameson permet une plus grande liberté dans le choix de l'approximation spatiale et du schéma d'intégration en temps. La méthode de Runge Kutta sert d'accélérateur de convergence ([30] et [31]); Jameson a de plus mis en évidence les propriétés de lissage de ses coefficients dans une étude théorique complète sur le comportement d'un V-cycle multigrille dans [17].

### Multigrilles emboîtées en éléments finis

La méthode multigrille présentée ici est une extension de l'algorithme de Jameson à des grilles emboîtées pour des maillages de type éléments finis. Les mailles sont des triangles en 2-D, des tétraèdres en 3-D, les nœuds en sont les sommets. Ces maillages sont supposés non structurés dans le sens où le nombre d'éléments ayant un nœud en commun n'est pas constant sur tout le domaine (cf. [7]). Pour des calculs d'écoulements autour d'un avion complet en particulier, où nous sommes amenés à représenter des domaines géométriques complexes, les éléments finis non structurés nous semblent les plus adaptés; ces méthodes ont permis des calculs d'écoulements transsoniques autour d'un avion complet dans [18], ainsi que de prédire des écoulements hypersoniques autour d'un engin spatial dans [3]; ils sont aussi susceptibles de fournir une précision dans des conditions qui préservent l'efficacité : l'on peut se permettre d'avoir des zones raffinées où cela semble nécessaire, pour des raisons d'ordre physique ou numérique, comme l'ont illustré Lohner et Morgan dans [25] ainsi que Palmerio et al. dans [27].

Dans un tel contexte, une première approche repose sur la notion de grilles emboîtées. En effet, on va construire les différents niveaux de grilles à partir d'une grille initiale grossière non structurée qu'on raffine successivement par division de chacun de ses éléments, ou bien sur tout le domaine, ou bien localement.

Dans le cas d'un processus de raffinement global, qui est l'option présentée dans ce rapport, on applique l'algorithme multigrille sur tout le domaine. Sinon, il est appliqué uniquement sur les zones raffinées, les autres zones sont traitées par un solveur monogrille.

Ce travail fait suite à celui de Perez qui a étendu l'algorithme de Jameson aux éléments finis en utilisant une approximation spatiale centrée de type Galerkin dans [28].

Une version à raffinement local pour la résolution des problèmes de type Navier-Stokes est présentée par Leyland dans [1] et [2].

### Décentrage

Dans ce rapport, on s'intéresse à une approximation spatiale décentrée de type van Leer constituée à l'aide d'une formulation mixte éléments finis-volumes finis [9].

Une étude théorique, basée sur les mêmes principes que ceux invoqués par Jameson



[17], a été conduite dans [24] sous l'éclairage des éléments finis. Nous référons à [30] pour une étude en volumes finis. Ces études permettent de déterminer les coefficients de Runge-Kutta les mieux adaptés à l'approximation spatiale décentrée choisie et au concept de multigrille. Ce choix est d'autant plus crucial qu'on ne peut régler par la suite aucun paramètre lié à la viscosité numérique, celle-ci étant définie par le décentrage.

\* \*  
\*

Nous présentons, dans une première partie, l'algorithme de base monogrille puis nous décrivons l'algorithme multigrille et précisons le rôle des différents opérateurs de transferts d'une grille à une autre. Cet algorithme sert de base à deux techniques :

la première consiste à utiliser l'algorithme tel quel. Chaque itération correspond à un V-cycle : départ sur le niveau le plus fin, résolution d'Euler et transferts des résidus d'un niveau à un autre jusqu'à atteindre le plus grossier; retour au niveau le plus fin par interpolations successives en ajoutant à la solution courante les corrections calculées sur les grilles grossières précédentes;

la seconde, "Full multigrid", est une combinaison de l'algorithme de base précédent et de la technique des raffinements successifs : départ sur le niveau le plus grossier; arrivée sur le niveau le plus fin. Il y a autant d'étapes que de grilles; chaque étape, hormis la première, correspond au passage à un niveau plus fin où l'on utilise l'algorithme multigrille de base dans lequel les grilles intervenant sont associées à tous les niveaux antérieurs à cette étape.

On présente quelques expériences numériques sur des problèmes tests d'écoulements bidimensionnels afin de comparer l'efficacité de ces deux techniques à celles d'algorithme monogrille.

## 2. LE MODELE MATHEMATIQUE

### 2.1. Equations

Nous recherchons les solutions faibles approchées des équations d'Euler qui s'écrivent, dans une formulation conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial x}F(W) + \frac{\partial}{\partial y}G(W) = 0 \quad (1)$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

où la pression  $p$ , la masse volumique  $\rho$ , l'énergie totale  $e$  et les composantes  $(u, v)$  de la vitesse  $\vec{V}$  satisfont l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)\right) \quad \gamma = 1.4 \quad (3)$$

### 2.2. Conditions aux bords

Considérons un écoulement autour d'un profil; le domaine de calcul  $\Omega$  est décrit par la figure suivante (FIG. 1):

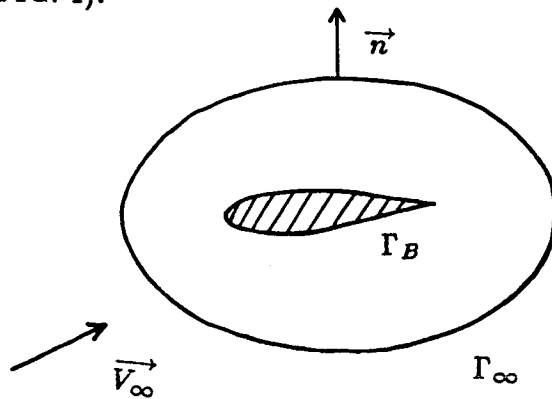


FIG. 1 : Domaine de calcul  $\Omega$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la frontière  $\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_\infty$ .

L'écoulement est supposé uniforme à l'infini; il est défini par :

$$\begin{cases} \rho_{\infty} &= 1 \\ \vec{V}_{\infty} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ p_{\infty} &= \frac{1}{\gamma M_{\infty}^2} \end{cases} \quad (4)$$

où  $\alpha$  est l'angle d'incidence et  $M_{\infty}$  le nombre de Mach à l'infini.

Sur la frontière  $\Gamma_B$  nous avons la condition de glissement :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5)$$

Précisons cependant que cette condition sera vérifiée au sens variationnel dans l'algorithme que nous allons décrire; pour plus de détails sur cette question on se référera à [7] ou [10] .

### 3. APPROXIMATION SPATIALE

#### 3.1. Maillage : Eléments Finis

On approche  $\Omega$  par un ouvert polygonal que nous subdivisons en triangles. Les nœuds  $A_i$  de la triangulation sont les sommets des triangles. Les degrés de liberté sont les valeurs de l'inconnue  $W$  aux nœuds. On note

$$W(A_i, t) = W_i(t) \quad (6)$$

#### 3.2. Formulation variationnelle : Volumes Finis

Pour chaque nœud  $A_i$ , on définit la cellule  $C_i$  ("volume de contrôle"), en joignant les milieux des côtés adjacents à  $A_i$  et les centres de gravité des triangles dont  $A_i$  est sommet (FIG. 2)

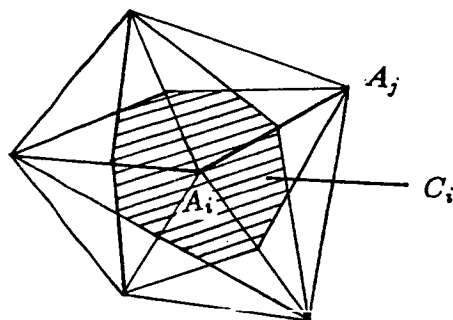


FIG. 2 : Cellule  $C_i$

En utilisant une formulation faible des équations (1), avec le choix des fonctions caractéristiques des cellules comme fonctions tests, on aboutit au système suivant :

$$\int_{C_i} \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad \text{pour toute cellule } C_i \quad (7)$$

En intégrant par parties chacune des équations du système et en supposant que  $\frac{\partial W}{\partial t}$  est constant en  $(x, y)$  sur chacune des cellules  $C_i$ , on obtient :

$$\text{aire}(C_i) \frac{\partial W}{\partial t} + \int_{\partial C_i} ( F(W)\nu_x + G(W)\nu_y ) d\sigma = 0 \quad (8)$$

où  $\partial C_i$  est la frontière de  $C_i$  et  $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$  est la normale unitaire extérieure à  $C_i$  (FIG. 3).

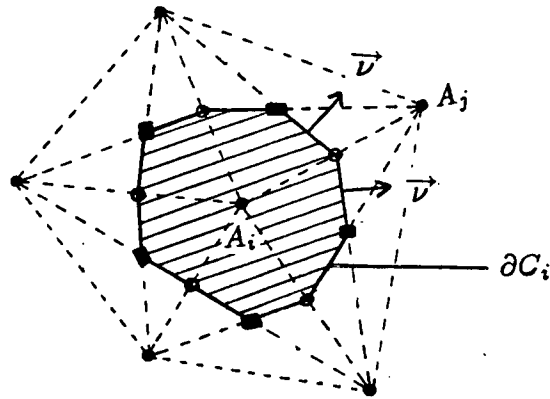


FIG. 3 : Domaine d'intégration

Les équations (8) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_{ij} = 0 \quad (9)$$

où  $N_i$  désigne le nombre de nœuds voisins de  $A_i$ .

On note :

$$\Phi_{ij} = \int_{G_1 I G_2} ( F(W)\nu_x + G(W)\nu_y ) d\sigma \quad (10)$$

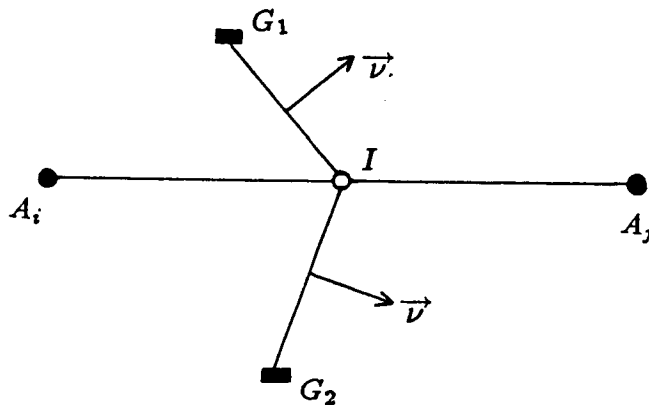


FIG. 4 : bisegment  $G_1 I G_2$ .

On utilisera par la suite le "flux global"  $\Phi$ , défini par :

$$\Phi = \left( \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{j=1}^{N_i} \Phi_{ij} \right)_{i=1, \dots, n} \quad (11)$$

où  $n$  est le nombre de nœuds du maillage.

### 3.3. Schéma d'ordre un

On pose :

$$H = \eta_1 F + \eta_2 G \quad (12)$$

$$P = \eta_1 F' + \eta_2 G' \quad (13)$$

où

$$\eta_1 = \int_{G_1 I G_2} \nu_x d\sigma, \quad \eta_2 = \int_{G_1 I G_2} \nu_y d\sigma \quad (14)$$

On obtient alors le schéma décentré d'ordre un (en espace) en posant :

$$\Phi_{ij} = \hat{\Phi}(W_i, W_j) \quad (15)$$

où  $\hat{\Phi}$  est la fonction de flux numérique; nous utiliserons ici le schéma décentré d'ordre un défini par (cf. [12]) :

$$\hat{\Phi}(U, V) = \frac{H(U) + H(V)}{2} + \frac{1}{2} \left| P \left( \frac{U+V}{2} \right) \right| (U - V) \quad (16)$$

### 3.4. Schéma d'ordre deux

On peut définir un gradient approché de  $W$  en chaque nœud  $A_i$  en interpolant linéairement  $W$  sur tous les triangles ayant  $A_i$  comme sommet. Ce qui donne pour la composante en  $x$  par exemple :

$$\bar{W}_x(A_i) = \frac{\int_{\text{supp}(i)} \frac{\partial W}{\partial x} dx dy}{\int_{\text{supp}(i)} dx dy} \quad (17)$$

où  $\text{supp}(i)$  désigne la réunion de tous les triangles ayant  $A_i$  comme sommet.

On note :

$$(\nabla W)_i = \begin{pmatrix} \overline{W}_x(A_i) \\ \overline{W}_y(A_i) \end{pmatrix} \quad (18)$$

On obtient une approximation d'ordre deux en espace en posant dans (16) :

$$\begin{cases} U = W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}(\nabla W)_i \cdot \overrightarrow{A_i A_j} \\ V = W_{ji} = W_j - \frac{1}{2}(\nabla W)_j \cdot \overrightarrow{A_i A_j} \end{cases} \quad (19)$$

Dans certains cas (écoulements transsoniques et supersoniques en technique monogrille par exemple) et dans tous les cas en technique multigrille, il est nécessaire d'introduire une procédure de limitation pour réduire les oscillations numériques de la solution. Ceci peut se faire par une nouvelle définition des valeurs de  $W$  aux interfaces des cellules.

Posons

$$\begin{cases} (\Delta_-)_i = 2(\nabla W)_i \cdot \overrightarrow{A_i A_j} - (W_j - W_i) \\ (\Delta_+)_j = 2(\nabla W)_j \cdot \overrightarrow{A_i A_j} - (W_j - W_i) \end{cases} \quad (20)$$

Alors (19) devient:

$$\begin{cases} \widetilde{W}_{ij} = W_i + \frac{s_i}{4} [(\Delta_-)_i + (W_j - W_i)] \\ \widetilde{W}_{ji} = W_j + \frac{s_j}{4} [(\Delta_+)_j + (W_j - W_i)] \end{cases} \quad (21)$$

où les limiteurs  $s_i$  sont des fonctions différentiables de  $W$  ; ils ont été introduits par van Leer dans [33] et sont définis par :

$$s_i = \frac{(\Delta_-)_i + (W_j - W_i) + \epsilon}{(\Delta_-)_i^2 + (W_j - W_i)^2 + \epsilon^2}, \quad s_j = \frac{(\Delta_+)_j + (W_j - W_i) + \epsilon}{(\Delta_+)_j^2 + (W_j - W_i)^2 + \epsilon^2} \quad (22)$$

où  $\epsilon$  est un nombre positif "petit" qui empêche la division par zéro.

#### 4. LE SCHEMA EN TEMPS

On utilise une méthode Runge-Kutta à 4 pas (qu'on notera par la suite R.K.4) dont les coefficients  $\alpha_i$  sont adaptés au choix de l'approximation spatiale; dans le cadre des approximations spatiales décentrées décrites plus haut, ces coefficients sont considérés optimaux pour les valeurs :

$$\alpha_1 = .11, \quad \alpha_2 = .2766, \quad \alpha_3 = .5, \quad \alpha_4 = 1. \quad (23)$$

avec :

$$\sigma = 2.1028 \text{ dans le cas de l'approximation spatiale décentrée d'ordre un} \quad (24)$$

$$\sigma = 1.9186 \text{ dans le cas de l'approximation spatiale décentrée d'ordre deux} \quad (25).$$

où  $\sigma$  désigne le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy.

Ces choix sont justifiés dans [17], [24] et [30].

Par ailleurs, on utilise une technique de pas de temps local calculé à l'aide de la donnée d'un C.F.L uniforme ( $\sigma$ ), dont les principes sont donnés dans [7]; elle constitue un moyen supplémentaire pour accélérer la convergence vers l'état stationnaire.



## 5. ALGORITHME MONOGRILLE

Nous décrivons l'algorithme du schéma lorsqu'une seule grille est utilisée ; les données de base sont le maillage et la valeur initiale de  $W$  sur ce maillage qu'on note  $W^{(0)}$ . Le calcul d'une itération repose sur le schéma R.K.4 (23) pour l'intégration en temps et sur le schéma décentré défini par (16) (ordre un) et (19-22) (ordre deux) pour l'approximation spatiale.

### Données

- grille  $G$  à  $n$  points (nœuds) .

- $W_0^{(0)} = \left[ \left( W_0^{(0)} \right)_{i,j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq n}} :$

tableau des variables d'Euler aux nœuds  $A_j$  à l'instant initial  $t_0$ .

### Calcul d'une itération

Soit  $W_n^{(0)}$  la variable connue à l'instant  $t_n = n\Delta t$  où  $\Delta t$  est le pas de temps, on calcule la nouvelle valeur de  $W$  à l'instant  $t_{n+1}$  de la façon suivante :

Pour  $ip = 1, \dots, 4$ , on calcule :

$$R^{ip} = \Phi(W_n^{(ip-1)}) \text{ (flux global)}$$

$$W_n^{(ip)} = W_n^{(0)} + \alpha_{ip} \Delta t R^{(ip)}$$

$$W_{n+1} = W_n^{(4)}$$

Si cette valeur n'est pas celle de l'état stationnaire asymptotique désiré, on réitère le processus en posant comme nouvelle valeur initiale :

$$W_{n+1}^{(0)} = W_{n+1}$$

## 6. METHODE MULTIGRILLE

On rappelle et on précise certains principes introduits dans [28].

Partant d'une grille initiale grossière quelconque (non structurée), une manière simple de générer les différentes grilles est d'appliquer des raffinements successifs. La technique de raffinement utilisée ici est une subdivision de chacun des éléments du maillage en quatre (raffinement global).

### 6.1. Les ingrédients

MAILLAGE :

•  $(G_k)_{1 \leq k \leq N}$  : suite finie de grilles emboîtées où :

$$\begin{cases} G_1 & \text{est la grille la plus grossière (niveau 1)} \\ G_N & \text{est la grille la plus fine (niveau } N) \\ N & \text{entier, } N \geq 2 \end{cases}$$

Pour un niveau de grille  $k$  fixé :

- $n_k$  = nombre de nœuds du maillage de niveau  $k$
- $\mathcal{N}(k)$  = ensemble des nœuds du niveau  $k$
- $W_k = \left[ (W_k)_{i,j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq n_k}}$

APPROXIMATION SPATIALE : (niveau  $k$ )

•  $\Phi_k(W_k)$  ( ou  $\Phi_k$  quand il n'y a pas ambiguïté )

correspond au flux numérique global relatif au niveau  $k$  comme défini en (11) dans 3.2 .

ALGORITHME TEMPOREL :

On utilise la méthode R.K.4 telle qu'elle est donnée dans les chapitres 4 et 5.

### 6.2. Opérateurs de transferts

On va définir les différents opérateurs de transferts nécessaires à la constitution de l'algorithme.

### 6.2.1. Restrictions

$I_k$  est un opérateur de transfert du niveau  $k+1$  au niveau  $k$  ; il correspond ici à l'injection naturelle, définie par :

$$\begin{aligned} I_k(W_{k+1}(is)) &= W_{k+1}(is) \quad \forall is \in \mathcal{N}(k) \\ W_{k+1}(is) &= \left[ (W_{k+1})_{i, is} \right]_{1 \leq i \leq 4} \end{aligned} \quad (26)$$

Il sert à transférer au niveau  $k$  la solution (intermédiaire) obtenue au niveau  $k+1$ .

$M_k$  est un opérateur de transfert du niveau  $k+1$  au niveau  $k$ , choisi différent de  $I_k$  ; il correspond à une restriction pondérée définie de la façon suivante :

Pour tout nœud  $is$  de  $\mathcal{N}(k)$ , on définit  $NC_{k+1}(is)$  comme étant l'ensemble des nœuds  $i$  du niveau  $k+1$  qui sont sommets des triangles ayant  $is$  comme sommet commun.

On définit aussi  $aire_k(is)$ ,  $aire_{k+1}(is)$  comme étant respectivement l'aire de la cellule centrée en  $is$  au niveau  $k$ , et celle au niveau  $k+1$ .

On a :

$$aire_k(is) = aire_{k+1}(is) + \sum_{i \in NC_{k+1}(is)} \left( \frac{1}{2} aire_k(i) \right) \quad (27)$$

Si  $X_{k+1} = \left[ (X_{k+1})_{i, is} \right]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq is \leq n_{k+1}}}$  est connu en chaque nœud du niveau  $k+1$ , la valeur de  $X_{k+1}$  en chaque nœud du niveau  $k$  est déterminée par :

$$M_k(X_{k+1})(is) = \frac{1}{aire_k(is)} \left[ X_{k+1}(is) aire_{k+1}(is) + \frac{1}{2} \sum_{i \in NC_{k+1}(is)} X_{k+1}(i) aire_{k+1}(i) \right] \quad \forall is \in \mathcal{N}(k) \quad (28)$$

Il sert à transférer au niveau  $k$ , le résidu obtenu au niveau  $k+1$ .

### 6.2.2. Prolongement

$I_{k+1}$  désigne l'opérateur de transfert du niveau  $k$  au niveau  $k+1$ , qui interpole linéairement une valeur connue du niveau  $k$  au niveau  $k+1$ . On choisit ici de prendre un interpolateur de type Lagrange.

Soit  $g_k = (g_k(is))_{is \in \mathcal{N}(k)}$  donné.

Soit  $T_k$  un élément quelconque de la triangulation relative au niveau  $k$ .

On cherche à définir :

$$I_{k+1}(g_k) = g_{k+1} = (g_{k+1}(is))_{is \in \mathcal{N}(k+1)}$$

Soient  $is_k^1, is_k^2, is_k^3$  les trois sommets de  $T_k$ . On a :

$$T_k = \bigcup_{i=1}^4 T_{k+1}^i$$

puisque chaque élément du niveau  $k+1$  est obtenu en divisant par quatre chaque élément du niveau  $k$  ( cf. FIG. 5 ).

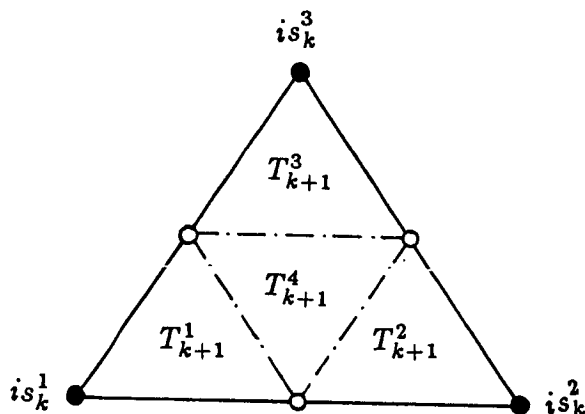


FIG. 5 : Élément  $T_k$  du niveau  $k$  contenant les quatre éléments  $T_{k+1}^i$  du niveau  $k+1$ .

La valeur de  $g_{k+1}$  en chaque sommet  $is$  des éléments  $T_{k+1}^i$  est déterminée linéairement en fonction des valeurs de  $g_k$  aux trois sommets  $is_k^i$  de  $T_k$  à l'aide des polynômes de degré un séparément en  $x$  et en  $y$   $f_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) définis par :

$$\begin{cases} f_j(x, y) = a_j x + b_j y + c_j \\ f_j(is_k^l) = \delta_{jl} \end{cases} \quad (29)$$

où  $\delta_{jl}$  désigne le symbole de Kröneckner.

Par suite :

$$g_{k+1}(is) = \begin{cases} g_k(is) & \text{si (i),} \\ f_1(is) g_k(is_k^1) + f_2(is) g_k(is_k^2) \\ \quad + f_3(is) g_k(is_k^3) & \text{si (ii).} \end{cases} \quad (30)$$

(i) :  $is$  est un sommet de  $T_k$ .

(ii) :  $is$  est un sommet de  $T_{k+1}^i$  qui n'est pas un sommet de  $T_k$

Cet opérateur sert à transférer les corrections du niveau  $k$  au niveau  $k+1$ .

### 6.3. Algorithme multigrille de base

Chaque itération correspond à un V-cycle.

Données :

- $\{G_k\}_{1 \leq k \leq N}$  suite de  $N$  grilles emboîtées.
- $W_N^{(0)} = \left[ (W_N^0)_{i,j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq n_N}}$  tableau des variables d'Euler aux nœuds  $j$  de la grille la plus fine, à l'instant initial  $t_0$ .

Calcul d'une itération multigrille ( ou V-cycle ) :

DEBUT

0) Initialisation du terme source  $S_N$  ( niveau le plus fin ) :

$$S_N \equiv 0$$

i) Boucle sur les niveaux de grilles ( niveau le plus fin au niveau le plus grossier )

$$k = N, N-1, \dots, 2 :$$

a) Application de R.K.4 au niveau de grille  $k$  :

Pour  $ip = 1, \dots, 4$ , on calcule :

- Le flux global :  

$$\Phi_k \left( W_k^{(ip-1)} \right)$$
- Le résidu à l'étape  $ip$  :

$$R_k^{(ip)} = \Phi_k (W_k^{(ip-1)}) - S_k$$

- o La valeur intermédiaire de la solution à l'étape  $ip$  :

$$W_k^{(ip)} = W_k^{(0)} - \alpha_{ip} \Delta t_k R_k^{(ip)}$$

- b) Calcul du terme source  $S_{k-1}$  ( niveau  $k-1$  ) :

- o Initialisation de la solution initiale du niveau  $k-1$  :

$$W_{k-1}^{(0)} = I_{k-1} (W_k^{(4)})$$

- o Terme source  $S_{k-1}$  :

$$S_{k-1} = \Phi_{k-1} (W_{k-1}^{(0)}) - M_{k-1} [ \Phi_k (W_k^{(4)}) - S_k ].$$

- c) Valeur de la solution intermédiaire  $W_k$  ( niveau  $k$  ) :

$$W_k = W_k^{(4)}$$

- ii) Boucle sur les niveaux de grilles ( niveau le plus grossier au niveau le plus fin )

$$k = 1, 2, \dots, N-1 :$$

$$\text{On pose : } \bar{W}_1 = W_1$$

- a) Calcul de la correction du niveau  $k$  à apporter à la solution du niveau  $k+1$  :  $C_{k+1}$

$$C_{k+1} = I_{k+1} (\bar{W}_k - W_k^{(0)})$$

- b) Valeur finale de la solution ( niveau  $k+1$  ) :

$$\bar{W}_{k+1} = W_{k+1} + C_{k+1}$$

- iii) Nouvelle valeur de la solution initiale au niveau le plus fin :

$$W_N^{(0)} = \bar{W}_N$$

- iv) Retour à 0) si l'état stationnaire asymptotique n'est pas atteint .

FIN

Calcul de  $S_k$  :

Au départ du cycle,  $S_N$  étant initialisé à zéro, la valeur du résidu à chaque étape  $ip$  de R.K.4 ,  $ip = 1, \dots, 4$ , est donnée sur la grille la plus fine par :

$$R_N^{(ip)} = \Phi_N \left( W_N^{(ip-1)} \right) \quad (31)$$

Dans la partie  $i$ ), pour  $k = N$ , on applique donc exactement l'algorithme monogrille du chapitre 5.

Au niveau  $k$  ( $1 \leq k \leq N-1$ ), on calcule  $S_k$  par récurrence ( $k = N-1, N-2, \dots, 1$  et dans cet ordre) :

$$S_k = \Phi_k \left( I_k \left( W_{k+1}^{(4)} \right) \right) - M_k \left[ \Phi_{k+1} \left( W_{k+1}^{(4)} \right) - S_{k+1} \right] \quad (32)$$

$W_{k+1}^{(4)}$  désignant la solution intermédiaire obtenue au niveau  $k+1$  par R.K.4, le premier terme dans  $S_k$  correspond au flux global du niveau  $k$ , calculé en fonction de  $W_{k+1}^{(4)}$ ; le second terme étant l'interpolé de la différence entre :

- le flux global du niveau  $k+1$  calculé en fonction de  $W_{k+1}^{(4)}$
- et le terme source  $S_{k+1}$  du niveau  $k+1$ .

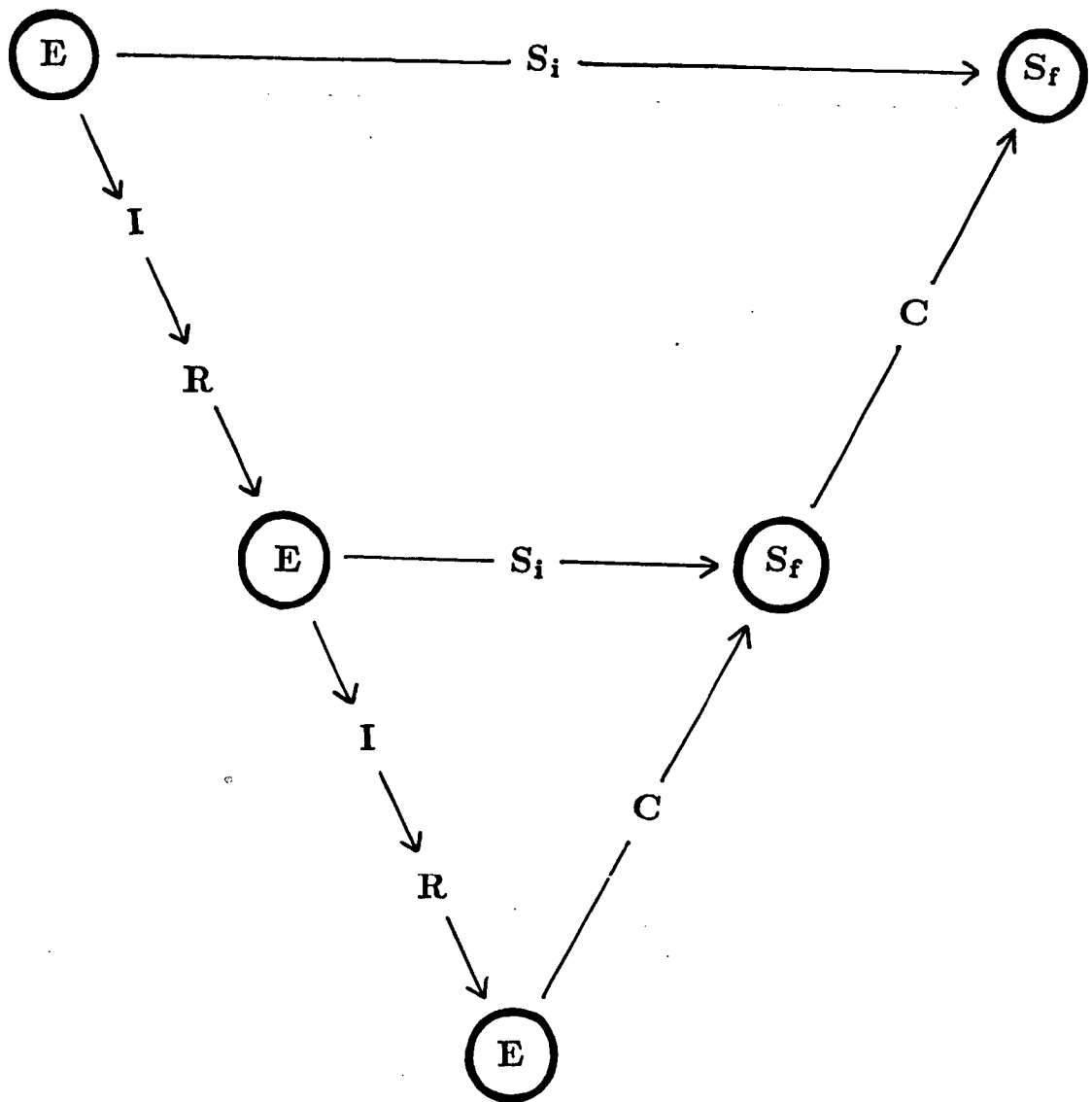
Correction  $C_{k+1}$  :

$I_{k+1} \left( \bar{W}_k - W_k^{(0)} \right)$  correspond à la somme des corrections des niveaux  $k, k-1, \dots, 1$  qu'on doit apporter à la solution intermédiaire du niveau  $k+1$ ; la correction au niveau  $k$  pour le niveau  $k+1$  étant :  $I_{k+1} \left( W_k^{(4)} - W_k^{(0)} \right)$ .

A la fin du cycle, la solution finale  $\bar{W}_N$  du niveau le plus fin est obtenue en ajoutant à la solution intermédiaire  $W_N$ , toutes les corrections obtenues aux niveaux grossiers  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  :

$$\begin{aligned} \bar{W}_N &= W_N + I_N \left( \bar{W}_{N-1} - W_{N-1}^{(0)} \right) \\ &= W_N + I_N \left[ \left( W_{N-1} - W_{N-1}^{(0)} \right) + I_{N-1} \left( \bar{W}_{N-2} - W_{N-2}^{(0)} \right) \right] \\ &= W_N + I_N \left( W_{N-1} - W_{N-1}^{(0)} \right) + I_N I_{N-1} \left( W_{N-2} - W_{N-2}^{(0)} \right) + \dots + \\ &\quad + I_N I_{N-1} \dots I_2 \left( W_1 - W_1^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Le schéma d'un V-cycle est donné dans la figure FIG. 6 pour  $N = 3$  grilles. L'organigramme de l'algorithme est donné en annexe A.



- E** : R.K.4
- I** : *injection solution intermédiaire*  
(pour initialisation niveau grossier suivant)
- R** : *calcul terme source pour niveau grossier suivant*
- Si** : *solution intermédiaire*
- C** : *ajout correction ( avec interpolation )*
- Sf** : *solution finale = Si + C*

FIG. 6 : V-cycle multigrille



#### 6.4. Multigrilles complètes ("Full Multigrid")

On a testé deux techniques multigrilles. La première utilise l'algorithme de base tel quel, la seconde est une combinaison de la technique dite des raffinements successifs et de l'algorithme de base, dont le principe est le suivant ( $N = 3$ ) :

(1) Algorithme monogrille sur  $G_1$  ( grille la plus grossière ) :

Solution initiale uniforme :  $W_1^{(0)}$   
 Solution finale "convergée" :  $W_1$

(2) Algorithme de base bigrille sur  $G_1$  et  $G_2$  :

Solution initiale :  $W_2^{(0)} = I_2(W_1)$   
 Solution finale obtenue :  $W_2$

(3) Algorithme de base trigrille sur  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  :

Solution initiale :  $W_3^{(0)} = I_3(W_2)$   
 Solution finale obtenue :  $W_3$

( L'opérateur  $I_k$  étant celui défini dans le §6.2.2 ).

L'étape (1) permet d'arriver rapidement à la solution stationnaire "grossière". A chaque raffinement ( étape  $k$  ), l'application de l'algorithme de base  $k$ -grilles permet d'éliminer les hautes fréquences de l'erreur relatives au niveau  $k$ , ainsi que les basses fréquences relatives aux niveaux  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

La technique multigrille complète est moins coûteuse que la technique multigrille de base. De plus, le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir une solution numérique approchée croît linéairement avec  $n_N$ , si  $n_N$  désigne le nombre de points de la  $N^{\text{ième}}$  grille ( la plus fine ) ( cf. [11] § 5 ).

On peut utiliser le même nombre d'itérations à chaque étape. L'algorithme s'écrit alors :

(1) Faire  $i$  itérations de l'algorithme monogrille sur  $G_1$

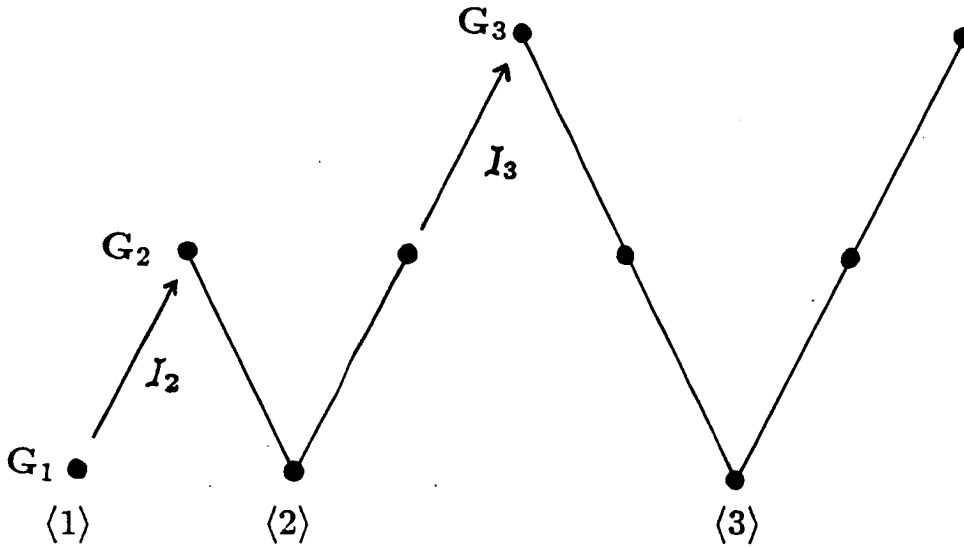
solution initiale uniforme :  $W_1^{(0)}$   
 solution finale :  $W_1$

Faire à chaque étape  $k$ ,  $k = 2, \dots, N$  :

( $k$ ) Faire  $i$  itérations de l'algorithme de base  $k$ -grilles sur  $G_1, \dots, G_k$  :

solution initiale interpolée :  $W_k^{(0)} = I_k(W_{k-1})$   
 solution finale :  $W_k$

On présente dans la figure FIG. 7 le schéma de cette technique pour  $N = 3$  grilles.



→ : *transfert de la solution finale obtenue à l'étape  $\langle j - 1 \rangle$  pour initialisation solution initiale à l'étape  $\langle j \rangle$  par interpolation (opérateur  $I_j$ )*

$\langle j \rangle$  :  $j = 1$  :  *$i$  itérations de l'algorithme monogrid sur  $G_1$*

$j > 2$  :  *$i$  cycles de l'algorithme de base  $j$ -grilles sur  $G_1, \dots, G_j$*

FIG. 7 : Schéma multigrilles complètes.

On donne en annexe B, l'organigramme de la technique dans le cas où l'on effectue le même nombre d'itérations ( ou cycles ) à chaque étape.

## 7. RESULTATS NUMERIQUES

Les résultats numériques sont présentés ici à titre illustratif. Pour des commentaires détaillés, on pourra se référer à [24].

Nous avons effectué deux types de comparaisons qui sont :

- les raffinements successifs : le processus de calcul consiste en un même nombre d'étapes que de niveaux de grilles; à chaque étape, donc à chaque passage à un niveau plus fin, on applique l'algorithme monogrille sur ce niveau tel qu'il est donné dans le chapitre 5. L'algorithme global est donc similaire à celui décrit au § 6.4 où l'on remplace dans  $\langle k \rangle$  les itérations k-grilles par des itérations monogrilles sur la grille  $G_k$ .

- "Full Multigrid" dont le fonctionnement est donné dans le § 6.4 .

Pour des raisons d'encombrement de mémoire (le stockage des données géométriques croît rapidement du fait que les grilles fines sont obtenues par raffinement global par division de chaque maille en quatre), on n'utilise que trois niveaux de grilles.

### 7.1. Un calcul précis à l'ordre un

Le problème modèle considéré est un écoulement interne transsonique pour un nombre de Mach égal à .85 à l'infini à l'intérieur d'une tuyère avec obstacle en arc de cercle.

Le nombre de points relatif à chaque niveau de grille est le suivant :

niveau 1 : 161 points

niveau 2 : 585 points

niveau 3 : 2225 points

Les maillages relatifs à chaque niveau de grille sont donnés dans la figure FIG. 8 à la fin de ce chapitre.

Le nombre d'itérations a été fixé à 300 pour chaque étape. Les résultats de convergence sont donnés dans les figures FIG. 9 pour les raffinements successifs et FIG. 10 pour la technique "Full Multigrid". Les résidus ne sont pas normalisés par des résidus initiaux. Les solutions trouvées à la dernière étape (niveau le plus fin) sont données dans les figures FIG. 11 et FIG. 12 respectivement pour les raffinements successifs et la technique des multigrilles complètes.

### 7.2. Un calcul précis à l'ordre deux

La version précise à l'ordre deux a été appliquée au calcul d'un écoulement externe subsonique autour d'un profil d'aile NACA0012, avec un nombre de Mach à l'infini égal à .72, et une incidence nulle.

Le nombre de points de chaque niveau de grille est :

niveau 1 : 121 points

niveau 2 : 442 points

niveau 3 : 1684 points

Les différents maillages sont données dans la figure FIG. 13 à la fin de ce chapitre.

Le nombre d'itérations a cette fois-ci été fixé à 500 pour la première étape (pour les deux techniques de raffinements successifs et "Full Multigrid"), à 500 (raffinements successifs) et 400 ("Full Multigrid") pour la deuxième étape et à 500 (pour les deux techniques) pour la troisième étape.

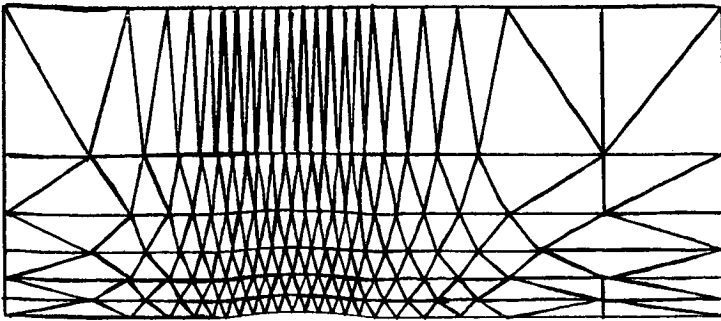
Les résultats de convergence sont données dans les figures FIG. 14 pour les raffinements successifs et FIG. 15 pour la technique "Full Multigrid". Les solutions trouvées à la dernière étape (niveau le plus fin) sont présentées dans les figures FIG. 16 et FIG. 17.

### 7.3. Evaluation préliminaire des résultats

On peut déjà constater que la meilleure technique est celle des multigrilles complètes aussi bien pour une approximation spatiale décentrée d'ordre un que deux. Il est à noter que si le nombre d'itérations à chaque étape paraît élevé, d'une part, le coût des itérations sur les grilles intermédiaires représente une faible part du coût total, et d'autre part, la dernière étape des multigrilles complètes ne nécessite qu'un nombre moindre de cycles pour avoir la solution stationnaire (entre 40 et 80 cycles).

On retrouve bien (FIG. 10 et FIG. 15) des vitesses de convergence voisines à chaque étape "Full Multigrid", ceci nous permet d'être assurés que l'on a bien atteint l'efficacité espérée.

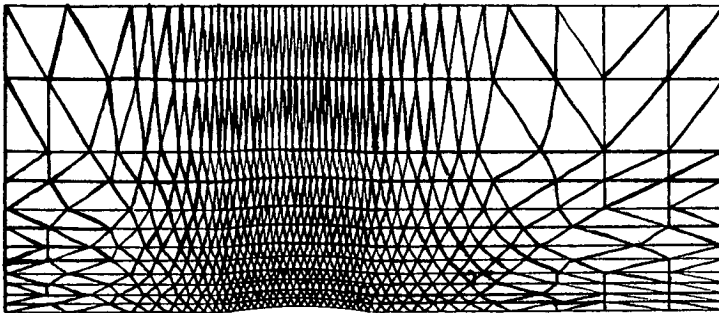
Une discussion plus détaillée sur le coût et les gains obtenus par rapport aux techniques monogrilles est donnée dans [24]. Le facteur obtenu ici est de l'ordre de 3 en CPU. Ce résultat, loin d'être définitif, peut être sensiblement amélioré. Une possibilité consiste à réduire le nombre d'itérations à chaque étape par un choix plus pointu des niveaux de convergence sur les grilles intermédiaires. Afin de profiter au mieux de l'effort de convergence obtenu à un niveau grossier (fin d'une étape  $\langle k \rangle$ ) pour une meilleure réinitialisation de la solution au niveau plus fin (début de l'étape  $\langle k + 1 \rangle$ ), et pour éviter d'introduire beaucoup trop d'erreurs de hautes fréquences, on peut choisir un opérateur d'interpolation de précision d'ordre plus élevé que celui utilisé dans un V-cycle.



GRILLE GROSSIERE (initiale) :

161 points

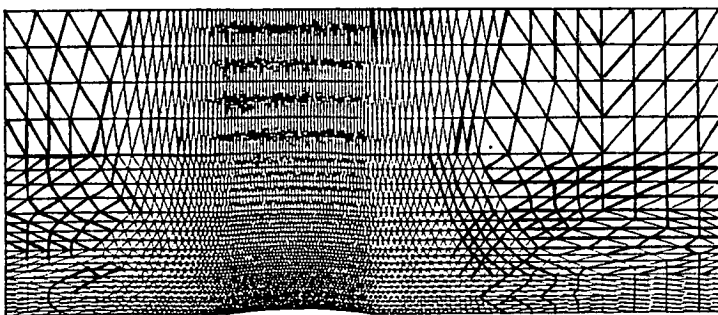
264 éléments



GRILLE MOYENNE :

585 points

1056 éléments



GRILLE FINE :

2225 points

4224 éléments

FIG. 8 : Tuyère avec obstacle en arc de cercle.  
Maillages relatifs aux trois niveaux.

-24-  
cycles, n.

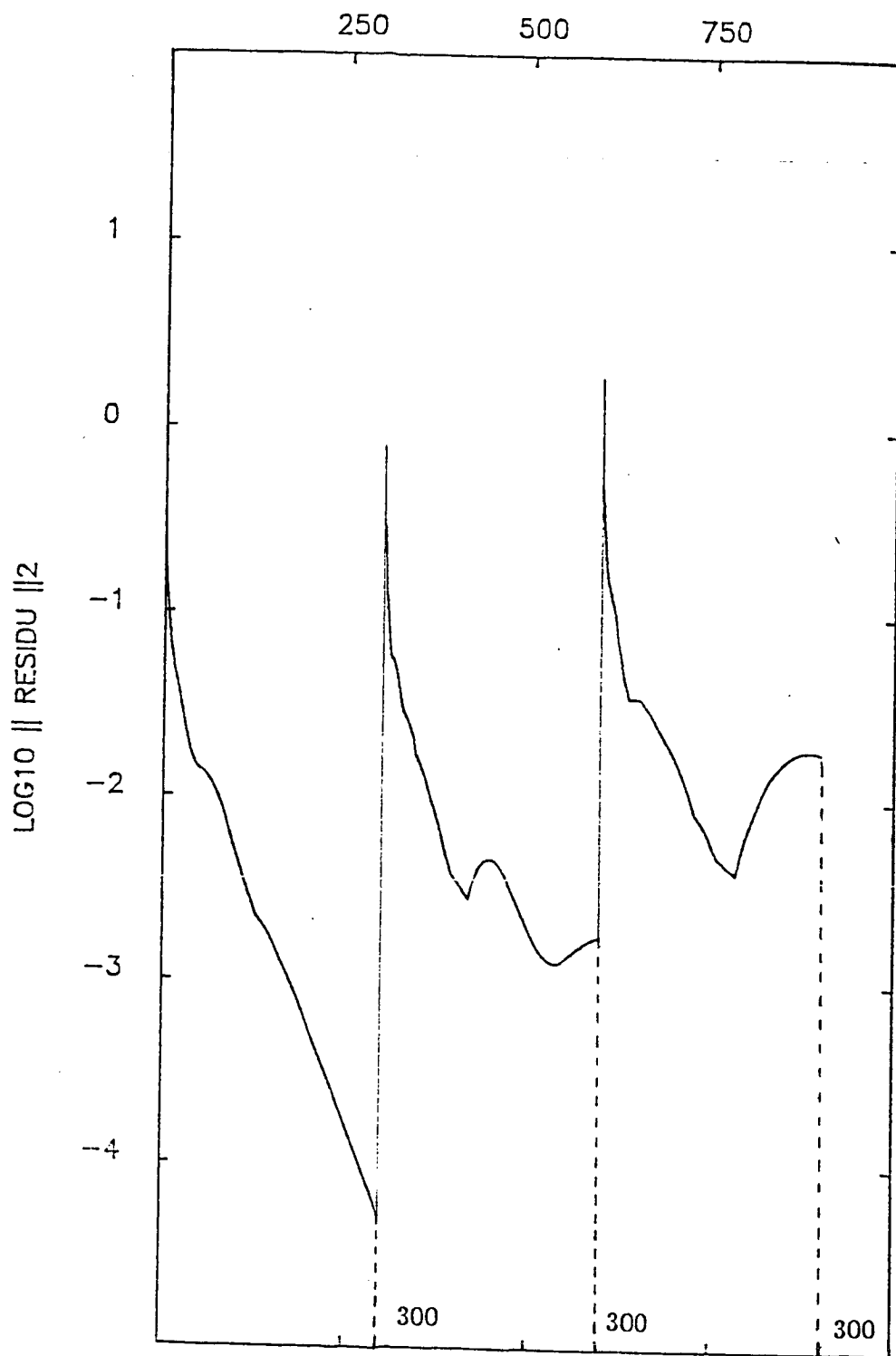


FIG. 9 : Tuyère avec obstacle en arc de cercle.  
Courbe de convergence - Raffinements successifs  
Ordre un ; MACH = .85

cycles, n.

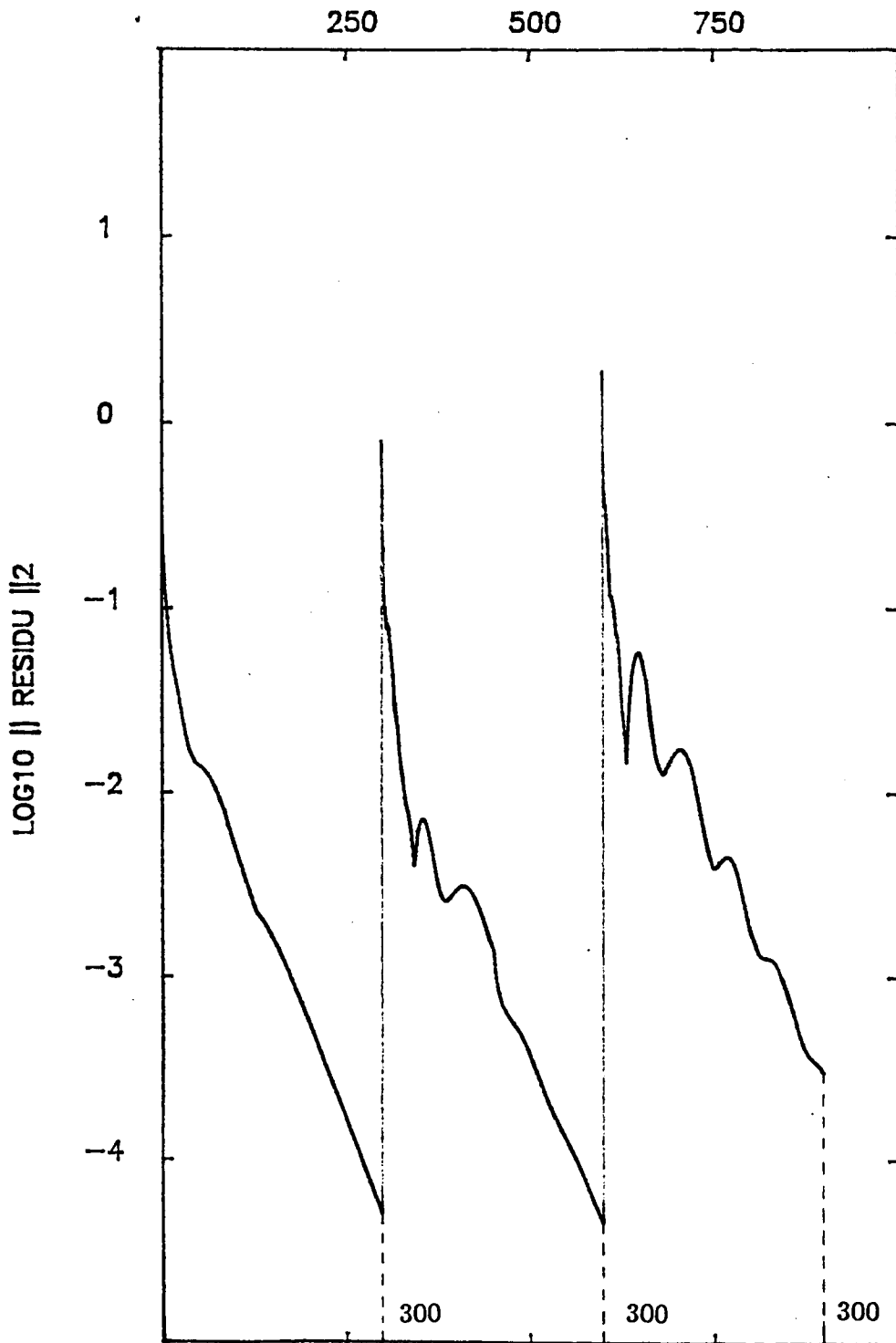


FIG. 10 : Tuyère avec obstacle en arc de cercle.  
Courbe de convergence - "Full Multigrid"  
Ordre un ; MACH = .85

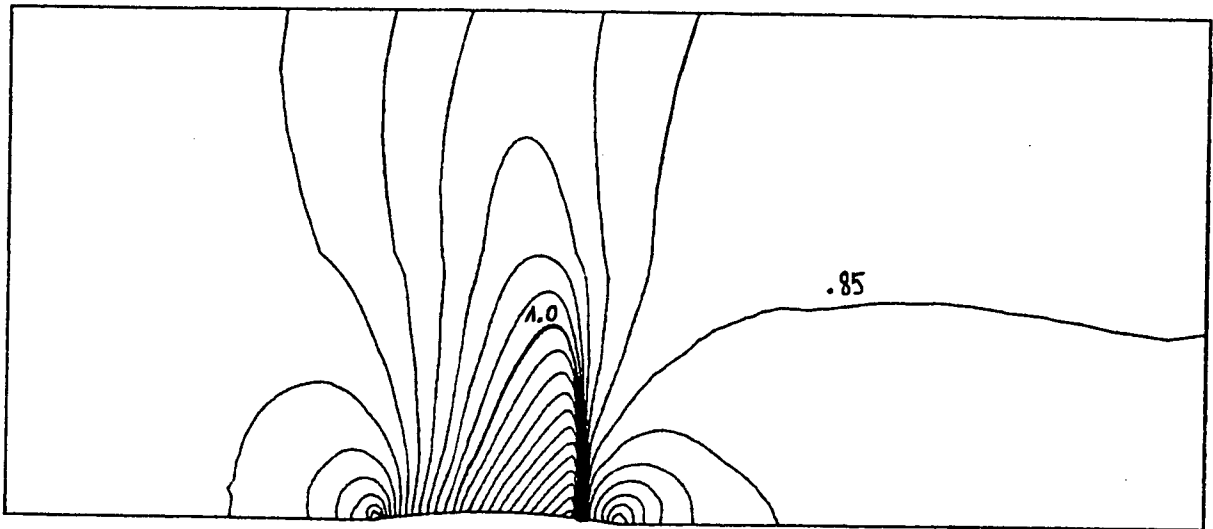


FIG. 11 : Tuyère avec obstacle en arc de cercle.  
Isomachs - Raffinements successifs (dernière étape)  
Ordre un ; MACH = .85



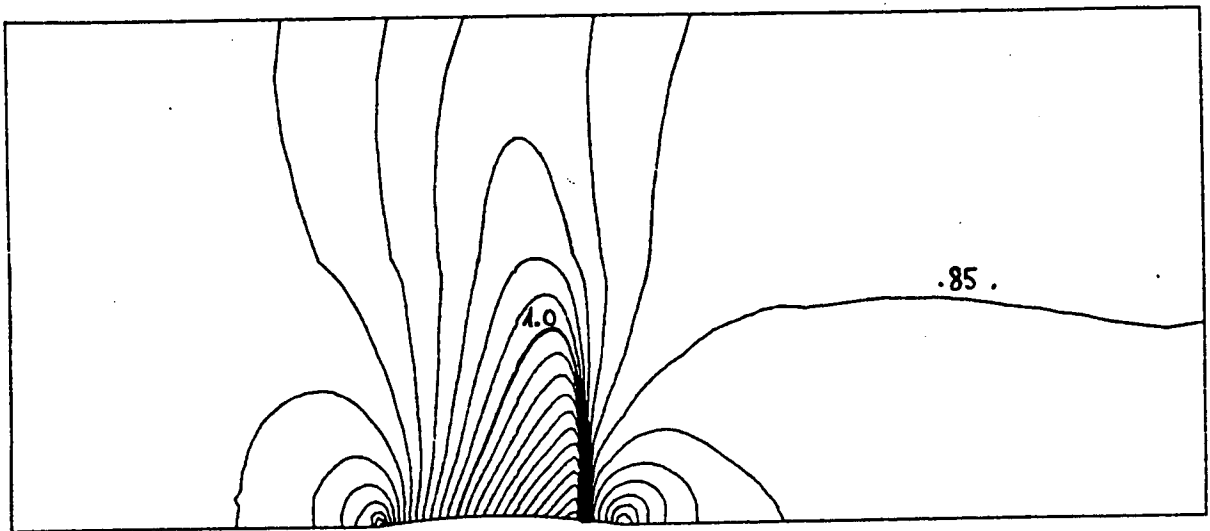
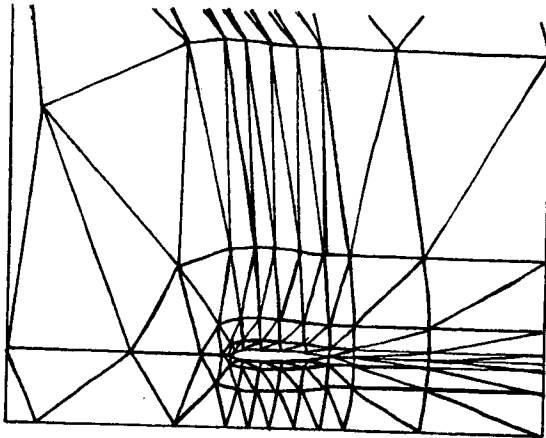
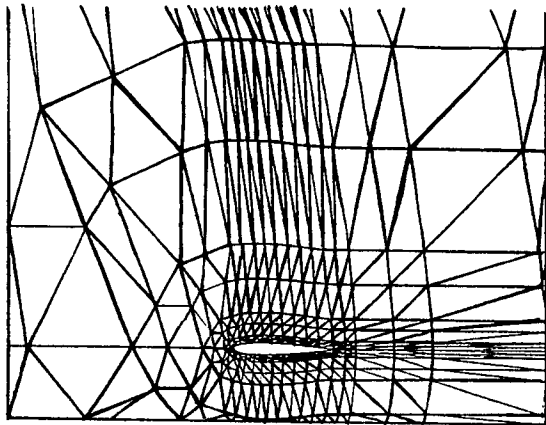


FIG. 12 : Tuyère avec obstacle en arc de cercle.  
Isomachs - "Full Multigrid" (dernière étape)  
Ordre un ; MACH = .85



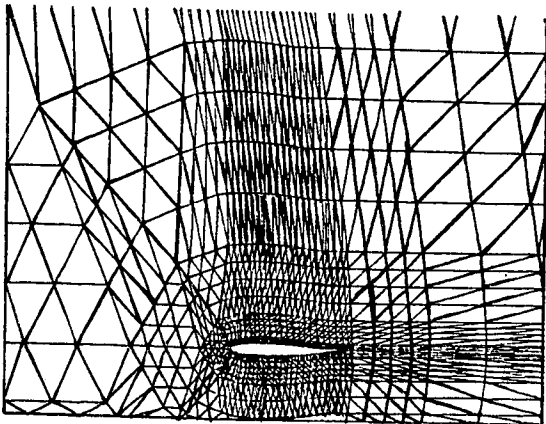
GRILLE GROSSIERE (initiale) :

121 points  
200 éléments



GRILLE MOYENNE :

442 points  
800 éléments



GRILLE FINE :

1684 points  
3200 éléments

FIG. 13 : Profil NACA0012.  
Maillages relatifs aux trois niveaux.

cycles, n.

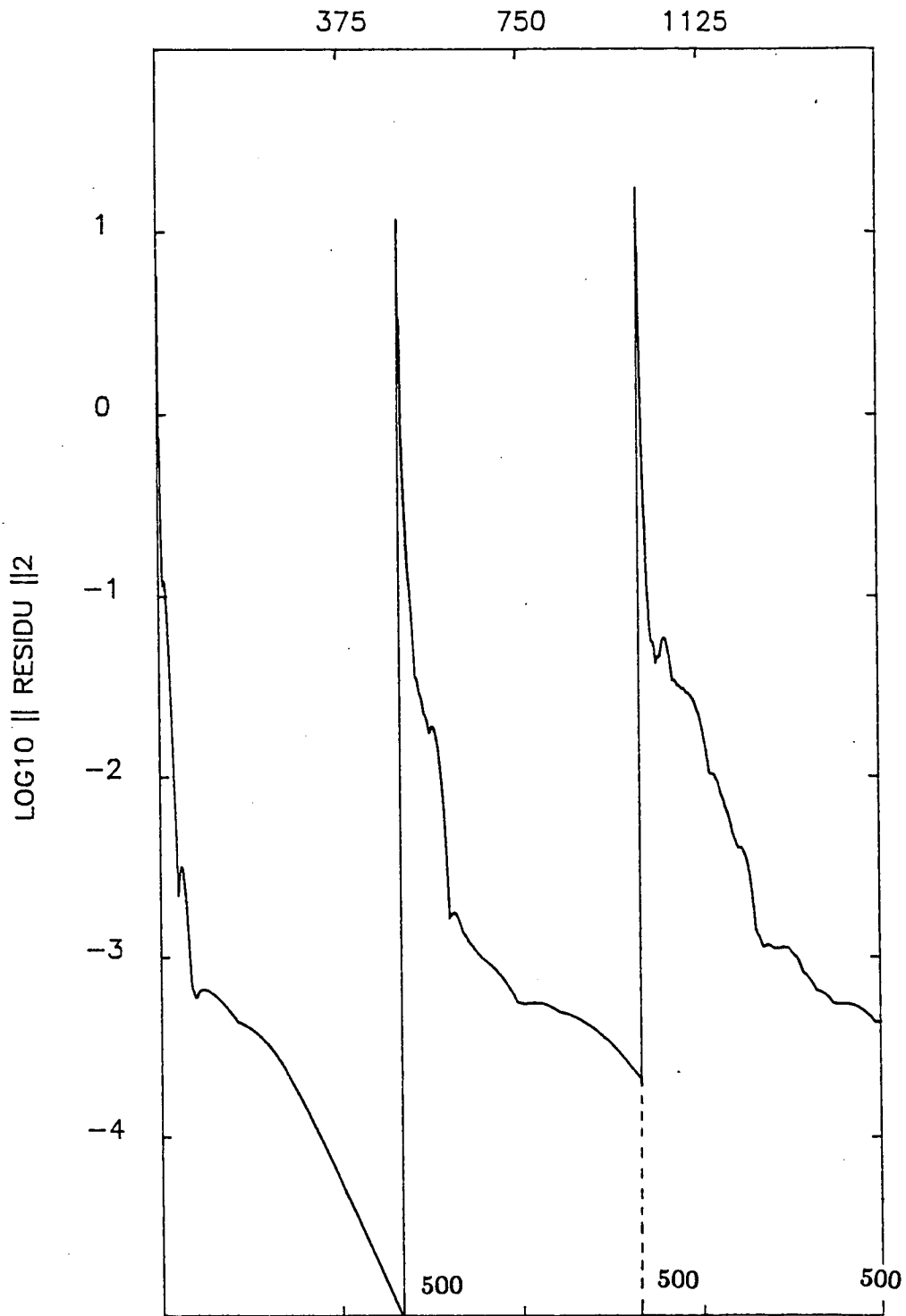


FIG. 14 : Profil NACA0012.  
Courbe de convergence - Raffinements successifs  
Ordre deux ; MACH = .72

cycles, n.

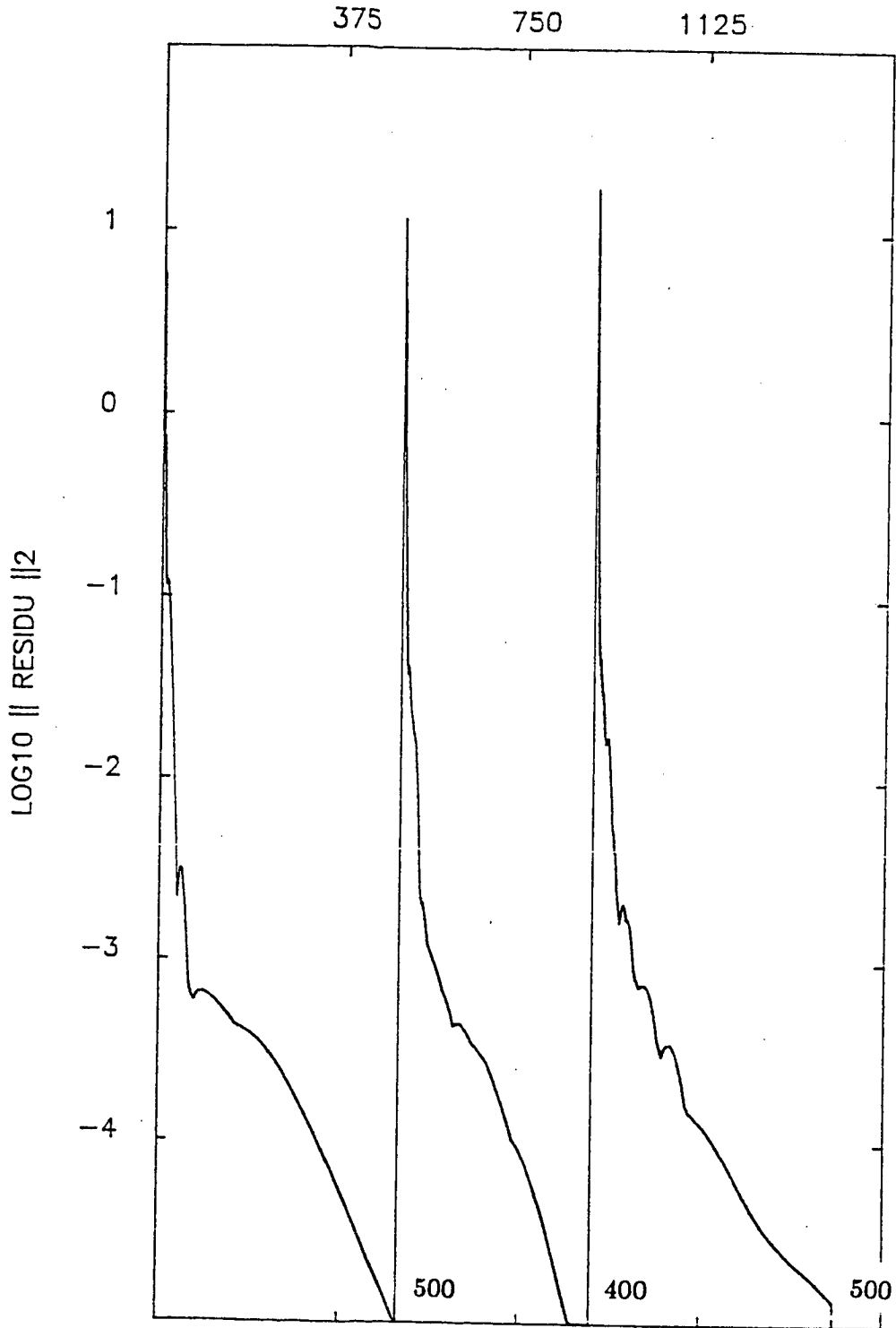


FIG. 15 : Profil NACA0012.  
Courbe de convergence - "Full Multigrid"  
Ordre deux ; MACH = .72

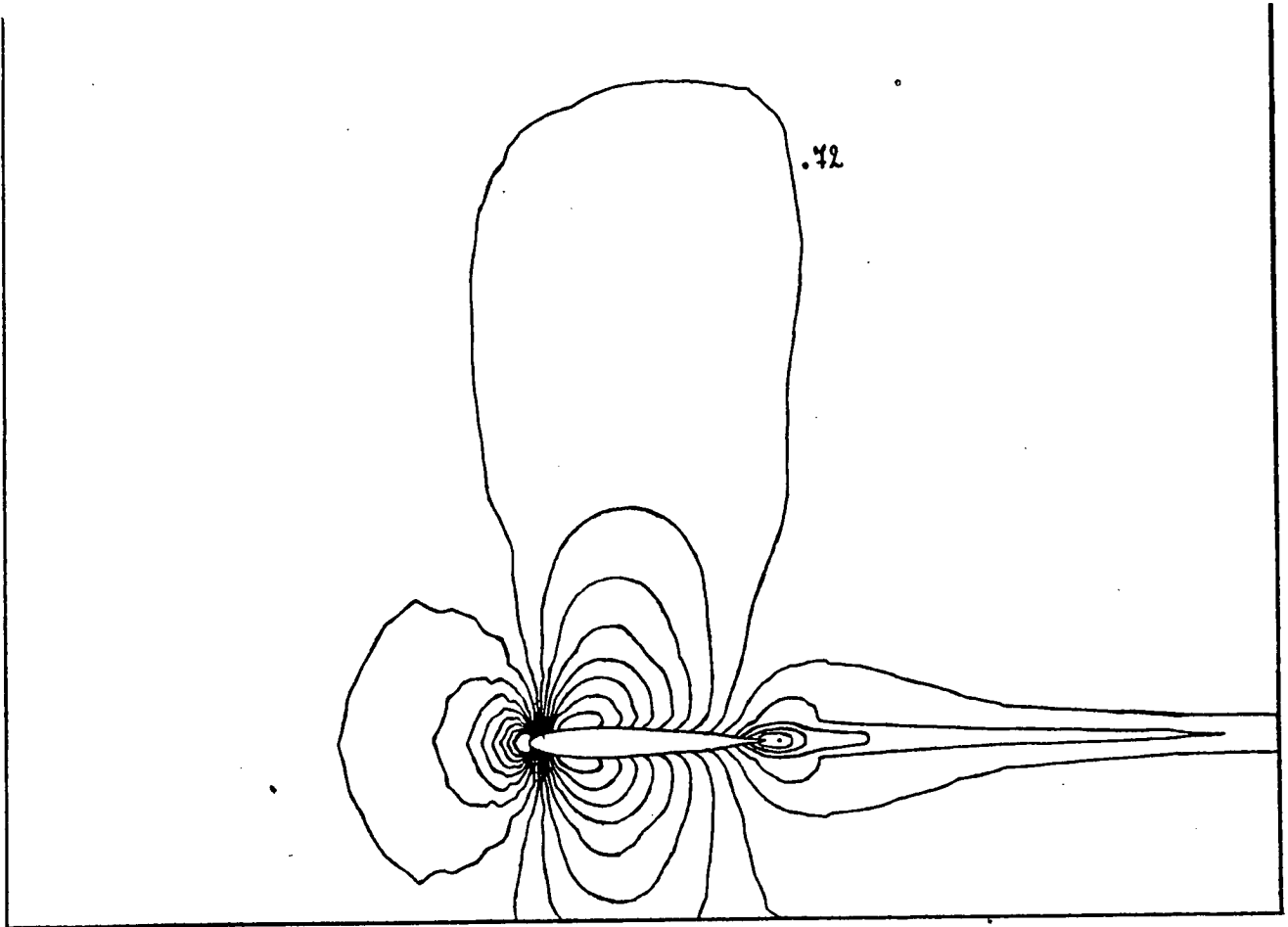


FIG. 16 : Profil NACA0012.  
Isomachs - Raffinements successifs (dernière étape)  
Ordre deux ; MACH = .72

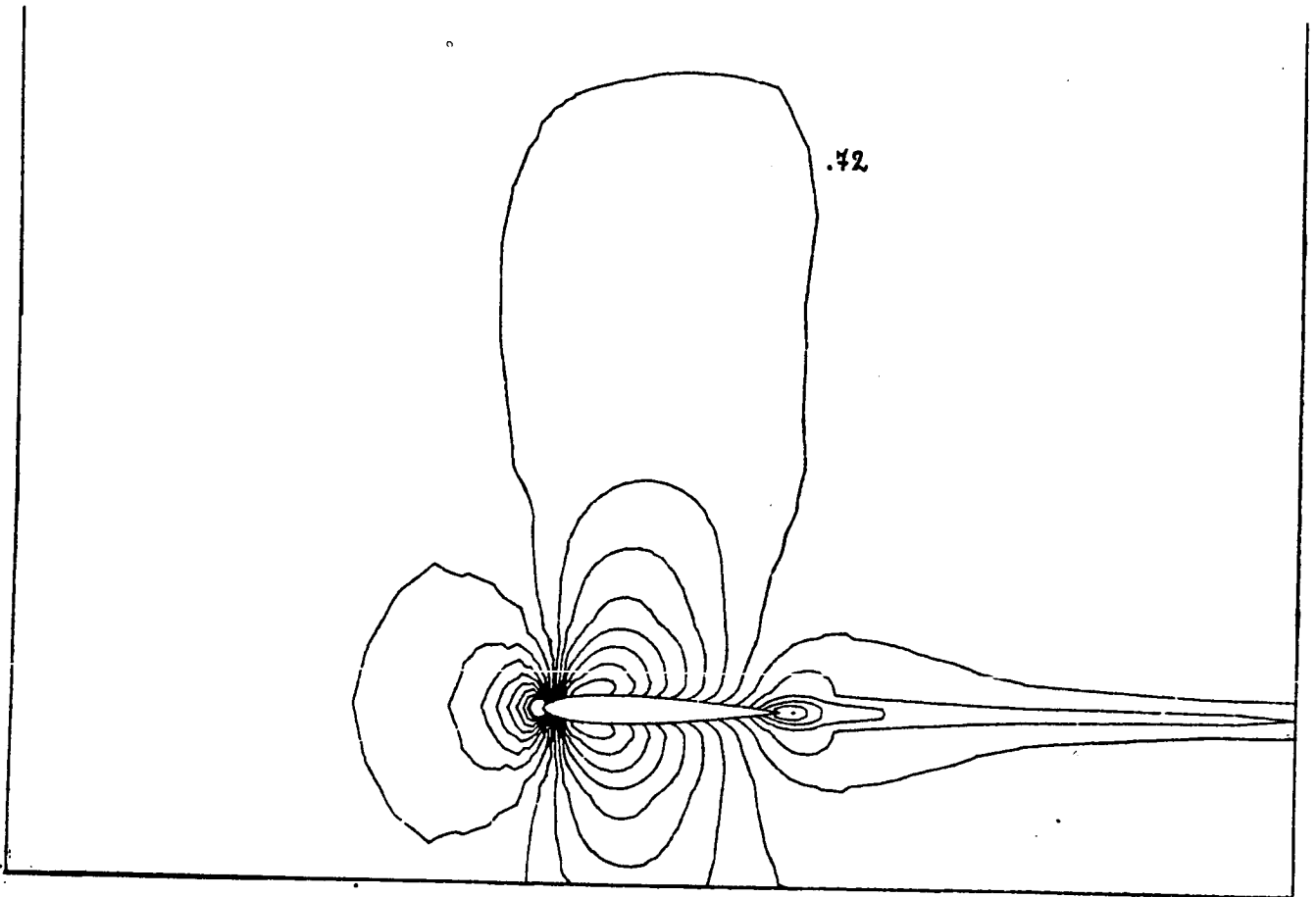


FIG. 17 : Profil NACA0012.  
Isomachs - "Full Multigrid" (dernière étape)  
Ordre deux ; MACH = .72

## 8. CONCLUSIONS GENERALES

On a présenté dans ce papier une méthode explicite simple pour construire un schéma multigrille à grilles emboîtées en éléments finis non structurés pour la résolution des équations d'Euler 2-D.

La construction des différents niveaux de grilles est effectuée par une technique de raffinement global où chaque élément d'un niveau plus fin est obtenu par une division par quatre de chaque élément d'un niveau plus grossier.

L'approximation spatiale est décentrée, obtenue par un schéma de type van Leer d'ordre un ou deux; mais tout autre procédé de décentrage (Steger-Warming, Osher ...) peut être utilisé sans introduire d'effort de programmation supplémentaire.

A l'ordre deux, il est nécessaire d'introduire des limiteurs de pentes, si l'on veut une capture des chocs dans des conditions de monotonie satisfaisantes. Ils se sont révélés indispensables quand on veut utiliser une technique multigrille afin d'assurer la convergence.

On a choisi une méthode d'intégration en temps de type Runge-Kutta à quatre pas, pour ses bonnes propriétés d'amortissement des hautes fréquences, essentielles dans le cadre des multigrilles. Ce type de méthode est en outre très simple à implémenter.

Les premiers résultats présentés montrent une stabilité et une accélération de convergence satisfaisantes.

Une évaluation plus précise du gain apporté est donnée dans [24].

L'inconvénient majeur de la procédure de génération des différentes grilles choisie ici réside dans le fait que la grille finale ne peut correspondre réellement à la grille la mieux adaptée pour représenter la solution. Il nous faudrait donc trouver un compromis entre les techniques adaptatives (où, par exemple, le maillage de la grille la plus fine est construit en fonction de la solution obtenue sur la grille moyenne) et l'efficacité des techniques multigrilles.

Ceci fait actuellement l'objet d'une étude qui augmentera la qualité des résultats déjà obtenus par l'utilisation d'une technique "Full Multigrid" adaptative dont une première présentation est donnée dans [2] et [29].

## 9. REFERENCES

- [1] ANGRAND F., LEYLAND P.  
*"Une méthode multigrille pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles en deux dimensions par des éléments finis"*  
Rapport de Recherche INRIA - à paraître.
- [2] ANGRAND F., LEYLAND P.  
*"Schéma multigrille dynamique pour la simulation d'écoulements de fluides visqueux compressibles"*  
Rapport de Recherche INRIA - à paraître.
- [3] BILLEY V., PERIAUX J., PERRIER P., STOUFFLET B.  
*"2-D and 3-D Euler computations with Finite Elements Methods in Aerodynamics"*  
International Conference on Hyperbolic Problems,  
Saint-Etienne, Janvier 13-17 (1986).
- [4] BRANDT A.  
*"Multigrid techniques : 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics"*  
G.M.D-Studien - Nr. 85 - May 1984.
- [5] CHIMA R.V. and JOHNSON G.M.  
*"Efficient Solution of the Euler and Navier-Stokes Equations with a vectorized Multiple-Grid Algorithm"*  
AIAA Journal - Vol. 23 - NO. 1, January 1985.
- [6] COUAILLER V., PEYRET R.  
*"Etude théorique et numérique de la méthode multigrille de Ni"*  
La Recherche Aérospatiale - 1986.
- [7] DERVIEUX A.  
*"Steady Euler Simulations using unstructured meshes"*  
Cours Von Karman Institute for Fluid Dynamics - Lecture series 1985-04 (1985).
- [8] DICK E.  
*"A Multigrid Technique For Steady Euler Equations Based On Flux-Difference Splitting"*  
Proceeding given at the Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics - Lecture Note in Physics NO. 218 - p. 198-202.
- [9] FEZOU F.  
*"Résolution des Equations d'Euler par un Schéma de van Leer en Eléments Finis"*  
Rapport de Recherche INRIA - NO. 358 - Janvier 1985.

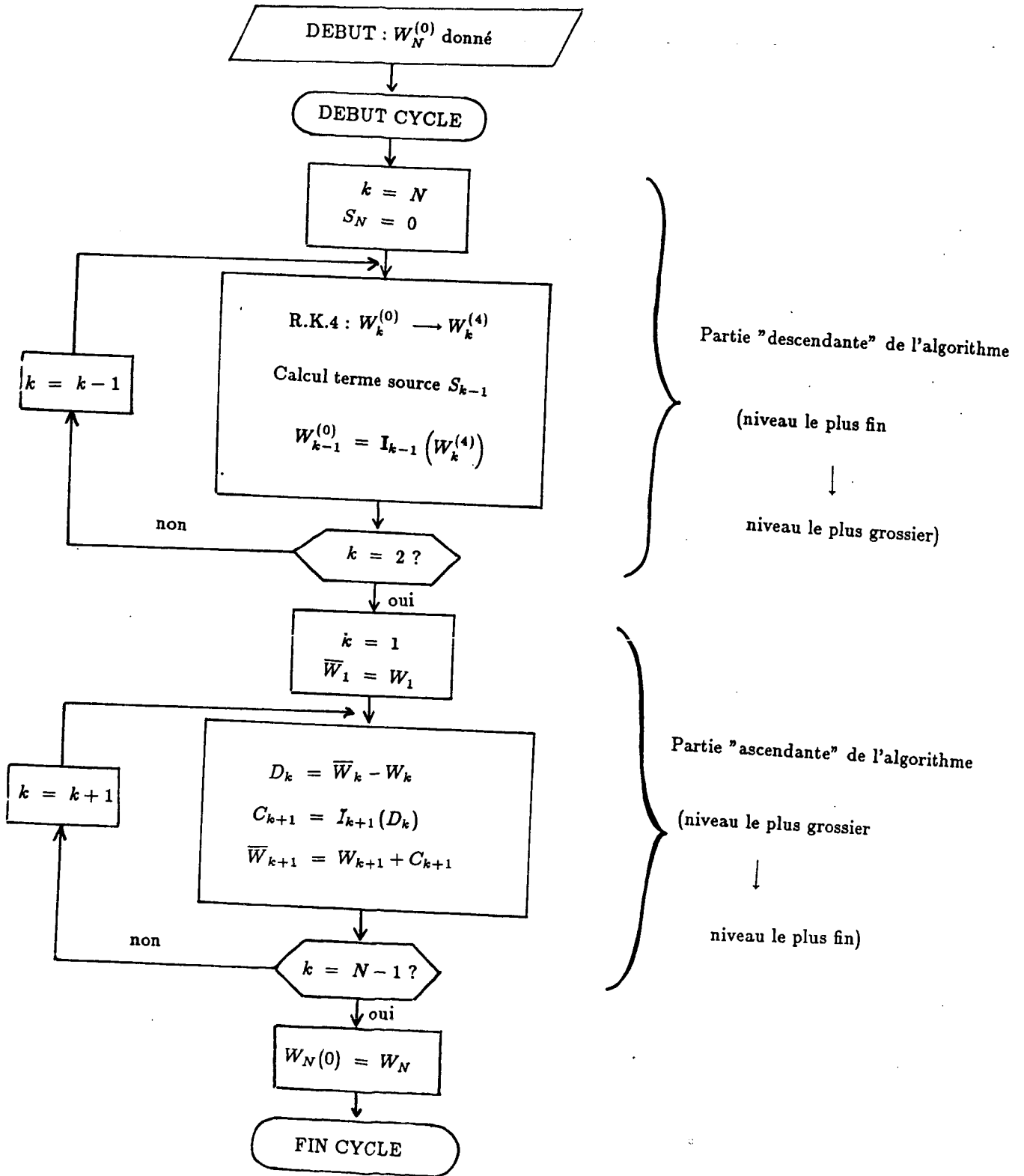


- [10] **FEZOUI F., STOUFFLET B.**  
"A Class of Implicit Upwind Schemes for Euler Simulations with Unstructured Meshes"  
Rapport de Recherche INRIA - NO. 517 - Avril 1986.
- [11] **HACKBUSCH W.**  
"Multi-Grid Methods and Applications"  
Springer Series in Computational Mathematics - Vol. 4 - 1985.
- [12] **HARTEN A., LAX P.D., VAN LEER B.**  
"On Upstream Differencing and Godunov Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws"  
SIAM Review - Vol. 25 - NO. 1 (1983).
- [13] **HEMKER P.W., JOHNSON G.M.**  
"Multigrid approaches to the Euler Equations"  
Report NM-R8602 - January 1986.
- [14] **HEMKER P.W., KETTLER R., WESSELING P. and DE ZEEUW P.M.**  
"Multigrid Methods : Development of Fast Solvers"  
Applied Mathematics and Computation - 13 - p. 311-326 (1983).
- [15] **JAMESON A.**  
"Numerical Solution of the Euler Equations for Compressible inviscid fluids"  
"Numerical Methods for the Euler Equations of fluid dynamics".  
F. Angrand, A. Dervieux, J-A. Désidéri, R. Glowinski - éditeurs - SIAM (1985).
- [16] **JAMESON A.**  
"The evolution of Computational methods in aerodynamics"  
MAE Report NO. 1608 - May 1983.
- [17] **JAMESON A.**  
"Multigrid Algorithms For Compressible Flow Calculations"  
MAE Report NO. 1743 - October 1985.
- [18] **JAMESON A., BAKER T.J., WEATHERILL N.P.**  
"Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft"  
AIAA Paper 86-0103 (1986)
- [19] **JAMESON A. and BAKER T.J.**  
"Euler Calculations For a Complete Aircraft"  
Proceeding presented at the Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics.  
Beijing - China - June 1986.

- [20] **JESPERSEN D.C.**  
*"Design and Implementation of a Multigrid Code for the Euler Equations"*  
International Multigrid Conference - Colorado - April 1983.
- [21] **JOHNSON G.M.**  
*"Convergence Acceleration of Viscous Flow Computations"*  
NASA TM 83039 - October 1983.
- [22] **KOEK, CHATTOT**  
*"Computation of three-dimensional vortex flows past wings using the Euler equations and a multiple-grid scheme"*  
Ninth International Conference on numerical methods in fluid dynamics.  
Lecture Notes in Physics - Vol. 218 - Springer-Verlag (1985).
- [23] **KOREN B.**  
*"Evaluation of Second Order Schemes and Defect Correction For the Multigrid Computation of Airfoil Flows with the Steady Euler Equations"*  
CWI Department of Numerical Mathematics - Report NM-R8616 - June 1986.
- [24] **LALLEMAND M-H.**  
*"Etude de stabilité d'un schéma de Runge-Kutta; application à des Techniques Multigrilles en Eléments Finis Décentrés"*  
Rapport de recherche INRIA - à paraître.
- [25] **LOHNER R., MORGAN K.**  
*"Unstructured Multigrid Methods"*  
Second European Conference on Multigrid Methods - Köln (RFA) - October 1-4 - 1985.
- [26] **NI R.H.**  
*"A Multiple Grid Scheme for Solving the Euler Equations"*  
AIAA Journal - Vol. 20 - NO. 11 - November 1982.
- [27] **PALMERIO B., BILLEY V., PERIAUX J. and DERVIEUX A.**  
*"Self Adaptive Mesh Refinements and Finite Element Methods For Solving the Euler Equations"*  
Numerical methods for Fluid Dynamics II - K.W. Morton, M.I. Baines Eds. - Clarendon Press - Oxford 1986.
- [28] **PEREZ E.**  
*"Finite Element and Multigrid Solution of the two dimensional Euler Equations on a non structured mesh"*  
Rapport de Recherche INRIA - NO. 442 - Septembre 1985.

- [29] **PEREZ E., PERIAUX J., ROSENBLUM J-P., STOUFFLET B.;  
DERVIEUX A., LALLEMAND M-H.**  
*"Adaptive Full-Multigrid Finite Element Methods For Solving The Two-Dimensional Euler Equations"*  
I.C.10.N.M.F.D - Pékin - Juin 1986 - à paraître chez Springer.
- [30] **TURKEL E., VAN LEER B.**  
*"Flux Vector Splitting and Runge-Kutta Methods for the Euler Equations"*  
ICASE Report Nr. 84-27 - June 1984.
- [31] **TURKEL E.**  
*"Acceleration to a Steady State for the Euler Equations"*  
*"Numerical methods for the Euler equations of fluid dynamics"*.  
F. Angrand, A. Dervieux, J-A. Désidéri, R. Glowinski - éditeurs - SIAM (1985).
- [32] **USAB W.J., MURMAN E.M.**  
*"Embedded Mesh Solutions Of The Euler Equations Using A Multiple-Grid Method"*  
AIAA 83 - 1946-CP - July 1983.
- [33] **VAN LEER B.**  
*"Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III"*  
Journal of Computational Physics 23 - p. 263-275 (1977).

10. APPENDICE A : Organigramme de l'algorithme multigrille de base



11. APPENDICE B : Organigramme de l'algorithme "Full Multigrid"

