

**Sur l'approximation des coques minces par des  
methodes "B-splines et elements finis". 1 ere partie:  
formulation du probleme et estimations d'erreur**

Michel Bernadou, Bernard Lalanne

► **To cite this version:**

Michel Bernadou, Bernard Lalanne. Sur l'approximation des coques minces par des methodes "B-splines et elements finis". 1 ere partie: formulation du probleme et estimations d'erreur. RR-0474, INRIA. 1986. inria-00076080

**HAL Id: inria-00076080**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076080>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

## Rapports de Recherche

N° 474

### **SUR L'APPROXIMATION DES COQUES MINCES PAR DES MÉTHODES "B-SPLINES ET ÉLÉMENTS FINIS"**

1<sup>ère</sup> Partie :

### **FORMULATION DU PROBLÈME ET ESTIMATIONS D'ERREUR**

**Michel BERNADOU  
Bernard LALANNE**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. : (1) 39 63 55 11

**Janvier 1986**

SUR L' APPROXIMATION DES COQUES MINCES PAR DES METHODES  
"B-SPLINES ET ELEMENTS FINIS"

1ère Partie :

FORMULATION DU PROBLEME ET ESTIMATIONS D'ERREUR

Michel BERNADOU\* et Bernard LALANNE\*\*

RESUME

Dans des travaux précédents, le premier Auteur a considéré l'approximation de solutions de problèmes de coques minces par des méthodes conformes d'éléments finis avec prise en compte de l'intégration numérique. Ces différents travaux supposent que la géométrie de la coque est définie comme suit :

i) sa **surface moyenne**  $\mathcal{S}$  est l'image d'un certain domaine borné  $\Omega$  du plan par une application  $\phi$  régulière donnée, i.e.,  $\mathcal{S} = \phi(\xi^1, \xi^2)$ ,  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$  ;

ii) son **épaisseur**  $e$  est une fonction régulière des coordonnées curvilignes  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$ .

En pratique, les applications  $\phi$  et  $e$  ne sont pas toujours connues. Il convient alors, à partir de la donnée des coordonnées d'un nombre fini de points de la surface moyenne et de la donnée de l'épaisseur de la coque en ces points, de définir des approximations suffisamment régulières  $\phi_{h\mathcal{S}}$  et  $e_{h\mathcal{S}}$  de ces deux applications  $\phi$  et  $e$ .

Dans cette étude, nous analysons ces nouvelles approximations, de nature géométrique, puis, en les combinant avec les approximations du champ de déplacement, nous établissons la convergence de la méthode ainsi que les estimations asymptotiques d'erreur.

---

\* INRIA, B.P. 105, 78153 LE CHESNAY Cedex ;

\*\* Bureau d'Etudes, TURBOMECA, 64320 BORDES.

Cette étude a été soutenue par la DRET (Opération n° 83.322)

ABSTRACT

In previous works, the first Author has considered the approximation of solutions of thin shell problems by using conforming finite element methods and by taking into account the effect of numerical integration. In these works, it is assumed that the geometry of the shell is defined as follows :

- i) its **middle surface**  $\mathcal{S}$  is the image of a bounded domain  $\Omega$  of the plane by a given smooth application  $\phi$ , i.e.,  $\mathcal{S} = \phi(\xi^1, \xi^2)$ ,  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$  ;
- ii) its thickness  $e$  is a regular function of the curvilinear coordinates  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$ .

Practically, the applications  $\phi$  and  $e$  are not always known. Then, from the knowledge of the coordinates of a finite number of points of the middle surface and of the value of the thickness at these points, we need to define sufficiently smooth approximations  $\phi_{h\mathcal{S}}$  and  $e_{h\mathcal{S}}$  of the applications  $\phi$  and  $e$ .

In this study, we analyze these new geometrical approximations, and then, by combining such approximations with these of the displacement field, we prove the convergence of the method and we obtain the asymptotic estimates of the error.

1 - INTRODUCTION

Dans BERNADOU [1978, 1980], nous avons étudié le problème de l'approximation de solutions de problèmes linéaires de coques minces par des méthodes conformes d'éléments finis avec prise en compte de l'intégration numérique. Ces résultats reposent sur la modélisation de KOITER [1966, 1970] et supposent que la surface moyenne est définie comme l'image d'un domaine borné  $\Omega$  du plan à l'aide d'une carte  $\phi$  régulière, i.e.  $\phi \in (\mathcal{C}^2(\Omega))^3$  dans le cas de coques peu profondes,  $\phi \in (\mathcal{C}^3(\Omega))^3$  dans le cas de coques moyennement profondes.

Cependant, dans les problèmes pratiques, la coque n'est pas toujours définie sous forme analytique mais bien souvent par la donnée des coordonnées d'un nombre fini de points de sa surface moyenne et de la valeur de l'épaisseur en ces points. C'est pourquoi dans ce travail

i) nous proposons au paragraphe 2 la définition d'une approximation  $\phi_{h\delta}$  de l'application  $\phi$  telle que (\*) :

$$\phi_{h\delta} : \Omega \rightarrow \mathcal{S}_{h\delta} = \phi_{h\delta}(\Omega)$$

$$\phi_{h\delta}^\epsilon \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}^2(\Omega))^3 \text{ dans le cas d'une coque peu profonde,} \\ (\mathcal{E}^3(\Omega))^3 \text{ dans le cas d'une coque générale.} \end{array} \right.$$

Pour ce faire, nous utilisons des produits tensoriels de fonctions B-splines d'ordre  $k$  (entier  $\geq 1$ ) qui sont polynomiales par morceaux de degré  $k-1$  et qui assurent des raccords de classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ . L'ordre  $k$  de la méthode sera choisi en fonction de la théorie de coque utilisée (peu profonde ou générale) et de la précision des autres approximations effectuées, notamment de celle des approximations du déplacement. Pour une présentation détaillée des fonctions B-splines, nous renvoyons à C. de BOOR [1978] ;

ii) dans le paragraphe 3, nous donnons le résultat d'approximation correspondant, i.e., pour tout element  $K$  du maillage

$$|\phi - \phi_{h\delta}|_{r, \infty, K} \leq Ch_{\delta}^{t-r} |\phi|_{t, \infty, K}$$

pour  $t = 1, \dots, k$  et  $r = 0, \dots, t$  ;

iii) nous considérons dans le paragraphe 4 l'approximation de la fonction d'épaisseur  $e$ . Ici encore on utilise des produits de fonctions B-splines d'ordre  $l \geq 1$  ce qui conduit au résultat d'approximation suivant : pour tout élément  $K$  du maillage

$$|e - e_{h\delta}|_{r, \infty, K} \leq Ch_{\delta}^{t-r} |e|_{t, \infty, K}$$

pour  $t = 1, \dots, l$  et  $r = 0, \dots, t$  ;

---

(\*) Dans cette étude nous utilisons deux paramètres de discrétisation. Le premier,  $h_{\delta}$ , caractérise le maillage utilisé pour construire les fonctions splines (voir (2.3.8)), le second,  $h$ , caractérise le maillage utilisé pour définir les éléments finis.

iv) nous rappelons brièvement dans le paragraphe 5, l'essentiel de la formulation des problèmes de coques minces ainsi que les résultats d'existence et d'unicité des solutions, et cela pour des coques générales et pour des coques peu profondes ;

v) dans le paragraphe 6, nous combinons les deux résultats d'approximation de la géométrie de la coque (surface moyenne d'une part, épaisseur d'autre part) avec ceux obtenus dans des travaux précédents pour l'approximation du champ de déplacement, afin d'en déduire les propriétés de convergence des solutions approchées  $\tilde{u}_h$  (\*) vers la solution  $\tilde{u}$  du problème continu ainsi que les estimations asymptotiques de l'erreur correspondante. Cette étude est menée dans les deux cas suivants : coques générales et coques peu profondes ;

vi) dans le paragraphe 7, nous illustrons ces différents résultats par des exemples d'estimations d'erreurs obtenus pour différents choix donnés de méthodes B-splines et de méthodes d'éléments finis. Les combinaisons retenues sont celles qui assurent la meilleure cohérence possible entre les diverses composantes de l'erreur.

Dans un travail ultérieur, nous montrerons comment appliquer ces méthodes à la modélisation de pales de turbine ou de compresseur axial.

Le plan de ce travail est le suivant :

## 1. Introduction

## 2. Définition des fonctions B-splines à une variable et à deux variables.

2.1. Les fonctions de base B-splines à une variable.

2.2. Approximation de fonctions d'une variable à l'aide de fonctions B-splines ; choix de la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ .

2.3. Interpolation de la surface moyenne de la coque.

---

(\*) L'indice  $\underline{h} = (h_\delta, h)$  rappelle ici que les solutions approchées dépendent de l'approximation de la géométrie ( $h_\delta$ ), d'une part, et de l'approximation du déplacement ( $h$ ), d'autre part.

3. Estimation de l'erreur due à l'interpolation de la surface moyenne.
4. Interpolation de l'épaisseur et erreur associée.
5. Formulation variationnelle des problèmes de coques minces.
  - 5.1. La surface moyenne de la coque.
  - 5.2. Les inconnues du problème.
  - 5.3. Formulation variationnelle du problème pour une coque générale.
  - 5.4. Formulation variationnelle du problème pour une coque "peu profonde".
6. Etude de l'approximation globale (géométrie et déplacement) et estimations d'erreur.
  - 6.1. Description de chacune des approximations.
    - 6.1.1. Approximations de la géométrie
    - 6.1.2. Approximation du déplacement
    - 6.1.3. Approximation liée à l'utilisation de schémas d'intégration numérique
  - 6.2. Estimation abstraite de l'erreur.
  - 6.3. Estimation de l'erreur  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|$  dans le cas de coques générales
  - 6.4. Estimation de l'erreur  $\|\vec{u}_S - \vec{u}_{hS}\|$  dans le cas de coques peu profondes.
7. Exemples d'estimations d'erreur.

Bibliographie.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier

- i) la Direction des Recherches Etudes et Techniques qui a soutenu financièrement ce travail (DRET N° 83.322).
- ii) P.K. BHATTACHARYYA, Professeur au Département de Mathématiques à l'I.I.T. de New-Delhi et P. SABLONNIERE, Professeur à l'Université de Lille 1 qui ont lu certaines parties du manuscrit et nous ont suggéré d'intéressantes améliorations.
- iii) Maryse DESNOUS qui a remarquablement dactylographié le manuscrit.

## 2 - DEFINITION DES FONCTIONS B-SPLINES A UNE VARIABLE ET A DEUX VARIABLES

Pour la commodité du lecteur nous rassemblons ici l'essentiel des résultats que nous utilisons concernant la définition et les propriétés des fonctions B-splines à une et deux variables. Pour plus de détails, nous renvoyons à de BOOR [1978, Chap. IX à XIII].

### 2.1. Les fonctions de base B-splines à une variable

Pour fixer les idées, soit à approximer une fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0,1]$  et supposée suffisamment régulière. Nous souhaitons que l'interpolée  $\pi g$  de  $g$

i) coïncide avec  $g$  en un nombre fini de points  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  tels que

$$(2.1.1) \quad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots < \tau_n \leq 1,$$

i.e.,

$$(2.1.2) \quad \pi g(\tau_j) = g(\tau_j), \quad j = 1, \dots, n;$$

ii) soit polynomiale par morceaux de degré  $k-1$ ,  $k$  entier  $\geq 1$ .

Pour cela, nous supposons que les entiers  $k$  et  $n$  sont fixés,  $k \leq n$ , et nous introduisons la partition de l'intervalle  $[0,1]$  à l'aide d'une suite de points :

$$(2.1.3) \quad t = \{t_i ; i = 1, \dots, n+k\}$$

vérifiant

$$(2.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \dots = t_k = 0 \\ t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = 1 \\ t_i < t_{i+k}, \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$



La position de ces points vis à vis des points  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  définis en (2.1.1) sera précisée dans la section 2.2. On construit alors l'interpolée  $\pi g$  de telle sorte que

$$(2.1.5) \quad \pi g|_{[t_i, t_{i+1}]} \in P_{k-1}(\xi)$$

où  $P_{k-1}(\xi)$  désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k-1$  ;

$$(2.1.6) \quad \text{iii) soit de classe } \mathcal{E}^{k-2}([0,1])$$

Par la suite, nous utilisons des interpolées qui sont au moins de classe  $\mathcal{E}^2$  ou  $\mathcal{E}^3$ , soit  $k$  au moins égal à 4 ou 5. Suivant de BOOR [1978], ces interpolées sont des combinaisons linéaires de fonctions de base B-splines d'ordre  $k$  dont nous allons rappeler maintenant la définition.

**Les fonctions de base**  $B_{j,k,t}$ ,  $j = 1, \dots, n$  : ces fonctions de base au nombre de  $n$  (paramètre introduit en (2.1.1)) dépendent du degré  $k-1$  choisi (voir (2.1.5)) et de la suite de points  $t$  (voir (2.1.3) à (2.1.5)). Elles sont définies itérativement par les relations (comparer avec de BOOR [1978, page 131]) :

$$(2.1.7) \quad B_{j,1,t}(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ si } t_j \leq \xi < t_{j+1}, j = 1, \dots, n-1 ; \\ 1 \text{ si } t_j \leq \xi \leq t_{j+1}, j = n (t_n < t_{n+1}) ; \\ 0 \text{ autrement .} \end{cases}$$

Ensuite, pour  $k \geq 2$ , il vient :

$$(2.1.8) \quad B_{j,k,t}(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1,t}(\xi) + \frac{t_{j+k} - \xi}{t_{j+k} - t_{j+1}} B_{j+1,k-1,t}(\xi) \\ \text{pour } j = 1, \dots, n-1 ; \\ \frac{\xi - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1,t}(\xi) \text{ pour } j = n. \end{cases}$$

Les modifications apportées à la définition des fonctions  $B_{j,k,t}(\xi)$  pour  $j = n$  sont destinées à assurer que ces fonctions B-splines réalisent effectivement une partition de l'unité sur l'intervalle fermé  $[0,1]$ . Pour cela, il convenait que

$$(2.1.9) \quad B_{n,k,t}(1) = 1 \quad (\text{et non } 0).$$

Illustrons ces définitions en traçant les graphes des fonctions de base  $B_{j,k,t}$  pour  $j$  fixé,  $j = 1, \dots, n$  et  $k = 1, 2, 3$  et 4.

**Graphe de  $B_{j,1,t}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, n$  :**

Les fonctions de base  $B_{j,1,t}(\xi)$  ont été définies par la relation (2.1.7). D'où les graphes

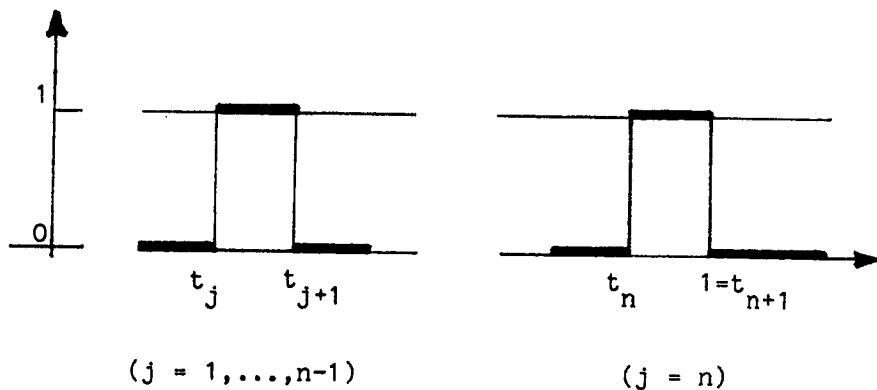


Figure 2.1.1 : Graphe de  $B_{j,1,t}$

**Graphe de  $B_{j,2,t}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, n$  :**

La relation (2.1.8) entraîne

(\*) cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2}$  : dans ce cas  $j = 2, \dots, n-1$   
 (car  $t_1 = t_2 = 0$  et  $t_{n+1} = t_{n+2} = 1$  d'après (2.1.4)) :

$$(2.1.10) \quad B_{j,2,t}(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - t_j}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j \leq \xi < t_{j+1}, j = 2, \dots, n-1; \\ \frac{t_{j+2} - \xi}{t_{j+2} - t_{j+1}} & \text{si } t_{j+1} \leq \xi < t_{j+2}, j = 2, \dots, n-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

d'où le graphe :

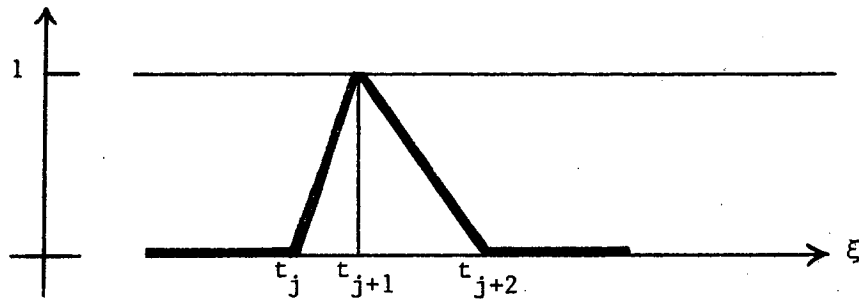


Figure 2.1.2 : Graphe de  $B_{j,2,t}$ ,  $j = 2, \dots, n-1$  (cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2}$ )

(\*\*) cas où  $t_j = t_{j+1} < t_{j+2}$  : dans ce cas  $j = 1, \dots, n-1$  (car  $t_{n+1} = t_{n+2} = 1$  pour  $j = n$ ) :

$$(2.1.11) \quad B_{j,2,t}(\xi) = \begin{cases} \frac{t_{j+2} - \xi}{t_{j+2} - t_{j+1}} & \text{si } t_{j+1} \leq \xi < t_{j+2}, j = 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

d'où le graphe :

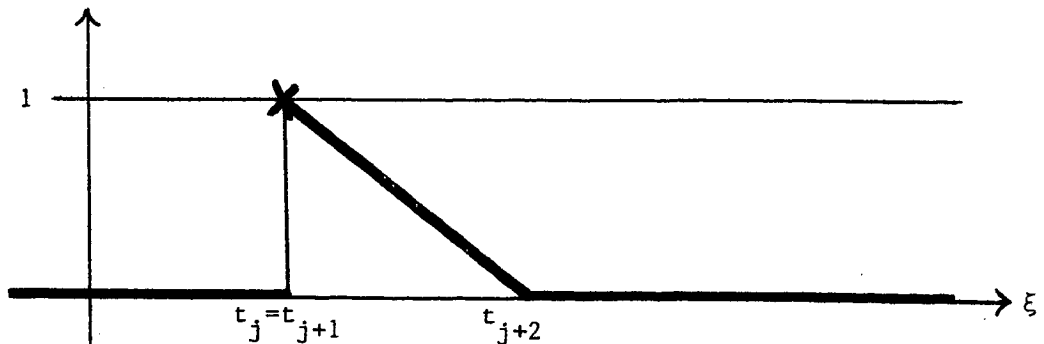


Figure 2.1.3 : Graphe de  $B_{j,2,t}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  (cas où  $t_j = t_{j+1} < t_{j+2}$ )

(\*\*\*) cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2}$  : dans ce cas  $j = 2, \dots, n$   
 (car pour  $j = 1$ , on a  $t_1 = t_2 = 0$ )

$$(2.1.12) \quad B_{j,2,t}(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - t_j}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j \leq \xi < t_{j+1}, j = 2, \dots, n-1 ; \\ \frac{\xi - t_j}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j \leq \xi \leq t_{j+1}, j = n ; \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

d'où le graphe :

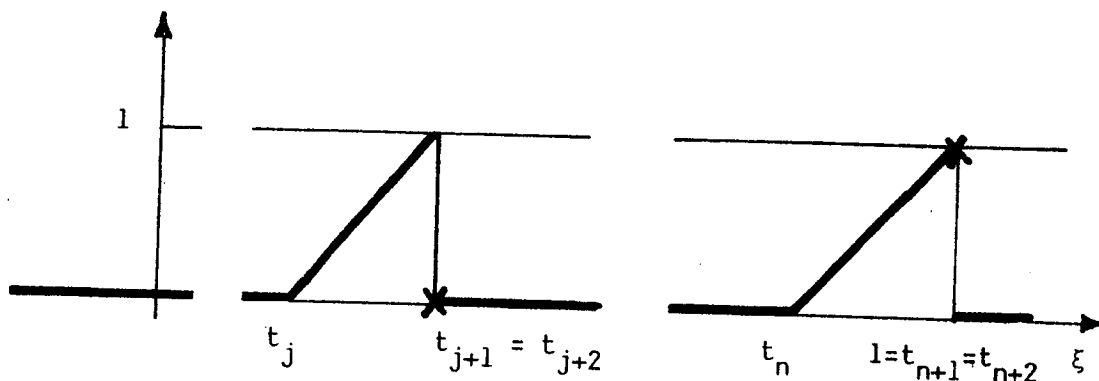


Figure 2.1.4 : Graphe de  $B_{j,2,t}, j = 2, \dots, n$  (cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2}$ )

Graphes de  $B_{j,3,t}(\xi), j = 1, \dots, n$  :

Toujours à partir de la relation (2.1.8) il vient :

(\*) Cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3}, j = 3, \dots, n-2$  :

(les valeurs prises par l'indice  $j$  prennent en compte les relations (2.1.4)). Il vient

$$(2.1.13) \quad B_{j,3,t}(\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi - t_j)^2}{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+2} - t_j)} & \text{si } t_j \leq \xi < t_{j+1} \\ \frac{(t_{j+2} - \xi)(\xi - t_j)}{(t_{j+2} - t_{j+1})(t_{j+2} - t_j)} + \frac{(t_{j+3} - \xi)(\xi - t_{j+1})}{(t_{j+3} - t_{j+1})(t_{j+2} - t_{j+1})} & \text{si } t_{j+1} \leq \xi < t_{j+2} \\ \frac{(t_{j+3} - \xi)^2}{(t_{j+3} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_{j+2})} & \text{si } t_{j+2} \leq \xi < t_{j+3} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

d'où le graphe :

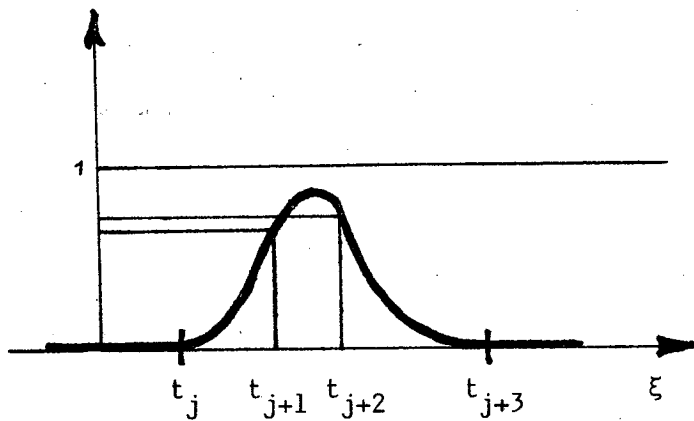


Figure 2.1.5 : Graphe de  $B_{j,3,t}$ ,  $j = 3, \dots, n-2$

(cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3}$ )

(\*\*) cas où  $t_j = t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3}$ ,  $j = 2, \dots, n-2$

(les limitations sur les valeurs prises par l'indice  $j$  prennent en compte les relations (2.1.4)). Il vient :

$$(2.1.14) \quad B_{j,3,t}(\xi) = \begin{cases} \left( \frac{t_{j+2}^{-\xi}}{t_{j+2}-t_{j+1}} + \frac{t_{j+3}^{-\xi}}{t_{j+2}-t_{j+1}} \right) \frac{\xi-t_{j+1}}{t_{j+2}-t_{j+1}} & \text{si } t_{j+1} \leq \xi < t_{j+2} \\ \frac{(t_{j+3}-\xi)^2}{(t_{j+3}-t_{j+1})(t_{j+3}-t_{j+2})} & \text{si } t_{j+2} \leq \xi < t_{j+3} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

d'où le graphe :

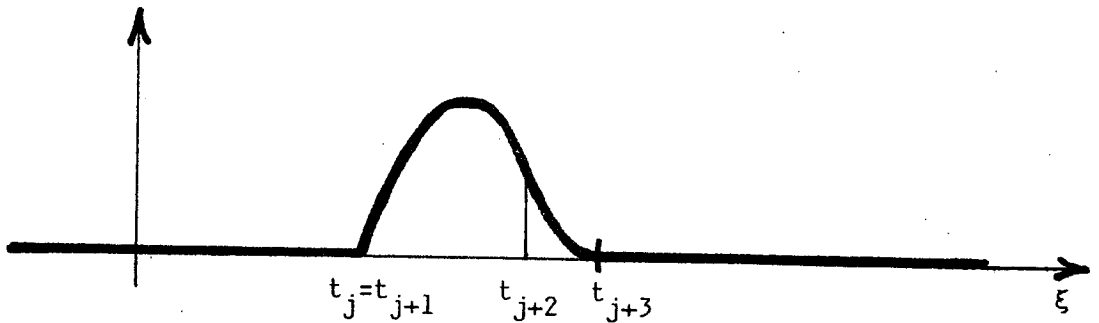


Figure 2.1.6 : Graphe de  $B_{j,3,t}(\xi)$ ,  $j = 2, \dots, n-2$

(cas où  $t_j = t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3}$ )

De manière analogue, on obtiendrait les différents autres cas pour lesquels nous nous limitons au tracé du graphe :

(\*\*\*) cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2} < t_{j+3}$ ,  $j = 3, \dots, n-2$

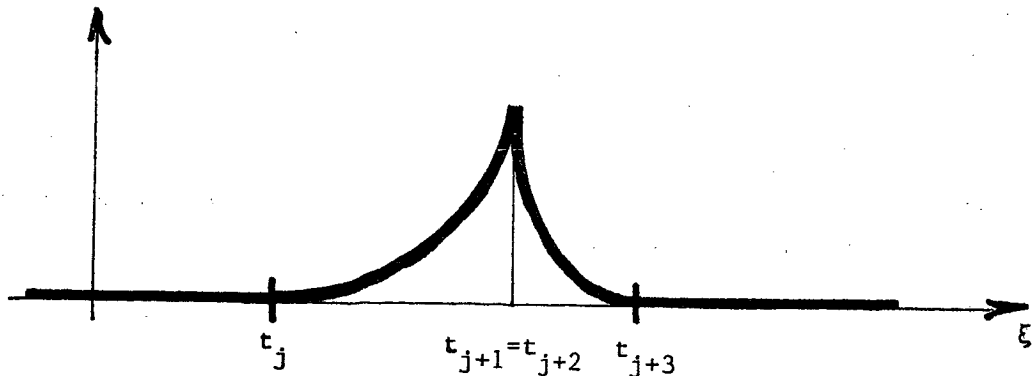


Figure 2.1.7 : Graphe de  $B_{j,3,t}(\xi)$ ,  $j = 3, \dots, n-2$

(cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2} < t_{j+3}$ )

(\*\*\*\*) cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} = t_{j+3}$ ,  $j = 3, \dots, n-1$

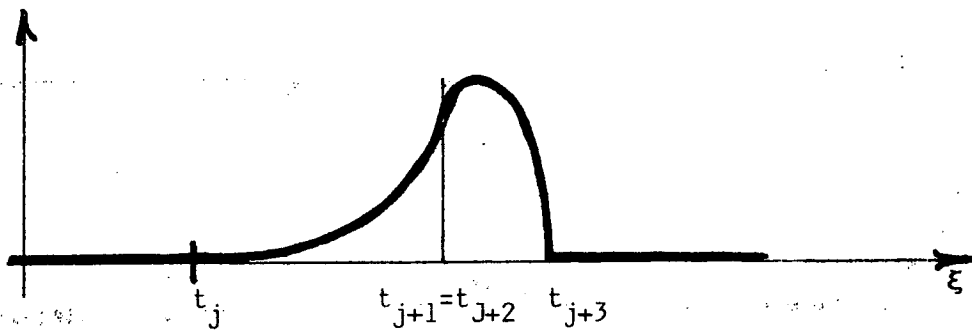


Figure 2.1.8 : Graphe de  $B_{j,3,t}(\xi)$ ,  $j = 3, \dots, n-1$

(cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} = t_{j+3}$ )

(\*\*\*) cas où  $t_j = t_{j+1} = t_{j+2} < t_{j+3}$ ,  $j = 1, \dots, n-2$

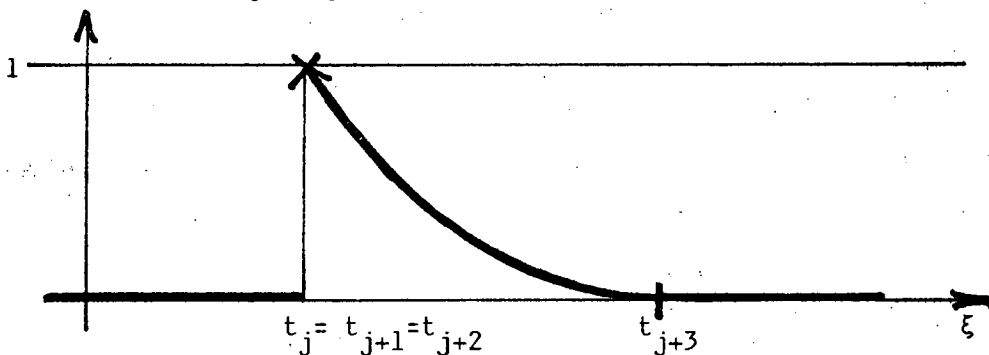


Figure 2.1.9 : Graphe de  $B_{j,3,t}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, n-2$

(cas où  $t_j = t_{j+1} = t_{j+2} < t_{j+3}$ )

(\*\*\*) cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2} = t_{j+3}$ ,  $j = 3, \dots, n$

Deux possibilités se présentent :

a)  $j = 3, \dots, n-1$

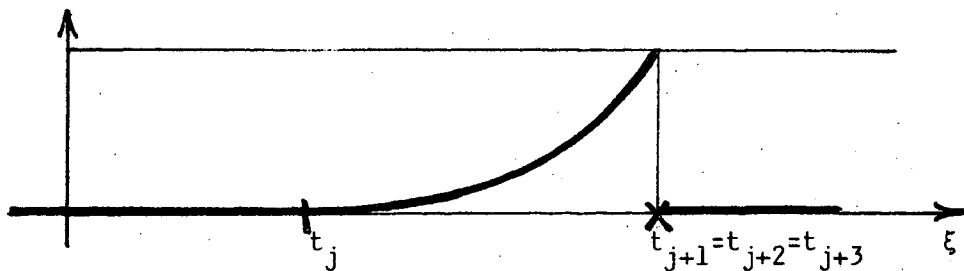


Figure 2.1.10 : Graphe de  $B_{j,3,t}(\xi)$ ,  $j = 3, \dots, n-1$

(cas où  $t_j < t_{j+1} = t_{j+2} = t_{j+3}$ )

b)  $j = n$

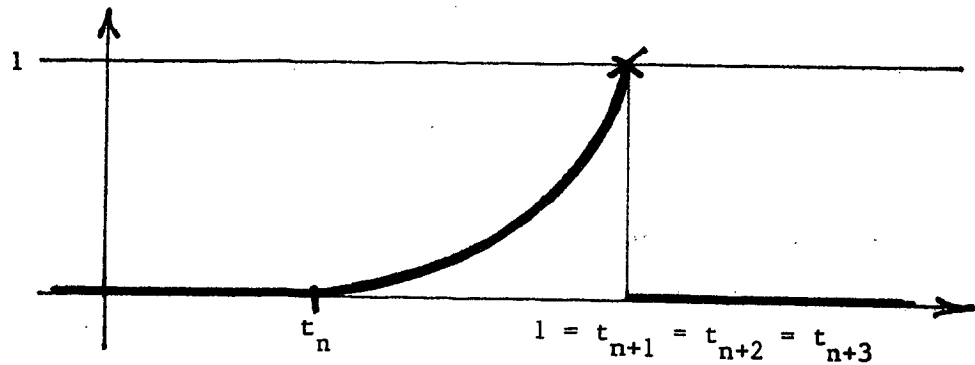


Figure 2.1.11 : Graphe de  $B_{n,3,t}(\xi)$

**Graphe de  $B_{j,4,t}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, n$  :**

Toujours à partir de la relation (2.1.8) il vient :

(\*) cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3} < t_{j+4}$ ,  $j = 4, \dots, n-3$

(les valeurs prises par l'indice  $j$  prennent en compte les relations (2.1.4)). Il vient :

$$\begin{aligned}
 (2.1.15) \quad B_{j,4,t}(\xi) = & \left. \begin{aligned}
 & \frac{(\xi - t_j)^3}{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+2} - t_j)(t_{j+3} - t_j)} \quad \text{si } t_j \leq \xi < t_{j+1} \\
 & \frac{1}{t_{j+2} - t_{j+1}} \left\{ \frac{(t_{j+2} - \xi)(\xi - t_j)^2}{(t_{j+2} - t_j)(t_{j+3} - t_j)} + \frac{(t_{j+3} - \xi)(\xi - t_{j+1})(\xi - t_j)}{(t_{j+3} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_j)} + \right. \\
 & \left. \frac{(t_{j+4} - \xi)(\xi - t_{j+1})^2}{(t_{j+4} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_{j+1})} \right\} \quad \text{si } t_{j+1} \leq \xi < t_{j+2} \\
 & \frac{1}{t_{j+3} - t_{j+2}} \left\{ \frac{(t_{j+3} - \xi)^2(\xi - t_j)}{(t_{j+3} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_j)} + \frac{(t_{j+4} - \xi)(t_{j+3} - \xi)(\xi - t_{j+1})}{(t_{j+4} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_{j+1})} + \right. \\
 & \left. \frac{(t_{j+4} - \xi)^2(\xi - t_{j+2})}{(t_{j+4} - t_{j+2})(t_{j+4} - t_{j+1})} \right\} \quad \text{si } t_{j+2} \leq \xi < t_{j+3} \\
 & \frac{(t_{j+4} - \xi)^3}{(t_{j+4} - t_{j+3})(t_{j+4} - t_{j+2})(t_{j+4} - t_{j+1})} \quad \text{si } t_{j+3} \leq \xi < t_{j+4} \\
 & 0 \text{ ailleurs}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$



d'où le graphe :

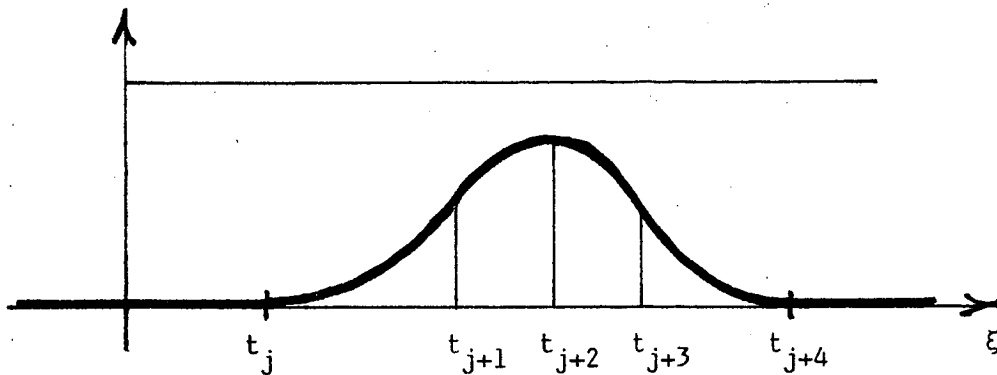


Figure 2.1.12 : Graphe de  $B_{j,4,t}(\xi)$ ,  $j = 4, \dots, n-3$

(cas où  $t_j < t_{j+1} < t_{j+2} < t_{j+3} < t_{j+4}$ )

Ici encore, il y aurait lieu d'examiner les différents cas possibles d'égalité de certains des  $t_{j+l}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3, 4$  avec naturellement  $t_j < t_{j+4}$ . Cet examen conduirait à des tracés comparables à ceux présentés sur les Figures 2.1.6 à 2.1.11.

**Propriétés des fonctions de base  $B_{j,k,t}(\xi)$**

Les fonctions de base  $B_{j,k,t}(\xi)$  ont un certain nombre de propriétés remarquables. Nous rappelons ci-après celles qui nous intéressent le plus directement.

Théorème 2.1.1 (de BOOR [1978, § IX]) : Les fonctions de base  $B_{j,k,t}(\xi)$  vérifient les propriétés suivantes :

(2.1.16) i)  $B_{j,k,t}(\xi) \geq 0$ ,  $\forall \xi \in \mathbb{R}$  ;

ii) elles ont un support borné, i.e.,

(2.1.17) support  $(B_{j,k,t}(\xi)) = [t_j, t_{j+k}]$

(2.1.18) iii)  $\sum_j B_{j,k,t}(\xi) = 1$  pour tout  $\xi \in [0, 1]$  ce qui permet de représenter toute constante sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$ .

□

2.2. Approximation de fonctions d'une variable à l'aide de  
fonctions B-splines ; Choix de la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  :

Nous allons approcher la fonction  $g$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_{k,t}$  généré par les fonctions de base  $B_{j,k,t}(\xi)$ , i.e.,

$$(2.2.1) \quad \mathcal{S}_{k,t} := \left\{ \sum_{j=1}^n \beta_j B_{j,k,t}(\xi) ; \beta_j \in \mathbb{R} \right\} .$$

Par la suite, nous désignerons par  $\pi g$  l'approximation suivante de la fonction  $g$

$$(2.2.2) \quad \pi g(\xi) = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k,t}(\xi) , \quad \forall \xi \in [0,1] .$$

où, naturellement dans la relation ci-dessus, les coefficients  $\alpha_j$  dépendent de la fonction  $g$  considérée, i.e.,  $\alpha_j := \alpha_j(g)$  ; nous noterons cependant  $\alpha_j$  pour simplifier.

Il reste alors à déterminer la partition  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  et les coefficients  $\alpha_j$  de telle sorte que les propriétés (2.1.2) (2.1.5) et (2.1.6) soient vérifiées, et naturellement, que  $\pi g$  constitue une "bonne" approximation de  $g$ , i.e., il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h_{\mathcal{D}}$ , telle que

$$(2.2.3) \quad |g - \pi g|_{r,\infty,[0,1]} \leq Ch_{\mathcal{D}}^{t-r} |g|_{t,\infty,[0,1]}$$

pour  $r = 0, \dots, t$  et  $t = 1, \dots, k$ , avec (\*)

$$(2.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} |g|_{t,\infty,[0,1]} = \operatorname{ess. sup}_{0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{d^t g}{d\xi^t}(\xi) \right| \\ \text{et } h_{\mathcal{D}} = \max(\tau_{i+1} - \tau_i) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

Nous indiquons ci-après une méthode de construction possible pour la suite  $(t)$  ; il y en a d'autres !

---

(\*) Ici, et par la suite, la lettre  $t$  est utilisée avec deux significations distinctes faciles à identifier : soit la suite  $t = (t_i)$ , soit l'indice entier  $t$ .

Choix de la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  : Nous allons utiliser les résultats de MICHELLI-RIVLIN et WINOGRAD [1976] qui, pour un ensemble de points donnés  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  et pour une valeur de  $k$  donnée, permettent de déterminer une suite de noeuds  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  telle que la constante  $C$  apparaissant en (2.2.3) soit la plus petite possible. Pour cela on suppose que

(2.2.5)  $\tau_1 = 0$  ,  $\tau_n = 1$  (voir (2.1.1)).

La suite de points  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n+k$  vérifie alors

(2.2.6) a)  $t_1 = \dots = t_k = 0$  ;

(2.2.7) b)  $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = 1$  ;

c) les  $(n-k)$  points  $t_{k+1}, \dots, t_n$  sont dans l'intervalle  $]0,1[$  et sont les points de discontinuité de la fonction en escalier  $\theta$  :

(2.2.8) 
$$\left\{ \begin{array}{l} |\theta(\xi)| = 1 , \forall \xi \in [0,1] , \text{ avec } \theta(0^+) = 1 ; \\ \theta \text{ a en plus } (n-k) \text{ changements de signe sur } [0,1] ; \\ \int_0^1 f(x) \theta(x) dx = 0 , \forall f \in \mathcal{F}_{k,t} \end{array} \right.$$

On vérifie en outre que la fonction  $\theta$  ainsi définie est **unique**.

□

Une approximation de la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  ainsi définie :

En pratique les  $(n-k)$  points  $t_{k+1}, \dots, t_n$  ne peuvent pas être déterminés exactement. DE BOOR [1977 et 1978, page 219] propose deux possibilités :

i) un sous-programme SPLOPT, basé sur une méthode de NEWTON, qui approche les abscisses de ces points. Cet algorithme itératif utilise comme valeurs initiales :

(2.2.9)  $t_{k+i}^{(0)} = (\tau_{i+1} + \dots + \tau_{i+k-1}) / (k-1)$  ,  $i = 1, \dots, n-k$  .

ii) étant donné que les valeurs initiales (2.2.9) sont souvent très proches de la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ , de BOOR propose aussi d'utiliser directement les valeurs (2.2.9).

Par la suite, nous utiliserons l'une de ces deux possibilités. Il reste alors à déterminer explicitement l'interpolée  $\pi g$  d'une fonction  $g$ .

Détermination explicite de l'interpolée  $\pi g$  de la fonction  $g$  :

Etant donnée la fonction  $g$ , déterminer son interpolée  $\pi g$  revient à trouver les coefficients  $\alpha_j := \alpha_j(g)$  qui apparaissent dans la relation (2.2.2). Compte tenu de la relation (2.1.2), i.e.,  $\pi g(\tau_j) = g(\tau_j)$   $j = 1, \dots, n$ , on est ainsi conduit à résoudre le système linéaire

$$(2.2.10) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,k,t}(\tau_j) = g(\tau_j) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad .$$

Il reste à vérifier que ce système est inversible. Suivant DE BOOR [1978, § 13], une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de ce système est que  $B_{j,k,t}(\tau_j) > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ce qui équivaut à

$$(2.2.11) \quad t_j < \tau_j < t_{j+k} \quad , \quad j = 2, \dots, n-1$$

étant entendu que pour  $j = 1$  ou  $j = n$ , on a respectivement  $\tau_1 = t_1 = 0$ ,  $B_{1,k,t}(0) = 0$  et  $\tau_n = t_{n+k} = 1$ ,  $B_{n,k,t}(1) = 1$ .

La suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  définie par MICHELLI, RIVLIN et WINOGRAD [1976] vérifie (2.2.11). Il en ira de même de l'approximation donnée par le sous-programme SPLOPT : il suffit pour cela d'itérer suffisamment. Enfin, dans la majorité des cas, DE BOOR [1978, page 219] note que les valeurs initiales (2.2.9) vérifient également la condition (2.2.11). On utilisera donc l'une des trois possibilités suivantes :

a) la suite  $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$  proposée par MICHELLI, RIVLIN et WINOGRAD [1976] ;

b) la suite approchée fournie par "SLOPT" ;

c) la suite des valeurs initiales (2.2.9) sous réserve qu'elle vérifie la condition (2.2.11).

Ajoutons que dans tous les cas la matrice du système (2.2.10) est bande de largeur  $2k-1$ .

Les différents résultats ci-dessus permettent de construire une interpolée  $\pi g$ , de type B-splines, de toute fonction  $g$  régulière, telle que

$$\pi g(\tau_j) = g(\tau_j) \quad , \quad j = 1, \dots, n .$$

Lorsque cette interpolée est construite à l'aide de fonctions de base B-splines d'ordre  $k$ ,  $\pi g$  est polynomiale par morceaux de degré  $k-1$ , les raccordements s'effectuant aux noeuds  $(t_i)_{i=1}^{n+k}$  et étant de classe  $\mathcal{C}^{k-2}$ . Mais, d'une manière générale la donnée de la suite  $(\tau_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  et des valeurs  $g(\tau_j)$  ne suffit pas pour obtenir l'allure générale de l'interpolée  $\pi g$ . Celle-ci peut être obtenue pour des valeurs "modérées" de  $k$  comme suit :

Allure de l'interpolée  $\pi g$  :

Supposons  $\pi g$  connue, i.e., la suite  $(t_i)_{i=1}^{n+k}$  et les coefficients  $\alpha_j$  sont déterminés. Posons

$$|t| := \max_{i=k, \dots, n} (t_{i+1} - t_i)$$

et, pour  $k > 1$ ,

$$t_j^* := (t_{j+1} + \dots + t_{j+k-1}) / (k-1) \quad , \quad j = 1, \dots, n .$$

Alors, suivant DE BOOR [1978, page 159], il vient

$$\alpha_j = \pi g(t_j^*) + \theta(|t|^2) \quad , \quad j = 1, \dots, n .$$

ce qui montre que pour obtenir l'allure générale de l'interpolée  $\pi g$  on peut tracer la ligne brisée joignant la suite de points  $(t_j^*, \alpha_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Cette ligne brisée est appelée polygone de contrôle ou polygone de Bézier. On en trouvera une illustration sur la Figure 2.2.1.

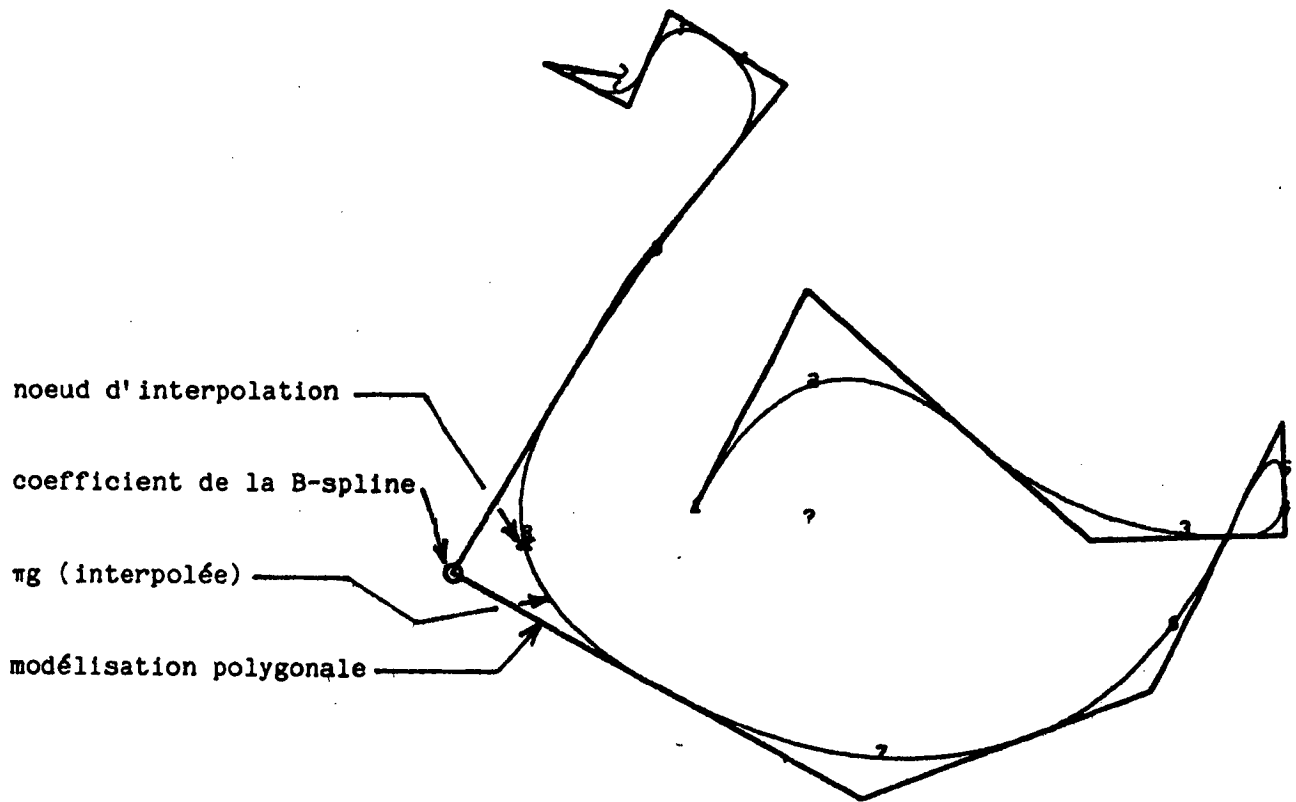


Figure 2.2.1 : Modélisation polygonale de la fonction interpolée

(une modification des coefficients de la B-spline entraîne  
une modification de l'interpolée, d'où la possibilité  
d'apporter des corrections "par touches" :  
voir C. DE BOOR [1978, page 124])

Remarque 2.2.1 relative à l'estimation d'erreur d'interpolation (2.2.3)

Ce résultat est établi dans de BOOR [1978, Théorème XII.3 page 176]. Il repose essentiellement sur la propriété suivante

$$(2.2.12) \quad \pi g = g, \text{ sur } [t_k, t_{n+1}], \quad \forall g \in P_{k-1}(\xi),$$

où  $P_{k-1}(\xi)$  désigne l'espace des polynômes en la variable  $\xi$ , de degré inférieur ou égal à  $k-1$ . Pour établir que l'interpolée  $\pi g$ , construite plus haut, vérifie la propriété (2.2.12), on utilise le théorème de CURRY et SCHOENBERG (voir de BOOR [1978, Théorème IX.1, page 113] qui entraîne, avec les notations de de BOOR, que

$$\mathcal{P}_{k,t} = \mathcal{P}_{k,\xi,v} \text{ sur } [t_k, t_{n+1}],$$

d'où, en particulier,

$$P_{k-1}(\xi) \subset \mathcal{P}_{k,t} \text{ sur } [t_k, t_{n+1}].$$

Dès lors, pour tout  $g \in P_{k-1}(\xi)$ , on a avec (2.2.1)

$$(2.2.13) \quad g(\xi) = \sum_{j=1}^n \beta_j(g) B_{j,k,t}(\xi).$$

D'autre part, avec (2.2.2)

$$(2.2.14) \quad \pi g(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(g) B_{i,k,t}(\xi).$$

La condition (2.1.2), i.e.,  $\pi g(\tau_j) = g(\tau_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , reportée dans les développements ci-dessus entraîne alors

$$(2.2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i(g) B_{i,k,t}(\tau_j) &= \sum_{i=1}^n \beta_i(g) B_{i,k,t}(\tau_j) = g(\tau_j) \\ &\text{pour tout } j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right.$$

Or, nous avons observé que la construction de  $\pi g$  est telle que le système (2.2.10) est inversible. Il s'ensuit que les deux systèmes linéaires (2.2.15) ont pour solution unique

$$(2.2.16) \quad \alpha_i(g) = \beta_i(g) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad ,$$

d'où immédiatement (2.2.12) en reportant dans les développements (2.2.13) et (2.2.14).

Notons au passage que l'obtention de cette estimation d'erreur d'interpolation présente des points communs avec celles réalisées par CIARLET [1978] dans le cas de méthodes d'éléments finis. Cependant, à l'encontre de ces méthodes d'éléments finis qui sont strictement locales, les méthodes B-splines considérées ici sont globales (au sens de la détermination des  $\alpha_i$  : voir (2.2.10)) et nécessitent donc un traitement spécifique. C'est pourquoi, conformément à de BOOR [1978, Lemma XIII.2], la constante  $C$  apparaissant en (2.2.3), comporte un facteur du type  $\|\pi\| = \max \frac{\|\pi g\|}{\|g\|}$  où  $g \in \mathcal{E}^*[0,1]$ . En pratique, il est difficile de borner ce facteur. Certaines études du type de celles évoquées dans de BOOR [1978, pages 214-215] permettent de penser que, sauf cas pathologiques (tels que ceux pour lesquels  $\tau_i$  est proche des bornes du support de  $B_{i,k,t}$ ) l'estimation (2.2.3) est valable.

□

### 2.3. Interpolation de la surface moyenne de la coque

Dans la modélisation des coques minces, il est commode de définir la surface moyenne de la coque comme l'image d'un ouvert borné du plan par une certaine application  $\vec{\phi}$  régulière (voir Figure 2.3.1.)



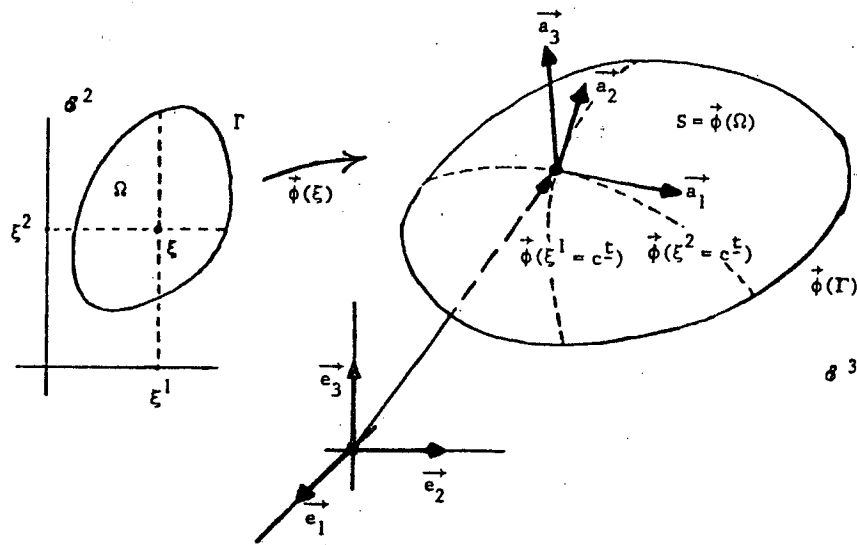


Figure 2.3.1 : Définition de la surface moyenne  $\mathcal{S}$

Nous supposons par la suite que les surfaces moyennes considérées sont les images d'un rectangle par une application  $\vec{\phi}$  régulière, i.e.,

$$(2.3.1) \quad \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2) = x^i(\xi^1, \xi^2) \vec{e}_i .$$

En général cette application  $\vec{\phi}$  n'est pas connue de manière explicite. On va donc l'approcher à l'aide d'un **produit tensoriel de fonctions B-splines**. Plus précisément, on approchera chacune des composantes  $x^i(\xi^1, \xi^2)$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , conformément à la méthode décrite dans DE BOOR [1978, Chapitre XVII].

Principales étapes de la construction d'une approximation par produit tensoriel de fonctions B-splines :

- i) la donnée du rectangle de référence  $[a^1, b^1] \times [a^2, b^2]$  ;
- ii) les données des points d'interpolation sur chacun des axes, i.e.,  $\tau^1 = \{\tau_i^1, i = 1, \dots, n^1\}$  avec  $\tau_1^1 = a^1 < \tau_2^1 < \dots < \tau_{n^1}^1 = b^1$ , sur l'axe  $\xi^1$ , et  $\tau^2 = \{\tau_j^2, j = 1, \dots, n^2\}$  avec  $\tau_1^2 = a^2, \dots, \tau_{n^2}^2 = b^2$  sur l'axe  $\xi^2$ . En désignant par  $w$  une fonction continue sur le rectangle, et par  $\pi w$  son interpolée, on souhaite avoir

$$(2.3.2) \quad \pi w(\tau_i^1, \tau_j^2) = w(\tau_i^1, \tau_j^2), \quad i = 1, \dots, n^1; \quad j = 1, \dots, n^2.$$

Notons que dans les sections précédentes nous avons rappelé la définition des fonctions B-splines sur l'intervalle  $[0,1]$  ; le passage à un intervalle  $[a,b]$  est immédiat ;

iii) les données des degrés des polynômes d'interpolation, i.e.,  $k^1-1$  pour l'interpolation en  $\xi^1$  et  $k^2-1$  pour l'interpolation en  $\xi^2$  (ceci car on utilise respectivement des méthodes B-splines d'ordres  $k^1$  et  $k^2$ ) ;

iv) en utilisant la méthode décrite dans la section 2.2, on obtient pour chaque couple  $(\tau^1, k^1)$  d'une part,  $(\tau^2, k^2)$  d'autre part, une suite optimale de noeuds  $t^1 = (t_1^1, \dots, t_{n^1+k^1}^1)$  et  $t^2 = (t_1^2, \dots, t_{n^2+k^2}^2)$ , d'où l'on déduit, toujours en dimension 1, les fonctions de base

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \xi^1 \in [a^1, b^1] \rightarrow B_{i, k^1, t^1}^1(\xi^1), & 1 \leq i \leq n^1, \\ \xi^2 \in [a^2, b^2] \rightarrow B_{j, k^2, t^2}^2(\xi^2), & 1 \leq j \leq n^2, \end{cases}$$

v) alors, pour toute fonction  $w \in \mathcal{C}([a^1, b^1] \times [a^2, b^2])$ , i.e., pour toute fonction continue sur le rectangle, son interpolée  $\pi w$  est donnée par

$$(2.3.4) \quad \pi w(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^{n^1} \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_{ij} B_{i, k^1, t^1}^1(\xi^1) B_{j, k^2, t^2}^2(\xi^2)$$

où les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont les coefficients de la matrice

$$(2.3.5) \quad (\alpha)_{n^1 \times n^2} = (B_{j, k^1, t^1}^1(\tau_i^1))_{n^1 \times n^1}^{-1} (w(\tau_i^1, \tau_j^2))_{n^1 \times n^2} (B_{i, k^2, t^2}^2(\tau_j^2))_{n^2 \times n^2}^{-1}$$

Cette construction suscite les remarques suivantes :

1) il y a existence et unicité de la solution en vertu de DE BOOR [1978, Théorème XVII.1, page 341] ;

ii) le calcul des coefficients ( $\alpha$ ) repose sur la relation (2.3.5). DE BOOR [1978, page 347] propose un algorithme de calcul en  $O((n^1)^3 + (n^1)^2 n^2 + n^1 (n^2)^2 + (n^2)^3)$  opérations élémentaires seulement. Cette estimation est à rapprocher du nombre d'opérations élémentaires nécessitées par une résolution directe du système

$$(2.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n^1} \sum_{j=1}^{n^2} \alpha_{ij} B_{i,k^1,t^1}^1(\tau_p^1) B_{j,k^2,t^2}^2(\tau_q^2) = w(\tau_p^1, \tau_q^2) \\ p = 1, \dots, n^1 ; q = 1, \dots, n^2 \end{array} \right.$$

qui conduirait à  $O((n^1 n^2)^3)$  opérations élémentaires.

iii) cette construction repose sur la définition d'un maillage de type rectangulaire (voir Figure 2.3.2) ce qui introduit quelques limites à la généralité de cette approche. Observons cependant que la définition de la surface moyenne à l'aide d'une carte  $\vec{\phi}$  permettra dans la plupart des cas de se placer dans le cadre de cette étude.

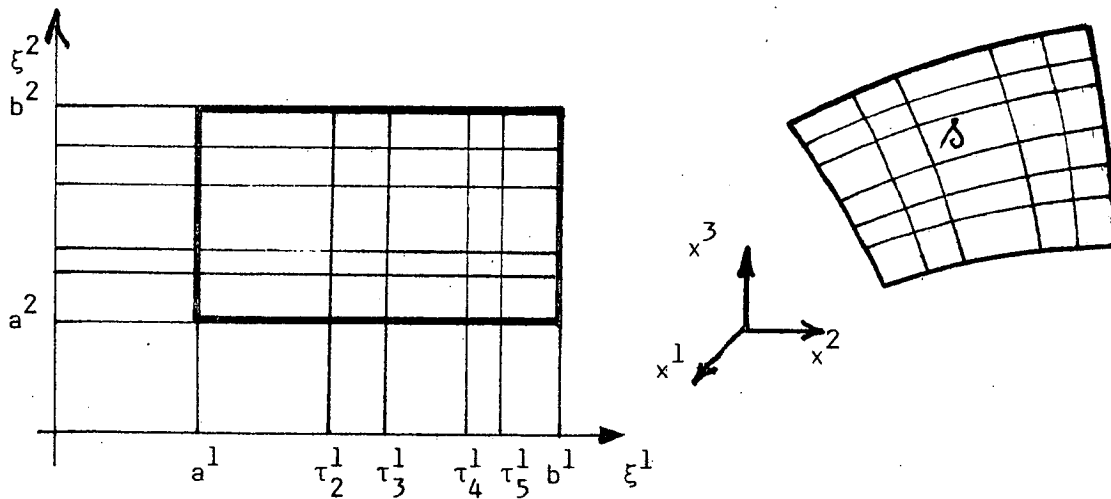


Figure 2.3.2 : Le "maillage" du rectangle de référence

Par ailleurs, si le domaine  $\Omega$  n'est pas de manière "naturelle" un rectangle, on pourra envisager dans la plupart des cas une extension de l'application  $\phi_{h/\Delta}$  à un domaine rectangulaire  $\tilde{\Omega}$  contenant  $\Omega$  (à ce sujet voir LYCHE et SCHUMAKER [1975, § 8]).

Approximation de la surface moyenne de la coque par un produit tensoriel de B-splines

En se reportant à la relation (2.3.1), on va approcher chacune des composantes  $x^i(\xi^1, \xi^2)$  à l'aide de produits tensoriels de fonctions B-splines, conformément à ce qui précède. A la carte exacte  $\vec{\phi}(\xi^1, \xi^2)$ , on associe de la sorte la carte approchée

$$(2.3.7) \left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_{h\Delta} : (\xi^1, \xi^2) \in [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \rightarrow \\ \vec{\phi}_{h\Delta}(\xi^1, \xi^2) = \pi_{k^1, k^2} x^i(\xi^1, \xi^2) \vec{e}_i \end{array} \right.$$

où

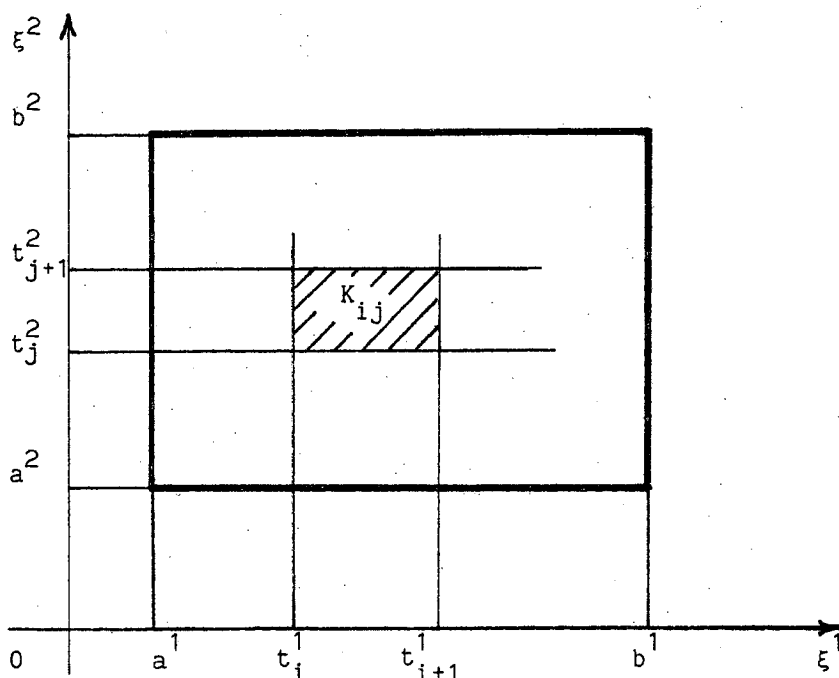
$$(2.3.8) \left\{ \begin{array}{l} h\Delta = \max(\{\tau_{i+1}^1 - \tau_i^1, i = 1, \dots, n^1-1\}, \{\tau_{j+1}^2 - \tau_j^2, j = 1, \dots, n^2-1\}) \\ k^1 = 1 + \text{degré des polynômes utilisés pour construire les} \\ \text{fonctions de bases en } \xi^1 \\ k^2 = 1 + \text{degré des polynômes utilisés pour construire les} \\ \text{fonctions de bases en } \xi^2 \end{array} \right.$$

et où  $\pi_{k^1, k^2}$  désigne l'opérateur d'interpolation correspondant.

3 - ESTIMATION DE L'ERREUR DUE A L'INTERPOLATION DE LA SURFACE MOYENNE

Pour l'étude ultérieure des propriétés de convergence des solutions approchées vers la solution du problème continu, il convient d'estimer l'erreur due à l'interpolation de la surface moyenne  $\vec{\phi}$  par la surface moyenne approchée  $\vec{\phi}_{h\Delta}$  définie en (2.3.7), i.e.,

$$(3.1.1) \quad \vec{\phi}_{h\Delta}(\xi^1, \xi^2) = \pi_{k^1, k^2} x^i(\xi^1, \xi^2) \vec{e}_i .$$



Les suites  $t^1 = \{t_1^1, \dots, t_{n^1+k^1}^1\}$  et  $t^2 = \{t_1^2, \dots, t_{n^2+k^2}^2\}$  introduisent une partition du rectangle de référence sous la forme d'une "pavage rectangulaire"  $\mathcal{C}_{h_\Delta}(\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_{h_\Delta}} K)$ . En utilisant la propriété (2.2.11), il est facile de vérifier que le diamètre maximal des pavés  $K \in \mathcal{C}_{h_\Delta}$  de ce maillage est de même ordre que  $h_\Delta$ .

Dès lors, par analogie avec LYCHE et SCHUMAKER [1975, §§ 8 à 10], on déduirait de l'estimation monodimensionnelle (2.2.3), le résultat d'estimation d'erreur suivant :

Pour tout  $\vec{\phi} \in W^{k, \infty}(\Omega)$  et pour tout  $K \in \mathcal{C}_{h_\Delta}$ , on a

$$(3.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{\phi} - \vec{\phi}_{h_\Delta}|_{r, \infty, K} \leq Ch_\Delta^{t-r} |\vec{\phi}|_{t, \infty, K} \\ \text{pour } t = 1, \dots, k = \min(k^1, k^2) \text{ et } r = 0, \dots, t, \end{array} \right.$$

où  $h_\Delta$  a été défini en (2.3.8).

Signalons que des résultats d'interpolation similaires obtenus dans des situations voisines par HALL [1973], de BOOR et FIX [1973], SCHULTZ [1969] et MICCHELLI, RIVLIN et WINOGRAD [1976].

4 - INTERPOLATION DE L'ÉPAISSEUR ET ERREUR ASSOCIÉE

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à l'approximation de la surface moyenne d'une coque dont on connaît les coordonnées d'un certain nombre de points. Dans le même esprit, pour compléter la définition géométrique de la coque, il convient maintenant d'en interpoler l'épaisseur. Nous supposons - ce qui est raisonnable en pratique - que l'on connaît la valeur de l'épaisseur en ce même ensemble de points. Une approximation en tous points analogue à celle de la section 2.3 permet alors d'approcher la fonction d'épaisseur  $e$  par son interpolée  $e_{h\delta} = \pi_{\ell^1, \ell^2} e$ .

De plus, par analogie avec les résultats du paragraphe 3 on obtiendrait pour tout  $e \in W^{\ell, \infty}(\Omega)$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  :

$$(4.1) \quad |e - e_{h\delta}|_{r, \infty, K} \leq C h_{\delta}^{t-r} |e|_{t, \infty, K}$$

pour  $t = 1, \dots, \ell = \min(\ell^1, \ell^2)$  et  $r = 0, \dots, t$ .

Remarque 4.1 :

Dans l'approximation de l'épaisseur nous avons noté  $\ell^1, \ell^2$  les ordres des interpolations utilisées au lieu de  $k^1, k^2$  dans le cas de l'approximation de la surface moyenne, ceci pour bien marquer que ces deux approximations sont tout à fait distinctes. En particulier nous verrons que dans la formulation variationnelle du problème de coques, il apparaît des coefficients qui sont fonction :

i) des dérivées partielles secondes (resp. troisièmes) des coordonnées  $x^i(\xi^1, \xi^2)$  dans le cas de coques peu profondes (resp. moyennement profondes) ;

ii) de l'épaisseur seulement (et non de ses dérivées).

Ceci incite à approcher l'épaisseur de manière beaucoup plus grossière que les coordonnées  $x^i(\xi^1, \xi^2)$ . Nous revenons sur ce point dans le paragraphe 6 ainsi que dans les exemples des Figures 7.1 et 7.2 (voir valeurs respectives de  $k = \min(k^1, k^2)$  et  $\ell = \min(\ell^1, \ell^2)$ ).

## 5 - FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLEMES DE COQUES MINCES

### Orientation

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats relatifs à la formulation variationnelle des problèmes de coques minces que nous sommes amenés à utiliser par la suite.

#### 5.1. La surface moyenne de la coque

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné du plan euclidien  $\mathbb{E}^2$ , de frontière  $\Gamma$ , suffisamment régulière. Alors la **surface moyenne**  $\bar{\delta}$  de la **coque** est l'image de l'ensemble  $\bar{\Omega}$  par une application  $\bar{\phi} : \bar{\Omega} \in \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ , où  $\mathbb{E}^3$  est l'espace euclidien usuel :

$$(5.1.1) \quad \bar{\delta} = \{\bar{\phi}(\xi), \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}\}.$$

Par la suite, nous supposerons que

$$(5.1.2) \quad \bar{\phi} \in (C^3(\bar{\Omega}))^3$$

et que tous les points de  $\bar{\delta} = \bar{\phi}(\bar{\Omega})$  sont réguliers, au sens que les deux vecteurs

$$(5.1.3) \quad \bar{a}_\alpha = \bar{\phi}_{,\alpha} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2$$

sont linéairement indépendants.

Nous utiliserons des lettres grecques pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$  et nous emploierons des lettres latines pour les indices prenant leur valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . Pour ces indices, nous utiliserons la convention de sommation sur les indices répétés. Enfin, les notations  $f_{,\alpha}$ ,  $f_{,\alpha\beta}$ , ..., désigneront les dérivées partielles  $\partial f / \partial \xi^\alpha$ ,  $\partial^2 f / \partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta$ , ... .

La **première forme fondamentale**  $(a_{\alpha\beta})$  de la surface  $\mathcal{S}$  est donnée par  $a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$  ; le déterminant de la matrice  $(a_{\alpha\beta})$  est noté  $a$ . A la base covariante  $(\vec{a}_\alpha)$  du plan tangent, nous associons la base contravariante  $(\vec{a}^\alpha)$  définie par les relations  $\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha$  (pas de sommation si  $\alpha = \beta$ ), où  $\delta_\beta^\alpha$  est le symbole de Kronecker. Nous introduisons également le vecteur unitaire normal à la surface  $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$ .

La **seconde forme fondamentale**  $(b_{\alpha\beta})$  de la surface  $\mathcal{S}$  est donnée par

$$(5.1.4) \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = - \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta}$$

d'où l'on déduit immédiatement la **troisième forme fondamentale**  $(c_{\alpha\beta})$  de la surface

$$(5.1.5) \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}, \text{ où } b_\alpha^\lambda = a^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta}.$$

Les **symboles de Christoffel**  $(\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha)$  de la surface sont définis par les relations

$$(5.1.6) \quad \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_{\lambda,\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_{\beta,\lambda} = \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha.$$

## 5.2. Les inconnues du problème

Moyennant des hypothèses sur les lois de comportement de la coque et sur la nature des déformations, il est possible d'approcher la solution du problème tridimensionnel à l'aide du seul champ de déplacement  $\vec{u} = \vec{u}(\xi)$  des points  $\vec{\phi}(\xi)$  de la surface moyenne (cf. KOITER [1966]). Les inconnues du problème sont alors les composantes covariantes  $u_i$  du déplacement :

$$(5.2.1) \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{a}^i.$$



5.3. Formulation variationnelle du problème pour une coque  
"générale"

La solution  $\vec{u}$  minimise l'énergie de la coque

$$(5.3.1) \quad J(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - f(\vec{v})$$

sur un espace convenable  $\vec{V}$  que l'on définira plus loin. Dans la dernière expression, l'énergie de déformation  $\frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v})$  est associée à la forme bilinéaire suivante

$$(5.3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} \frac{Ee}{1-\nu^2} [ \{ (1-\nu) \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}) \gamma_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu \gamma_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}) \gamma_{\beta}^{\beta}(\vec{v}) \} \\ &+ \frac{e^2}{12} \{ (1-\nu) \bar{\rho}_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu \bar{\rho}_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\beta}^{\beta}(\vec{v}) \} ] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \right.$$

où  $e$  est l'épaisseur de la coque,  $E$  son module de Young,  $\nu$  son coefficient de Poisson. Les composantes mixtes  $(\gamma_{\beta}^{\alpha})$  et  $(\bar{\rho}_{\beta}^{\alpha})$  sont obtenues à partir des composantes doublement covariantes  $(\gamma_{\alpha\beta})$  et  $(\bar{\rho}_{\alpha\beta})$  des tenseurs de déformation et de changement de courbure de la surface moyenne  $\mathcal{S}$ , grâce aux relations

$$(5.3.3) \quad \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}) = a^{\alpha\lambda} \gamma_{\lambda\beta}(\vec{v}) \quad , \quad \bar{\rho}_{\beta}^{\alpha}(\vec{v}) = a^{\alpha\lambda} \bar{\rho}_{\lambda\beta}(\vec{v}) \quad ,$$

où  $a^{\alpha\lambda} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}^{\lambda} = a^{\lambda\alpha}$ . Les composantes  $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})$  et  $\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v})$  sont données par

$$(5.3.4) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} v_3 \quad ,$$

$$(5.3.5) \quad \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} v_3 + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda|\alpha}$$

Dans ces expressions, nous utilisons les dérivées covariantes  $v_{\alpha|\beta}$ ,  $v_{3|\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha}^{\lambda}$  qui sont données par

$$(5.3.6) \quad v_{\alpha|\beta} = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} \quad ,$$

$$(5.3.7) \quad v_{3|\alpha\beta} = v_{3,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{3,\lambda} \quad ,$$

$$(5.3.8) \quad b_{\alpha\beta}^{\lambda|} = b_{\alpha,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} b_{\alpha}^{\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} b_{\nu}^{\lambda} .$$

Les relations de MAINARDI-CODAZZI  $b_{\alpha\beta|\lambda} = b_{\alpha\lambda|\beta}$  et les relations de RICCI  $a^{\alpha\beta|}_{\lambda} = 0$  entraînent  $b_{\alpha\beta}^{\lambda|} = b_{\beta\alpha}^{\lambda|}$ , d'où l'on déduit la symétrie des composantes  $\vec{p}_{\alpha\beta}(\vec{v})$  définies en (5.3.5).

Enfin, dans l'expression (5.3.1), le terme  $f(\vec{v})$  désigne l'énergie potentielle des forces extérieures qui peut s'écrire sous la forme

$$(5.3.9) \quad f(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p} \cdot \vec{v} \sqrt{a} \, d\xi^1 \, d\xi^2 = \int_{\Omega} p^i v_i \sqrt{a} \, d\xi^1 \, d\xi^2 ,$$

où les fonctions  $p^i$  sont les composantes contravariantes sur la base  $(\vec{a}_i)$  de la densité réduite par unité de surface des forces extérieures appliquées à la coque.

Il reste à définir l'espace  $\vec{V}$  des déplacements admissibles. Supposant que la coque est encastree sur la partie de son bord associée à la partie  $\Gamma_0$  de la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  ( $\Gamma_0$  est supposée de mesure non nulle) et libre sur la partie complémentaire associée à  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$ , l'espace  $\vec{V}$  est défini par

$$(5.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \{ \vec{v} = v_i \vec{a}^i ; v_{\alpha} \in H^1(\Omega) ; v_3 \in H^2(\Omega) ; \\ v_i|_{\Gamma_0} = 0 ; \partial_n v_3|_{\Gamma_0} = 0 \} \end{array} \right.$$

où  $H^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , désigne les espaces de Sobolev usuels (ADAMS [1975] ou LIONS-MAGENES [1968]).

Alors, il est possible de vérifier que la forme bilinéaire  $a(\dots)$  définie par la relation (5.3.2) est symétrique. Le problème de minimisation (5.3.1) est ainsi équivalent au problème variationnel suivant :

Problème 5.3.1 :

Pour  $\vec{f} \in (\mathcal{E}^3(\bar{\Omega}))^3$ , pour  $\vec{p} \in (L_2(\Omega))^3$ , trouver  $\vec{u} \in \vec{V}$  tel que

$$(5.3.11) \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad ,$$

où la forme bilinéaire  $a(\dots)$  et la forme linéaire  $f(\dots)$  sont données par les relations (5.3.2) et (5.3.9) respectivement.

□

Dans BERNADOU-CIARLET [1976], on a démontré le résultat suivant :

Théorème 5.3.1 :

La forme bilinéaire (5.3.2) est  $\vec{V}$ -elliptique, i.e., il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$(5.3.12) \quad \alpha \|\vec{v}\|^2 \leq a(\vec{v}, \vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}$$

et le problème 5.3.1 a une solution et une seule.

□

La norme sur l'espace  $\vec{V}$  est définie par

$$(5.3.13) \quad \|\vec{v}\| = (\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2 + \|v_3\|_{2,\Omega}^2)^{1/2} \quad ,$$

où, pour tout entier  $m \geq 0$  ,

$$(5.3.14) \quad \|v\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^2 \, d\xi^1 \, d\xi^2 \right)^{1/2} \quad .$$

Pour l'étude de l'approximation par des méthodes d'éléments finis avec intégration numérique, il est intéressant d'utiliser la nouvelle formulation suivante de la forme bilinéaire  $a(\dots)$  :

Théorème 5.3.2 : (CIARLET [1976])

La forme bilinéaire (5.3.2) peut s'écrire

$$(5.3.15) \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^t U [A_{IJ}] V \, d\xi^1 \, d\xi^2,$$

où la matrice colonne V (et de manière analogue pour U) est donnée par

$$(5.3.16) \quad {}^t V = \{v_1 \, v_{1,1} \, v_{1,2} \, v_2 \, v_{2,1} \, v_{2,2} \, v_3 \, v_{3,1} \, v_{3,2} \, v_{3,11} \, v_{3,12} \, v_{3,22}\}.$$

En outre, en notant par  $\phi_i$  les composantes de l'application  $\vec{\phi} = \phi_i \vec{e}^i$  sur le repère orthonormé fixe  $(0, \vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$  de  $\mathbb{E}^3$ , nous avons pour chaque  $(I, J)$ ,  $1 \leq I, J \leq 12$

$$(5.3.17) \quad A_{IJ}(\xi) = g_{IJ}(\phi_{i,\alpha}(\xi), \phi_{i,\alpha\beta}(\xi), \phi_{i,\alpha\beta\lambda}(\xi), e),$$

où la fonction  $g_{IJ}$  est le quotient d'un polynôme en ses arguments et d'un dénominateur qui est une puissance entière de l'expression

$$(5.3.18) \quad \sqrt{a} = \sqrt{\det(a_{\alpha\beta})} = \left( \left( \sum_{i=1}^3 (\phi_{i,1})^2 \right) \left( \sum_{i=1}^3 (\phi_{i,2})^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^3 (\phi_{i,1} \phi_{i,2}) \right)^2 \right)^{1/2}$$

□

Remarque 5.3.1 :

Les hypothèses (5.1.2) et (5.1.3) entraînent que  $A_{IJ} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . Cette propriété permet l'utilisation de schémas d'intégration numérique.

□

Remarque 5.3.2 :

Le calcul explicite des coefficients  $A_{IJ}(\xi)$  est fait dans BERNADOU [1978] ou dans BERNADOU-BOISSERIE [1982].

□

Par analogie avec le Théorème 5.3.2, on obtient

Théorème 5.3.3 :

La forme linéaire (5.3.9) peut s'écrire

$$(5.3.19) \quad f(\vec{v}) = \int_{\Omega} t_{FV} d\xi^1 d\xi^2$$

avec

$$(5.3.20) \quad t_F = \sqrt{a} [p^1 \ 0 \ 0 \ p^2 \ 0 \ 0 \ p^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] ,$$

où V est donné par la relation (5.3.16).

□

#### 5.4. Formulation variationnelle du problème pour une coque "peu profonde"

Comme son nom l'indique une coque peu profonde est une coque dont la surface moyenne a sa courbure et les dérivées de sa courbure "petites". Cette particularité géométrique permet de simplifier quelque peu certaines expressions de la section 5.3. Dans ce qui suit, nous indiquons seulement les modifications à apporter pour prendre en compte cette hypothèse de faible profondeur, tout le reste étant inchangé.

Ainsi, la principale modification concerne l'expression (5.3.5) qui devient

$$(5.4.1) \quad \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3|\alpha\beta} .$$

Il convient ensuite d'adapter la démonstration du Théorème 5.3.1 au cas où les composantes du tenseur de changement de courbure  $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$  sont données par la relation (5.4.1). Cette adaptation n'est pas immédiate car la démonstration du Théorème 5.3.1 donnée dans BERNADOU-CIARLET [1976] repose essentiellement sur un lemme de mouvement rigide (voir BERNADOU-CIARLET [1976, Théorème 5.1.1]), i.e.,

$$(5.4.2) \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \bar{p}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) \end{array} \right) \\ \\ \iff \left( \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi} \\ \text{où } \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ sont deux vecteurs constants.} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

La démonstration de ce lemme ne semble pas directement transposable au cas où  $\bar{p}_{\alpha\beta}$  est donnée par (5.4.1). C'est pourquoi dans le théorème suivant nous reprenons l'approche de BERNADOU-ODEN [1981] dans le contexte d'une théorie linéaire.

Par analogie avec l'expression (5.3.2), posons

$$(5.4.3) \left\{ \begin{array}{l} a_S(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \frac{Ee}{1-\nu^2} [ \{ (1-\nu) \gamma_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}) \gamma_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu \gamma_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}) \gamma_{\beta}^{\beta}(\vec{v}) \} \\ + \frac{e^2}{12} \{ (1-\nu) \bar{p}_{\beta}^{\alpha}(\vec{u}) \bar{p}_{\alpha}^{\beta}(\vec{v}) + \nu \bar{p}_{\alpha}^{\alpha}(\vec{u}) \bar{p}_{\beta}^{\beta}(\vec{v}) \} ] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \end{array} \right.$$

où cette fois-ci les expressions  $\gamma_{\beta}^{\alpha}$  et  $\bar{p}_{\beta}^{\alpha}$  sont données par les relations (5.3.3) (5.3.4) et (5.4.1) (au lieu de (5.3.5)). L'indice S dans  $a_S(\dots)$  rappelle qu'il s'agit là de la forme bilinéaire associée aux coques peu profondes ("Shallow" en anglais).

Dans ce cas, l'énoncé du problème 5.3.1 devient :

Problème 5.4.1 :

Pour  $\vec{\phi} \in (\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))^3$ , pour  $\vec{p} \in (L_2(\Omega))^3$ , trouver  $\vec{u}_S \in \vec{V}$  tel que

$$(5.4.4) \quad a_S(\vec{u}_S, \vec{v}) = f(\vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad ,$$

où la forme bilinéaire  $a_S(\dots)$  et la forme linéaire  $f(\cdot)$  sont données par les relations (5.4.3) et (5.3.9), respectivement.

□

On montre alors que

Théorème 5.4.1 :

Pour toute coque "suffisamment peu profonde" de forme quelconque, la forme bilinéaire (5.4.3) est  $\vec{V}$ -elliptique, i.e., il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$(5.4.5) \quad \beta \|\vec{v}\|^2 \leq a_S(\vec{v}, \vec{v}) \quad , \quad \forall \vec{v} \in \vec{V} \quad .$$

Démonstration :

On adapte ici au cas linéaire la démonstration de BERNADOU-ODEN [1981, Théorème 3.2.1] relative au cas non linéaire.

Etape 1 : Autre formulation du problème 5.4.1 (pour simplifier, on note  $\vec{u}$  au lieu de  $\vec{u}_S$ )

Observons tout d'abord que la formulation variationnelle (5.4.4) peut s'écrire : Trouver  $\vec{u} \in \vec{V}$  tel que

$$(5.4.6) \quad \mathcal{B}(\underline{u}, \underline{v}) + b(u_3, \underline{v}) = \int_{\Omega} p^{\alpha} v_{\alpha} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad , \quad \forall \underline{v} \in (V_1(\Omega))^2$$

$$(5.4.7) \quad \mathcal{K}(u_3, v_3) + c(\underline{u}, v_3) = \int_{\Omega} p^3 v_3 \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad , \quad \forall v_3 \in V_2(\Omega) \quad ,$$

où l'on a noté

$$(5.4.8) \quad \underline{u} = (u_1, u_2) \quad , \quad \underline{v} = (v_1, v_2)$$

$$(5.4.9) \quad \mathcal{B}(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\Gamma} (u_{\lambda|\Gamma} + u_{\Gamma|\lambda}) (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$$

$$(5.4.10) \quad b(u_3, \underline{v}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\Gamma} b_{\alpha\beta} u_3 [v_{\lambda|\Gamma} + v_{\Gamma|\lambda}] \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$$

$$(5.4.11) \quad \mathcal{K}(u_3, v_3) = \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\Gamma} \{b_{\alpha\beta} b_{\lambda\Gamma} u_3 v_3 + \frac{e^2}{12} u_3 |_{\alpha\beta} v_3 |_{\lambda\Gamma}\} \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$$

$$(5.4.12) \quad c(\underline{u}, v_3) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} eE^{\alpha\beta\lambda\Gamma} b_{\lambda\Gamma} [u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}] v_3 \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2$$

$$(5.4.13) \quad V_1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \quad , \quad v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

$$(5.4.14) \quad V_2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \quad , \quad v|_{\Gamma_0} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_0} = 0\} \quad .$$

Etape 2 : Quelques estimations relatives aux formes  $\mathcal{B}$ ,  $b$ ,  $\mathcal{A}$  et  $c$

C'est ici qu'intervient la notion de coque "suffisamment peu profonde". Cette notion a été explicitée dans BERNADOU-ODEN [1981, définition 2.1.2] à l'aide d'un paramètre  $\epsilon$  : pour un  $\epsilon > 0$  assez petit donné, on définit une classe de coques peu profondes  $\mathcal{J}_\epsilon$  pour laquelle

$$(5.4.15) \quad |b_\alpha^\beta|, |b_{\alpha|\lambda}^\beta| \leq \epsilon.$$

On a alors établi dans BERNADOU-ODEN [1981, Théorème 3.2.1] qu'il existe  $\epsilon > 0$  et deux constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$ , indépendantes de  $\epsilon$ , telles que

$$(5.4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}(\underline{v}, \underline{v}) \geq c_1 \|\underline{v}\|_{H^1}^2, \quad \forall \underline{v} \in (V_1(\Omega))^2, \\ \text{pour toute coque } \in \mathcal{J}_\epsilon \end{array} \right.$$

$$(5.4.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(v_3, v_3) \geq c_2 \|v_3\|_{H^2}^2, \quad \forall v_3 \in V_2(\Omega), \\ \text{pour toute coque } \in \mathcal{J}_\epsilon. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les définitions (5.4.10) et (5.4.12) jointes aux inégalités (5.4.15), entraînent l'existence d'une constante  $c_3$ , indépendante de  $\epsilon$ , telle que

$$(5.4.18) \quad |b(u_3, \underline{v})| \leq c_3 \epsilon (\|u_3\|_{L^2}^2 + \|\underline{v}\|_{H^1}^2), \quad \forall \underline{v} \in (V_1(\Omega))^2, \forall u_3 \in V_2(\Omega)$$

$$(5.4.19) \quad |c(\underline{u}, v_3)| \leq c_3 \epsilon (\|\underline{u}\|_{H^1}^2 + \|v_3\|_{L^2}^2), \quad \forall \underline{u} \in (V_1(\Omega))^2, \forall v_3 \in V_2(\Omega)$$

Etape 3 : Propriété de  $\vec{V}$ -ellipticité de la forme  $a_S(\dots)$  :

Notons tout d'abord que

$$a_S(\vec{v}, \vec{v}) = \mathcal{B}(\underline{v}, \underline{v}) + b(v_3, \underline{u}) + \mathcal{A}(v_3, v_3) + c(\underline{v}, v_3)$$

d'où avec les estimations (5.4.16) à (5.4.19) :

$$(5.4.20) \quad a_S(\vec{v}, \vec{v}) \geq (c_1 - 2c_3\epsilon) \|\underline{v}\|_{H^1}^2 + (c_2 - 2c_3\epsilon) \|v_3\|_{L^2}^2, \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}.$$



Dès lors, il suffit de supposer que la coque est "suffisamment" peu profonde de telle sorte que le paramètre  $\epsilon$  introduit en (5.4.15), satisfasse par exemple

$$(5.4.21) \quad \epsilon < \frac{1}{3c_3} \min(c_1, c_2) .$$

Alors, la propriété (5.4.5) est vérifiée avec  $\beta = \frac{1}{3} \min(c_1, c_2)$ .

□

Cette propriété (5.4.5) de  $\vec{V}$ -ellipticité de la forme  $a_S(\dots)$  jointe aux propriétés de continuité de la forme  $a_S(\dots)$  elle-même et des seconds membres entraîne immédiatement :

Théorème 5.4.2 :

Pour toute coque "suffisamment peu profonde" de forme quelconque, le problème 5.4.1 admet une solution unique.

□

Par analogie avec le Théorème 5.3.2 on établirait :

Théorème 5.4.3 :

La forme bilinéaire (5.4.3) peut s'écrire

$$(5.4.22) \quad a_S(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^t U [A_{IJS}] V \, d\xi^1 \, d\xi^2 ,$$

où la matrice colonne  $V$  (et de manière analogue pour  $U$ ) est donnée par (5.3.16) tandis que d'une manière analogue à (5.3.17)

$$(5.4.23) \quad A_{IJS}(\xi) = g_{IJS}(\phi_{i,\alpha}(\xi), \phi_{i,\alpha\beta}(\xi), e) .$$

□

Le calcul explicite des coefficients  $A_{IJS}(\xi)$  s'effectuerait par analogie avec BERNADOU [1978] ou BERNADOU-BOISSERIE [1982, § 1.6].

Remarque 5.4.1 :

La différence essentielle entre les applications  $g_{IJ}$  et  $g_{IJS}$  définies par les relations (5.3.17) et (5.4.23), est l'absence de dérivées partielles troisièmes des composantes  $\phi_i$  dans  $g_{IJS}$ .

□

6 - ETUDE DE L'APPROXIMATION GLOBALE (GEOMETRIE ET DEPLACEMENT) ET ESTIMATIONS D'ERREUR

Orientation :

Dans ce paragraphe nous allons combiner les diverses approximations effectuées pour obtenir la solution discrète  $\vec{u}_h$  du problème de coque considéré, i.e.,

i) **les approximations de la géométrie,**

- \* surface moyenne ( $\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}_h$ ) ;
- \* épaisseur ( $e \rightarrow e_h$ ) ;

ii) **les approximations du champ de déplacement** qui consistent à rechercher des solutions  $\vec{u}_h$  dans le sous-espace de dimension finie  $\vec{V}_h \subset \vec{V}$ ,  $\vec{V}$  étant l'espace des déplacements admissibles ;

iii) **les approximations liées à l'utilisation de schémas d'intégration numérique.**

Pour ces deux dernières approximations, nous proposons des critères à observer afin que les erreurs correspondantes soient (autant que possible) du même ordre que l'erreur d'interpolation  $|\vec{v} - \pi_h \vec{v}|_{\vec{V}}$ , où  $\pi_h$  est ici l'opérateur de  $\vec{V}_h$ -interpolation appliqué à toute fonction  $\vec{v}$  de  $\vec{V}$ .

6.1. Description de chacune des approximations

6.1.1. Approximations de la géométrie

Nous supposons que la **surface moyenne** de la coque et son **épaisseur** sont définies à l'aide d'une application  $\vec{\phi} : (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{S} = \vec{\phi}(\xi^1, \xi^2)$  et d'une application  $e : (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega} \rightarrow e(\xi^1, \xi^2) > 0$  suffisamment régulières mais inconnues de l'utilisateur. Par contre, nous admettons que l'utilisateur a accès à autant de relevés de coordonnées qu'il peut souhaiter. Alors, en utilisant les méthodes décrites dans les paragraphes 2 à 4, il est possible d'approcher les applications  $\vec{\phi}$  et  $e$  par des produits tensoriels de fonctions B-splines ce qui conduit à des applications  $\vec{\phi}_{h\delta}$  et  $e_{h\delta}$  vérifiant les estimations (3.1.2) et (4.1), i.e., pour tout  $\vec{\phi} \in W^{k, \infty}(\Omega)$ , pour tout  $e \in W^{\ell, \infty}(\Omega)$  et pour tout  $K \in \mathcal{C}_{h\delta}$  on a

$$(6.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\vec{\phi} - \vec{\phi}_{h\delta}|_{r, \infty, K} \leq Ch_{\delta}^{t-r} |\vec{\phi}|_{t, \infty, \Omega} \\ \text{pour } t = 1, \dots, \min(k^1, k^2) \text{ et } r = 0, \dots, t \end{array} \right.$$

$$(6.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |e - e_{h\delta}|_{r, \infty, K} \leq Ch_{\delta}^{t-r} |e|_{t, \infty, \Omega} \\ \text{pour } t = 1, \dots, \min(\ell^1, \ell^2) \text{ et } r = 0, \dots, t \end{array} \right.$$

où les entiers  $k^1, k^2$  (resp.  $\ell^1, \ell^2$ ) désignent les ordres des fonctions B-splines utilisées pour approcher les composantes  $\phi_i(\xi^1, \xi^2)$  de l'application  $\vec{\phi}$  (resp.  $e$ ) pour chacune des directions  $\xi^1$  et  $\xi^2$ . Rappelons que les degrés des polynômes correspondants sont alors  $k^1-1, k^2-1, \ell^1-1, \ell^2-1$ , respectivement.

L'utilisation des interpolées  $\vec{\phi}_{h\delta}$  et  $e_{h\delta}$  des applications  $\vec{\phi}$  et  $e$  conduit à approcher la forme bilinéaire  $a(\dots)$  (resp.  $a_S(\dots)$ ) (\*) définie en (5.3.2) (resp. (5.4.3)), et la forme linéaire  $f(\dots)$ , définie en (5.3.9), par les formes approchées  $\bar{a}_{h\delta}(\dots)$  (resp.  $\bar{a}_{h\delta S}(\dots)$ ) et  $\bar{f}_{h\delta}(\dots)$  définies ci-après (comparer avec (5.3.15) (5.3.19) notamment) :

$$(6.1.3) \quad \bar{a}_{h\delta}(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^t U [A_{IJh\delta}] V \, d\xi^1 \, d\xi^2,$$

---

(\*) Rappelons que l'indice S rappelle qu'il s'agit de coques peu profondes, "Shallow" en anglais.

$$(6.1.4) \quad (\text{resp. } \bar{a}_{h\delta}(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} {}^t U [A_{I\text{Jh}\delta} S] V \, d\xi^1 d\xi^2)$$

où le maillage  $\mathcal{T}_{h\delta}$  a été défini dans le paragraphe 3 et où

$$(6.1.5) \quad A_{I\text{Jh}\delta}(\xi) = g_{IJ}(\phi_{\text{ih}\delta, \alpha}(\xi), \phi_{\text{ih}\delta, \alpha\beta}(\xi), \phi_{\text{ih}\delta, \alpha\beta\gamma}(\xi), e_{h\delta})$$

$$(6.1.6) \quad (\text{resp. } A_{I\text{Jh}\delta S}(\xi) = g_{IJS}(\phi_{\text{ih}\delta, \alpha}(\xi), \phi_{\text{ih}\delta, \alpha\beta}(\xi), e_{h\delta}))$$

est défini par analogie avec (5.3.17) (resp. (5.4.23)),  $U, V$  sont définis en (5.3.16),  $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}$ ,

et où

$$(6.1.7) \quad \bar{r}_{h\delta}(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v} \sqrt{\bar{a}_{h\delta}} \, d\xi^1 d\xi^2, \quad \vec{v} \in \vec{V}$$

avec

$$(6.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\bar{a}_{h\delta}} = \left( \left( \sum_{i=1}^3 (\phi_{\text{ih}\delta, 1})^2 \right) \left( \sum_{j=1}^3 (\phi_{\text{jh}\delta, 2})^2 \right) \right. \\ \left. - \left( \sum_{i=1}^3 (\phi_{\text{ih}\delta, 1} \phi_{\text{ih}\delta, 2}) \right)^2 \right)^{1/2}. \end{array} \right.$$

Alors, une étude analogue à celle de CIARLET [1976] permettrait d'établir les estimations suivantes (résultats de consistance) :

Théorème 6.1.1 : (cas de coques générales)

Pour toutes les approximations  $\vec{\phi}_{h\delta}$  de  $\vec{\phi}$  et pour toutes les approximations  $e_{h\delta}$  de  $e$  construites selon les méthodes décrites dans les paragraphes 2 à 4 et vérifiant les estimations (3.1.5) et (4.1), il existe des constantes  $C$ , indépendantes de  $h\delta$ , telles que

$$(6.1.9) \quad |a(\vec{u}, \vec{v}) - \bar{a}_{h\delta}(\vec{u}, \vec{v})| \leq ch_{\delta}^{\min(k-3, \ell)} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{V},$$

$$(6.1.10) \quad |r(\vec{v}) - \bar{r}_{h\delta}(\vec{v})| \leq ch_{\delta}^{k-1} \|\vec{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}$$

où

$$(6.1.11) \quad k = \min(k^1, k^2) \text{ et } \ell = \min(\ell^1, \ell^2).$$

□

Dans le cas de coques peu profondes il viendrait

Théorème 6.1.2 : (cas de coques peu profondes)

Le Théorème 6.1.1 reste valable mais grâce à la remarque 5.4.1 il est possible d'améliorer l'estimation (6.1.9), i.e.,

$$(6.1.12) \quad |a(\vec{u}, \vec{v}) - \bar{a}_{h\delta} S(\vec{u}, \vec{v})| \leq ch_{\delta}^{\min(k-2, \ell)} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{V}.$$

Si l'on se limitait à l'approximation de la géométrie décrite dans la section 6.1.1, on pourrait définir le premier problème approché ( $P_{h\delta 1}$ ) comme suit :

Problème ( $P_{h\delta 1}$ ) correspondant à l'approximation de la géométrie seulement pour une coque générale :

$$(6.1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_{h\delta} \in \vec{V} \text{ tel que} \\ \bar{a}_{h\delta} S(\vec{u}_{h\delta}, \vec{v}) = f_{h\delta}(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}. \end{array} \right.$$

En s'appuyant sur le Théorème 5.3.1 et en utilisant des propriétés de consistance, il est facile de montrer que, pour  $h\delta$  suffisamment petit, ce problème (6.1.13) admet une solution et une seule.

De même, pour une coque peu profonde on aurait

Problème ( $P_{h\delta S1}$ ) correspondant à l'approximation de la géométrie seulement pour une coque peu profonde :

$$(6.1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_{h\delta S} \in \vec{V} \text{ tel que} \\ \bar{a}_{h\delta S}(\vec{u}_{h\delta S}, \vec{v}) = f_{h\delta}(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}. \end{array} \right.$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (6.1.14) résulte cette fois-ci des Théorèmes 5.4.1, 5.4.2 et des propriétés de consistance (6.1.10) et (6.1.12).

A ce stade, le problème (6.1.13) (resp. (6.1.14)) peut être entièrement assimilé à un problème continu "classique" qui serait formulé non plus sur une surface moyenne  $\mathcal{S}$  avec une épaisseur  $e$ , mais sur une surface moyenne  $\mathcal{S}_{h\delta}$  avec une épaisseur  $e_{h\delta}$ . Ce point de vue est commode car il permet de "découpler" cette approximation de la géométrie de la coque des autres approximations, i.e.,

\* approximation du déplacement ( $\vec{V} \rightarrow \vec{V}_h$ )

\* approximation liée à l'utilisation de schémas d'intégration numérique,

que nous avons analysées en détail dans BERNADOU [1980] notamment. Cette remarque simplifiera notablement l'étude de l'approximation globale ainsi que l'obtention des estimations d'erreur.

#### 6.1.2. Approximation du déplacement

Avec les notations de BERNADOU [1980] ou de BERNADOU-BOISSERIE [1982], supposons que nous ayons construit un sous-espace de dimension finie  $\vec{V}_h \subset \vec{V}$ , ceci à l'aide de méthodes d'éléments finis conformes. Ce faisant, nous supposerons que la construction de l'espace  $\vec{V}_h$  s'effectue à partir d'un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  qui peut être totalement découpé du maillage  $\mathcal{T}_{h\delta}$  introduit dans le paragraphe 3. C'est pourquoi, pour préserver la généralité de cette étude, nous utilisons les deux paramètres  $h$  et  $h\delta$ .

Alors, le second problème discret ( $P_{h^2}$ ) pour une coque générale est défini par :

Problème (P<sub>h2</sub>) correspondant à l'approximation de la géométrie et du déplacement (mais avec intégration exacte) :

$$(6.1.15) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_h \in \vec{V}_h \text{ tel que} \\ \bar{a}_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h . \end{array} \right.$$

□

De même, pour une coque **peu profonde**

Problème (P<sub>hS2</sub>) :

$$(6.1.16) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_{hS} \in \vec{V}_h \text{ tel que} \\ \bar{a}_{hS}(\vec{u}_{hS}, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h . \end{array} \right.$$

□

L'existence et l'unicité de solutions pour ces problèmes (6.1.15) et (6.1.16) se déduit d'une part, des propriétés analogues satisfaites pour les problèmes (6.1.13) et (6.1.14), respectivement, et, d'autre part, de l'inclusion  $\vec{V}_h \subset \vec{V}$ .

Dans la très grande majorité des cas il n'est pas possible d'intégrer exactement ce qui conduit naturellement à utiliser les techniques d'intégration numérique.

### 6.1.3. Approximation liée à l'utilisation de schémas d'intégration numérique

Ici encore nous renvoyons à BERNADOU [1980] ou BERNADOU-BOISSERIE [1982] pour les définitions et les résultats concernant cette dernière approximation. En rajoutant cette nouvelle approximation à l'énoncé du problème (P<sub>h2</sub>) (resp. P<sub>hS2</sub>), on obtient l'énoncé du problème final (P<sub>h3</sub>) (resp. P<sub>hS3</sub>) qui combine l'ensemble des approximations :

Problème (P<sub>h3</sub>) correspondant à l'ensemble des approximations, géométrie, déplacement et intégration numérique, pour une coque générale :

$$(6.1.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_h \in \vec{V}_h \text{ tel que} \\ a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \end{array} \right.$$

où

$$(6.1.18) \quad a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} t_{W_h}^{(b_{\ell,K})} [A_{Ijhs}^{(b_{\ell,K})}] v_h^{(b_{\ell,K})}$$

$$(6.1.19) \quad f_h(\vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} t_{F_h}^{(b_{\ell,K})} v_h^{(b_{\ell,K})}$$

$$(6.1.20) \quad \omega_{\ell,K} \text{ et } b_{\ell,K} = \text{ poids et noeuds des schémas d'intégration numérique.}$$

□

De même, dans le cas d'une coque peu profonde

Problème (P<sub>hS3</sub>)

$$(6.1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u}_{hS} \in \vec{V}_h \text{ tel que} \\ a_{hS}(\vec{u}_{hS}, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \end{array} \right.$$

où

$$(6.1.22) \quad a_{hS}(\vec{w}_h, \vec{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} t_{W_h}^{(b_{\ell,K})} [A_{Ijhs}^{(b_{\ell,K})}] v_h^{(b_{\ell,K})}$$

$f_h(\vec{v}_h)$  étant défini en (6.1.19).

□



6.2. Estimation abstraite de l'erreur

Nous allons estimer l'erreur entre la solution  $\vec{u}$  du problème continu de coque générale (5.3.11) (resp.  $\vec{u}_S$  de coque peu profonde (5.4.4)) et la solution  $\vec{u}_h$  du problème discret (6.1.17) (resp.  $\vec{u}_{hS}$ ) du problème (6.1.21)). Cette étude présente deux intérêts :

- i) elle établit la convergence de ces méthodes d'approximation ;
- ii) elle fournit des critères précieux sur les corrélations entre ces diverses approximations.

Les théorèmes suivants nous guideront dans cette étude :

Théorème 6.2.1 : (Estimation "abstraite" de l'erreur pour une coque générale)

Soit  $\vec{u} \in \vec{V}$  et  $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$  les solutions respectives des problèmes continus (5.3.11) et discret (6.1.17). On suppose que la forme bilinéaire approchée  $a_h(\dots)$  est  $\vec{V}_h$ -elliptique et continue, uniformément par rapport à  $h$ , i.e., il existe deux constantes  $\tilde{\alpha} > 0$  et  $\tilde{M}$ , indépendantes de  $h$ , telles que, pour tout  $h$  assez petit

$$(6.2.1) \quad \tilde{\alpha} \|\vec{v}_h\|^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad ,$$

$$(6.2.2) \quad |a_h(\vec{w}_h, \vec{v}_h)| \leq \tilde{M} \|\vec{w}_h\| \|\vec{v}_h\| \quad , \quad \forall \vec{w}_h, \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad .$$

Alors, il existe une constante C, indépendante de  $h$ , telle que

$$(6.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq C \left\{ \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} (\|\vec{u} - \vec{v}_h\| + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}) \right. \\ \left. + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \right\} \end{array} \right.$$

Démonstration :

Cf. BERNADOU-BOISSERIE [1982, Théorème 2.4.2].

□

Nous vérifierons que les hypothèses (6.2.1) et (6.2.2) sont vérifiées dès que les approximations faites satisfont des critères que nous préciserons ultérieurement.

Nous utilisons l'estimation abstraite ci-dessus comme suit : on écrit qu'elle est en particulier valable pour  $\vec{v}_h = \overrightarrow{\pi_h u}$  où  $\overrightarrow{\pi_h}$  désigne l'opérateur de  $\vec{V}_h$ -interpolation. Dès lors

$$(6.2.4) \left\{ \begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{V}_h} &\leq c \left\{ \|\vec{u} - \overrightarrow{\pi_h u}\| + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - a_h(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \right\} \end{aligned} \right.$$

Il reste alors à estimer chacun des termes ci-dessus. C'est ce que nous faisons dans la section suivante.

Dans le cas d'une coque peu profonde, il vient par analogie :

Théorème 6.2.2 : (Estimation "abstraite" de l'erreur pour une coque peu profonde) :

Soit  $\vec{u}_S \in \vec{V}$  et  $\vec{u}_{hS} \in \vec{V}_h$  les solutions respectives des problèmes continu (5.4.4) et discret (6.1.21). On suppose que la forme bilinéaire approchée  $a_{hS}(\dots)$  est  $\vec{V}$ -elliptique et continue, uniformément par rapport à  $h$ , i.e., il existe deux constantes  $\tilde{\alpha}_S > 0$  et  $\tilde{M}_S$ , indépendantes de  $h$ , telles que, pour tout  $h$  assez petit

$$(6.2.5) \quad \tilde{\alpha}_S \|\vec{v}_h\|^2 \leq a_{hS}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \quad , \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h$$

$$(6.2.6) \quad |a_{hS}(\vec{w}_h, \vec{v}_h)| \leq \tilde{M}_S \|\vec{w}_h\| \|\vec{v}_h\| \quad , \quad \forall \vec{w}_h, \vec{v}_h \in \vec{V}_h$$

Alors, il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$(6.2.7) \left\{ \begin{aligned} \|\vec{u}_S - \vec{u}_{hS}\| &\leq c \left\{ \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \{\|\vec{u}_S - \vec{v}_h\| + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\vec{v}_h, \vec{w}_h) - a_{hS}(\vec{v}_h, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \right\} \end{aligned} \right.$$

□

6.3. Estimation de l'erreur  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|$  dans le cas de coques générales

Au vu des approximations faites, il convient d'estimer chacun des termes de l'estimation abstraite (6.2.4). On se place désormais dans le cadre des hypothèses du Théorème 2.4.6 de BERNADOU-BOISSERIE [1982] relatives à l'approximation du déplacement et à la prise en compte de l'intégration numérique. D'où l'énoncé suivant :

Théorème 6.3.1 :

1) Soit  $\mathcal{T}_{h\delta}$  le maillage du domaine  $\Omega$  associé aux interpolations de la géométrie de la coque par produit tensoriel de fonctions B-splines. On suppose que ces fonctions B-splines sont telles que les résultats d'interpolation (3.1.5) et (4.1) soient vérifiés avec

$$h\delta = \max_{K \in \mathcal{T}_{h\delta}} (\text{diam } K).$$

2) Soit  $\mathcal{T}_h$  une famille régulière de maillages du domaine  $\Omega$  satisfaisant les propriétés usuelles, i.e.,  $\forall K \in \mathcal{T}_h, h_K/\rho_K \leq \sigma$ , où  $h_K = \text{diam}(K)$  et  $\rho_K = \sup \{\text{diam}(S), S \text{ est une boule contenue dans } K\}$ , et, en outre,  $h = \max h_K$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  tend vers 0. Soit  $(K, P_{K1}, \Sigma_{K1}), (K, P_{K2}, \Sigma_{K2})$  deux familles affines, ou presque affines, d'éléments finis et soit  $V_{h1}, V_{h2}$  deux espaces d'éléments finis associés vérifiant

$$(6.3.1) \quad V_{h1} = \{v_h \in X_{h1} ; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \quad X_{h1} \subset H^1(\Omega),$$

$$(6.3.2) \quad V_{h2} = \{v_h \in X_{h2} ; v_h = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \quad X_{h2} \subset H^2(\Omega).$$

Supposons qu'il existe des entiers  $m_1, m_2, n_1, n_2$  tels que pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , on ait les inclusions

$$(6.3.3) \quad P_{m_1}(K) \subset P_{K1} \subset P_{n_1}(K), \quad 1 \leq m_1 \leq n_1,$$

$$(6.3.4) \quad P_{m_2}(K) \subset P_{K2} \subset P_{n_2}(K), \quad 2 \leq m_2 \leq n_2,$$

$$(6.3.5) \quad H^{m+\alpha+1}(K) \subset \mathcal{E}_\alpha(K), \quad \alpha = 1, 2, \quad m = -1 + \min(m_1, m_2 - 1)$$

où  $\mathcal{E}_\alpha$  désigne le plus grand ordre des dérivées partielles apparaissant dans la définition de l'ensemble des degrés de liberté  $\Sigma_{K\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

En outre, supposons que le schéma d'intégration numérique sur l'élément de référence  $\hat{K}$  satisfasse les conditions suivantes

$$(6.3.6) \quad \text{i) } \underline{\text{les noeuds d'intégration}} \hat{b}_\ell \in \hat{K}, \quad \ell = 1, \dots, L;$$

$$(6.3.7) \quad \text{ii) } \forall \hat{\phi} \in P_{-2+2\max(n_1, n_2-1)}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0,$$

où  $\hat{E}$  est la fonctionnelle d'erreur d'intégration usuelle.

Alors, si la carte  $\hat{\phi} \in (W^{m+4, \infty}(\Omega))^3$  et si l'épaisseur  $e \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$ , si la solution  $\vec{u} \in \vec{V}$  du problème continu (5.3.11) appartient à l'espace  $(H^{m+2}(\Omega))^2 \times H^{m+3}(\Omega)$ , si  $p^i \in W^{m+1, q}(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$  pour un certain nombre  $q > 2/m+1$  avec  $q \geq 2$ , et si  $m+1 \leq \min(k-3, \ell)$  où  $k$  et  $\ell$  sont les paramètres caractérisant les interpolations B-splines définies en (3.1.4) et (4.1), alors il existe des constantes  $C > 0$  et  $h_1 > 0$ , indépendantes de  $h$ , telles que, pour tout  $h < h_1$

$$(6.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq C \left\{ h^{\min(k-3, \ell)} \|\vec{u}\| + h^{\frac{k-1}{2}} \|\vec{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \right. \\ \left. + h^{m+1} \left[ \|\vec{p}\|_{m+1, q, \Omega} + \left( \sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha\|_{m+2, \Omega}^2 + \|u_3\|_{m+3, \Omega}^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \end{array} \right.$$

Démonstration (en 5 étapes, à partir de l'estimation (6.2.4)) :

Afin d'utiliser l'estimation "abstraite" de l'erreur établie dans le Théorème 6.2.1, il convient de vérifier que les hypothèses (6.2.1) d'uniforme  $\vec{V}$ -ellipticité et (6.2.2) de continuité sont satisfaites. La vérification de (6.2.2) est immédiate. Nous vérifions dans l'étape 1 de la démonstration que l'hypothèse (6.2.1) est effectivement satisfaite.

Etape 1 : Vérification de la condition (6.2.1) d'uniforme  $\vec{V}$ -ellipticité

Soit à établir l'existence d'une constante  $\tilde{\alpha}$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$(6.3.9) \quad \tilde{\alpha} \|\vec{v}_h\|^2 \leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h.$$

On écrit

$$(6.3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{\underline{h}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) &= a(\vec{v}_h, \vec{v}_h) + \bar{a}_{h\mathcal{J}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - a(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \\ &+ a_{\underline{h}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - \bar{a}_{h\mathcal{J}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \end{aligned} \right.$$

où  $\bar{a}_{h\mathcal{J}}(\dots)$  est défini par la relation (6.1.3). Il est loisible d'utiliser (6.1.9), i.e.,

$$(6.3.11) \quad |\bar{a}_{h\mathcal{J}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - a(\vec{v}_h, \vec{v}_h)| \leq Ch_{\mathcal{J}}^{\min(k-3, \ell)} \|\vec{v}_h\|^2.$$

Ensuite, par analogie avec les Théorèmes 2.4.3 et 2.4.5 de BERNADOU-BOISSERIE [1982], on établirait que

$$\left\{ \begin{aligned} &|\bar{a}_{h\mathcal{J}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - a_{\underline{h}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h)| \\ &\leq Ch \left( \sum_{K \in \mathcal{C}_{h\mathcal{J}}} \sum_{I, J=1}^{12} \|A_{IJh\mathcal{J}}\|_{1, \infty, K} \right) \|\vec{v}_h\|^2, \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h. \end{aligned} \right.$$

Mais, d'une manière générale, pour tout  $m$  entier  $\geq 0$ , pour tout  $\vec{\phi} \in (W^{m+4, \infty}(\Omega))^3$ , pour tout  $e \in W^{m+1, \infty}(\Omega)$ , on a  $\|A_{IJh\mathcal{J}}\|_{m+1, \infty, K} \leq \|A_{IJ}\|_{m+1, \infty, K} + \|A_{IJ}^{-A}{}_{IJh\mathcal{J}}\|_{m+1, \infty, K}$ .

Par analogie avec CIARLET [1976, page 119] on montrerait que pour tout  $r = 0, \dots, m+1$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \|A_{IJ}^{-A}{}_{IJh\mathcal{J}}\|_{r, \infty, K} &\leq C \left\{ \sum_{1, |\alpha|=1}^3 |\partial^\alpha \phi_i - \partial^\alpha \phi_{ih\mathcal{J}}|_{r, \infty, K} \right. \\ &\left. + |e - e_{h\mathcal{J}}|_{r, \infty, K} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Etant donné que  $m+1 \leq \min(k-3, \ell)$ , on a grâce à (3.1.2) et (4.1) :

$$\|A_{IJ}^{-A}{}_{IJh\mathcal{J}}\|_{r, \infty, K} \leq C \{ \|\vec{\phi}\|_{m+4, \infty, K} + \|e\|_{m+1, \infty, K} \}, \quad r = 0, \dots, m+1,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h\mathcal{J}$ . Finalement,

$$(6.3.12) \quad \|A_{IJh\mathcal{J}}\|_{m+1, \infty, K} \leq C \{ \|\vec{\phi}\|_{m+4, \infty, K} + \|e\|_{m+1, \infty, K} \}.$$

Il s'ensuit, en particulier ( $m = 0$ ) que

$$|\bar{a}_{h\delta}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) - \underline{a}_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h)| \leq Ch \|\vec{v}_h\|^2, \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h.$$

On conclue alors, par analogie avec le Théorème 2.4.5 de BERNADOU-BOISSERIE [1982] : l'inégalité (6.3.9) est satisfaite pour tout  $h$  inférieur ou égal à un certain  $h_1 > 0$  suffisamment petit.

Etape 2 : Estimation de  $\|\vec{u} - \overrightarrow{\pi_h u}\|$

C'est l'erreur d'interpolation habituelle qui apparait lorsqu'on approche une fonction quelconque  $\vec{v} \in \vec{V}$  par son interpolée dans le sous-espace de dimension finie  $\vec{V}_h$ . Compte tenu des hypothèses faites, on obtient

$$(6.3.13) \quad \|\vec{u} - \overrightarrow{\pi_h u}\| \leq Ch^{m+1} \left( \sum_{\alpha=1}^2 |u_\alpha|_{m+2, \Omega}^2 + |u_3|_{m+3, \Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Etape 3 : Estimation de  $\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \underline{a}_h(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$

En utilisant la définition (6.1.3), on écrit

$$(6.3.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \underline{a}_h(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) \\ & = a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) + \bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \underline{a}_h(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) \end{aligned} \right.$$

ce qui permet de séparer les erreurs dues à l'approximation de la géométrie de celles dues à l'utilisation de schémas d'intégration numérique.

Tout d'abord, par analogie avec le Théorème 6.1.1, il vient :

$$|a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)| \leq Ch \delta^{\min(k-3, \ell)} \|\overrightarrow{\pi_h u}\| \|\vec{w}_h\|.$$

Mais grâce aux propriétés d'interpolation de l'opérateur  $\overrightarrow{\pi_h}$

$$\|\overrightarrow{\pi_h u}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u} - \overrightarrow{\pi_h u}\| \leq c \|\vec{u}\|, \quad \forall \vec{u} \in \vec{V},$$

de telle sorte que

$$(6.3.15) \quad |a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - \bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)| \leq Ch_{\delta}^{\min(k-3, \ell)} \|\vec{u}\| \|\vec{w}_h\| .$$

Par ailleurs, les Théorèmes 2.4.3 et 2.4.6 de BERNADOU-BOISSERIE [1982] donnent :

$$\begin{aligned} & |\bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - a_{\tilde{h}}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)| \\ & \leq Ch^{m+1} \left( \sum_{I, J=1}^{12} \|A_{IJh\delta}\|_{m+1, \infty, \Omega} \right) \left( \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha}\|_{m+2, \Omega}^2 + \|u_3\|_{m+3, \Omega}^2 \right)^{1/2} \|\vec{w}_h\| \end{aligned}$$

d'où finalement, avec (6.3.12) :

$$(6.3.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & |\bar{a}_{h\delta}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - a_{\tilde{h}}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)| \\ & \leq Ch^{m+1} \left( \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha}\|_{m+2, \Omega}^2 + \|u_3\|_{m+3, \Omega}^2 \right)^{1/2} \|\vec{w}_h\| . \end{aligned} \right.$$

En reportant (6.3.15) et (6.3.16) dans (6.3.14), il vient en définitive

$$(6.3.17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|a(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h) - a_{\tilde{h}}(\overrightarrow{\pi_h u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \\ & \leq C \left\{ h_{\delta}^{\min(k-3, \ell)} \|\vec{u}\| + h^{m+1} \left( \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha}\|_{m+2, \Omega}^2 + \|u_3\|_{m+3, \Omega}^2 \right)^{1/2} \right\} \end{aligned} \right.$$

Etape 4 : Estimation de 
$$\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f(\vec{w}_h) - f_{\tilde{h}}(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$$

Par analogie avec la décomposition (6.3.14), on va séparer les erreurs dues à l'approximation de la géométrie de celles dues à l'utilisation de schémas d'intégration numérique. En utilisant la définition (6.1.7), il vient :

$$(6.3.18) \quad f(\vec{w}_h) - f_{\tilde{h}}(\vec{w}_h) = f(\vec{w}_h) - \bar{f}_{h\delta}(\vec{w}_h) + \bar{f}_{h\delta}(\vec{w}_h) - f_{\tilde{h}}(\vec{w}_h) .$$

Grâce au Théorème 6.1.1, on obtient tout d'abord :

$$(6.3.19) \quad |f(\vec{w}_h) - \bar{f}_{h\delta}(\vec{w}_h)| \leq C h \delta^{k-1} \|\vec{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\vec{w}_h\|.$$

Par ailleurs, avec les notations de BERNADOU-BOISSERIE [1982, § 2.4] et avec la relation (5.3.19) :

$$|\bar{f}_{h\delta}(\vec{w}_h) - \underline{f}_h(\vec{w}_h)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |E_K({}^t F_h W_h)|$$

La seule différence avec BERNADOU-BOISSERIE [1982, page 61] est la présence du terme  ${}^t F_h$  au lieu de  ${}^t F$ , ce qui revient à remplacer  $p^i \sqrt{a}$  par  $p^i \sqrt{a}_{h\delta}$ . De ce fait, dans les estimations, il apparaît maintenant :

$$\|p^i \sqrt{a}_{h\delta}\|_{m+1,q,K} \text{ au lieu de } \|p^i\|_{m+1,q,K}.$$

(noter que dans BERNADOU-BOISSERIE [1982] le terme  $\sqrt{a}$  avait été volontairement omis et intégré dans la constante C). On écrira ici

$$p^i \sqrt{a}_{h\delta} = p^i \sqrt{a} + p^i (\sqrt{a}_{h\delta} - \sqrt{a})$$

soit

$$(6.3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|p^i \sqrt{a}_{h\delta}\|_{m+1,q,K} \leq \\ \leq C \{ \|p^i \sqrt{a}\|_{m+1,q,K} + \sum_{r=0}^{m+1} \|p^i\|_{m+1-r,q,K} |\sqrt{a}_{h\delta} - \sqrt{a}|_{r,\infty,K} \}. \end{array} \right.$$

Mais par analogie avec CIARLET [1976], on obtient pour  $r = 0, \dots, m+1$

$$|\sqrt{a}_{h\delta} - \sqrt{a}|_{r,\infty,K} \leq C \sum_{|\alpha|=1} \sum_{i=1}^3 |\partial^\alpha \phi_i - \partial^\alpha \phi_{ih\delta}|_{r,\infty,K}$$

soit comme  $m+1 \leq k-1$  et en utilisant (3.1.5) :

$$|\sqrt{a}_{h\delta} - \sqrt{a}|_{r,\infty,K} \leq C \|\vec{\phi}\|_{m+2,\infty,K}.$$



En reportant ce résultat dans (6.3.20), on obtient alors

$$\|p^i \sqrt{a_h} \delta\|_{m+1,q,K} \leq C \|p^i\|_{m+1,q,K} .$$

La suite de la démonstration est alors en tous points analogue à celle de BERNADOU-BOISSERIE [1982, page 61] de telle sorte que

$$(6.3.21) \quad |\bar{r}_{h\delta}(\vec{w}_h) - r_{h\delta}(\vec{w}_h)| \leq Ch^{m+1} \left( \sum_{i=1}^3 \|p^i\|_{m+1,q,\Omega}^q \right)^{1/q} \|\vec{w}_h\| .$$

En combinant alors les estimations (6.3.19) et (6.3.21) il vient finalement :

$$(6.3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|r(\vec{w}_h) - r_{h\delta}(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \leq C \{h^{k-1} \|\vec{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \\ + h^{m+1} \left( \sum_{i=1}^3 \|p^i\|_{m+1,q,\Omega}^q \right)^{1/q} \} . \end{array} \right.$$

Etape 5 : Estimation finale (6.3.8)

Il suffit alors de reporter les estimations (6.3.13), (6.3.17) et (6.3.22) dans l'estimation (6.2.4) pour obtenir l'estimation finale (6.3.8) cherchée.

□

Remarque 6.3.1 :

Dans ce travail, nous avons couplé une approximation de la géométrie de la coque par fonctions B-splines avec une approximation du champ de déplacement par des méthodes d'éléments finis. Naturellement, on pourrait utiliser les fonctions B-splines pour approcher à la fois la géométrie de la coque et le champ de déplacement. Dans cette direction, pour une coque cylindrique non-circulaire, peu profonde et encastrée, BHATTACHARYYA et SURESH [à paraître] ont étudié l'approximation du champ de déplacement par une méthode B-splines, sans approximation de la géométrie.

□

6.4. Estimation de l'erreur  $\|\vec{u}_S - \vec{u}_{hS}\|$  dans le cas de coques peu profondes

Dans ce cas on obtient le théorème suivant

Théorème 6.4.1 :

Sous les hypothèses du Théorème 6.3.1, à l'exception de l'hypothèse  $m+1 \leq \min(k-3, \ell)$  qu'il convient de remplacer par  $m+1 \leq \min(k-2, \ell)$ , il existe des constantes  $C > 0$  et  $h_1 > 0$ , indépendantes de  $h$ , telles que, pour tout  $h < h_1$

$$(6.4.1) \left\{ \begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{u}_{hS}\| &\leq C \{ h^{\min(k-2, \ell)} \|\vec{u}\| + h^{k-1} \|\vec{p}\|_{(L^2(\Omega))^3} \\ &+ h^{m+1} [ \|\vec{p}\|_{m+1, q, \Omega} + ( \sum_{\alpha=1}^2 \|u_{\alpha}\|_{m+2, \Omega}^2 + \|u_3\|_{m+3, \Omega}^2 )^{1/2} ] \} . \end{aligned} \right.$$

Démonstration :

La démonstration du Théorème 6.4.1 est très proche de celle du Théorème 6.3.1. Les deux différences fondamentales sont les suivantes :

i) dans l'approximation de la géométrie de la surface moyenne les termes en  $k-3$  sont à remplacer par des termes en  $k-2$ . Ceci tient au fait que la formulation du problème de coque peu profonde n'utilise que des dérivées partielles d'ordre 2 (au plus) de la carte, au lieu de l'ordre 3 précédemment ;

ii) dans la partie approximation du déplacement telle qu'elle a été abordée dans BERNADOU-BOISSERIE [1982], il convient maintenant d'utiliser la formulation variationnelle des coques peu profondes. Le lecteur pourra vérifier que l'ensemble de l'étude développée dans le cas de coques générales s'adapte **sans changement** au cas de coques peu profondes.

□

## 7 - EXEMPLES D'ESTIMATIONS D'ERREUR

Le résultat d'estimation d'erreur (6.3.8) est très général. Il est intéressant - notamment pour les lecteurs plus directement concernés par les applications - de donner quelques exemples d'approximations utilisables par l'ingénieur numéricien.

Le résultat (6.3.8) (resp. (6.4.1)) fait intervenir divers paramètres, en particulier  $k$  qui prend en compte l'approximation de la surface moyenne,  $l$  qui prend en compte l'approximation de l'épaisseur et  $m$  qui prend en compte l'approximation des composantes du déplacement. Les choix de ces paramètres peuvent être faits de manière relativement indépendante, sous réserve naturellement que  $m+1 \leq \min(k-3, l)$  (resp.  $m+1 \leq \min(k-2, l)$ ). Cependant dans un souci d'efficacité et d'économie, on choisira chacun de ces paramètres de telle sorte que les estimations d'erreurs attachées à chacune des approximations soient de même ordre ou, au moins, d'ordres assez voisins : par exemple, il n'est point besoin d'approcher très précisément l'épaisseur de la coque si par ailleurs les approximations de la surface moyenne ou des composantes du déplacement sont grossières !

Dans les exemples qui suivent, nous adoptons comme paramètre principal  $m$ , i.e. nous nous plaçons dans le cas d'une approximation du déplacement donnée. Puis, pour chaque exemple nous considérons 4 types d'approches possibles pour la géométrie correspondant aux situations suivantes :

i) cas d'une **coque générale** (i.e., de forme quelconque) ;

ii) cas d'une **coque peu profonde**

Ces deux possibilités sont combinées avec les deux suivantes ce qui fournit les 4 types d'approches annoncées :

i) le maillage  $\mathcal{C}_{h\delta}$  varie asymptotiquement comme le maillage  $\mathcal{C}_h$ ,  
i.e.,  $\underline{h\delta} \sim h$  ;

ii) le maillage  $\mathcal{C}_{h\delta}$  est beaucoup plus fin que le maillage  $\mathcal{C}_h$  ;  
on supposera dans les exemples que  $h\delta$  varie asymptotiquement comme  $h^2$ ,  
i.e.,  $\underline{h\delta} \sim h^2$  .

On verra dans les exemples d'estimations d'erreur que cette dernière possibilité s'avère intéressante dans le cas d'approximations du déplacement à l'aide d'**éléments finis de haut degré** (degré 5 pour les éléments finis d'ARGYRIS). Elle permet de ne pas trop "monter" en degré pour les fonctions B-splines ; par contre lorsque h devient petit, elle augmente considérablement le nombre de points de mesure et le temps de calcul des coefficients (2.3.5). En pratique, **on n'utilisera donc cette possibilité que pour des approximations du déplacement de haut degré (éléments finis d'ARGYRIS) sur des maillages assez grossiers...** en supposant que les conclusions de l'étude "asymptotique" ( $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ ) demeurent valables dans le cas de maillages grossiers.

Pour plus de clarté, nous avons regroupé les résultats sur les Figures 7.1 à 7.3 correspondant à l'utilisation des éléments finis suivants : H.C.T. réduit et complet (voir CLOUGH-TOCHER [1965]), ARGYRIS (voir ARGYRIS-FRIED et SCHARPF [1968]), ceci pour l'approximation de la composante normale  $u_3$  du déplacement. Sur chacune de ces figures, nous indiquons dans chaque cas :

i) la valeur du paramètre m liée au choix de l'approximation du déplacement ;

ii) les choix optimaux de k (approximation de la surface moyenne) et l (approximation de l'épaisseur). Rappelons que k (resp. l) désigne l'ordre des fonctions B-splines utilisées (on supposera pour simplifier que  $k_1 = k_2 = k$ ,  $l_1 = l_2 = l$ ) ; le degré des polynômes utilisés est alors k-1, les fonctions approchées étant de classe  $\mathcal{E}^{k-2}$ . Au vu de l'estimation (6.3.8) les choix "optimaux" de k et l sont alors

$$\begin{array}{l}
 * \text{ cas } h \delta \sim h \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{coque générale : } k = m+4, \quad l = m+1 \\ \text{coque peu profonde : } k = m+3, \quad l = m+1 \end{array} \right. \\
 * \text{ cas } h \delta \sim h^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{coque générale : } k = 4+p, \quad l = p+1 \text{ et } m = 2p \text{ ou } 2p+1 \\ \text{coque peu profonde : } k = 3+p, \quad l = p+1 \text{ et } m = 2p \text{ ou } 2p+1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Notons que dans tous les cas il convient d'avoir  $k \geq 5$  pour une coque générale (resp.  $k \geq 4$  pour une coque peu profonde), ceci de façon à ce que la surface moyenne approchée  $\delta_h$  soit de classe  $\mathcal{E}^3(\Omega)$  (resp.  $\mathcal{E}^2(\Omega)$ ).

iii) le résultat d'estimation d'erreur correspondant  $\|\vec{u} - \vec{u}_h\|$  sous la forme  $O(h^{m+1})$  ;

iv) l'hypothèse sur le schéma d'intégration numérique adéquat. Nous donnons quelques exemples de schémas appropriés dans les Figures 7.4 et 7.7. Ces schémas sont extraits de LAURSEN et GELLERT [1978] ou LYNESS et JESPERSEN [1975].

v) les hypothèses sur la solution  $\vec{u}$ , sur l'application  $\vec{\phi}$ , sur l'épaisseur  $e$  et sur les composantes  $p^i$  de la charge  $\vec{p}$ .

Tous les exemples considérés sont relatifs à des éléments finis triangulaires. L'utilisation du Théorème 6.3.1 permettrait également de considérer le cas d'approximations réalisées à l'aide d'éléments finis rectangulaires (i.e. BOGNER-FOX-SCHMIT [1965]) ou quadrilatéraux (FRAEIJIS de VEUBEKE [1965] et SANDER [1969]).

Ce faisant, ces exemples illustrent la grande richesse des résultats contenus dans les Théorèmes 6.3.1 et 6.4.1 qui, au-delà de l'analyse mathématique de ces problèmes d'approximations, fournissent à l'ingénieur numéricien des critères objectifs lui permettant de choisir des méthodes d'approximations cohérentes et bien adaptées au problème traité.

Dans la seconde partie de ce travail, nous indiquerons comment appliquer ces méthodes à la modélisation de **pales de turbines** ou de compresseur axial.

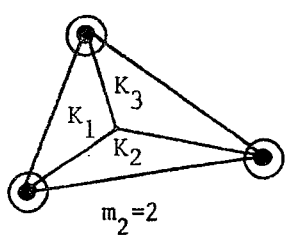
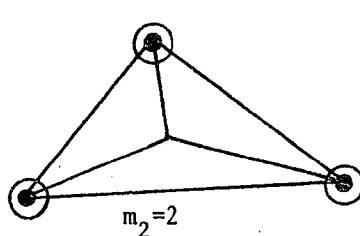
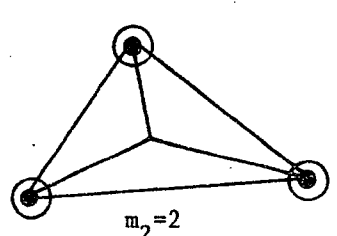
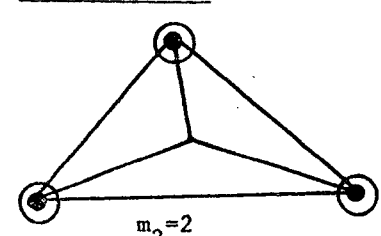
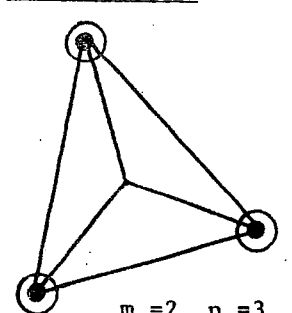
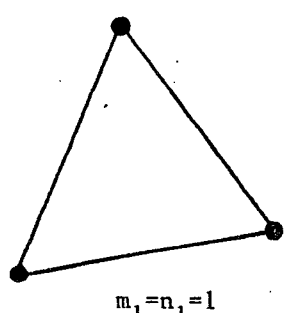
		COQUE GENERALE (Thm 6.3.1)		COQUE PEU PROFONDE (Thm 6.4.1)	
		$h\delta \sim h$	$h\delta \sim h^2$	$h\delta \sim h$	$h\delta \sim h^2$
$V_{h1}$	$V_{h2}$	<u>H.C.T. réduit</u>  $m_2=2$	<u>H.C.T. réduit</u>  $m_2=2$	<u>H.C.T. réduit</u>  $m_2=2$	<u>H.C.T. réduit</u>  $m_2=2$
<u>H.C.T. réduit</u>	 $m_1=2, n_1=3$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = -1 + \min(m_1, m_2 - 1) = 0</math></li> <li><math>k = 4 \rightarrow k = 5</math> pour assurer <math>\delta_{h\delta} \in (\mathcal{E}^3(\Omega))^3; \ell=1</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de <math>d^\circ 4</math> sur <math>K_1</math> (Schéma à 6 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} \in (H^2)^2 \times H^3</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{4, \infty}(\Omega))^3; p^1 \in W^{1, q}, q &gt; 2</math></li> </ul>	idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 0</math></li> <li><math>k = 3 \rightarrow k = 4</math> pour assurer <math>\delta_{h\delta} \in (\mathcal{E}^2(\Omega))^3; \ell=1</math></li> </ul> idem	idem
<u>Triangle de type 1</u>	 $m_1=n_1=1$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 0</math></li> <li><math>k = 4 \rightarrow k = 5</math> pour assurer <math>\delta_{h\delta} \in (\mathcal{E}^3(\Omega))^3; \ell=1</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de <math>d^\circ 2</math> sur <math>K_1</math> (Schéma à 3 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} \in (H^2)^2 \times H^3</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{4, \infty}(\Omega))^3; p^1 \in W^{1, q}, q &gt; 2</math></li> </ul>	idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 0</math></li> <li><math>k = 3 \rightarrow k = 4</math> pour assurer <math>\delta_{h\delta} \in (\mathcal{E}^2(\Omega))^3; \ell=1</math></li> </ul> idem	idem

FIGURE 7.1 : Illustrations des résultats des théorèmes 6.3.1 et 6.4.1 lorsque la flexion est approchée à l'aide du triangle H.T.C.-réduit et pour  $h\delta \sim h$  ou  $h\delta \sim h^2$ .

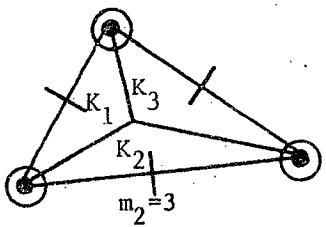
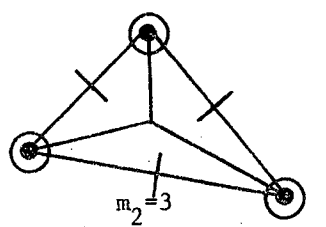
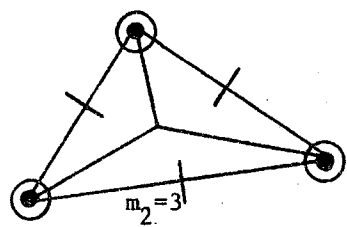
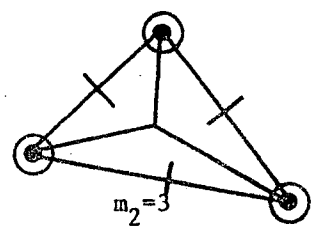
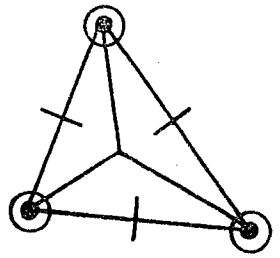
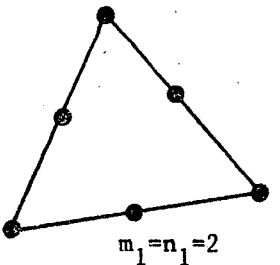
		COQUE GENERALE (Thm 6.3.1)		COQUE PEU PROFONDE (Thm 6.4.1)	
		$h_\delta \sim h$	$h_\delta \sim h^2$	$h_\delta \sim h$	$h_\delta \sim h^2$
$V_{h2}$	$V_{h1}$	H.T.C. complet 	H.T.C. complet 	H.T.C. complet 	H.T.C. complet 
H.C.T. complet		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = -1 + \min(m_1, m_2 - 1) = 1</math></li> <li><math>k = 5; \ell = 2</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h^2)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de d° 4 sur <math>K_i</math> (Schéma à 6 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} \in (H^3)^2 \times H^4</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{5, \infty})^3; p^i \in W^{2, q}, q \geq 2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = 4 \rightarrow k = 5</math> pour assurer <math>\delta_{h_\delta} \in (\mathcal{E}^3(\Omega))^3; \ell = 1</math></li> <li>idem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = 4</math> (ici <math>\delta_h \in (\mathcal{E}^2(\Omega))^3</math> est suffisant; <math>\ell = 2</math>)</li> <li>idem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = \beta \rightarrow k = 4</math> pour assurer <math>\delta_{h_\delta} \in (\mathcal{E}^2(\Omega))^3; \ell = 1</math></li> <li>idem</li> </ul>
Triangle de type 2		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = 5; \ell = 2</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h^2)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de d° 2 sur <math>K_i</math> (Schéma à 3 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} \in (H^3)^2 \times H^4</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{5, \infty}(\Omega))^3; p^i \in W^{2, q}, q \geq 2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = 4 \rightarrow k = 5</math> pour assurer <math>\delta_{h_\delta} \in (\mathcal{E}^3(\Omega))^3; \ell = 1</math></li> <li>idem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = 4; \ell = 2</math></li> <li>idem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = 1</math></li> <li><math>k = \beta \rightarrow k = 4</math> pour assurer <math>\delta_{h_\delta} \in (\mathcal{E}^2(\Omega))^3; \ell = 1</math></li> <li>idem</li> </ul>

Figure 7.2 : Illustrations des résultats des théorèmes 6.3.1 et 6.4.1 lorsque la flexion est approchée à l'aide du triangle de H.C.T.-complet et pour  $h_\delta \sim h$  ou  $h_\delta \sim h^2$ .

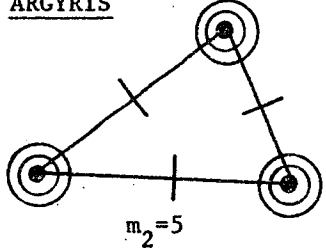
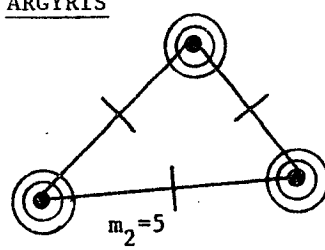
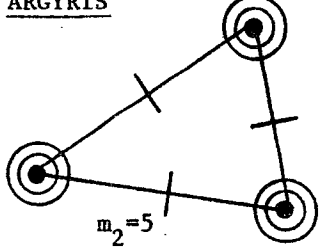
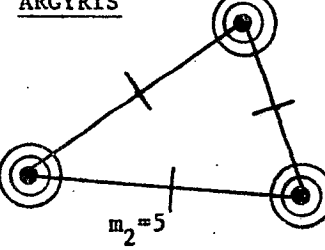
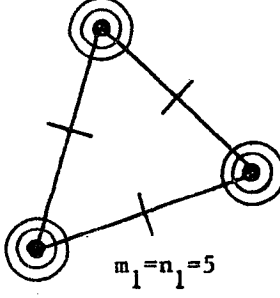
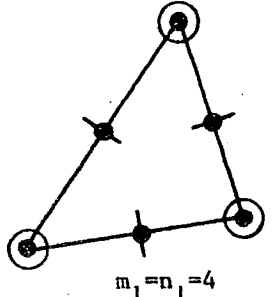
		COQUE GENERALE (Thm 6.3.1)		COQUE PEU PROFONDE (Thm 6.4.1)	
		$h_{\delta} \sim h$	$h_{\delta} \sim h^2$	$h_{\delta} \sim h$	$h_{\delta} \sim h^2$
$v_{h2}$	$v_{h1}$	<u>ARGYRIS</u>  $m_2=5$	<u>ARGYRIS</u>  $m_2=5$	<u>ARGYRIS</u>  $m_2=5$	<u>ARGYRIS</u>  $m_2=5$
<u>ARGYRIS</u>	 $m_1=n_1=5$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m = -1 + \min(m_1, m_2 - 1) = 3</math></li> <li><math>k=7; \ell=4</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h^4)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de d° 8 (Schéma à 16 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} _K \in (H^5)^2 \times H^6</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{7, \infty}(\Omega))^3; p^i \in W^{4, q}, q \geq 2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=5; \ell=2</math></li> </ul> idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=6; \ell=4</math></li> </ul> idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=4; \ell=2</math></li> </ul> idem
<u>GANEV</u>	 $m_1=n_1=4$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=7; \ell=4</math></li> <li><math>\ \vec{u} - \vec{u}_h\  = O(h^4)</math></li> <li>Schéma integ. exact pour les polynômes de d° 6 (Schéma à 12 noeuds)</li> <li><math>\vec{u} _K \in (H^5)^2 \times H^6</math></li> <li><math>\vec{\phi} \in (W^{7, \infty}(\Omega))^3; p^i \in W^{4, q}, q \geq 2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=5; \ell=2</math></li> </ul> idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=6; \ell=4</math></li> </ul> idem	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>m=3</math></li> <li><math>k=4; \ell=2</math></li> </ul> idem

Figure 7.3 : Illustrations des résultats des théorèmes 6.3.1 et 6.4.1 lorsque la flexion est approchée à l'aide du triangle d'ARGYRIS et pour  $h_{\delta} \sim h$  ou  $h_{\delta} \sim h^2$ .



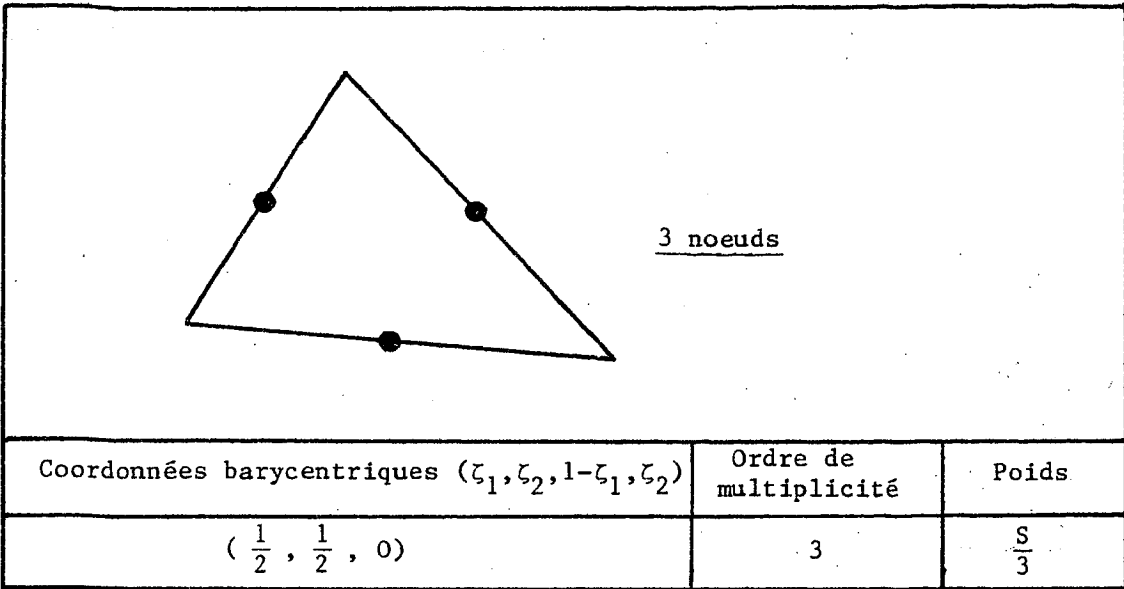


Figure 7.4 : Schéma d'intégration exact pour les polynômes de degré 2  
 (S = aire du triangle)

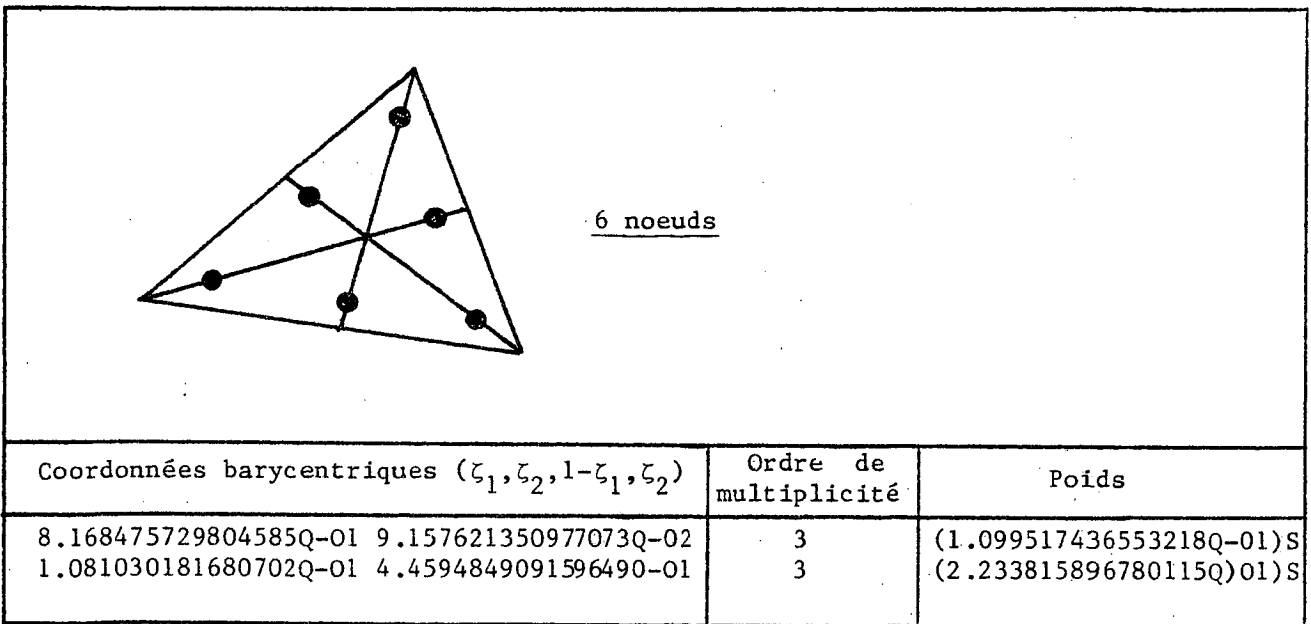


Figure 7.5 : Schéma d'intégration numérique exact pour les polynômes  
de degré 4 (S = aire du triangle)

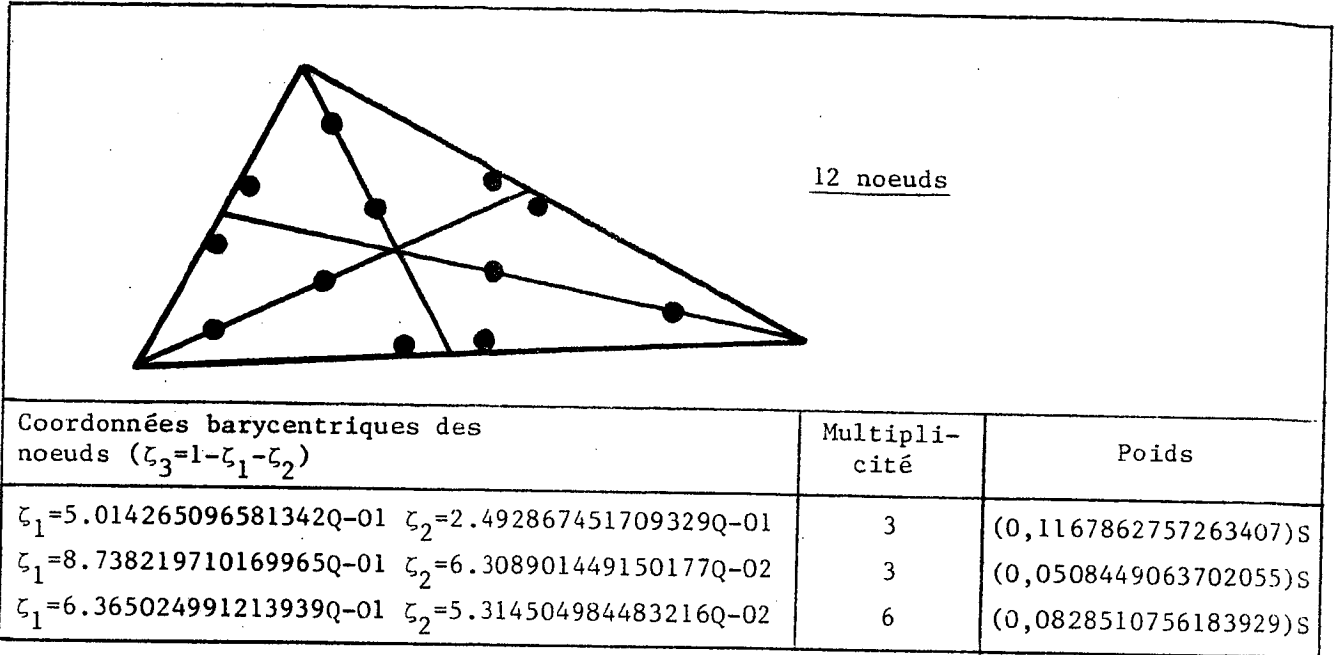


Figure 7.6 : Schéma d'intégration numérique exact pour les polynômes de degré 6 ( $S = \text{aire du triangle}$ )

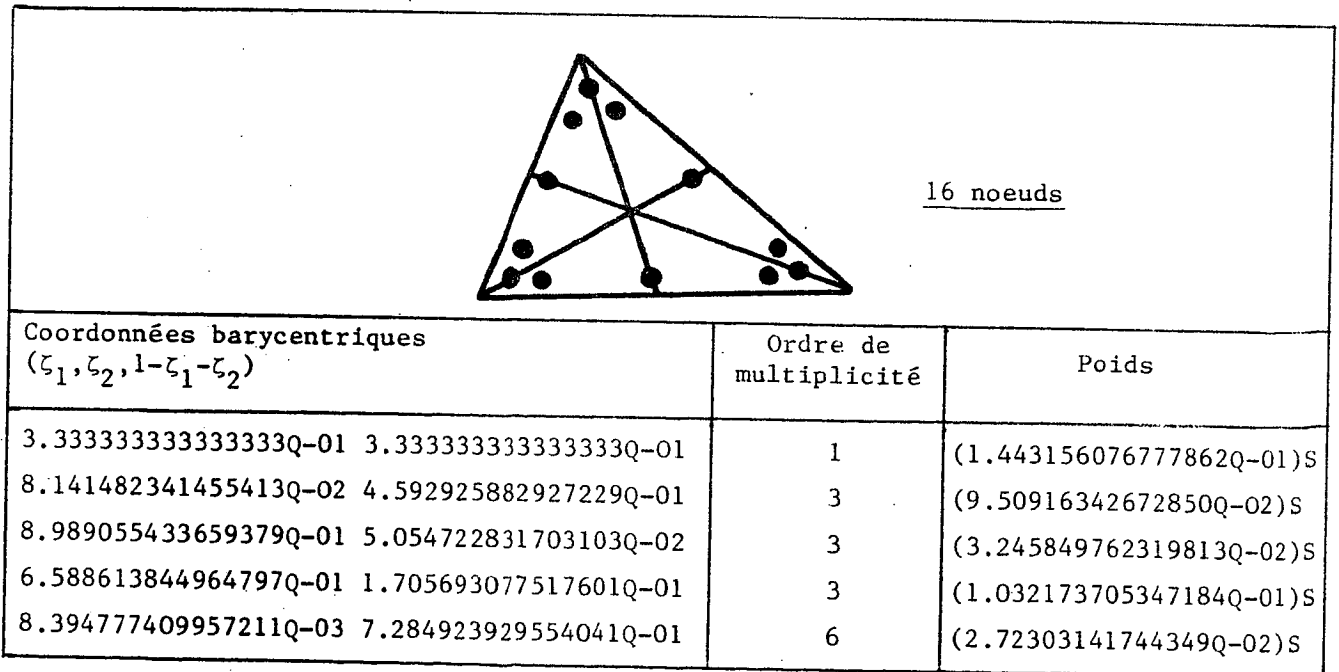


Figure 7.7 : Schéma d'intégration numérique exact pour les polynômes de degré 8 ( $S = \text{aire du triangle}$ )

BIBLIOGRAPHIE.

- ADAMS, R.A. [1975] :  
**Sobolev Spaces**, Academic Press, New-York.
- ARGYRIS, J.H. ; FRIED, I. ; SCHARPF, D.W. [1968] :  
The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, Aero. J. Royal Aeronautical Society 72, pp. 701-709.
- BERNADOU, M. [1978] :  
**Sur l'analyse numérique du modèle linéaire de coques minces de W.T. KOITER** ; Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- BERNADOU, M. [1980] :  
Convergence of conforming finite element methods for general shell problems, Internat. J. Engng. Sci., 18, pp. 249-276.
- BERNADOU, M. ; BOISSERIE, J.M. [1982] :  
**The Finite Element Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations**, Birkhäuser, Boston.
- BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. [1976] :  
Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. KOITER - In **Computing Methods in Applied Sciences and Engineering**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 134, pp. 89-136, Springer-Verlag, Berlin.
- BERNADOU, M. ; HASSIM, A. [à paraître] :  
Approximation de problèmes généraux de coques dans un espace d'éléments finis d'ARGYRIS-GANEV, Rapport de Recherche INRIA.
- BERNADOU, M. ; ODEN, J.T. [1981] :  
An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems, J. Math. pures et appl., 60, pp. 285-308.
- BHATTACHARYYA, P.K. ; SURESH, K. [in press] :  
Spline finite element method of solution of the clamped shallow cylindrical shell problem, Zeitschrift der Angewandte Mathematik und Mechanik.

BOGNER, F.K. ; FOX, R.L. ; SCHMIT, L.A. [1965] :

The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas ; in **Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, Wright Patterson A.F.B., Ohio.

BOOR, C. de [1977] :

Computational aspects of optimal recovery, in **"Optimal Estimation in Approximation Theory"**, C.A. Micchelli and T.J. Rivlin eds., Plenum Publ., New-York, pp. 69-91.

BOOR, C. de [1978] :

**A Practical Guide to Splines**, Springer-Verlag, New-York.

BOOR, C. de ; FIX, G.J. [1973] :

Spline approximation by quasiinterpolants, *J. Approx. Theory*, 8, pp. 19-45.

CIARLET, P.G. [1976] :

Conforming finite element methods for the shell problems, in **The Mathematics of Finite Elements and Applications II** (J.R. Whiteman, Editor), Academic Press, London, pp. 105-123.

CIARLET, P.G. [1978] :

**The Finite Element Method for Elliptic Problems**, North-Holland, Amsterdam.

CLOUGH, R.W. ; TOCHER, J.L. [1965] :

Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending, in **Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, Wright Patterson A.F.B., Ohio.

FRAEIJIS de VEUBEKE, B. [1965] :

Bending and stretching of plates, in **Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, Wright Patterson A.F.B., Ohio.

- GANEV, H.G. ; DIMITROV, Tch. T. [1980] :  
Calculation of arch dams as a shell using IBM-370 computer and curved finite elements. In "Theory of Shells", W.T. KOITER and G.K. MIKHAILOV, Eds., North-Holland Publishing Company, pp. 691-696.
- HALL, C.A. [1973] :  
Natural cubic and bicubic spline interpolation, SIAM J. Numer. Anal., 10, n° 6, pp. 1055-1060.
- KOITER, W.T. [1966] :  
On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., **B 69**, pp. 1-54.
- KOITER, W.T. [1970] :  
On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., **B 73**, pp. 169-195.
- LAURSEN, M.E. ; GELLERT, M. [1978] :  
Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles, Internat. J. Numer. Methods Engng, 12, pp. 67-76.
- LIONS, J.L. ; MAGENES, E. [1968] :  
**Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1**, Dunod, Paris.
- LYCHE, T. ; SCHUMAKER, L.L. [1975] :  
Local spline approximation methods, J. Approx. Theory 15, pp. 294-325.
- LYNESS, J.N. ; JESPERSEN, D. [1975] :  
Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle, J. Inst. Math. Appl., 15, pp. 19-32.
- MICCHELLI, C.A. ; RIVLIN, T.J. ; WINOGRAD, S. [1976] :  
The optimal recovery of smooth functions, Numer. Math., 26, pp. 191-200.

SANDER, G. [1969] :

Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques, Collection des publications de la Faculté des Sciences de Liège, 15.

SCHULTZ, M.H. [1969] :

$L^\infty$ -Multivariate approximation theory, SIAM J. Numer. Anal., 6, n° 2, pp. 161-183.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

