



# Un algorithme pour la détermination de perméabilités relatives triphasiques satisfaisant une condition de différentielle totale

Guy Chavent, G. Salzano

## ► To cite this version:

Guy Chavent, G. Salzano. Un algorithme pour la détermination de perméabilités relatives triphasiques satisfaisant une condition de différentielle totale. [Rapport de recherche] RR-0355, INRIA. 1985. inria-00076202

HAL Id: inria-00076202

<https://hal.inria.fr/inria-00076202>

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

## Rapports de Recherche

N° 355

**UN ALGORITHME  
POUR LA DÉTERMINATION  
DE PERMÉABILITÉS RELATIVES  
TRIPHASIQUES SATISFAISANT  
UNE CONDITION  
DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Guy CHAVENT  
Gabriella SALZANO

Tél. (3) 954 90 20

Janvier 1985

UN ALGORITHME POUR LA DETERMINATION DE PERMEABILITES  
RELATIVES TRIPHASIQUES SATISFAISANT UNE CONDITION  
DE DIFFERENTIELLE TOTALE

\*\*\*\*\*

*Guy CHAVENT (\*) - Gabriella SALZANO (\*\*)*

\*\*\*\*\*

(\*) Université Paris IX-Dauphine et INRIA B.P. 105 78153 Le Chesnay CEDEX -FRANCE  
(\*\*) CNR - IAC, Viale del Policlinico 137, Rome, ITALIE

## RESUME

Dans ce rapport on présente en détail les différentes étapes de l'implémentation d'un algorithme permettant de définir des perméabilités relatives triphasiques de trois fluides compressibles en milieux poreux [1].

On décrit la façon d'obtenir de telles fonctions, à partir des données disponibles dans les systèmes diphasiques de façon à ce qu'elles satisfassent à une condition de "différentielle totale", et en leur imposant des propriétés de régularité, de monotonie et de bornes dans le domaine triphasique.

On présente les résultats obtenus sur un exemple et l'on les compare avec ceux qui sont obtenus par un autre modèle [2].

On donne enfin des informations techniques pour l'utilisation des programmes informatiques mis au point pour réaliser l'objectif.

## SUMMARY

The calculation of the flow in a porous medium of three compressible and immiscible fluids requires the knowledge of the corresponding three-phase relative permeabilities.

This reports describes, step by step, an algorithm for the effective determination of these three-phase relative permeabilities from the usually available two-phase data. The algorithm is designed in such a way that the resulting relative permeabilities satisfy :

- a total differential condition [1], this allowing for a simplified pressure equation in the three-phase flow model,
- regularity, monotonicity and bound constraints which, in absence of experimental three-phase data, ensure that they are physically realistic.

Numerical result are presented and compared to those obtained by the method of Stone [2].

Finally, we give some technical information on how to use the corresponding program.

## MOTS CLEFS

Perméabilités relatives - Milieux poreux - Triphasique - Optimisation.

## KEY WORDS

Relative permeabilities - Porous media - Three-phase - Optimization.

## TABLE DES MATIERES

|  | <i>Pages</i> |
|--|--------------|
| I - INTRODUCTION .....                               | 1            |
| II - RAPPEL DE L'ALGORITHME .....                    | 4            |
| III - DISCRETISATION DU DOMAINE TRIPHASIQUE .....    | 9            |
| IV - RESULTATS NUMERIQUES .....                      | 32           |
| V - NOTES SUR L'IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME ..... | 43           |
| VI - CONCLUSION .....                                | 45           |
| NOTATIONS .....                                      | 46           |
| BIBLIOGRAPHIE .....                                  | 47           |

\*\*\*\*\*

## I - INTRODUCTION

Dans un milieu poreux sont présents trois fluides, immiscibles et compressibles, eau, huile et gaz, auxquels on associe respectivement les indices 1, 2 et 3. Soient  $S_1, S_2, S_3$  les saturations réduites des trois fluides ; on a la relation fondamentale

$$(1.1) \quad \begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 = 1 \\ 0 \leq S_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

On connaît la viscosité  $\mu_j$  et le facteur de volume  $B_j$  du fluide  $j$  et donc les mobilités relatives  $d_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Les fonctions caractéristiques des trois fluides sont aussi données dans les deux systèmes diphasique eau-huile et gaz-huile :

- dans le système eau-huile, où  $S_3 = 0$ , on utilise  $S_1$  comme variable indépendante et l'on connaît :

$$(1.2) \quad kr_1^{12}(S_1), kr_2^{12}(S_1) \quad \text{perméabilités relatives de l'eau et de l'huile}$$

$$(1.3) \quad P_c^{12}(S_1) \quad \text{pression capillaire}$$

d'où l'on peut définir :

$$(1.4) \quad v_1^{12}(S_1), v_2^{12}(S_1) \quad \text{"fractional flows"}$$

$$(1.5) \quad d^{12}(S_1) \quad \text{mobilité globale}$$

par les relations

$$(1.6) \quad d^{12}(S_1) = kr_1^{12}(S_1) d_1 + kr_2^{12}(S_1) d_2$$

$$(1.7) \quad v_1^{12}(S_1) = kr_1^{12}(S_1) d_1 / d^{12}(S_1)$$

$$(1.8) \quad v_2^{12}(S_1) = kr_2^{12}(S_1) d_2 / d^{12}(S_1)$$

- de même, dans le système gaz-huile, où  $S_1 = 0$ , on utilise  $S_3$  comme variable indépendante, et l'on connaît :

(1.9)  $kr_3^{32}(S_3), kr_2^{32}(S_3)$  perméabilités relatives du gaz et de l'huile

(1.10)  $p_c^{32}(S_3)$  pression capillaire

d'où l'on peut définir :

(1.11)  $v_3^{32}(S_3), v_2^{32}(S_3)$  "fractional flows"

(1.12)  $d^{32}(S_3)$  mobilité globale

par :

(1.13)  $d^{32}(S_3) = kr_3^{32}(S_3) d_3 + kr_2^{32}(S_3) d_2$

(1.14)  $v_3^{32}(S_3) = kr_3^{32}(S_3) d_3 / d^{32}(S_3)$

(1.15)  $v_2^{32}(S_3) = kr_2^{32}(S_3) d_2 / d^{32}(S_3)$

On va représenter les trois saturations et les fonctions qui en dépendent sur un diagramme ternaire. De (1.1), on choisit  $S_1$  et  $S_3$  comme variables indépendantes (Figure 1).

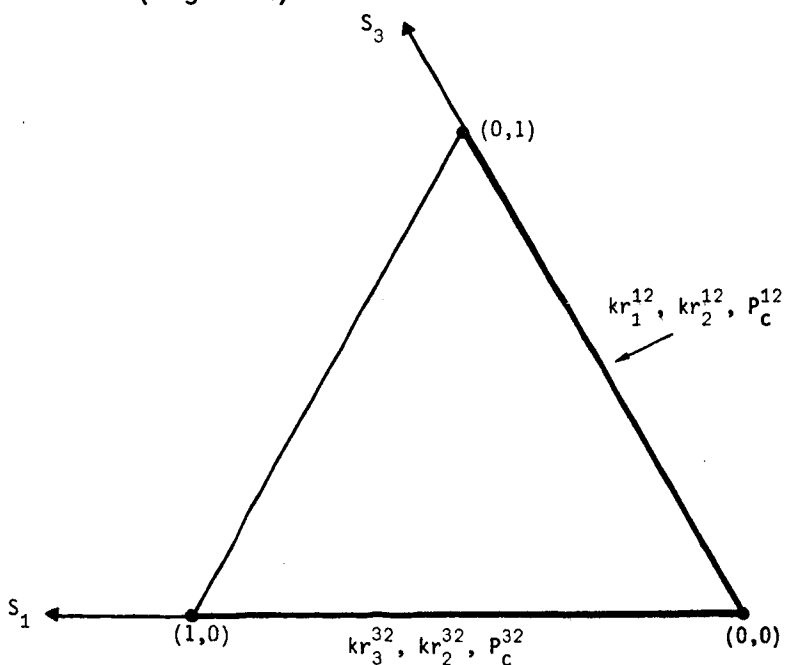


Figure 1

Diagramme Ternaire

Sur le diagramme, les sommets (1,0), (0,0), (0,1) représentent respectivement les points où  $S_1, S_2, S_3$  sont maximales ; les côtés d'équations  $S_3 = 0, S_1 + S_3 = 1, S_1 = 0$ , représentent respectivement les systèmes diphasiques eau-huile, eau-gaz et gaz-huile.

On appellera domaine triphasique le triangle de sommets (0,0), (1,0) et (0,1) (sur les axes  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_3$ ).

Dans ce domaine, on veut déterminer les fonctions :

(1.16)  $kr_j$  ,  $j = 1,2,3$  perméabilités relatives triphasiques

(1.17)  $v_j$  ,  $j = 1,2,3$  fractional flows triphasiques

(1.18)  $d$  mobilité globale triphasique

liées par les relations (\*) :

$$(1.19) \quad d(S_1, S_3) = kr_1(S_1, S_3) d_1 + kr_2(S_1, S_3) d_2 + kr_3(S_1, S_3) d_3$$

$$(1.20) \quad v_j(S_1, S_3) = kr_j(S_1, S_3) d_j / d(S_1, S_3) \quad j = 1,2,3.$$

$$(1.21) \quad v_1(S_1, S_3) + v_2(S_1, S_3) + v_3(S_1, S_3) = 1$$

En l'absence de mesures des perméabilités relatives à l'intérieur du domaine triphasique, on est confronté au problème du choix des perméabilités relatives (1.16) à l'intérieur de ce domaine. Plusieurs méthodes ont été proposées pour définir ces perméabilités relatives, basées pour la plupart sur des considérations physiques (Cf. par exemple [2]).

Dans [1] une sous-classe de perméabilités relatives, vérifiant une condition dite "de différentielle totale" est introduite, de façon à simplifier la formulation des équations de l'écoulement de trois phases.

Dans le présent rapport, on rappelle l'algorithme présenté dans [1] pour la sélection d'un élément de cette sous-classe et l'on donne les détails nécessaires à la compréhension et à la manipulation des programmes réalisés pour procéder à cette sélection.

---

(\*) Comme on s'intéresse ici à la définition de ces fonctions par rapport à  $S_1$  et  $S_3$ , pour simplifier les notations, on néglige les pressions parmi les variables indépendantes.



II - RAPPEL DE L'ALGORITHME

On va rappeler l'algorithme qui calcule les fonctions (1.16)-(1.18) comme elles ont été définies dans [1].

-----  
Etape 1  
-----

Avec les données (1.2), (1.4), (1.5),

- assigner :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} kr_1(S_1, 0) = kr_1^{12}(S_1) \\ kr_2(S_1, 0) = kr_2^{12}(S_1) \end{array} \right. \quad S_1 \in [0,1]$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1(S_1, 0) = v_1^{12}(S_1) \\ v_2(S_1, 0) = v_2^{12}(S_1) \\ d(S_1, 0) = d^{12}(S_1) \end{array} \right. \quad S_1 \in [0,1]$$

- poser

$$(2.3) \quad kr_3(S_1, 0) = v_3(S_1, 0) = 0 \quad S_1 \in [0,1]$$

Avec les données (1.9), (1.11), (1.12),

- assigner

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} kr_3(0, S_3) = kr_3^{32}(S_3) \\ kr_2(0, S_3) = kr_2^{32}(S_3) \end{array} \right. \quad S_3 \in [0,1]$$

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_3(0, S_3) = v_3^{32}(S_3) \\ v_2(0, S_3) = v_2^{32}(S_3) \\ d(0, S_3) = d^{32}(S_3) \end{array} \right. \quad S_3 \in [0,1]$$

- poser

$$(2.6) \quad kr_1(0, S_3) = v_1(0, S_3) = 0 \quad S_3 \in [0,1]$$

-----  
 Etape 2  
 -----

- Choisir un prolongement de la fonction  $v_2$ , s'appuyant sur les valeurs  $v_2(S_1, 0)$  et  $v_2(0, S_3)$ ,  $S_1, S_3 \in [0,1]^2$ , et assigner les valeurs à

$$v_2(S_1, S_3) \quad S_1, S_3 \in [0,1]^2 \quad S_1 + S_3 \leq 1$$

-----  
 Etape 3  
 -----

- Définir explicitement,  $\forall (S_1, S_3) \in [0,1]^2$ , les valeurs de la fonction  $\beta$  qui satisfait <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>

$$(2.7) \quad v_1(S_1, S_3) = v_1(S_1, 0) + \int_0^{S_3} \frac{\partial p_c^{32}}{\partial S_3}(s) \beta(S_1, s) ds$$

$$(2.8) \quad v_3(S_1, S_3) = v_3(0, S_3) + \int_0^{S_1} \frac{\partial p_c^{12}}{\partial S_1}(s) \beta(s, S_3) ds$$

$$(2.9) \quad v_1(S_1, S_3) + v_3(S_1, S_3) = 1 - v_2(S_1, S_3)$$

-----  
 Etape 4  
 -----

- Déterminer la mobilité globale  $d$  sur le côté d'équation  $S_1 + S_3 = 1$ , c'est-à-dire les valeurs :

$$d(S_1, S_3) \quad S_1 \in (0,1), S_3 = 1-S_1$$

de façon que les perméabilités relatives  $kr_1$  et  $kr_3$  vérifient les propriétés suivantes :

- (i) elles sont les plus régulières possibles sur ce côté ;
- (ii)  $S_1 \rightarrow kr_1(S_1, 1-S_1)$  est croissante et donc, pour (1.20) :

---

(1) On choisit ici, comme dans [1], de définir les pressions capillaires triphasiques  $p_c^{12}(S_1, S_3)$  et  $p_c^{32}(S_1, S_3)$ , par :

$$p_c^{12}(S_1, S_3) = p_c^{12}(S_1), \quad p_c^{32}(S_1, S_3) = p_c^{32}(S_3), \quad \forall (S_1, S_3) \in [0,1]^2$$

$$S_1 + S_3 \leq 1$$

(2) C'est ici qu'intervient la condition de différentielle totale.

$$(2.10) \quad \frac{\frac{\partial v_1}{\partial S_1}(S_1, S_3)}{v_1(S_1, S_3)} + \frac{\frac{\partial d}{\partial S_1}(S_1, S_3)}{d(S_1, S_3)} \geq 0 \quad S_1 \in [0,1], S_3 = 1-S_1$$

$S_3 \rightarrow kr_3(S_1, 1-S_1)$  est décroissante et donc, pour (1.20) :

$$(2.11) \quad \frac{\frac{\partial v_3}{\partial S_1}(S_1, S_3)}{v_3(S_1, S_3)} + \frac{\frac{\partial d}{\partial S_1}(S_1, S_3)}{d(S_1, S_3)} \leq 0 \quad S_1 \in [0,1], S_3 = 1-S_1$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} 0 \leq kr_1(S_1, 1-S_1) &\leq kr_{1,max} \\ 0 \leq kr_3(S_1, 1-S_1) &\leq kr_{3,max} \end{aligned} \quad S_1 \in [0,1]$$

-----  
Etape 5  
-----

- Déterminer les valeurs de la mobilité globale  $d$  à l'intérieur du triangle, c'est-à-dire :

$$d(S_1, S_3) \quad S_1, S_3 \in ]0,1[ \quad 0 < S_1 + S_3 < 1$$

de façon que les perméabilités relatives  $kr_j$ ,  $j = 1,2,3$  vérifient les propriétés suivantes :

(iv) elles sont les plus régulières possibles dans le triangle

(v) elles ont des propriétés opportunes de monotonie dans le domaine

$$(vi) \quad \begin{aligned} 0 \leq kr_j(S_1, S_3) &\leq kr_{j,max} \quad j = 1,2,3, (S_1, S_3) \in [0,1]^2 \\ &S_1 + S_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Remarque 1

L'étape 1 impose que les fonctions triphasiques (1.16) - (1.18), que l'on va déterminer dans la suite, aient pour projection les fonctions (1.2), (1.4), (1.5) et (1.9), (1.11), (1.12) respectivement dans les deux systèmes diphasiques eau-huile et gaz-huile. □

Remarque 2

De (1.21) on déduit qu'un fractional flow dépend linéairement des deux autres. Dans l'étape 2 on choisit  $v_2$  comme paramètre libre et l'on déterminera  $v_1$  et  $v_3$  de façon à satisfaire la condition (2.9), où le terme de droite sera connu.

Pour le choix de  $v_2$ , on peut procéder de plusieurs façons.

- On peut utiliser les perméabilités relatives obtenues avec d'autres modèles: avec les perméabilités relatives de Stone [2], données par :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}r_1(S_1, S_3) = kr_1^{12}(S_1) \\ \tilde{k}r_2(S_1, S_3) = (1-S_1-S_3)kr_2^{12}(S_1)kr_2^{32}(S_3)/(1-S_1)(1-S_3) \\ \tilde{k}r_3(S_1, S_3) = kr_3^{32}(S_3) \end{array} \right. , \quad \forall (S_1, S_3) \in [0,1]^2 \quad S_1 + S_3 \leq 1$$

on peut calculer, par (1.19) et (1.20), la mobilité globale  $\tilde{d}$  et les fractional flows  $\tilde{v}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  correspondants, et poser enfin :

$$v_2(S_1, S_3) = \tilde{v}_2(S_1, S_3) \quad \forall (S_1, S_3) \in [0,1]^2, S_1 + S_3 \leq 1$$

- Une autre façon de procéder consiste à interpoler, le long des droites d'équation  $S_1 + S_3 = \text{constante}$ , les valeurs  $v_2(S_1, 0)$  et  $v_2(0, S_3)$ ,  $S_1$  et  $S_3 \in [0,1]$ . On pose donc :

$$(2.13) \quad v_2(S_1 + S_3 - t, t) = v_2(S_1 + S_3, 0) + \frac{S_1 + S_3 - t}{S_1 + S_3} (v_2(0, S_1 + S_3) - v_2(S_1 + S_3, 0))$$

$$\forall (S_1, S_3) \in [0,1]^2, S_1 + S_3 \leq 1$$

$$\forall t, 0 \leq t \leq S_1 + S_3$$

Remarque 3

Dans l'étape 3, on calcule simultanément les fonctions  $\beta$ ,  $v_1$ , et  $v_3$  dans tout le domaine triphasique.

Les fractional flows ainsi déterminés permettent de modéliser les écoulements de trois fluides immiscibles et compressibles dans un milieu poreux, à l'aide d'une seule pression globale,  $P$ , au lieu que des trois pressions

$P_1, P_2, P_3$  [1]. Ceci entraîne des simplifications remarquables dans la modélisation mathématique, aussi bien que dans les méthodes de calcul de ces écoulements. □

Remarque 4

En tenant compte de (2.9), les équations (2.7), (2.8) constituent une équation linéaire pour  $\beta(S_1, S_3)$ . On peut la résoudre, après avoir calculé, par (2.3) et (2.6) les valeurs aux bords :

$$\beta(S_1, 0) = \beta(0, S_3) = 0 \quad S_1 \text{ et } S_3 \in [0,1]$$
□

Remarque 5

De (1.20) on déduit que les perméabilités relatives sont déterminées, dès que sont connus la mobilité globale  $d$  et les fractional flows  $v_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Suite aux remarques 2 et 3, on doit donc encore préciser la façon de déterminer  $d$  dans tout le domaine. Ceci ne peut pas être fait de façon arbitraire, si on veut obtenir des perméabilités relatives satisfaisantes du point de vue physique.

On détermine donc  $d$  dans deux étapes de l'algorithme : l'étape 4 calcule les valeurs :

$$d(S_1, S_3) \quad S_1 \in (0,1), \quad S_3 = 1 - S_1,$$

$d(1,0)$  et  $d(0,1)$  étant connues suite à la remarque 1. L'étape 5 enfin utilise ces valeurs calculées et les données du problème pour calculer  $d$  à l'intérieur du domaine triphasique. □

### III - DISCRETISATION DU DOMAINE TRIPHASIQUE

On discrétise le domaine triphasique avec un maillage uniforme, en divisant les côtés du triangle dans NPS intervalles d'amplitude  $\Delta S$ . Pour ces points de discrétisation, on fait passer les droites parallèles aux trois côtés et on considère le maillage ainsi obtenu (Figure 2).

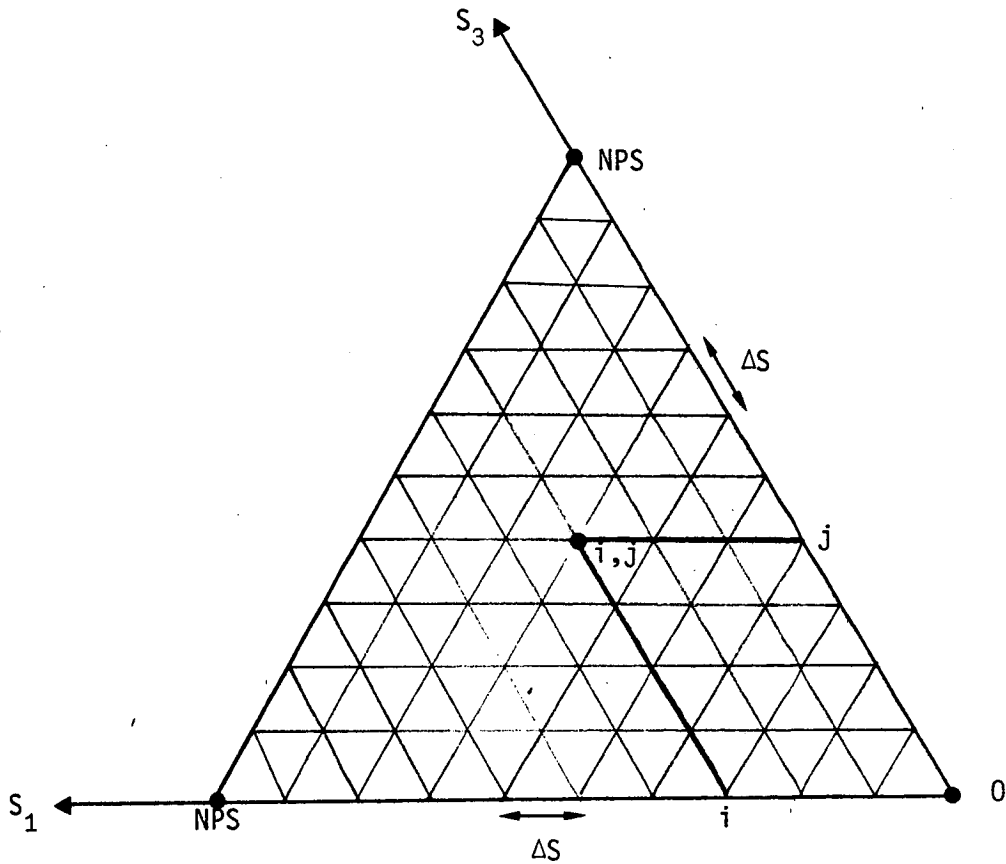


Figure 2

Discretisation du domaine triphasique

Un point du maillage sera caractérisé par un couple de coordonnées  $(S(i), S(j))$  ou d'indices  $(i,j)$ , tels que :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(i) = i\Delta S, S(j) = j\Delta S \\ i = 0, \dots, NPS, j = 0, \dots, NPS-i \\ \Delta S = 1/NPS \end{array} \right.$$

On approche toutes les fonctions des saturations  $S_1$  et  $S_3$  par des fonctions linéaires sur chaque triangle de la décomposition. Donc ces fonctions seront connues dès que seront connues leurs valeurs aux sommets des triangles. On va décrire, avec cette approximation, les différentes étapes de l'algorithme. On considère, dorénavant, la correspondance entre une fonction  $f(S)$  [resp.  $f(S_1, S_3)$ ] et le vecteur [resp. la matrice]  $f$ , de composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(i) = f(S(i)) \quad i = 0, \dots, NPS, \\ \text{[resp. } f(i,j) = f(S(i), S(j)) \quad i = 0, \dots, NPS, j = 0, \dots, NPS-i] \end{array} \right.$$

-----  
Etape 1  
-----

A la suite de la remarque 1 et des relations (1.6)-(1.8) et (1.13)-(1.15) on pose :

$$d_\ell = B_\ell / \mu_\ell \quad \ell = 1, 2, 3.$$

et :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, \dots, NPS \\ kr_1(i,0) = kr_1^{12}(i) \\ kr_2(i,0) = kr_2^{12}(i) \\ kr_3(i,0) = 0 \\ d(i,0) = kr_1(i,0) d_1 + kr_2(i,0) d_2 \\ v_1(i,0) = kr_1(i,0) d_1 / d(i,0) \\ v_2(i,0) = kr_2(i,0) d_2 / d(i,0) \\ v_3(i,0) = 0 \end{array} \right.$$

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} j = 0, \dots, \text{NPS} \\ kr_1(0,j) = 0 \\ kr_2(0,j) = kr_2^{32}(j) \\ kr_3(0,j) = kr_3^{32}(j) \\ d(0,j) = kr_2(0,j) d_2 + kr_3(0,j) d_3 \\ v_1(0,j) = 0 \\ v_2(0,j) = kr_2(0,j) d_2 / d(0,j) \\ v_3(0,j) = kr_3(0,j) d_3 / d(0,j) \end{array} \right.$$

-----  
 Etape 2  
 -----

Suite à la remarque 2, ou bien :

- on calcule, dans le modèle de Stone [2], les perméabilités relatives (2.12) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{kr}_1(i,j) = kr_1(i,0) \\ \tilde{kr}_2(i,j) = \frac{(NPS-i-j) NPS kr_2(i,0) kr_2(0,j)}{(NPS-i)(NPS-j)} \\ \tilde{kr}_3(i,j) = kr_3(0,j) \end{array} \right. \quad i, j = 0, \dots, \text{NPS}, \quad i+j \leq \text{NPS} ;$$

la mobilité globale  $\tilde{d}$  et le fractional flow  $\tilde{v}_2$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{d}(i,j) = \sum_{\ell=1}^3 \tilde{kr}_\ell(i,j) d_\ell \\ \tilde{v}_2(i,j) = \tilde{kr}_2(i,j) d_2 / \tilde{d}(i,j), \quad i, j = 0, \dots, \text{NPS}, \quad i+j \leq \text{NPS} ; \end{array} \right.$$

et l'on pose :

$$(3.4) \quad v_2(i,j) = \tilde{v}_2(i,j) \quad i, j = 0, \dots, \text{NPS},$$

ou bien :

- par interpolation de  $v_2(k,0)$  et  $v_2(0,k)$ ,  $k = 0, \dots, \text{NPS}$ , on pose :



$$(3.5) \quad v_2(i+j-k, k) = v_2(i+j, 0) + \frac{i+j-k}{i+j} (v_2(0, i+j) - v_2(i+j, 0)),$$

$$i = 1, \dots, NPS-1, \quad j=1, \dots, NPS-i, \quad k=1, \dots, i+j-1$$

-----  
 Etape 3  
 -----

En intégrant (2.7), (2.8), on a :

$$(3.6) \quad \begin{cases} v_1(i, j) = v_1(i, j-1) + \left[ p_c^{32}(j) - p_c^{32}(j-1) \right] \frac{\beta(i, j) + \beta(i, j-1)}{2} \\ v_3(i, j) = v_3(i-1, j) + \left[ p_c^{12}(i) - p_c^{12}(i-1) \right] \frac{\beta(i, j) + \beta(i-1, j)}{2} \end{cases}$$

$$i=1, \dots, NPS, \quad j=1, \dots, NPS-i$$

En utilisant (2.9), on obtient une équation linéaire pour  $\beta$  :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \left[ p_c^{32}(j) - p_c^{32}(j-1) \right] \frac{\beta(i, j) + \beta(i, j-1)}{2} + \left[ p_c^{12}(i) - p_c^{12}(i-1) \right] \frac{\beta(i, j) + \beta(i-1, j)}{2} \\ = 1 - v_2(i, j) - v_1(i, j-1) - v_3(i-1, j) \end{cases} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, NPS, \\ j=1, \dots, NPS-i \end{matrix}$$

Par la remarque 4, on pose :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \beta(i, 0) = 0 & i = 0, \dots, NPS \\ \beta(0, j) = 0 & j = 0, \dots, NPS \end{cases}$$

L'équation (3.7) est linéaire en  $\beta(i, j)$  et permet de calculer cette valeur une fois connus  $v_2$  en  $(i, j)$ ,  $v_1$  et  $\beta$  en  $(i, j-1)$  et  $v_3$  et  $\beta$  en  $(i-1, j)$ . Donc globalement l'algorithme fourni par (3.6), (3.7), pour le calcul de  $v_1, v_3$  et  $\beta$  dans tout le maillage, est linéaire et récursif.

-----  
 Etape 4  
 -----

On a à résoudre un problème monodimensionnel. Sur le côté d'équation  $S_1 + S_3 = 1$ , on utilise  $S_1$  comme variable indépendante. On effectue ainsi un décalage d'indice pour les points du maillage (3.1) qui sont sur ce côté, de façon que les points de discrétisation ont ici pour abscisse :

$$S(i) = (i-1) \Delta S \quad i = 1, \dots, N$$

avec :

$$(3.9) \quad N = NPS + 1$$

On note par  $\underline{d}^{13}$ ,  $\underline{v}_j^{13}$ ,  $\underline{kr}_j^{13}$ ,  $j = 1$  et  $3$ , les vecteurs définis par :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} d^{13}(i+1) = d(i, NPS-i) \\ v_j^{13}(i+1) = v_j(i, NPS-i) \\ kr_j^{13}(i+1) = kr_j(i, NPS-i) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i = 0, \dots, NPS \\ i = 0, \dots, NPS, j=1 \text{ et } 3. \end{array}$$

Or remarque que les valeurs  $v_j^{13}$  sont connues grâce à l'étape 3.

On introduit le vecteur  $\underline{x}$ , défini par :

$$(3.11) \quad d^{13}(i) = \exp(x(i)) \quad i = 1, \dots, N$$

Par (3.2) et (3.3) on connaît :

$$(3.12) \quad \begin{cases} x(1) = \text{Log } d^{13}(1) \\ x(N) = \text{Log } d^{13}(N) \end{cases}$$

En fonction de cette nouvelle variable, on a de (1.20) :

$$(3.13) \quad kr_j^{13}(i) = \frac{v_j^{13}(i)}{d_j} \exp(x(i)) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \text{ et} \\ j = 1 \text{ et } 3 \end{array}$$

On peut donc déterminer  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ , tel que les vecteurs correspondants  $\underline{d}^{13}$  et  $\underline{kr}_j^{13}$ ,  $j = 1$  et  $3$ , vérifient les propriétés (i), (ii), et (iii).

-----  
Propriété (i)  
-----

Pour définir un critère quadratique lié à la propriété (i), on approche les composantes  $(kr_j^{13})''(i)$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ , du vecteur laplacien  $\underline{\Delta kr}_j^{13}$ ,  $j = 1$ , et  $3$ , par:

$$(kr_j^{13})''(i) = \frac{1}{(\Delta S)^2} \left[ kr_j^{13}(i-1) - 2kr_j^{13}(i) + kr_j^{13}(i+1) \right] \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, N-1 \\ j = 1 \text{ et } 3. \end{array}$$

On pose

$$-\underline{\Delta kr}_j^{13} = B^{13} \underline{kr}_j^{13}$$

où  $B^{13}$  est la matrice de composantes  $b^{13}(k,i)$ ,  $k = 1, \dots, N-2$  et  $i = 1, \dots, N$ , définie par :

$$(3.14) \quad b^{13}(k,i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, k+1, k+2 \\ -1/(\Delta S)^2 & \text{si } i = k, k+2 \\ 2/(\Delta S)^2 & \text{si } i = k+1 \end{cases}$$

et l'on définit donc le problème

$$(P_0^{13}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer le} \\ \text{Min } J^{13}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \end{array} \right.$$

avec,

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} J^{13}(\underline{x}) = \sum_{j=1 \text{ et } 3} \|\underline{\Delta kr}_j^{13}\|^2 = \\ \\ = \sum_{j=1 \text{ et } 3} (\underline{kr}_j^{13})^T (B^{13})^T B^{13} \underline{kr}_j^{13} \end{array} \right.$$

□

-----  
 Propriété (ii)  
 -----

On observe que pour (1.21), il est :

$$v_3^{13}(i) = 1 - v_1^{13}(i) \quad i = 1, \dots, N$$

On écrit donc (2.10) et (2.11) de la façon suivante :

$$\frac{\frac{dv_1^{13}}{dS_1}(S_1)}{v_1^{13}(S_1)} + \frac{d(\text{Log } d^{13})}{dS_1}(S_1) \geq 0 \quad \forall S_1 \in [0,1]$$

$$- \frac{\frac{dv_1^{13}}{dS_1}(S_1)}{1-v_1^{13}(S_1)} + \frac{d(\text{Log } d^{13})}{dS_1}(S_1) \leq 0 \quad \forall S_1 \in [0,1]$$

En approchant ces inégalités dans les intervalles  $[S(i), S(i+1)]$   
 $i = 1, \dots, N-1$ , par un schéma centré, on obtient, avec la définition (3.11) :

$$\frac{\frac{v_1^{13}(i+1) - v_1^{13}(i)}{v_1^{13}(i) + v_1^{13}(i+1)}}{2} + x(i+1) - x(i) \geq 0 \quad i=1, \dots, N-1$$

$$\frac{\frac{v_1^{13}(i) - v_1^{13}(i+1)}{v_1^{13}(i) + v_1^{13}(i+1)}}{1 - \frac{1}{2}} + x(i+1) - x(i) \leq 0 \quad i=1, \dots, N-1$$

Ces relations peuvent être écrites dans la forme plus synthétique :

$$(3.16) \quad a_k^{13} \underline{x} \geq q^{13}(k) \quad k=1, \dots, NC$$

avec

$$(3.17) \quad NC = 2(N-1)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 k = (\ell-1)(N-1) + i \\
 \ell = 1, 2, \quad i = 1, \dots, N-1 \\
 q^{13}(k) = \left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{v_1^{13}(i) - v_1^{13}(i+1)}{1 - \frac{v_1^{13}(i) + v_1^{13}(i+1)}{2}} & \text{si } \ell = 1 \\
 \frac{v_1^{13}(i) - v_1^{13}(i+1)}{\frac{v_1^{13}(i) + v_1^{13}(i+1)}{2}} & \text{si } \ell = 2
 \end{array} \right.
 \end{array} \right\}$$

et

$$(3.19) \quad a_k^{13}(i) \left\{ \begin{array}{ll}
 0 & \text{si } \ell = 1, 2 \quad \text{et } i \neq j, j+1 \\
 1 & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \ell = 1 \\ \ell = 2 \end{array} \right. \quad \text{et } i = j \\
 -1 & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \ell = 1 \\ \ell = 2 \end{array} \right. \quad \text{et } i = j+1
 \end{array} \right.$$

□

-----  
 Propriété (iii)  
 -----

La propriété (iii) est vérifiée si et seulement si :

$$(3.20) \quad x(i) \leq cb^{13}(i) \quad i = 2, \dots, N-1$$

avec

$$(3.21) \quad cb^{13}(i) = \underset{j=1 \text{ et } 3}{\text{Min}} \left\{ \text{Log} \frac{d_j}{v_j^{13}(i)} \quad kr_{j, \max} \right\} \quad i = 2, \dots, N-1$$

□

Pour déterminer donc  $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ , qui résoud  $p_0^{13}$ , sous :

- les contraintes d'inégalités linéaires (3.16),
- les contraintes de borne (3.20),
- les contraintes d'égalité (3.12),

on a procédé de la façon suivante :

On définit la quantité scalaire, dépendante de (3.16) :

$$(3.22) \quad \text{Maxc}(\underline{x}) = \underset{k=1, \dots, NC}{\text{Max}} \left\{ -n, q^{13}(k) - \sum_{i=1}^N a_k^{13}(i) x(i) \right\}$$

avec  $n$  constante positive,  $\approx 0$ .

On observe que si toutes les contraintes (3.16) sont satisfaites,

alors :

$$(3.23) \quad \text{Maxc}(\underline{x}) = -n$$

et que, dans le cas contraire,

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \quad k_{\max} : \quad 1 \leq k_{\max} \leq NC, \text{ tel que} \\ \text{Maxc}(\underline{x}) = q^{13}(k_{\max}) - \sum_{i=1}^N a_{k_{\max}}^{13}(i) x(i) \end{array} \right.$$

On définit donc la fonctionnelle de pénalisation :

$$(3.25) \quad JP^{13}(\underline{x}) = \epsilon_q J^{13}(\underline{x}) + \frac{1}{\epsilon} \text{Maxc}(\underline{x})$$

avec  $\epsilon_q$  et  $\epsilon$  constantes positives

On résoud donc le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer le :} \\ \text{Min}_{\underline{x}} JP^{13}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^N \\ \text{sous les contraintes de borne (3.12) et (3.20)} \end{array} \right.$$

Etant donné une estimation  $\underline{x}^0$  de  $\underline{x}$ , qui satisfait (3.12) et (3.20) les formules pour calculer le vecteur gradient  $\underline{\nabla JP}^{13}$ , de composantes  $\frac{\partial JP^{13}}{\partial x(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sont :

$$(3.26) \quad \frac{\partial JP^{13}}{\partial x(i)} = 0 \quad i = 1 \text{ et } N$$

et

$$(3.27) \quad \frac{\partial JP^{13}}{\partial x(i)} = \epsilon_q \left\{ 2 \sum_{j=1 \text{ et } 3} \left[ (B^{13})^T_{B^{13}} \underline{kr}_j^{13} \right]_i \text{kr}_j^{13}(i) \right\} + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si (3.23) est vérifiée} \\ -a_{k\text{max}}(i) & \text{si (3.24) est vérifiée } i=2, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

où  $[\cdot]_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur  $[\cdot]$ .

La minimisation de  $JP^{13}$  peut être considérée:

- soit comme un problème d'optimisation linéaire-quadratique
- soit comme un problème d'optimisation non différentiable.

On a choisi la deuxième voie pour sa robustesse et sa simplicité de mise en oeuvre (ce qui explique d'ailleurs le passage de  $(P_0^{13})$  à  $(P^{13})$ ).

Cet avantage est contrebalancé par une convergence lente, élément de peu d'importance dans le présent contexte.

□

-----  
 Etape 5  
 -----

Les données de cette étape sont :

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} d(i,0) & i=0,\dots,NPS \\ d(0,j) & j=0,\dots,NPS \\ d(i,NPS-i) & i=1,\dots,NPS \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{\ell}(i,j) & i=0,\dots,NPS, j=0,\dots,NPS-i, \ell = 1,2,3 \\ kr_{\ell}(i,0) & i=0,\dots,NPS, \ell = 1,2,3 \\ kr_{\ell}(0,j) & j=0,\dots,NPS, \ell = 1,2,3 \\ kr_{\ell}(i,NPS-i) & i=1,\dots,NPS-1, \ell = 1,2,3. \end{array} \right.$$

On veut déterminer :

$$d(i,j) \quad i=1,\dots,NPS-1, j=1,\dots,NPS-i-1$$

de façon que les propriétés (iv), (v) et (vi) soient vérifiées. Il est utile, pour la suite, de numéroter de façon vectorielle les points du maillage (3.1). Pour cela, on considère la correspondance entre les indices des points  $(S_1(i), S_3(j))$  et  $P(m)$ ,

$$(3.29) \quad (i,j) \rightarrow m = (2NPS+3-j) \frac{j}{2} + i + 1 \quad i=0,\dots,NPS, j=0,\dots,NPS-i$$

Donc il est :

$$1 \leq m \leq N^*$$

avec

$$N^* = \frac{(NPS+1)(NPS+2)}{2}$$



Pour tout  $m$  ainsi calculé, on appellera donc :

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| $P(m)$ intérieur                   | si $j=1, \dots, NPS-2$ et $i=1, \dots, NPS-j-1$ |
| $P(m)$ sur le côté $S_3 = 0$       | si $j=0$ , et $i=1, \dots, NPS-1$               |
| $P(m)$ sur le côté $S_1 = 0$       | si $i=0$ , et $j=1, \dots, NPS-1$               |
| $P(m)$ sur le côté $S_1 + S_3 = 1$ | si $j=1, \dots, NPS-1$ et $i=NPS-j$             |
| $P(m)$ sommet $(0,0)$              | si $i=0$ et $j=0$                               |
| $P(m)$ sommet $(0,NPS)$            | si $i=0$ et $j=NPS$                             |
| $P(m)$ sommet $(NPS,0)$            | si $i=NPS$ et $j=0$                             |

On utilisera aussi les notations  $d(m)$ ,  $kr_\ell(m)$ ,... pour indiquer les valeurs  $d(i,j)$ ,  $kr_\ell(i,j)$ ,... dans la correspondance (3.29)

Comme dans l'étape 4, on utilise le vecteur  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{N^*}$ , défini par :

$$(3.30) \quad d(m) = \exp(x(m)) \quad m = 1, \dots, N^*$$

comme variable indépendante et l'on déduit de (3.28) que sont connues les valeurs :

$$(3.31) \quad x(m) = \text{Log} (d(m)) \quad \text{si } P(m) \text{ est un sommet ou est sur les côtés.}$$

Avec ces notations, on va écrire (iv), (v) et (vi).

-----  
*Propriété (iv)*  
 -----

On va exprimer de façon opportune le Laplacien  $\Delta kr_\ell$  de la perméabilité relative  $kr_\ell$ ,  $\ell=1,2,3$ . Pour simplifier les notations dans l'analyse qui suit, on remplace les fonctions  $kr_\ell$ ,  $\ell=1,2,3$ , par une fonction  $f$  quelconque, ainsi que les vecteurs correspondants. Dans le plan orienté  $(\vec{S}_1, \vec{S}_3)$ , on considère les directions  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ , et  $\tilde{\underline{e}}$  définies par (fig 3) :

$$(3.22) \quad \begin{cases} \underline{e}_1 = (1, 0) \\ \underline{e}_2 = (0, 1) \\ \underline{e}_3 = (-1, 1) \\ \underline{\tilde{e}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

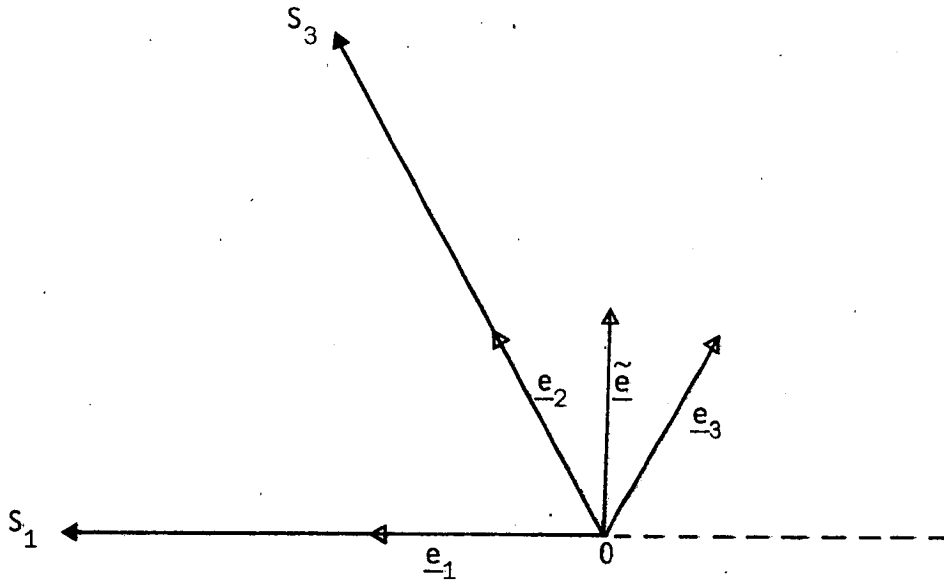


Figure 3

Directions utilisées pour le calcul du Laplacien.

et l'on calcule, avec  $S = (S_1, S_3)$

$$(3.33) \quad \begin{cases} f''(S) \cdot (\underline{e}_1, \underline{e}_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}(S) \\ f''(S) \cdot (\underline{e}_2, \underline{e}_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial S_3^2}(S) \\ f''(S) \cdot (\underline{e}_3, \underline{e}_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}(S) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1 \partial S_3}(S) + \frac{\partial^2 f}{\partial S_3^2}(S) \\ f''(S) \cdot (\underline{\tilde{e}}, \underline{\tilde{e}}) = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}(S) - \frac{4}{3} \frac{\partial^2 f}{\partial S_1 \partial S_3}(S) + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 f}{\partial S_3^2}(S) \end{cases}$$

Le laplacien  $\Delta f$ , calculé le long des directions orthogonales  $\underline{e}_1$  et  $\underline{\tilde{e}}$ , est donné par

$$\begin{aligned} \Delta f(S) &= f''(S) \cdot (\underline{e}_1, \underline{e}_1) + f''(S) \cdot (\underline{\tilde{e}}, \underline{\tilde{e}}) = \\ &= \frac{4}{3} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}(S) - \frac{\partial^2 f}{\partial S_1 \partial S_3}(S) + \frac{\partial^2 f}{\partial S_3^2}(S) \right\} \end{aligned}$$

Alors, comme pour l'opérateur  $\mathcal{B}$ , défini par

$$(3.34) \quad \mathcal{B}f(S) = - \left\{ f''(S) \cdot (\underline{e}_1, \underline{e}_1) + f''(S) \cdot (\underline{e}_2, \underline{e}_2) + f''(S) \cdot (\underline{e}_3, \underline{e}_3) \right\}$$

il est :

$$(3.35) \quad \Delta f = - \frac{2}{3} \mathcal{B}f$$

on préfère utiliser  $\mathcal{B}$ , plus facile à approcher sur le maillage que  $\Delta$ , pour imposer la régularité de  $f$ .

Pour cela, pour tout point  $P(m)$ ,  $m=1, \dots, N^*$ , on définit " points voisins de  $P(m)$  " les points dont la distance de  $P(m)$  est égale à  $\Delta S$  et qui appartiennent encore au maillage (Fig. 4) et l'on définit l'ensemble  $K(m)$  par :

$$K(m) = \left\{ k : 1 \leq k \leq N^* : P(k) \text{ est voisin de } P(m) \right\}$$

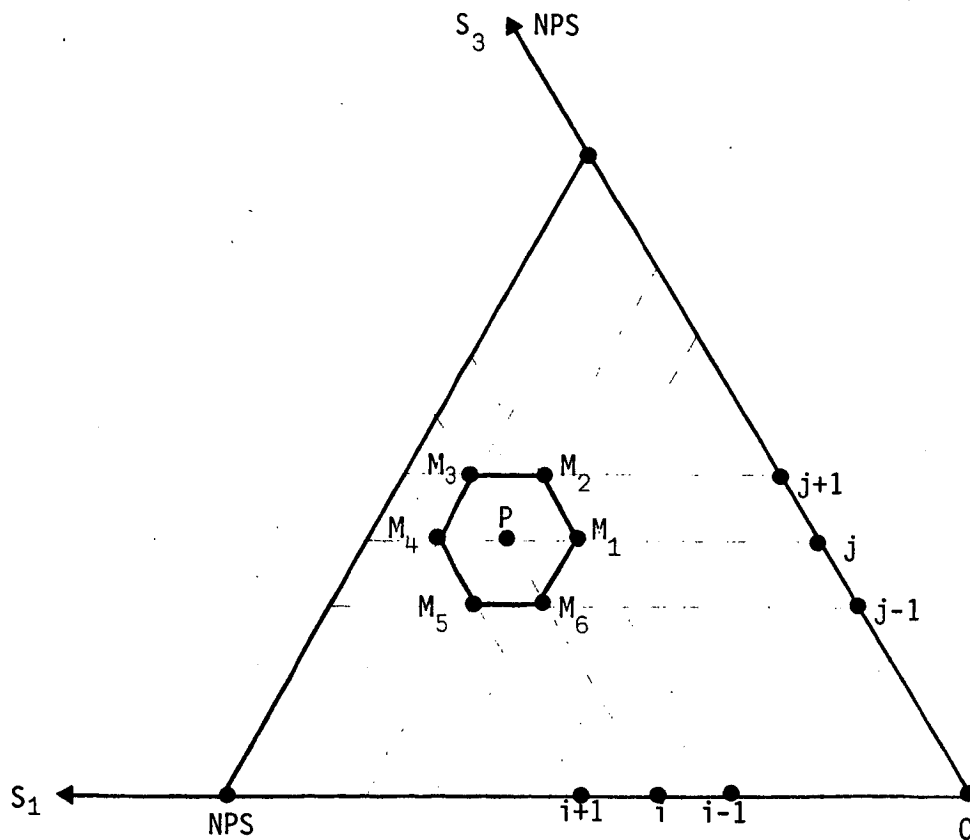


Figure 4

Définition du voisinage de P.

Si alors, les points  $M_1, M_2, \dots, M_6$ , et leur correspondants dans la transformation (3.29) sont les points d'indices :

$$\begin{aligned}
 M_1 &\equiv (i-1, j) && \leftrightarrow && m-1 \\
 M_2 &\equiv (i-1, j+1) && \leftrightarrow && m+NPS-j \\
 M_3 &\equiv (i, j+1) && \leftrightarrow && m+NPS+1-j \\
 M_4 &\equiv (i+1, j) && \leftrightarrow && m+1 \\
 M_5 &\equiv (i+1, j-1) && \leftrightarrow && m-NPS-1+j \\
 M_6 &\equiv (i, j-1) && \leftrightarrow && m-NPS-2+j
 \end{aligned}$$

on déduit qu'il est (Fig. 5), pour  $m = 1, \dots, N^*$ :

$$(3.36) \quad K(m) = \left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ m-1; m+NPS-j; m+NPS+1-j; m+1; m-NPS-1+j; m-NPS-2+j \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) \text{ est point intérieur} \\
 \\
 \left\{ m-1; m+NPS-j; m+NPS+1-j; m+1 \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) \text{ est sur le côté } S_3 = 0 \\
 \\
 \left\{ m+NPS+1-j; m+1; m-NPS-1+j; m-NPS-2+j \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) \text{ est sur le côté } S_1 = 0 \\
 \\
 \left\{ m-NPS-1+j; m-NPS-2+j; m-1; m+NPS-j \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) \text{ est sur le côté } S_1 + S_3 = 1 \\
 \\
 \left\{ m+NPS+1-j; m+1 \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) = (0,0) \\
 \\
 \left\{ m-NPS-1+j; m-NPS-2+j \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) = (0, NPS) \\
 \\
 \left\{ m-1; m+NPS-j \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{si } P(m) = (NPS, 0)
 \end{array} \right.$$

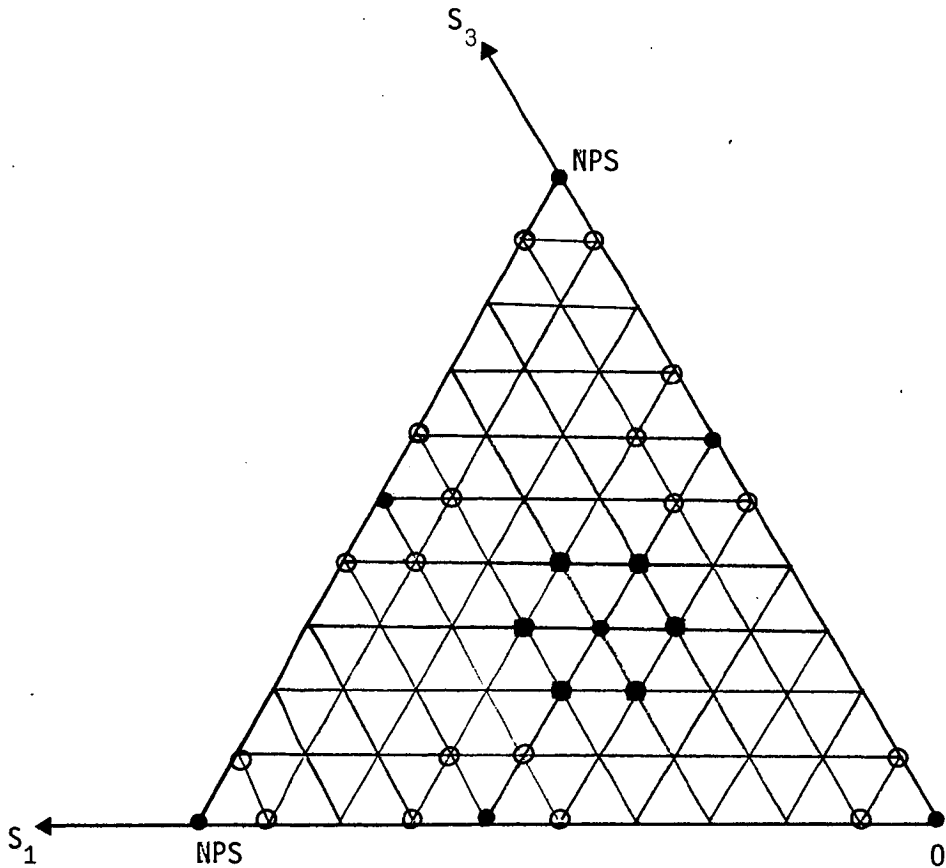


Figure 5

Voisinage des points de discrétisation

Enfin, on définit le vecteur  $\underline{Bf}$ , de composantes  $Bf(m)$ ,  $m = 1, \dots, N^*$ , par :

$$Bf(m) = \begin{cases} \frac{1}{(\Delta S)^2} \left[ 6 f(m) - \sum_{k \in K(m)} f(k) \right] & \text{Si } P(m) \text{ est un point} \\ & \text{intérieur} \\ \frac{1}{(\Delta S)^2} \left[ 4 f(m) - \sum_{k \in K(m)} f(k) \right] & \text{Si } P(m) \text{ est un point sur} \\ & \text{les côtés} \\ \frac{1}{(\Delta S)^2} \left[ 2 f(m) - \sum_{k \in K(m)} f(k) \right] & \text{Si } P(m) \text{ est un sommet.} \end{cases}$$

Comme dans l'étape 4, on écrit :

(3.37)  $\underline{Bf} = \underline{Bf}$

où  $\underline{f}$  est le vecteur de composantes  $f(m)$ ,  $m = 1, \dots, N^*$  et  $B$  est la matrice de composantes  $b(m, \ell)$ ,  $m, \ell = 1, \dots, N^*$ , définie par :

$$(3.38) \quad b(m, \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq m \quad \text{et} \quad \ell \notin K(m) \\ -1 & \text{si } \ell \neq m \quad \text{et} \quad \ell \in K(m) \\ 6 & \text{si } \ell = m \quad \text{et} \quad P(m) \text{ est intérieur} \\ 4 & \text{si } \ell = m \quad \text{et} \quad P(m) \text{ est sur les côtés} \\ 2 & \text{si } \ell = m \quad \text{et} \quad P(m) \text{ est un sommet} \end{cases}$$

Donc pour (3.35) et (3.37) la propriété (iv) équivaut à résoudre le problème :

$$(P_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer le} \\ \text{avec,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{N^*} \\ \underline{x} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(3.39) \quad J(\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^3 \|B \underline{kr}_\ell\|^2$$

□

-----  
Propriété (v)  
-----

Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triangles qui couvrent le domaine triphasique et, pour toute fonction  $f$ , on notera par  $f^T$  la valeur de  $f$  au barycentre du triangle  $T \in \mathcal{T}$ .

Soit encore  $\underline{v}_\ell$  le vecteur unitaire, centré dans le barycentre du triangle  $T \in \mathcal{T}$  et orienté vers le point où  $S_\ell = 1$  (Fig. 6).

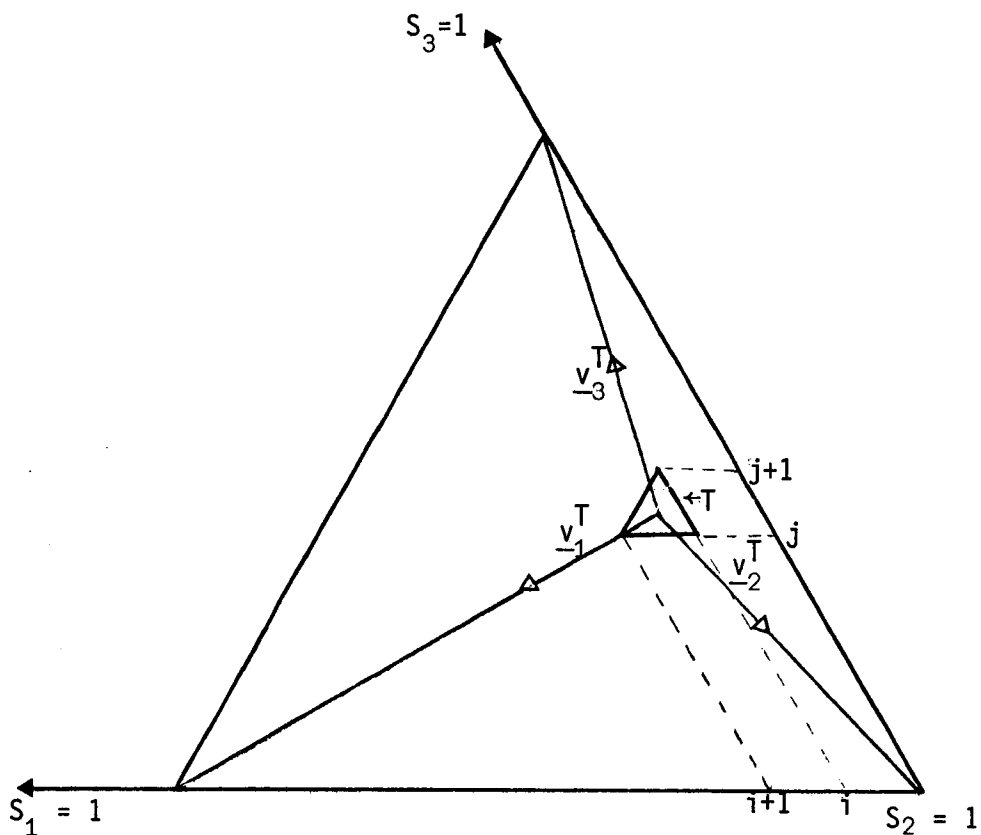


Figure 6

Valeurs  $\underline{v}_\ell^T$ ,  $\ell = 1, 2, 3$  et  $T \in \mathcal{T}$

On force alors les perméabilités relatives  $kr_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ , à être croissantes, dans chaque triangle  $T \in \mathcal{T}$ , dans la direction  $\underline{v}_\ell$  et à satisfaire donc la relation :

$$(D_{\underline{v}_\ell} kr_\ell)^T \geq 0 \quad \ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

équivalente à :

$$(D_{\underline{v}_\ell} (\text{Log } kr_\ell))^T \geq 0 \quad \ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

Comme  $kr_\ell = 0$  dans les points où  $v_\ell = 0$ , on peut donner à toutes ces inégalités le poids  $v_\ell^T$  et imposer donc que ce soit :

$$(3.40) \quad v_\ell^T (D_{\underline{v}_\ell} (\text{Log } kr_\ell))^T \geq 0 \quad \ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

De (1.20) et (3.30) on déduit que la propriété (v) est satisfaite, si l'on a :

$$(3.41) \quad v_\ell^T (D_{\underline{v}_\ell} x)^T + (D_{\underline{v}_\ell} v_\ell)^T \geq 0 \quad \ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

On remarque que cette relation constitue un système de  $3 \cdot NT$  inégalités, si  $NT$  est le nombre des triangles  $T \in \mathcal{T}$ .

On va exprimer maintenant  $(D_v f)^T$ , pour toute  $f$ , en fonction des valeurs de  $f$  dans les points du maillage, afin d'écrire le système (3.41) d'une façon plus utile du point de vue de l'algorithme.

Soit donc  $M^T = (S_1^T, S_3^T)$  le barycentre du triangle  $T$ , de sommets  $M_j = (S_{1,j}^T, S_{3,j}^T)$ ,  $j = 1, 2, 3$  et soient  $x_1, x_2, x_3$  les coordonnées barycentriques de  $M^T$ , définies par :

$$(3.42) \quad A^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ S_1^T \\ S_3^T \end{bmatrix}$$

avec

$$A^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_{1,1}^T & S_{1,2}^T & S_{1,3}^T \\ S_{3,1}^T & S_{3,2}^T & S_{3,3}^T \end{vmatrix}$$

Alors on a :

$$f(M^T) = [f(M_1^T) \quad f(M_2^T) \quad f(M_3^T)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

d'où,  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{v} = (v_1, v_3)$

$$(3.43) \quad f'(M^T) \cdot \underline{v} = [f(M_1^T) \quad f(M_2^T) \quad f(M_3^T)] \begin{bmatrix} x_1' \cdot \underline{v} \\ x_2' \cdot \underline{v} \\ x_3' \cdot \underline{v} \end{bmatrix}$$



En dérivant (3.42) par rapport à  $M^T$ , on a

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \\ \underline{x}_3' \end{bmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, pour (3.43), on peut exprimer (3.41) sous la forme :

$$(3.44) \left\{ \underline{v}_\ell^T \left[ x(M_1^T) \ x(M_2^T) \ x(M_3^T) \right] \cdot \underline{av}_\ell^T \geq - \left[ v_{\ell}(M_1^T) \ v_{\ell}(M_2^T) \ v_{\ell}(M_3^T) \right] \cdot \underline{av}_\ell^T \right.$$

$\ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$

avec

$$(3.45) \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}_\ell^T = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 v_{\ell}(M_j^T) \\ \underline{v}_\ell^T = (v_{1,\ell}^T, v_{3,\ell}^T) \\ \underline{av}_\ell^T = \begin{bmatrix} av_\ell^T(1) \\ av_\ell^T(2) \\ av_\ell^T(3) \end{bmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{1,\ell}^T \\ v_{3,\ell}^T \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \ell = 1, 2, 3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

On observe qu'il y a deux types de triangles (Fig. 7) dans la décomposition et que les triangles du premier type ont pour sommets les points d'indices :

$$(3.46) \left\{ \begin{array}{l} (i, j) \leftrightarrow m \\ (i+1, j) \leftrightarrow m+1 \\ (i, j+1) \leftrightarrow m + NPS + 1 - j \end{array} \right.$$

tandis que les triangles du second type ont pour sommets les points d'indices

$$(3.47) \quad \begin{cases} (i,j) & \leftrightarrow & m \\ (i,j+1) & \leftrightarrow & m + NPS + 1 - j \\ (i-1, j+1) & \leftrightarrow & m + NPS - j \end{cases}$$

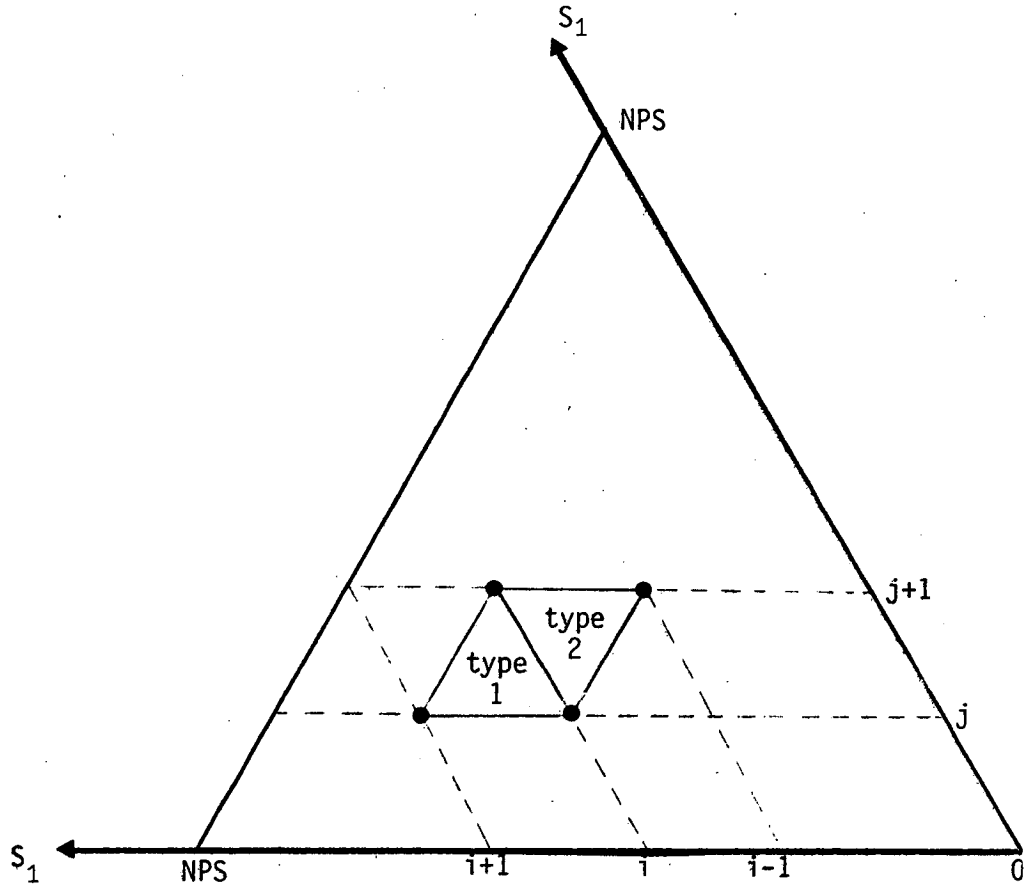


Figure 7

Types de triangles

Cette remarque permet d'écrire (3.44) sous la forme :

$$(3.47) \quad v_{\ell}^T \underline{a}_{\ell}^T \underline{x} \geq q_{\ell}^T \quad \ell=1,2,3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

où

$$(3.48) \quad q_{\ell}^T = - \left[ v_{\ell}(M_1^T) \ v_{\ell}(M_2^T) \ v_{\ell}(M_3^T) \right] \cdot \underline{av}_{\ell}^T \quad \ell=1,2,3 \text{ et } T \in \mathcal{T}$$

et  $\underline{a}_{\ell}^T$  est un vecteur à  $N^*$  composantes, défini, grâce à (3.45) par :

$$(3.49) \quad \underline{a}_{\ell}^T(k) = \begin{cases} \text{si } T \text{ a pour sommets les points d'indices (3.46) [resp.(3.47)]} \\ 0 \text{ si } k \neq m, m+1, m+NPS+1-j \text{ [resp. si } k \neq m, m+NPS+1-j, m+NPS-} \\ \underline{av}_{\ell}^T(1) \text{ si } k = m \\ \underline{av}_{\ell}^T(2) \text{ si } k = m+1 \text{ [resp. } k = m+NPS+1-j] \\ \underline{av}_{\ell}^T(3) \text{ si } k = m+NPS+1-j \text{ [resp. } k=m+NPS-j] \end{cases}$$

□

-----  
Propriété (vi)  
-----

De (1.20) et (3.30), on déduit que cette propriété est vérifiée si

$$(3.50) \quad x(m) \leq cb(m) \quad m = 1, \dots, N^*$$

avec

$$cb(m) = \text{Min}_{j=1,2,3} \left\{ \text{Log} \frac{d_j}{v_j(m)} \text{ kr}_{j,\max} \right\} \quad m = 1, \dots, N^*$$

□

En suivant les mêmes idées que dans l'étape 4, on a déterminé  $\underline{x} \in \mathbb{R}^{N^*}$ , qui résoud  $(P_0)$  sous :

- les contraintes d'inégalités linéaires (3.47),
- les contraintes de borne (3.50),
- les contraintes d'égalité (3.31),

de la façon suivante .

A partir de (3.47) on définit :

$$(3.51) \quad \text{Maxc}(\underline{x}) = \underset{\substack{\ell=1,2,3 \\ T \in \mathcal{C}}}{\text{Max}} \left\{ -\eta, q_{\ell}^T - v_{\ell}^T a_{\ell}^T \underline{x} \right\}$$

avec  $\eta$  constante positive,  $\neq 0$ .

Il est clair que :

$$(3.52) \quad \text{Maxc}(\underline{x}) = -\eta$$

si toutes les contraintes (3.47) sont vérifiées, tandis que dans le cas contraire :

$$(3.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \ell_{\text{max}}, T_{\text{max}} : 1 \leq \ell_{\text{max}} \leq 3, T_{\text{max}} \in \mathcal{C}, \text{ tels que} \\ \text{Maxc}(\underline{x}) = q_{\ell_{\text{max}}}^{T_{\text{max}}} - v_{\ell_{\text{max}}}^{T_{\text{max}}} a_{\ell_{\text{max}}}^{T_{\text{max}}} \underline{x} \end{array} \right.$$

On défini alors la fonctionnelle de pénalisation :

$$\text{JP}(\underline{x}) = \varepsilon_q J(\underline{x}) + \frac{1}{\varepsilon} \text{Maxc}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{N^*}$$

avec  $\varepsilon_q$  et  $\varepsilon$  constantes positives et l'on résoud le problème :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{déterminer le} \\ \text{Min}_{\underline{x}} \text{JP}(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{N^*} \\ \text{sous les contraintes de borne (3.50) et les contraintes} \\ \text{d'égalité (3.31)} \end{array} \right.$$

La méthode d'optimisation utilisée est celle utilisée pour le problème (P<sup>13</sup>). On a construit le vecteur gradient  $\underline{\nabla \text{JP}}$ , de composantes  $\nabla \text{JP}(m)$ ,  $m=1, \dots, N^*$ , de la façon suivante :

$$(3.54) \quad \nabla \text{JP}(m) = 0$$

si  $P(m)$  est un sommet ou est sur les côtés, tandis que si  $P(m)$  est à l'intérieur :

$$(3.55) \quad \nabla J P(m) = 2\varepsilon_q \sum_{j=1}^3 [B^T B \underline{kr}_j]_m \quad kr_j(m) +$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \begin{cases} 0 & \text{si (3.52) est vérifiée} \\ -v_{\ell_{\max}}^{T_{\max}} \quad a_{\ell_{\max}}^{T_{\max}}(m) & \text{si (3.53) est vérifiée} \end{cases}$$

où  $[\cdot]_m$  est la  $m$ -ième composante du vecteur  $[\cdot]$ .

#### IV - RESULTATS NUMERIQUES

On présente ici les résultats numériques obtenus sur un exemple. Les données dans les deux systèmes diphasiques eau-huile et gaz-huile sont représentés sur les figures 8 et 9.

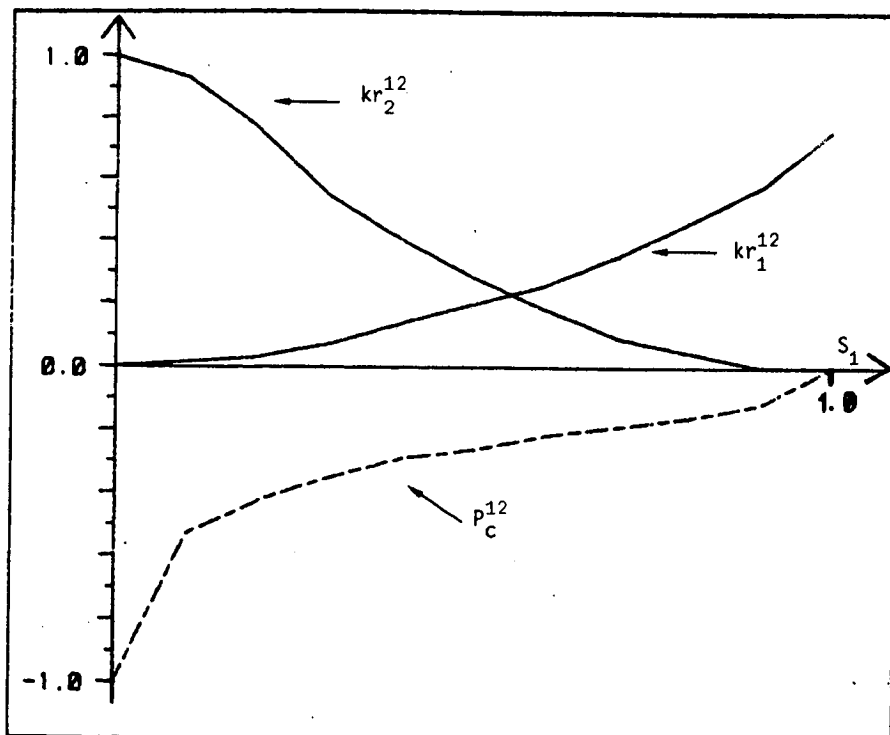


Figure 8

Données dans le système diphasique eau-huile.

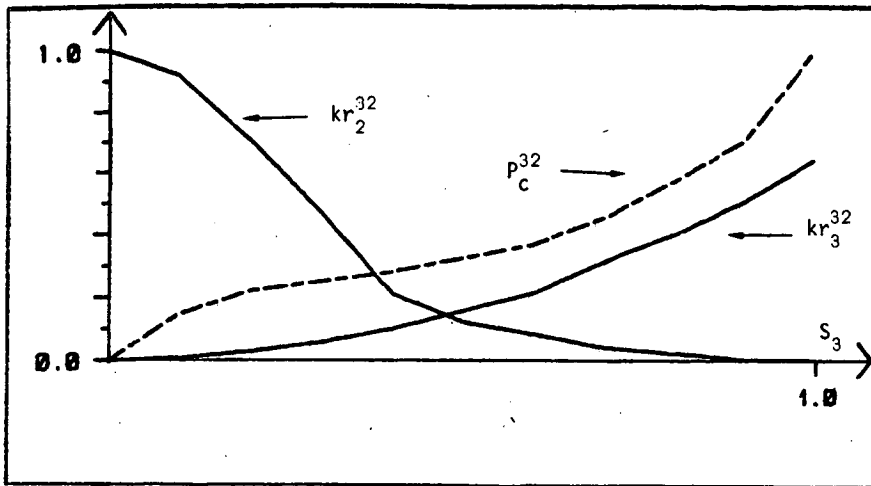


Figure 9

Données dans le système diphasique gaz-huile

On a utilisé aussi les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = .5 & \mu_2 = 1.45 & \mu_3 = .0128 \\ B_1 = 1. & B_2 = 1. & B_3 = 1. \end{array} \quad (\text{cP})$$

Pour le choix de  $v_2$  dans l'étape 2, on a utilisé le modèle de Stone. Dans la figure 10 sont représentées les courbes de niveau de cette fonction, pour les valeurs .01, .05, .1, .2, .3, ..., .8, .9, 1. A la fin de l'étape 3, on obtient les fractional flows  $v_1$  et  $v_3$ . Dans les figures 11 et 12 sont représentées les courbes de niveau (pour les mêmes valeurs qu'avant) de ces fonctions et elles sont comparées avec les fractional flows obtenus dans le modèle de Stone.

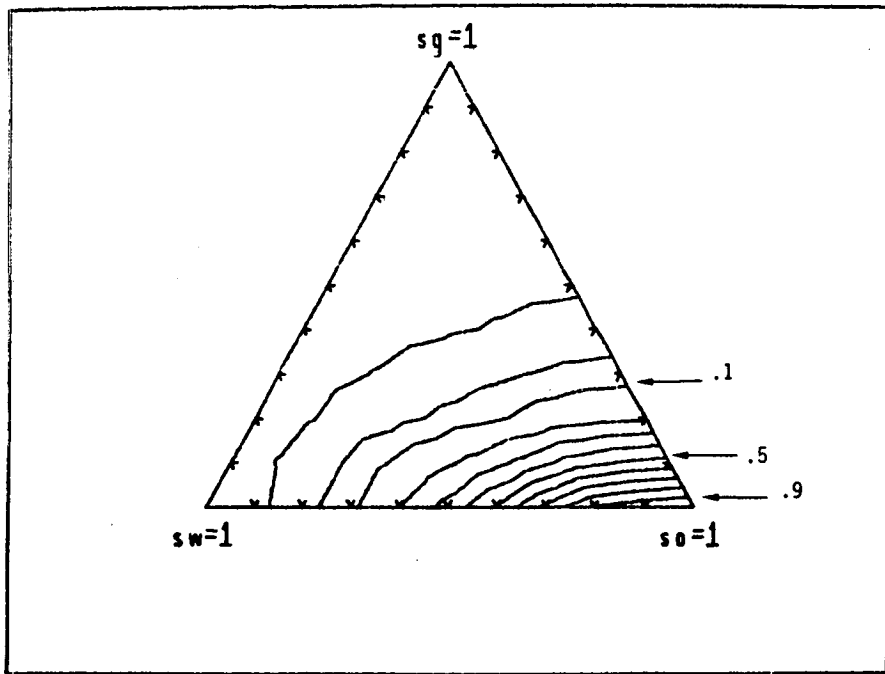


Figure 10

Fractional flow  $v_2$  (égal pour les deux modèles [1] et [2])

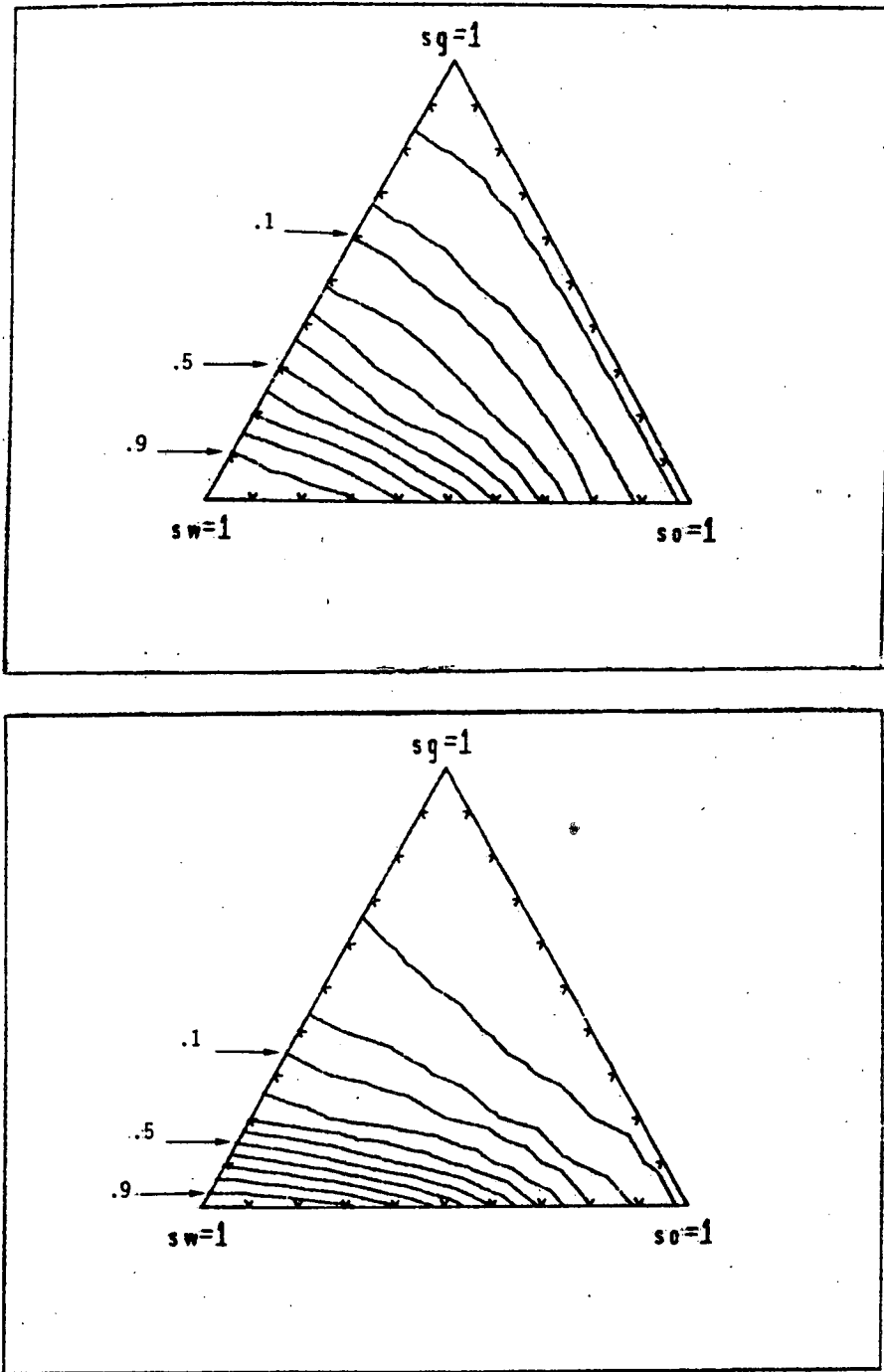


Figure 11

Fractional flows  $v_1$  obtenus avec la condition de différentielle totale (en haut) et par la méthode de Stone (en bas).



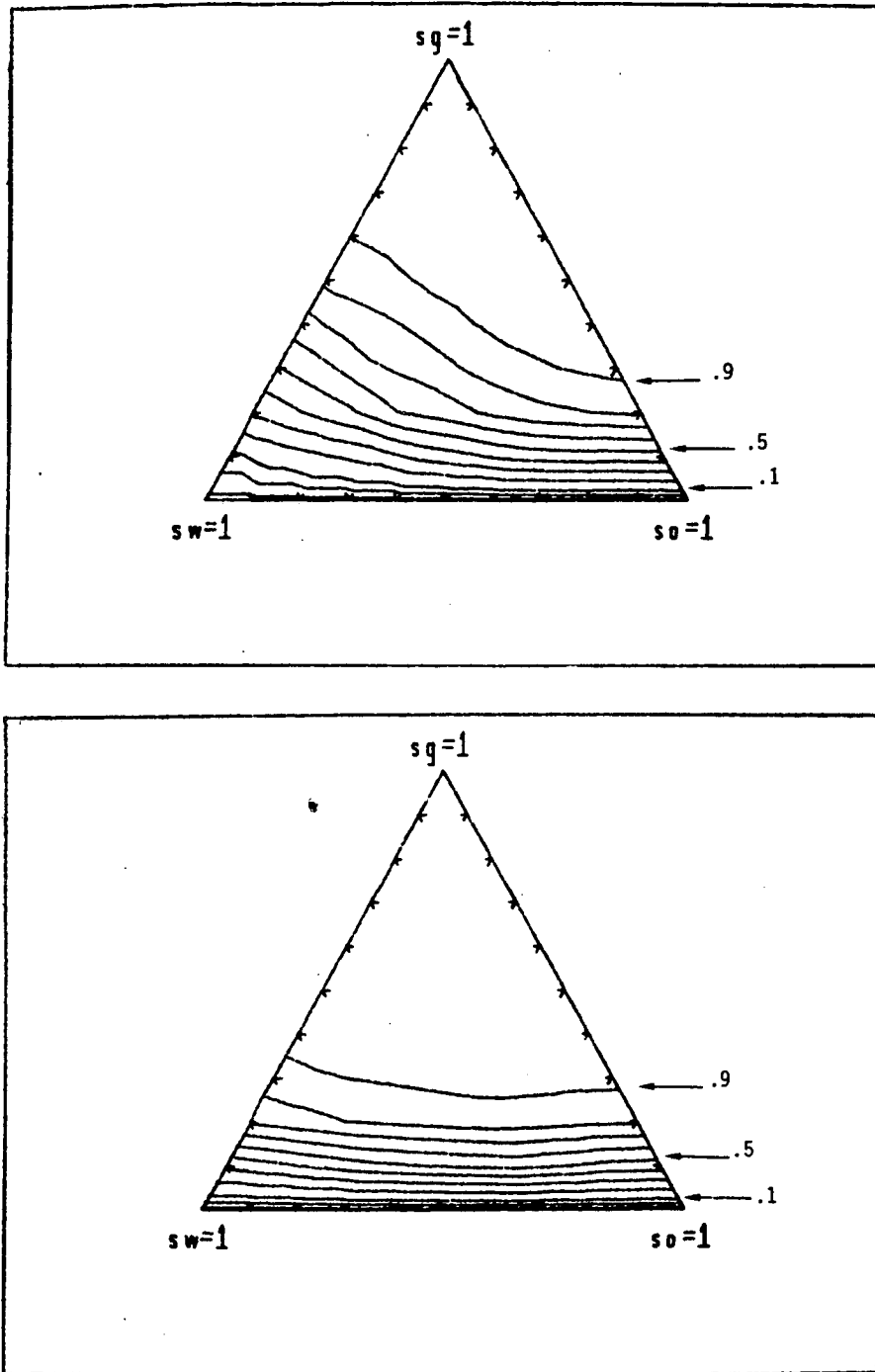


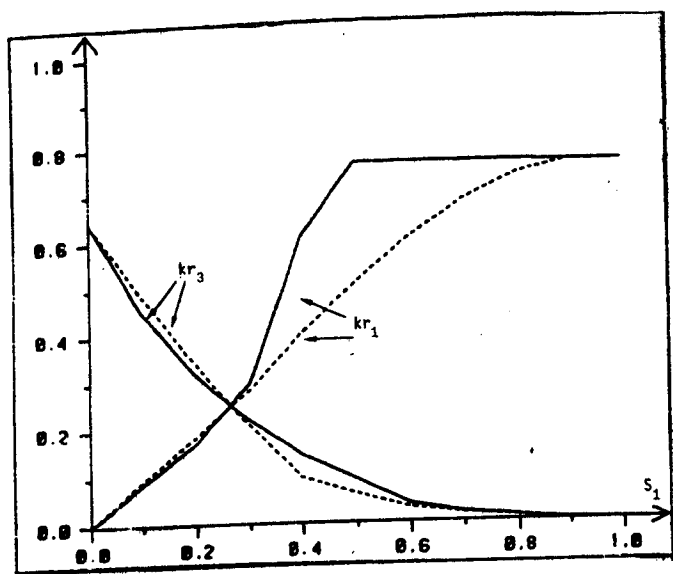
Figure 12

Fractional flows  $v_3$  obtenus avec la condition de différentielle totale (en haut) et par la méthode de Stone (en bas).

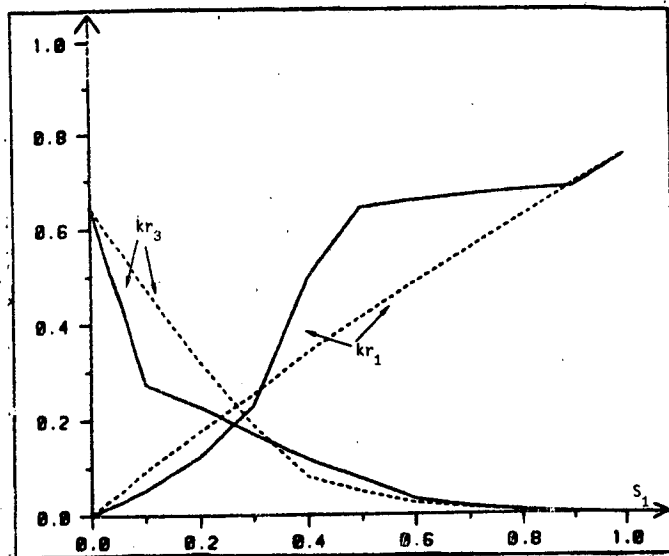
On remarque que dans le modèle utilisant la condition de différentielle totale, les isovaleurs des fonctions  $v_1$  et  $v_3$  se distribuent plus uniformément dans le domaine, de façon que la valeur maximale, 1, est atteinte plus doucement que dans le modèle de Stone.

Dans l'étape 4 on a calculé la mobilité globale et les perméabilités relatives sur le côté d'équation  $S_1 + S_3 = 1$ .

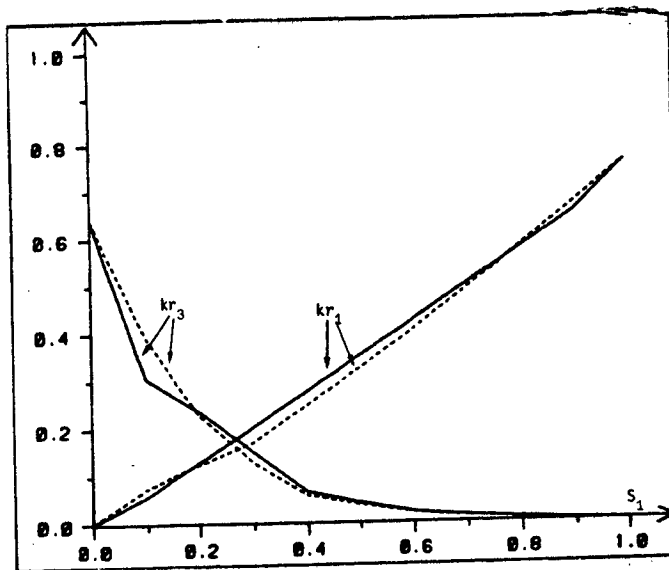
On présente dans les figures 13a, b, c les perméabilités relatives obtenues avec deux différents choix de  $\epsilon_q$  et de  $\underline{x}^o$ , le vecteur qui initialise l'optimisation. En trait continu sont représentés  $kr_1(\underline{x}^o)$  et  $kr_3(\underline{x}^o)$  tandis qu'en pointillé  $kr_1$  et  $kr_3$  dans la configuration finale. Les résultats de la figure 13c ont été obtenus, avec un autre choix de  $\underline{x}^o$  et  $\epsilon_q = 1$ , en imposant que  $kr_j$ ,  $j=1$  et  $3$ , soient concaves. On déduit, suite à ces résultats, qu'on peut tenir compte utilement d'informations éventuelles sur le côté  $S_1 + S_3 = 1$ , pour choisir convenablement le point  $\underline{x}^o$  et le paramètre  $\epsilon_q$ . Pour lancer l'étape 5, on a utilisé les résultats de la figure 13a et l'on a obtenu la mobilité globale et les perméabilités relatives qui dans les figures 14, 15, 16, et 17 sont comparées avec celles obtenues dans le modèle de Stone. On voit sur la fig.14 que jusqu'à l'isovaleur 1, la mobilité globale dans les deux systèmes est équivalente, mais que les différences sont sensibles pour les isovaleurs plus élevées. Il est intéressant de remarquer la prise en compte simultanée des trois fluides dans la détermination des perméabilités relatives à l'intérieur du triangle, ainsi que la dépendance des données sur les côtés du triangle.



a



b



c

Figure 13

Perméabilités triphasiques sur le côté d'équation  $S_1 + S_3 = 1$ , obtenues avec différents choix de  $x^o$  et de  $\epsilon_q$ .

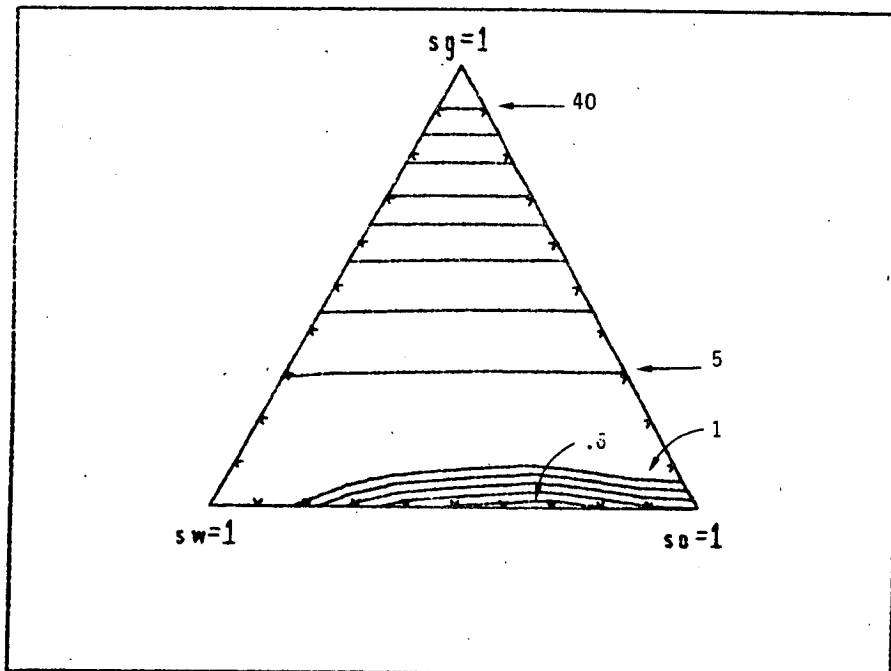
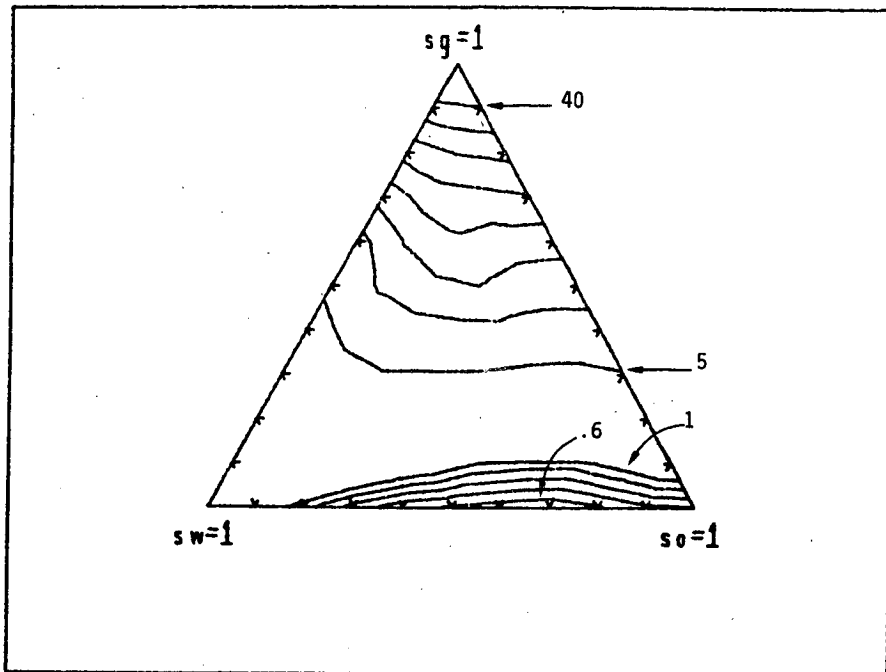


Figure 14

Mobilité globale obtenue avec la condition de différentielle totale (en haut)  
et par la méthode de Stone (en bas).

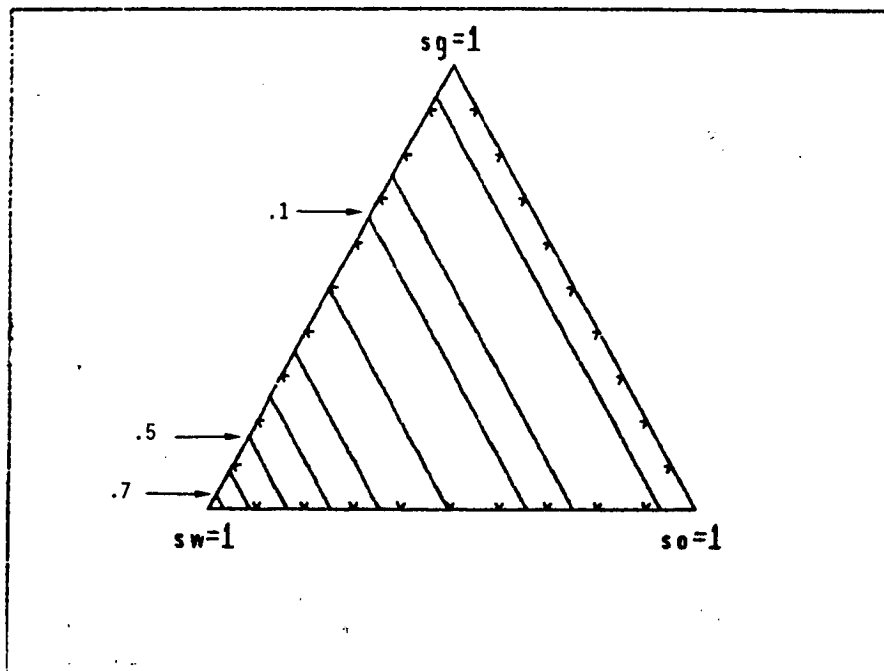
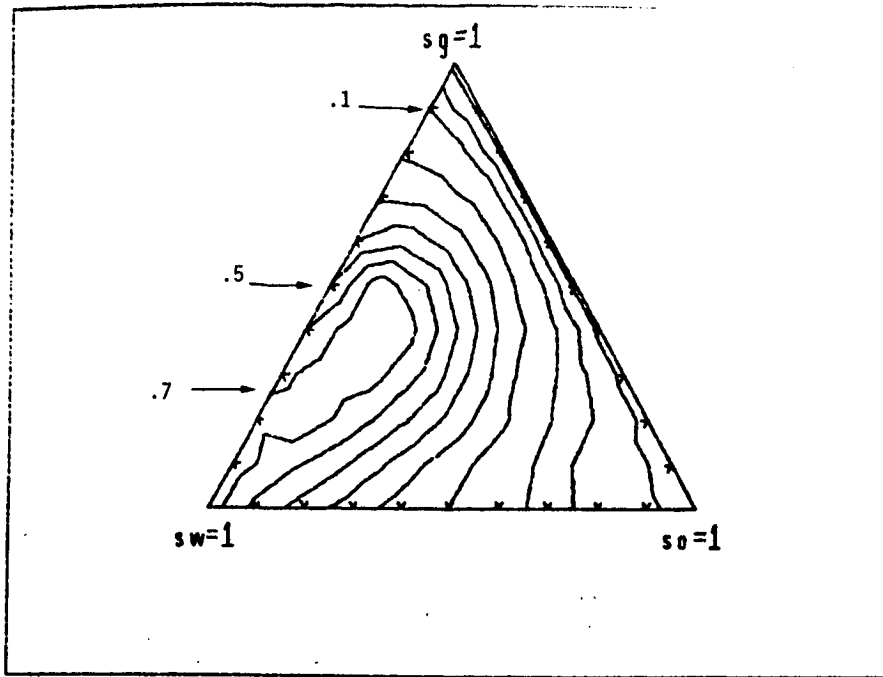


Figure 15

Perméabilité relative triphasique de l'eau obtenue avec la condition de différentielle totale (en haut) et par la méthode de Stone (en bas).

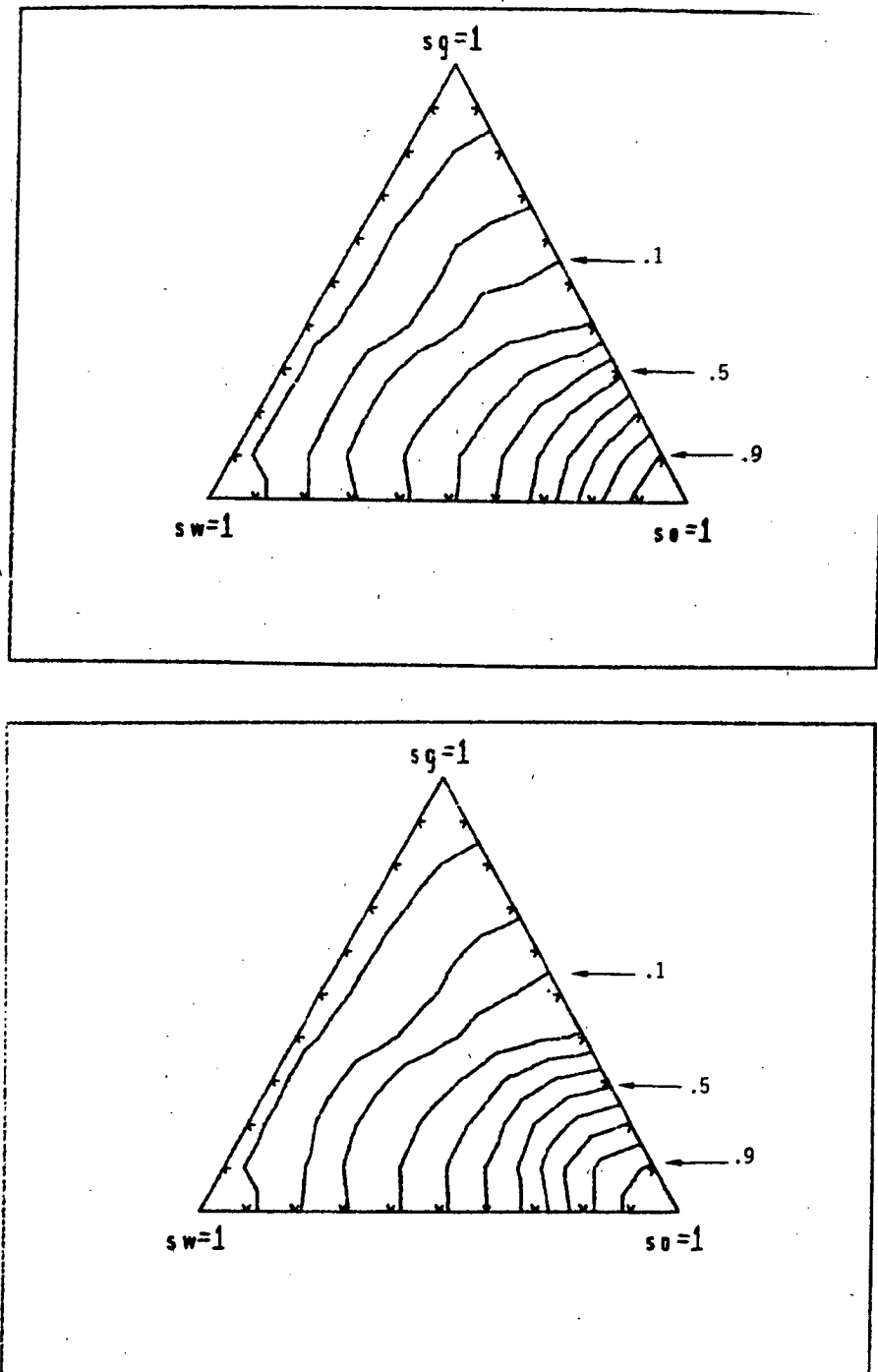


Figure 16

Perméabilité relative triphasique de l'huile obtenue avec la condition de différentielle totale (en haut) et par la méthode de Stone (en bas).

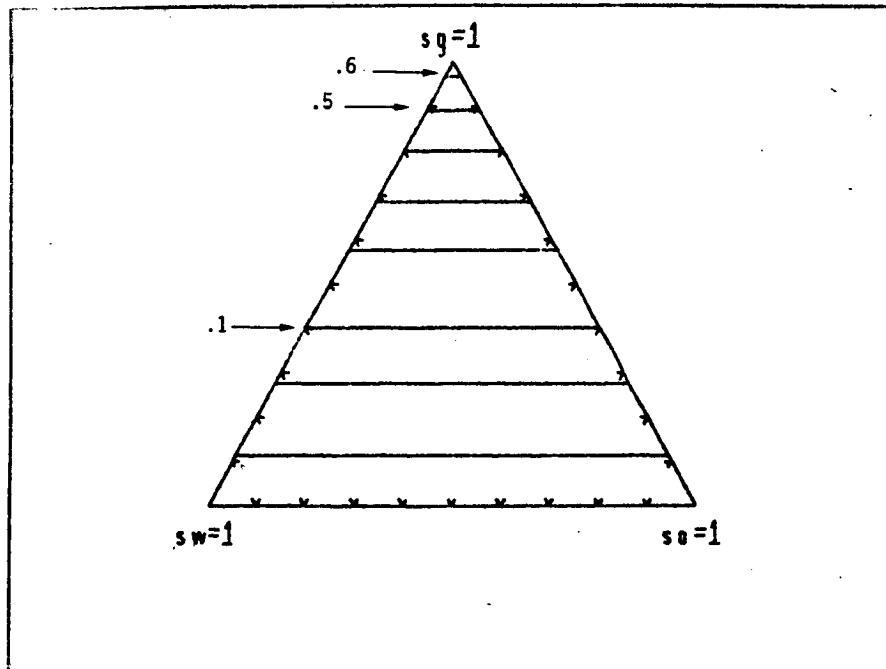
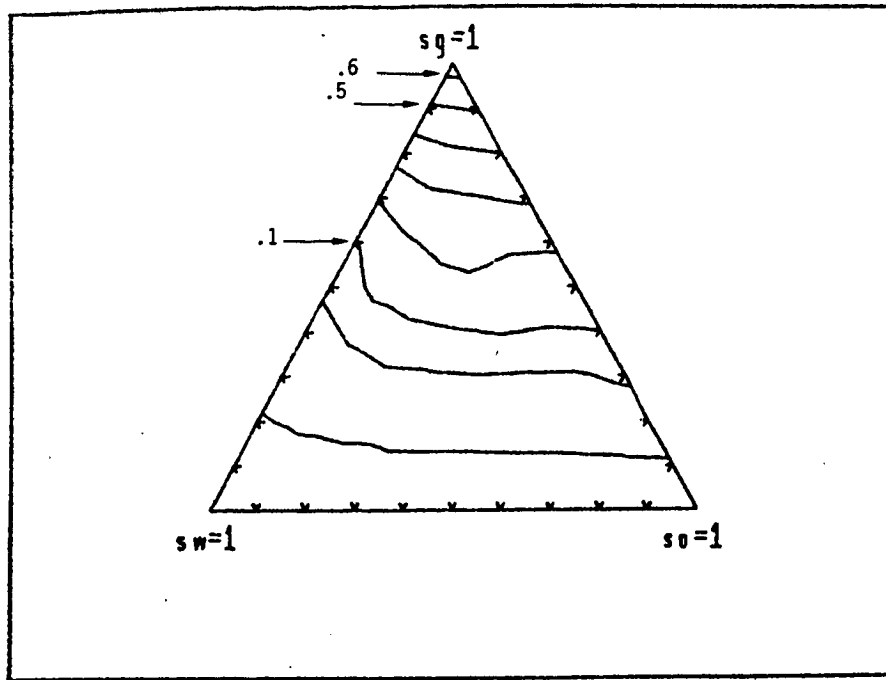


Figure 17

Perméabilité relative triphasique du gaz, obtenue avec la condition de différentielle totale (en haut) et par la méthode de Stone, (en bas).

V - NOTES SUR L'IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME

On a utilisé l'ordinateur H.B. DPS 68 Multics de l'INRIA pour mettre en oeuvre l'algorithme décrit jusqu'à ici, et l'on a construit trois programmes :

- mono, qui effectue les étapes 1, 2, 3, 4;
- fin, qui utilise les résultats de mono, pour effectuer l'étape 5;
- carread, qui trace les courbes de niveau des fonctions  $kr_j$ ,  $v_j$ ,  $j = 1,2,3$  et  $d$ , dans les modèles de Stone et de Chavent respectivement.

Les programmes sont dans les libraires du Projet Identification et Estimations de Paramètres. Ils utilisent des fichiers en commun et ils doivent être exécutés dans l'ordre.

La séquence d'utilisation est la suivante :

```
att 03 monodat.dat
    04 monoris. dat
    14 monocour.dat
    15 monobidi.dat
```

```
mono
att 15 monobidi.dat
    03 fin. dat
    07 bidiris. dat
    08 bidicour.dat
    11 file11
    12 file12
    13 bidi13.dat
```

```
fin
att 03 carread. dat
    07 carris. dat
    08 bidicour.dat
```

```
tek
carread
```

où

monodat.dat est le fichier des données de mono. Lu dans mono.  
monoris.dat est le fichier des écritures issues de mono. Ecrit dans mono.  
monocour.dat est le fichier qui contient les coordonnées de toutes les courbes des fonctions  $kr_j$ ,  $v_j$ ,  $d$  sur le côté  $S_1+S_3=1$ , dans les deux modèles de  $j$ ,  $v_j$  Stone et Chavent.<sup>1 3</sup> Ecrit dans mono. Eventuellement lu dans un programme de représentation de courbes dans un plan cartésien (dess).



|                    |   |
|--------------------|---|
| monobidi.dat       | est le fichier qui contient les valeurs de la fonction $x = \text{Log } d$ . Ecrit dans mono et lu dans fin.  |
| fin.dat            | est le fichier des données du programme fin. Lu dans fin.   |
| bidiris.dat        | est le fichier des écritures issues de fin. Ecrit dans fin.   |
| bidicour.dat       | est le fichier qui contient les coordonnées des courbes dont on veut les courbes de niveau. Ecrit dans fin et lu dans carread.  |
| file11<br>(file12) | est le fichier qui contient les coordonnées des courbes de perméabilités relatives et de la pression capillaire dans le système diphasique eau-huile (gaz-huile). Ecrit dans fin. Lu dans dess. |
| bidil3.dat         | Contient les coordonnées des perméabilités relatives calculées sur le côté $S_1 + S_3 = 1$ . Ecrit dans fin. Lu dans dess.  |
| carread.dat        | est le fichier des données de carread. Lu dans carread.   |
| carris.dat         | est le fichier des écritures issues de carread. Ecrit dans carread.   |

Le programme mono appelle les sousprogrammes :

- simul1d, qui fournit la valeur de la fonctionnelle et du gradient pour l'étape 4;
- m2fc1, qui résout le problème de minimisation ( $P^{13}$ ); c'est un programme MODULOPT et la méthode est décrite dans [3];
- sortan, appelée par m2fc1.

Le programme fin appelle les sousprogrammés :

- simul, qui fournit la valeur de la fonctionnelle et du gradient pour l'étape 5;
- m2fc1, qui résout le problème de minimisation (P);
- sortan

Le programme carread appelle les sousprogrammes :

- permr qui interpole les valeurs obtenues des fonctions pour fournir suffisamment de valeurs au tracement des courbes de niveau;
- programmes de la librairie benson-02;
- programmes de la librairie tectronix.

## VI - CONCLUSIONS

Après avoir rappelé l'algorithme pour la détermination des perméabilités relatives triphasiques, basé sur la condition dite "de différentielle totale" [1], on a décrit en détail les étapes de mise en oeuvre informatique. Les résultats obtenus sur des exemples ont été comparés à ceux qui sont fournis par le modèle de Stone [2]. A la différence de ces derniers, ils tiennent compte d'une façon intéressante de l'interaction des trois fluides dans le domaine triphasique. Ils respectent bien, compte tenu de la discrétisation utilisée, toutes les propriétés physiques.

On peut donc utiliser un tel algorithme pour définir, dans la modélisation des écoulements triphasiques en milieux poreux, les perméabilités relatives, les "fractional flows" et la mobilité globale de trois fluides immiscibles et compressibles.

Les auteurs remercient C. Lemaréchal pour l'aide qu'il leur a apporté, dans le choix et le maniement de ses programmes d'optimisation.

\*\*\*\*\*

NOTATIONS

1 indice pour l'eau

2 indice pour l'huile

3 indice pour le gaz

$P_j$  pression pour le fluide j

$P_c^{12} = P_1 - P_2$  pression capillaire eau-huile

$P_c^{32} = P_3 - P_2$  pression capillaire gaz-huile

$S_j$  saturation réduite du fluide j

d mobilité globale,  $d = kr_1 d_1 + kr_2 d_2 + kr_3 d_3$

$d_j$  mobilité relative du fluide j,  $d_j = \frac{B_j}{\mu_j}$

$\mu_j$  viscosité du fluide j

$B_j$  facteur de volume du fluide j

$v_j$  fractional flow du fluide j,  $v_j = kr_j \frac{d_j}{d}$

$kr_{j,max} = \max_{S_j} \{kr_j(S_j)\}$ ,  $S_j \in [0,1]$ .

\*\*\*\*\*

**BIBLIOGRAPHIE**

---

- [1] G. CHAVENT, J. JAFFRE  
*"Mathematical models and finite elements for reservoir simulation"*,  
to appear in 1985.
- [2] H.L. STONE  
*"Probability model for estimating three phase relative permeabilities"*,  
Trans SPE-AIME, 1970, pp. 214-218.
- [3] C. LEMARECHAL, J.J. STRODIOT, A. BIHAIN  
*"On a bundle algorithm for nonsmooth optimization"*  
In Nonlinear Programming 4, Mongasarian, Meyer, Robinson (Eds),  
Academic Press 1981, pp. 245-282.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

