

Justification théorique d'une méthode de résolution des équations de Maxwell en milieu polarisable

Bernardo Cockburn, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Bernardo Cockburn, Patrick Joly. Justification théorique d'une méthode de résolution des équations de Maxwell en milieu polarisable. RR-0326, INRIA. 1984. inria-00076231

HAL Id: inria-00076231

<https://hal.inria.fr/inria-00076231>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 326

**JUSTIFICATION THÉORIQUE
D'UNE MÉTHODE
DE RÉOLUTION
DES ÉQUATIONS DE MAXWELL
EN MILIEU POLARISABLE**

**Bernardo COCKBURN
Patrick JOLY**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél (3) 954 90 20

Septembre 1984

JUSTIFICATION THEORIQUE D'UNE METHODE DE RESOLUTION DES
EQUATIONS DE MAXWELL EN MILIEU POLARISABLE

Patrick JOLY & Bernardo COCKBURN

INRIA B.P. 105 78153 Le Chesnay Cedex FRANCE

*Ce travail a été réalisé en grande partie dans le cadre d'un contrat
INRIA/CGG/CFP/SNEA (P).*

RESUME

La détermination du champ électromagnétique en milieu conducteur polarisable monodimensionnel conduit à la résolution d'un système integro-différentiel faisant intervenir un opérateur de convolution en temps. Une méthode de résolution numérique d'un tel problème a été proposée dans [1], [2]. Nous présentons ici un certain nombre de résultats théoriques destinés à justifier l'approche adoptée dans les différentes phases de l'approximation. Ces résultats complètent ceux obtenus dans [1].

ABSTRACT

The determination of the electromagnetic field in a monodimensional conductor polarizable medium leads to the resolution of an integro-differential system including a time convolution operator. A method of numerical resolution of such a problem was proposed in [1], [2]. We present here some theoretical results in order to justify the approach adopted in the different phases of approximation. These results complete those obtained in [1].

Mots Clés

Système integro-différentiel - Convolution - Polarisation électromagnétique - Transformation de Fourier - Approximation par fractions rationnelles.

Key Words

Integro-differential system - Convolution - Electro-magnetic polarization - Fourier transform - Approximation by rational fractions.

NOTATIONS

Espaces Fonctionnels.

- Nous poserons :

$$1 \leq p < +\infty \quad L^p(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\omega)|^p d\omega < +\infty \}$$

$$L^+(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |f(\omega)| < +\infty \}$$

Nous désignerons par $L^p(\mathbb{R})$, le sous espace de $L^p(\mathbb{R})$, des fonctions à valeurs réelles et par $L^p(\mathbb{R}^+)$ le sous espace de $L^p(\mathbb{R})$, des fonctions "causales", c'est-à-dire à support dans \mathbb{R}^+ . Enfin, nous poserons $L^p(\mathbb{R}^+) = L^p(\mathbb{R}^+) \cap L^p(\mathbb{R})$.

- $\Omega =]0, +\infty[$ désignera le demi espace pour la variable d'espace x . Sauf mention explicite du contraire, les notations (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|$ désigneront respectivement le produit scalaire et la norme usuelle de $L^2(\Omega)$.

Transformation de Fourier.

- Nous désignerons par \mathcal{F} la transformation de Fourier définie sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$u(t) \mapsto U(\omega) = (\mathcal{F}u)(\omega)$$

telle que

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$$

Rappelons que :

- \mathcal{F} est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$: Plus précisément

$$\forall u \in L^1(\mathbb{R}) \quad \|\mathcal{F}u\|_\infty \leq \|u\|_1$$

- \mathcal{F} se prolonge de manière unique en une isométrie, toujours notée \mathcal{F} , de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

0 - INTRODUCTION

Nous présentons ici quelques résultats théoriques relatifs à un système intégral-différentiel, à une dimension d'espace, du type :

$$(0.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0 \quad x \geq 0, t \geq 0 \\ \sigma_{\infty}(x)v(x,t) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(x,t-s)v(x,s) ds + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad x \geq 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \geq 0 \\ v(0,t) = \phi(t) \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

Ces résultats ont pour but de justifier mathématiquement la méthode d'approximation numérique de ce problème proposée dans [2] où l'on s'intéresse à la propagation d'un champ électromagnétique $(\vec{e}(x,t), \vec{h}(x,t))$ dans un milieu conducteur polarisable mono-dimensionnel.

Les hypothèses physiques sont celles de la magnéto-tellurique [6], le modèle mathématique [3] découle des équations de Maxwell et se ramène au système intégral-différentiel (0.1) où $u(x,t) = e(x,t)$ désigne l'unique composante du champ électrique, $v(x,t) = h(x,t)$ désigne l'unique composante du champ magnétique, le demi-espace \mathbb{R}^+ modélisant le sous-sol conducteur et x représentant la profondeur.

Remarquons que, si l'on se place, non plus dans le domaine espace temps, mais dans le domaine espace-fréquence, les équations du système se simplifient. Plus précisément si nous introduisons :

$\omega \rightarrow U(x, \omega)$ la transformée de Fourier de $t \rightarrow u(x, t)$

$\omega \rightarrow V(x, \omega)$ la transformée de Fourier de $t \rightarrow v(x, t)$

$\omega \rightarrow \sigma_1(x, \omega)$ la transformée de Fourier de $t \rightarrow \tilde{\sigma}_1(x, t)$

Alors les équations s'écrivent simplement en posant :

$$\sigma(x, \omega) = \sigma_\infty(x) + \sigma_1(x, \omega)$$

$$(0.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} i\mu\omega U(x, \omega) + \frac{dV}{dx}(x, \omega) = 0 \\ \sigma(x, \omega) V(x, \omega) + \frac{dU}{dx}(x, \omega) = 0 \\ V(0, \omega) = \phi(\omega) \end{array} \right.$$

Dans le modèle des équations de Maxwell en milieu conducteur polarisable, la fonction $\sigma(x, \omega)$ est la conductivité complexe du matériau. En milieu non polarisable cette conductivité est réelle et indépendante de la fréquence ω . La dépendance de $\sigma(x, \omega)$ en fonction de ω caractérise donc la polarisabilité du milieu : la fonction $(x, \omega) \rightarrow \sigma(x, \omega)$ est la *loi de polarisation du matériau*. Nous adopterons cette terminologie pour le cas général du système (0.1).

Exemple : Une loi de polarisation intervenant fréquemment en électromagnétique est la loi de Warburg [].

$$\sigma(x, \omega) = \sigma_0(x) \frac{1 - \lambda(x) \left[i \frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2}}{1 - \left[i \frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2}}$$

avec $\operatorname{Re} \left[i \frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2} \geq 0$

$$\text{et, } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0(x) \geq 0 \\ \omega_c(x) \geq 0 \\ \lambda(x) \geq 1 \end{array} \right.$$

La méthode d'approximation numérique de (0.1) proposée dans [1], [2] a pour but essentiel de s'affranchir du traitement numérique, très coûteux, du terme de convolution en temps intervenant dans les équations, terme qui est la source des difficultés mathématiques et numériques liées à notre problème.

Cette méthode se décompose principalement en trois étapes :

- ① Approximation de la loi de polarisation exacte $\sigma(x, \omega)$ par une loi de polarisation approchée $\sigma_a(x, \omega)$ en somme de fractions rationnelles. Cette première phase a pour effet de ramener le problème à un système de $N+2$ équations aux dérivées partielles d'ordre 1.
- ② Introduction de conditions aux limites artificielles à distance finie. Cette phase a pour but de se ramener à un problème posé sur un domaine borné $[0, L]$, le problème initial étant posé dans le demi espace $[0, +\infty[$;
- ③ Discrétisation numérique par différences finies du système d'équations aux dérivées partielles obtenu à l'issue des phases ① et ②.

La justification de la phase ③, c'est-à-dire l'étude de la convergence du schéma numérique adopté, est traitée en détail dans [1].

Nous proposons ici d'apporter une justification des phases ① et ②. Ce rapport comporte quatre chapitres.

- Le Chapitre 1 est consacré à l'étude de l'opérateur de convolution en temps. Il a pour but de définir une bonne classe de lois de polarisation $\sigma(x, \omega)$ pour lesquelles le problème (0.1) sera bien posé.

- Dans le chapitre 2, nous proposons une analyse mathématique sommaire du problème (0.1). Cette étude est basée sur l'obtention d'estimations a priori et utilise de façon essentielle les résultats du chapitre 1. Une approche légèrement différente est proposée dans [1].

- Le Chapitre 3 concerne essentiellement la justification de la phase 1, c'est-à-dire l'approximation de la loi de polarisation, dans le cas où la loi exacte considérée est la loi de Warbourg. C'est la partie la plus originale du travail.

- Dans le chapitre 4 enfin, on s'attache à la justification de l'emploi de conditions aux limites homogènes à distance finie "suffisamment" grande.

Notons que la plupart des résultats obtenus dans ce travail se généralisent sans problème à plusieurs dimensions d'espace. Soulignons également que l'étude de l'approximation d'un loi de polarisation quelconque par une somme de fractions rationnelles simples présente un intérêt théorique évident dans la mesure où ce principe d'approximation peut-être appliqué à toutes les équations de la physique dans lesquelles interviennent des termes de mémoire, c'est-à-dire des opérateurs de convolution en temps (polarisation, viscoélasticité, ...).

I - ETUDE DES PROPRIETES DE L'OPERATEUR ψ_σ

Nous allons dans un premier temps nous affranchir de la dépendance en espace des diverses fonctions intervenant dans notre problème en introduisant un opérateur de convolution en temps ϕ_σ formellement défini par :

$$(1.1) \quad (\phi_\sigma u)(t) = \sigma_\infty u(t) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(t-s) u(s) ds$$

1.1 - Etude de l'opérateur ϕ_σ

1.1.1 - Une bonne classe $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ de lois $\sigma(\omega)$

Nous introduisons l'ensemble :

$$(1.2) \quad \Sigma_\omega(\mathbb{R}) = \left\{ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \sigma \text{ vérifie (1.3), (1.4)} \right\}$$

$$(1.3) \quad \exists (\sigma_\infty, \tilde{\sigma}_1) \in \mathbb{R}_*^+ \times L^1(\mathbb{R}^+) \text{ tq } \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \sigma(\omega) = \sigma_\infty + \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}_1(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$(1.4) \quad \exists \sigma_* \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tq } \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Re}(\sigma(\omega)) \geq \sigma_* > 0.$$

Propriétés des fonctions de $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$

• $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ est un sous ensemble de l'espace $C_b^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées à valeurs complexes, lui même sous espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R})$.

En outre, si on pose $\sigma^* = \sigma_\infty + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ alors :

$$\|\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sigma^*$$

en outre,

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \sigma(\omega) = \sigma_\infty$$

• $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ est un cône, convexe et ouvert de $C_b^0(\mathbb{R})$

• Toute fonction σ de $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ est uniformément minorée en module.
En effet,

$$|\sigma(\omega)| \geq \operatorname{Re}(\sigma(\omega)) \geq \sigma_*$$

• On peut remplacer la condition (1.4), par la condition suivante (plus forte) :

$$(1.5) \quad \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < \sigma_\infty$$

On notera que si la fonction $t \rightarrow \tilde{\sigma}_1(t)$ est presque partout positive alors les deux conditions (1.4) et (1.5) sont équivalentes :

1.1.2 - L'opérateur $\hat{\phi}_\sigma$ -

Nous considérons l'application :

$$(1.6) \quad \left. \begin{aligned} \hat{\phi}_\sigma &: \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \\ U(\omega) &\rightarrow V(\omega) = (\hat{\phi}_\sigma U)(\omega) \\ \text{tq } \forall \omega \in \mathbb{R} \quad V(\omega) &= \sigma(\omega) U(\omega) \end{aligned} \right\}$$

THEOREME 1.1

$$(1.7) \quad \left. \begin{aligned} \hat{\phi}_\sigma &\text{ est un opérateur linéaire continu et coercif (donc inver-} \\ &\text{sible et d'inverse continu) sur } \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \text{ et on a en outre :} \\ \forall U \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad \sigma_* \|U\|^2 &\leq \operatorname{Re}(\hat{\phi}_\sigma U, U) \leq \sigma^* \|U\|^2 \end{aligned} \right\}$$

Démonstration du théorème :

La linéarité et la bijectivité de $\hat{\phi}_\sigma$ sont évidentes ainsi que la continuité de $\hat{\phi}_\sigma$.

Soit alors $U(\omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Posons :

$$V = \hat{\phi}_\sigma U$$

Nous avons donc :

$$V(\omega) = \sigma(\omega) U(\omega)$$

D'où

$$\begin{cases} \overline{U}(\omega) V(\omega) = \sigma(\omega) |U(\omega)|^2 \\ U(\omega) \overline{V}(\omega) = \overline{\sigma(\omega)} |U(\omega)|^2 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre :

$$\operatorname{Re}(U(\omega) \overline{V(\omega)}) = \operatorname{Re}(\sigma(\omega) |U(\omega)|^2)$$

D'où nous tirons, en utilisant les propriétés de σ :

$$\sigma_* |U(\omega)|^2 \leq \operatorname{Re}(U(\omega) \overline{V(\omega)}) \leq \sigma^* |U(\omega)|^2$$

L'inégalité annoncée s'obtient alors simplement par intégration sur ω de $-\infty$ à $+\infty$. ■

COROLLAIRE 1.1

On a les majorations :

$$\|\hat{\phi}_\sigma\| \leq \sigma^*$$

$$\|\hat{\phi}_\sigma^{-1}\| \leq (\sigma_*)^{-1}$$

$\hat{\phi}_\sigma^{-1}$ étant défini par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\hat{\phi}_\sigma^{-1}U)(\omega) = \frac{U(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

1.1.3 - L'opérateur ϕ_σ sur $L^2(\mathbb{R})$

Nous pouvons définir l'opérateur :

$$\phi_\sigma : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

par

$$\phi_\sigma = \mathcal{F}^{-1} \circ \hat{\phi}_\sigma \circ \mathcal{F}$$

ce qui correspond au diagramme suivant :

$$(1.8) \quad \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi_\sigma} & L^2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{\phi}_\sigma} & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

L'opérateur \mathcal{F} étant unitaire, on a immédiatement le :

THEOREME 1.2

ϕ_σ est un opérateur linéaire continu et coercif sur $L^2(\mathbb{R})$ et on a en outre les inégalités :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}) \quad \sigma_* \|u\|^2 \leq \operatorname{Re}(\phi_\sigma u, u) \leq \sigma^* \|u\|^2$$

$$\|\phi_\sigma\| \leq \sigma^*$$

$$\|\phi_\sigma^{-1}\| \leq (\sigma_*)^{-1}$$

En outre, des propriétés de la transformation de Fourier vis à vis de la convolution, nous déduisons le :

THEOREME 1.3

Pour tout u dans $L^2(\mathbb{R})$, $v = \phi_\sigma u$ est défini par :

$$v(t) = \sigma_\infty u(t) + \int_{-\infty}^t \tilde{\sigma}_1(t-s) u(s) ds$$

Démonstration du théorème

Le théorème est une conséquence directe des deux résultats classiques suivants :

① Soit $(f(t), g(t)) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors pour presque tout t réel, la fonction :

$s \rightarrow f(t-s) g(s)$ est sommable et la convolée de f et g définie par :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds$$

vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} f * g \in L^2(\mathbb{R}) \\ \|\phi_\sigma(f * g)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{array} \right.$$

② Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, $(\mathcal{F}f(\omega), \mathcal{F}g(\omega))$ leurs transformées de Fourier respectives, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{F}g \in L^2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \end{array} \right.$$

Il suffit alors d'appliquer les propriétés ① et ② avec $f(t) = \tilde{\sigma}_1(t)$ et $g(t) = u(t)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. ■

COROLLAIRE 1.2

ϕ_σ applique de façon bijective $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
En outre, ϕ_σ applique $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même et on a, pour tout u dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ on a :

$$(1.11) \quad (\phi_\sigma u)(t) = \sigma_\omega u(t) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(t-s)u(s) ds$$

Démonstration du Corollaire :

• L'expression de $\phi_\sigma u$ donnée dans l'énoncé du théorème 1.3 prouve immédiatement, la fonction $\tilde{\sigma}_1$ et le scalaire σ_0 étant réels, que

$$u(t) \in \mathbb{R} \implies (\phi_\sigma u)(t) \in \mathbb{R}$$

• La fonction $\tilde{\sigma}_1$ étant réelle, $\sigma(\omega)$ vérifie :

$$\sigma(-\omega) = \overline{\sigma(\omega)}$$

Soit alors u dans $L^2(\mathbb{R})$ et $U = \mathcal{F}u$, nous avons :

$$U(-\omega) = \overline{U(\omega)}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{U(-\omega)}{\sigma(-\omega)} \right) = \overline{\left(\frac{U(\omega)}{\sigma(\omega)} \right)}$$

Soit encore

$$(\hat{\phi}_\sigma^{-1} U)(-\omega) = \overline{(\hat{\phi}_\sigma^{-1} U)(\omega)}$$

ce qui prouve que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (\hat{\phi}_\sigma^{-1} u)(t) \in \mathbb{R}$$

• Pour u dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, il suffit d'utiliser l'expression obtenue dans le théorème 1.3 et de faire $\forall s < 0 \quad u(s) = 0$ pour obtenir l'expression annoncée. ■

En conclusion, l'opérateur de convolution ϕ_σ ainsi construit transforme une fonction réelle en une fonction réelle et une fonction causale en une fonction causale. De plus, la dernière formule montre que cet opérateur est lui même causal dans la mesure où la valeur de $\phi_\sigma u$ à l'instant t ne dépend que des valeurs de u dans l'intervalle $[0, t]$. C'est en mettant à profit cette propriété que nous allons pouvoir définir ϕ_σ , non plus sur $L^2(\mathbb{R})$ mais sur $L^2(0, T)$.

1.1.4 - L'opérateur ϕ_σ sur $L^2(0, T)$

Nous définissons donc maintenant :

$$(1.12) \quad \left. \begin{array}{l} \phi_\sigma : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T) \\ u \rightarrow \phi_\sigma u \\ \text{tq } \phi_\sigma u(t) = \sigma_\omega u(t) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(t-s) u(s) ds \end{array} \right\}$$

En toute rigueur, l'opérateur défini ci-dessus est l'opérateur :

$$(1.13) \quad \phi_{\sigma, T} = \chi_T \circ \phi_\sigma \circ P_T$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} \chi_T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(0, T) \\ u \rightarrow \chi_T u = u \Big|_{[0, T]} \end{array} \right\}$$

(opérateur de troncature à $[0, T]$)

$$\left. \begin{array}{l} P_T : L^2(0, T) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u \rightarrow P_T u \end{array} \right\}$$

$$\text{tq } \begin{array}{ll} (P_T u)(t) = u(t) & \forall t \in [0, T] \\ (P_T u)(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T] \end{array}$$

(opérateur de prolongement par 0).

Nous confondrons, pour ne pas surcharger les notations, ϕ_σ et $\phi_{\sigma, T}$. Le résultat essentiel de ce paragraphe réside dans le :

THEOREME 1.4

L'opérateur ϕ_σ est linéaire, continu et coercif de $L^2(0, T)$ dans lui même. En outre on a les inégalités suivantes

• Pour toute fonction u dans $L^2(0, T)$:

$$(1.14) \quad \sigma_* \int_0^T |u(t)|^2 dt \leq \int_0^T \phi_\sigma u(t) u(t) dt \leq \sigma^* \int_0^T |u(t)|^2 dt$$

• $\|\phi_\sigma\| \leq \sigma^*$

• $\|\phi_\sigma^{-1}\| \leq (\sigma_*)^{-1}$

Démonstration du théorème

Tout résulte, bien entendu, de la démonstration des inégalités (1.14). (On applique alors Lax-Milgram).

Soit alors $u \in L^2(0, T)$. Construisons la fonction $u^*(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ définie par :

$$(1.15) \quad \begin{cases} u^*(t) = u(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ u^*(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T] \end{cases}$$

Nous posons alors :

$$(1.16) \quad \begin{cases} v = \phi_\sigma u \in L^2(0, T) \\ v^* = \phi_\sigma u^* \in L^2(0, T) \end{cases}$$

La fonction $v^*(t)$ n'est pas à support dans $[0, T]$ mais, l'opérateur ϕ_σ étant causal, on sait que :

$$(1.17) \quad \forall t \in [0, T] \quad v^*(t) = v(t)$$

Du théorème 1.2 nous savons que les deux inégalités suivantes ont lieu :

$$(1.18) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t) v^*(t) dt \geq \sigma^* \int_{-\infty}^{+\infty} |u^*(t)|^2 dt$$

$$(1.19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |v^*(t)|^2 dt \leq (\sigma^*)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u^*(t)|^2 dt$$

Or, grâce à (1.15) et (1.17) nous savons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t) v^*(t) dt = \int_0^I u(t) v(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u^*(t)|^2 dt = \int_0^I |u(t)|^2 dt$$

Par suite, de (1.18) on déduit immédiatement :

$$\int_0^I u(t) v(t) dt \leq \sigma^* \int_0^I |u(t)|^2 dt$$

et de (1.19) on tire :

$$\int_0^I |v(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |v^*(t)|^2 dt \leq (\sigma^*)^2 \int_0^I |u(t)|^2 dt$$

ce qui prouve que l'opérateur ϕ_σ est bien continu et coercif de $L^2(0,T)$ dans lui même et donc achève la démonstration du théorème. ■

De la même façon, il est clair que l'on peut établir le :

COROLLAIRE 1.3

Pour tout $t \in [0, T]$ et tout u dans $L^2(0, T)$ on a les deux inégalités de continuité et de coercivité suivantes :

$$\int_0^t |\phi_\sigma u(s)|^2 ds \leq (\sigma^*)^2 \int_0^t |u(s)|^2 ds$$

$$\int_0^t \phi_\sigma u(s) u(s) ds \geq \sigma_* \int_0^t |u(s)|^2 ds$$

Pour terminer, signalons une propriété de l'opérateur ϕ_σ vis à vis de l'opérateur de dérivation par rapport au temps (Cette propriété s'établit immédiatement en raisonnant au sens des distributions).

THEOREME 1.5

Pour toute fonction u dans $H^1(0, T)$, on a l'égalité, dans $\mathcal{D}'(0, T)$:

$$\frac{d}{dt}(\phi_\sigma u) = \phi_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right) + u(0) \tilde{\sigma}_1$$

REMARQUE 1.1

L'égalité (1.15) a bien un sens puisque d'une part $H^1(0, T) \hookrightarrow C^0(0, T)$, d'autre part $\tilde{\sigma}_1 \in L^1(0, T)$; par conséquent $u(0) \tilde{\sigma}_1 \in \mathcal{D}'(0, T)$

COROLLAIRE 1.4

Si u appartient à $H^1(0, T)$ et vérifie $u(0) = 0$
Alors $\frac{d}{dt}(\phi_\sigma u) = \phi_\sigma \left(\frac{du}{dt}\right)$

Pour achever l'étude de l'opérateur ϕ_σ , nous allons donner quelques résultats immédiats de continuité de ϕ_σ par rapport à σ , résultats qui sont essentiels pour justifier la méthode d'approximation que nous envisageons ici.

1.1.5 - Continuité de ϕ_σ par rapport à σ

Nous munissons l'ensemble $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace métrique en induisant la distance définie par la norme de $L^\infty(\mathbb{R})$ et nous poserons :

$$\forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_\omega(\mathbb{R})^2 \quad \|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega)|$$

Nous nous intéressons donc à la continuité de l'application :

$$\left| \begin{array}{l} \phi : \Sigma_\omega(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(0, T)) \\ \sigma \rightarrow \phi_\sigma \end{array} \right.$$

Le résultat est alors le suivant :

THEOREME 1.6

L'application ϕ est contractante de $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(L^2(0, T))$, autrement dit :

$$\forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_\omega(\mathbb{R})^2 \quad \|\phi_{\sigma_1} - \phi_{\sigma_2}\| \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty$$

Démonstration du théorème

Elle est très simple. Le résultat est évident pour l'application $\sigma \rightarrow \hat{\phi}_\sigma$. Il est donc vrai pour l'application $\sigma \rightarrow \phi_\sigma$ en tant qu'application de $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ et on a donc :

$$\forall u^* \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|\phi_{\sigma_1} u^* - \phi_{\sigma_2} u^*\| \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|_\infty \|u^*\|$$

Il suffit alors de reprendre l'argument de causalité utilisé pour démontrer le théorème 1.4 pour conclure. ■

Nous pouvons également donner un résultat plus précis, intéressant dans les applications pratiques :

THEOREME 1.7

Soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\text{supp } \mathcal{F}u^* \cap \mathbb{R}^+ \subset [\omega_*, \omega^*]$$

avec $(\omega^*, \omega_*) \in (\mathbb{R}_+^+)^2$. Alors on a l'estimation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_{\sigma_1} u(t) - \phi_{\sigma_2} u(t)|^2 dt \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt$$

$L^\infty(\omega_*, \omega^*)$

Nous pouvons alors maintenant passer aux propriétés de l'opérateur ψ_σ .

1.2 - Etude de l'opérateur ψ_σ

1.2.1 - Une classe $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ de lois $\sigma(x, \omega)$

Nous introduisons cette fois l'ensemble :

$$\Sigma(\Omega; \mathbb{R}) = \left\{ \sigma : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} / \sigma \text{ vérifie (1.21), (1.22)} \right\}$$

(1.21) $\exists (\sigma_\infty, \tilde{\sigma}_1) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega; L^1(\mathbb{R}^+))$ telles que

- $\sigma_\infty(x) > (\sigma_\infty) > 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$
- $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \sigma(x, \omega) = \sigma_\infty(x) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(x, t) e^{-i\omega t} dt$

(1.22) $\exists \sigma_* \in \mathbb{R}_+^+$ tq p.p. $(x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad \text{Re}(\sigma(x, \omega)) \geq \sigma_* > 0$

Propriétés de l'ensemble $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$

• $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ est un sous ensemble ouvert, connexe et conique de $L^\infty(\Omega; C_b^0(\mathbb{R}))$ muni de la topologie induite par celle de $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$. En outre, on vérifie que si on pose :

$$\sigma^* = \|\sigma_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega; L^1(\mathbb{R}^+))}$$

Alors,

$$\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})} \leq \sigma^*$$

- Toute fonction σ de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ est uniformément minorée en module.
- La condition (1.22) est réalisée si on suppose que p.p. $x \in \Omega$

$$\|\tilde{\sigma}_1(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} - \sigma_\infty(x) \geq \alpha > 0.$$

1.2.2 - Définitions et propriétés de ψ_σ

Nous définissons l'opérateur :

$$(1.23) \quad \left. \begin{aligned} \psi_\sigma : L^2(0, T; L^2(\Omega)) &\rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ u(x, t) &\rightarrow v(x, t) = (\psi_\sigma u)(x, t) \\ \text{tq } v(x, t) &= \sigma_\infty(x) u(x, t) + \int_0^t \tilde{\sigma}_1(x, t-s) u(x, s) ds \end{aligned} \right\}$$

Pour déduire les propriétés de l'opérateur ψ_σ de celles de ϕ_σ , il suffit de remarquer que :

- p.p. $x \in \Omega$ $\sigma(x, \cdot) \in \Sigma_\omega(\mathbb{R})$
- p.p. $x \in \Omega$ $(\psi_\sigma u)(x, \cdot) = \phi_{\sigma(x, \cdot)} u(x, \cdot)$

Alors en utilisant les résultats du paragraphe 1.1 on démontre très facilement les théorèmes suivants :

THEOREME 1.8

L'opérateur ψ_σ est linéaire, continu et coercif de $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ dans lui-même et pour tout u dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et tout t dans $[0, T]$, on a les inégalités :

$$(1.23) \quad \sigma_* \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \int_0^t (\psi_\sigma u(s), u(s)) ds \leq \sigma^* \int_0^t \|u(s)\|^2 ds$$

$$(1.24) \quad (\sigma_*)^2 \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \|\psi_\sigma u(s)\|^2 ds \leq (\sigma^*)^2 \int_0^t \|u(s)\|^2 ds$$

THEOREME 1.9

Soit u dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$; alors on a l'égalité dans $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$:

$$(1.25) \quad \frac{d}{dt}(\psi_\sigma u) = \psi_\sigma \left(\frac{du}{dt} \right) + \tilde{\sigma}_1(t) \otimes u(x,0)$$

En particulier, si $u(x,0) = 0$, alors on a l'égalité dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$:

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt}(\psi_\sigma u) = \psi_\sigma \left(\frac{du}{dt} \right)$$

Enfin, pour énoncer un résultat de continuité de ψ_σ par rapport à la loi de polarisation σ , nous donnons à $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ une structure d'espace métrique en le munissant de la distance induite par celle de $L^\infty(\Omega; L^\infty(\mathbb{R}))$:

$$\| \sigma_1 - \sigma_2 \|_\infty = \sup_{(x,\omega) \in \Omega \times \mathbb{R}} | \sigma_1(x,\omega) - \sigma_2(x,\omega) |$$

Et nous nous intéressons donc à l'application :

$$\left| \begin{array}{l} \psi : \Sigma(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(0,T;L^2(\Omega))) \\ \sigma \rightarrow \psi_\sigma \end{array} \right.$$

Le résultat est alors le suivant :

THEOREME 1.10

L'application ψ est une contraction de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(L^2(0,T;L^2(\Omega)))$:

$$(1.27) \quad \forall (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma(\Omega, \mathbb{R})^2 \quad \| \psi_{\sigma_1} - \psi_{\sigma_2} \| \leq \| \sigma_1 - \sigma_2 \|_\infty$$

Enfin, il est clair que pour tout σ dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ l'opérateur ψ_σ définit un opérateur linéaire, continu et coercif de $L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ dans lui même (il suffit de faire $t \rightarrow +\infty$ dans (1.23) et (1.24)) et on a bien sûr le résultat complémentaire suivant :

THEOREME 1.11

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ et $U \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ sa transformée de Fourier par rapport au temps. Si $\text{supp } U \cap \mathbb{R}^+ \subset [\omega_*, \omega^*]$, avec ω_* et ω^* strictement positifs, alors on a l'estimation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\psi_{\sigma_1} u(t) - \psi_{\sigma_2} u(t)\|^2 dt \leq \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L^\infty(\omega_*, \omega^*)}^2$$

1.3 - Deux sous ensembles particuliers de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$

1.3.1 - L'ensemble des lois de Warbourg

L'une des lois de polarisation les plus courantes en électromagnétisme est la loi de Warbourg donnée par :

$$(1.29) \quad \sigma(x, \omega) = \sigma_0(x) \frac{1 + \lambda(x) \left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right)^{1/2}}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right)^{1/2}}$$

où $\sigma_0(x)$, $\lambda(x)$ et $\omega_c(x)$ sont trois fonctions réelles strictement positives et où la fonction $z \rightarrow z^{1/2}$ est définie par $\text{Re}(z^{1/2}) > 0$.

En remarquant que l'on a l'identité :

$$\frac{1 + \lambda \left(i \frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}} = \lambda + (1 - \lambda) \frac{1}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}}$$

Nous en déduisons que :

$$(1.30) \quad \left. \begin{aligned} \sigma(x, \omega) &= \sigma_\infty(x) + \frac{(1 - \lambda(x))\sigma_0(x)}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right)^{1/2}} \\ \text{avec} \\ \sigma_\infty(x) &= \lambda(x)\sigma_0(x) \end{aligned} \right\}$$

On peut établir le :

THEOREME 1.12

Avec les hypothèses :

- $0 < (\sigma_0)_* \leq \sigma_0(x) \leq (\sigma_0)^*$ p.p. $x \in \Omega$
- $1 \leq \lambda_* \leq \lambda(x) \leq \lambda^*$ p.p. $x \in \Omega$
- $0 < (\omega_c)_* \leq \omega_c(x) \leq (\omega_c)^*$ p.p. $x \in \Omega$

Alors la loi σ définie par la formule (1.20) est dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$

Démonstration du théorème

① Vérification de la propriété (1.21)

Il suffit de calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction

$$\omega \rightarrow \frac{1}{1+(i\omega)^{1/2}}$$

Pour cela il nous suffit d'utiliser le

LEMME 1.1

Soit $f(t)$ la fonction réelle, causale et positive définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 2e^{-t} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right) & \text{si } t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Alors f est dans $L^1(\mathbb{R}^+)$ et vérifie :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} = 1$$

En outre sa transformée de Fourier est donnée par :

$$F(\omega) = \frac{1}{1+(i\omega)^{1/2}}$$

Alors il est facile de déduire du lemme 1.1 et de l'expression (1.21) l'égalité :

$$\sigma(x, \omega) = \sigma_{\infty}(x) + \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}_1(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

où la fonction $\tilde{\sigma}_1(x, t)$ est donnée par :

$$\tilde{\sigma}_1(x, t) = \omega_c(x)(1-\lambda(x)) f(\omega_c(x)t) \sigma_0(x)$$

Alors il est facile de voir que $\tilde{\sigma}_1 \in L^{\infty}(\Omega; L^1(\mathbb{R}^+))$ puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \|\tilde{\sigma}_1(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} &= |1-\lambda(x)| \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sigma_0(x) \\ &= (\lambda(x)-1) \sigma_0(x) \end{aligned}$$

Démonstration du Lemme 1.1

On trouvera dans [1] le calcul de $f(t)$. Rappelons ici simplement une étude succincte de la fonction $f(t)$ qui prouve que cette fonction est bien positive et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

① Positivité de f

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{s e^{-s^2}}{s} ds \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} s e^{-s^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-t}$$

Donc,

$$2e^t \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Par conséquent,

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 2e^t \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right) \geq 0$$

② Comportement de $f(t)$ au voisinage de 0

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} e^t \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds$ existe, on a :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + o(1) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

$f(t)$ est donc bien intégrable au voisinage de 0.

③ Comportement de $f(t)$ à l'infini

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{se^{-s^2}}{s} ds$$

Effectuons alors une intégration par parties :

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = - \left[\frac{1}{2} \frac{e^{-s^2}}{s} \right]_{\sqrt{t}}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^2} ds$$

Soit encore,

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = - \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^2} ds$$

or,

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^2} ds = \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{se^{-s^2}}{s^3} ds$$

Une nouvelle intégration par parties fournit. :

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^2} ds = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{t^{3/2}} - \frac{3}{2} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^4} ds$$

Donc finalement,

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} - \frac{1}{4} \frac{e^{-t}}{t^{3/2}} + \frac{3}{4} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^4} ds$$

En remarquant que :

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{e^{-s^2}}{s^4} ds = \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{se^{-s^2}}{s^5} ds \leq \frac{1}{t^{5/2}} \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} se^{-s^2} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{t^{5/2}}$$

Par conséquent nous pouvons écrire :

$$\int_{\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

A partir de quoi, on déduit le développement :

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

ce qui prouve que $f(t)$ est bien intégrable au voisinage de $+\infty$

② Vérification de la propriété (1.22)

Pour ne pas surcharger les notations, nous oublions la dépendance en x :

$$\sigma(\omega) = \lambda \sigma_0 + (1-\lambda) \sigma_0 \frac{1}{1+(i \frac{\omega}{\omega_c})^{1/2}}$$

D'où l'on déduit aisément que :

$$\operatorname{Re}(\sigma(\omega)) = \lambda \sigma_0 + (1-\lambda) \sigma_0 \psi\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

où la fonction $\psi(x)$ est définie par :

$$\psi(x) = \frac{1+x \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+x\sqrt{2}+x^2}$$

Une rapide étude de la fonction $x \rightarrow \psi(x)$ montre que, ψ est une fonction décroissante de x vérifiant

$$\begin{cases} \psi(0) & = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) & = 0 \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 < \psi(x) \leq 1$$

Par suite, $(1-\lambda)$ étant négatif, il est facile d'en déduire que :

$$\operatorname{Re}(\sigma(\omega)) \geq \lambda\sigma_0 + (1-\lambda)\sigma_0 = \sigma_0$$

Donc, en revenant aux notations générales :

$$\operatorname{Re}(\sigma(x,\omega)) \geq \sigma_0(x) \geq (\sigma_0)_* > 0$$

La propriété (1.22) est donc vérifiée et le théorème est ainsi démontré. ■

Nous avons donc prouvé l'inclusion :

$$\Sigma_W(\Omega; \mathbb{R}) \subset \Sigma(\Omega; \mathbb{R})$$

si on note $\Sigma_W(\Omega; \mathbb{R})$ l'ensemble des lois de Warbourg définies par (1.29).

Ceci prouve que certaines lois physiques rentrent dans le cadre des conditions (1.21) et (1.22). De façon plus générale, on peut démontrer que les lois de type Cole-Cole définies par :

$$(1.31) \quad \sigma(x,\omega) = \sigma_0(x) \frac{1 + \lambda(x) \left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right)^\gamma}{1 + \left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right)^\gamma} \quad \gamma > 0$$

vérifient les hypothèses (1.21) et (1.22).

1.3.2 - L'ensemble des lois approchées

Conformément à la méthode d'approximation présentée dans [2], nous introduisons un ensemble de lois du type :

$$(1.32) \quad \sigma(x,\omega) = \sigma_\infty(x) + \sum_{k=1}^n \frac{b_k(x)}{1 + i a_k(x) \omega}$$

où les fonctions $a_k(x)$, $b_k(x)$ sont réelles et positives et sensées vérifier : (σ_∞ satisfaisant les hypothèses habituelles)

$$(1.33) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad 0 < (a_k)_* < a_k(x) < (a_k)^* < +\infty \\ \bullet \quad b_k(x) \leq b_k^* < +\infty \\ \bullet \quad \inf_{(x,\omega)} \left\{ \sigma_\infty(x) + \sum_{k=1}^N \frac{b_k(x)}{1+a_k(x)\omega^2} \right\} > 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que avec l'hypothèse :

$$\forall k, \quad b_k(x) \geq 0$$

La dernière proposition de (1.33) est vérifiée.

On voit que les contraintes de positivité sur $a_k(x)$ entraînent que la fonction $\omega \rightarrow \sigma(x,\omega)$ se prolonge en une fonction analytique dans le demi plan $\text{Im}(\omega) \geq 0$ ce qui entraîne que $\sigma(x,\omega)$ est bien la transformée de Fourier d'une fonction causale.

Nous désignerons par $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$, l'ensemble des lois approchées du type (1.32). Nous avons bien construit ainsi un sous ensemble de $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$ comme le prouve le

THEOREME 1.13

Avec les hypothèses (1.33), la loi σ définie par la forme (1.32) est dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$

Démonstration du théorème

① Vérification de la propriété (1.21)

C'est une conséquence directe du :

LEMME 1.2

On a la formule :

$$\int_0^{+\infty} \frac{b_k(x)}{a_k(x)} e^{-\frac{t}{a_k(x)} - i\omega t} dt = \frac{b_k(x)}{1+i a_k(x)\omega}$$

En corollaire on en déduit que :

$$\sigma(x, \omega) = \sigma_{\infty}(x) + \int_0^{+\infty} \tilde{\sigma}_1(x, t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\tilde{\sigma}_1(x, \omega) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k(x)}{a_k(x)} e^{-\frac{t}{a_k(x)}}$$

$\tilde{\sigma}_1(x, t)$ est bien évidemment dans $L^{\infty}(\Omega; L^1(\mathbb{R}^+))$ puisque, pour tout x dans Ω :

$$\|\tilde{\sigma}_1(x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \sum_{k=1}^n |b_k(x)|$$

D'où l'on déduit immédiatement :

$$\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^{\infty}(\Omega; L^1(\mathbb{R}^+))} \leq \sum_{k=1}^n b_k^*$$

② Vérification de la propriété (1.22)

Il suffit d'écrire :

$$\text{Re}(\sigma(x, \omega)) = \sigma_{\infty}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{b_k(x)}{1+a_k(x)^2 \omega^2}$$

La propriété est alors une conséquence de la propriété des fonctions $b_k(x)$ et $a_k(x)$. ■

Rappelons que le principal intérêt de ces lois approchées réside dans le fait que l'opérateur ψ_{σ} associé, ordinairement non local, devant un opérateur local. Le résultat précis est le suivant :

THEOREME 1.14

L'opérateur ψ_{σ} associé à la loi (1.32) est encore définie par :

$$\psi_{\sigma} : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

$$u(x, t) \rightarrow \psi_{\sigma} u(x, t) = v(x, t)$$

avec

$$v(x, t) = \sigma_{\infty}(x) u(x, t) + \sum_{k=1}^n f_k(x, t)$$

Où chaque fonction $f_k(x,t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$a_k(x) \frac{\partial f_k}{\partial t}(x,t) + f_k(x,t) = b_k(x) u(x,t)$$

$$f_k(x,0) = 0$$

Cette propriété est une conséquence directe des propriétés de la transformation de Fourier vis à vis de la dérivation par rapport au temps.

II - ANALYSE MATHÉMATIQUE SOMMAIRE DU SYSTÈME INTEGRO DIFFÉRENTIEL ASSOCIÉ

A. UNE LOI DE POLARISATION σ DANS $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$

Étant donnée une loi de polarisation σ dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$, nous nous intéressons donc au problème :

$$(2.1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Trouver : } u(x,t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad v(x,t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \\ \text{tq} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \psi_{\sigma} v + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \\ v(0,t) = \phi(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

On trouvera une étude mathématique complète de (2.1) dans [1]. Nous allons nous contenter ici d'établir les résultats qui nous sont nécessaires à la suite de l'étude, avec les hypothèses minimales sur les données.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à un problème un peu plus général, avec second membre. Plus précisément, nous nous donnons :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet u \in L^2(\Omega) \\ \bullet \phi \in L^2(0,T) \\ \bullet g \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

et nous considérons le problème :

$$(2.3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Trouver : } u(x,t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad v(x,t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \\ \text{tq} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \psi_{\sigma} v + \frac{\partial u}{\partial x} = g \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \\ v(0,t) = \phi(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

2.1 - Existence et unicité de la solution pour les problèmes (2.1) et (2.3)

2.1.1 - Notations et cadre fonctionnel

Nous introduisons l'espace fonctionnel :

$$(2.4) \quad W(0,T) = \left\{ u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)) / \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

On rappelle que :

$$(2.5) \quad W(0,T) \hookrightarrow C^0(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

(En revanche, $H^{-1}(\Omega)$ n'étant pas le dual de $H^1(\Omega)$, on n'a pas a priori $W(0,T) \subset C^0(0,T;L^2(\Omega))$).

Et nous introduisons alors l'espace produit :

$$(2.6) \quad \mathcal{H}(0,T) = W(0,T) \times L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

espace de Banach pour la norme :

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}(0,T)} = \|u\|_{W(0,T)} + \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

Nous cherchons à résoudre le problème (3.3) dans \mathcal{H} . On notera que, pour (u,v) dans \mathcal{H} on ne peut pas a priori donner de sens à la condition aux limites : (au sens des traces)

$$v(0,t) = \phi(t)$$

Par contre, on peut lui donner un sens faible en donnant la définition suivante pour une solution de (2.3)

DEFINITION 2.1

On appelle solution de (2.3) tout couple (u, v) dans \mathcal{H} tel que l'on ait, dans $\mathcal{D}'(0, T)$:

$$(2.7) \quad \forall u^* \in H^1(\Omega) \quad \mu \frac{d}{dt}(u(t), u^*) - (v(t), \frac{du^*}{dx}) + u^*(0) \phi(t) = 0$$

$$(2.8) \quad \forall v^* \in H^1(\Omega) \quad (\psi_\sigma v(t), v^*) + (\frac{\partial u}{\partial x}(t), v^*) = (g(t), v^*)$$

$$u(0) = u_0$$

REMARQUE 2.1

Cette définition est bien cohérente avec le problème initial. En effet il est facile de voir que les équations (2.7) et (2.8) se réinterprètent au sens des distributions par :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \psi_\sigma v - \frac{\partial u}{\partial x} = g & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

En outre, si la fonction v est suffisamment régulière (par exemple $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$) alors on a bien :

$$v(0, t) = \phi(t) \quad \text{dans } L^2(0, T)$$

Enfin, la condition initiale $u(0) = u_0$ a bien un sens grâce à (2.5)

2.1.2 - Résultats d'existence et d'unicité - Estimations a priori

Nous allons établir le :

THEOREME 2.1

Avec les hypothèses (2.2), le problème (2.3) admet une unique solution (u, v) dans $\mathcal{H}(0, T)$ et on a en outre les estimations suivantes :

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\| + C_1 \|g\| + C_2 \|\phi\| + C_3 \int_0^T |\phi(t)| dt$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_4 \|u_0\| + C_5 \|g\| + C_6 \|\phi\| + C_7 \int_0^T |\phi(t)| dt \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq C_8 \|u_0\| + C_9 \|g\| + C_{10} \|\phi\| + C_{11} \int_0^T |\phi(t)| dt \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq C_{12} \|u_0\| + C_{13} \|g\| + C_{14} \|\phi\| + C_{15} \int_0^T |\phi(t)| dt \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\|\phi\| = \|\phi\|_{L^2(0,T)}$$

$$\|g\| = \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

et où les constantes positives C_k ne dépendent que de μ , σ_* et σ^*

Démonstration du théorème

Le résultat d'existence et d'unicité est formellement une conséquence des estimations a priori. Nous allons nous contenter de donner le principe de l'obtention de ces estimations, les calculs qui suivent pouvant se justifier entièrement grâce à la régularité des solutions. Puis nous indiquerons brièvement comment la méthode de Galerkin permet de démontrer le résultat d'existence.

① Obtention des estimations a priori

Nous récrivons les deux équations de (2.3)

$$(2.3)_1 \quad \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$(2.3)_2 \quad \psi_\sigma v + \frac{\partial u}{\partial x} = g$$

Nous multiplions (3.3)₁ par u , (3.3)₂ par v et intégrons en espace sur Ω . Après sommation membre à membre des deux égalités, nous obtenons pour tout instant s dans $[0, T]$:

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \|u(s)\|^2 + (\psi_{\sigma} v(s), v(s)) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(s), u(s)\right) + (v(s), \frac{\partial u}{\partial x}(s)) = (g(s), v(s))$$

Une intégration par parties en espace fournit :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}(s), u(s)\right) + (v(s), \frac{\partial u}{\partial x}(s)) + v(0,s) u(0,s) = 0$$

Soit encore, compte tenu de la condition aux limites :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}(s), u(s)\right) + (v(s), \frac{\partial u}{\partial x}(s)) + \phi(s) u(0,s) = 0$$

Par conséquent nous obtenons, $\forall s \in [0, T]$:

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \|u(s)\|^2 + (\psi_{\sigma} v(s), v(s)) - \phi(s) u(0,s) = (g(s), v(s))$$

égalité que nous intégrons en temps entre 0 et t :

$$\frac{\mu}{2} \|u(t)\|^2 + \int_0^t (\psi_{\sigma} v(s), v(s)) ds = \frac{\mu}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t (g(s), v(s)) ds + \int_0^t \phi(s) u(0,s) ds$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t (\psi_{\sigma} v(s), v(s)) ds &\geq \sigma_* \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \\ \left| \int_0^t \phi(s) u(0,s) ds \right| &\leq \int_0^t |\phi(s)| |u(0,s)| ds \\ \left| \int_0^t (g(s), v(s)) ds \right| &\leq \int_0^t \|g(s)\| \|v(s)\| ds \end{aligned}$$

Ce dont nous déduisons l'inégalité :

$$\frac{\mu}{2} \|u(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \frac{\mu}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t |\phi(s)| |u(0,s)| ds + \int_0^t \|g(s)\| \|v(s)\| ds$$

Utilisons alors le théorème de traces :

$$|u(0,s)|^2 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,s) u(x,s) dx \leq \|u(s)\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|^2$$

D'où

$$|u(0,s)| \leq \|u(s)\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\|$$

Or grâce à (3.3)₂ et à la continuité de ψ_σ on a :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|u(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^T \|v(s)\|^2 ds &\leq \frac{\mu}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t |\phi(s)| \|u(s)\| ds + \int_0^t |\phi(s)| \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\| \\ &+ \int_0^t \|g(s)\| \|v(s)\| ds \end{aligned} \right.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'équation (3.3)₂, nous avons

$$\left| \begin{aligned} \int_0^t |\phi(s)| \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s) \right\| ds &\leq \int_0^t |\phi(s)| \|g(s)\| ds + \int_0^t \|\psi_\sigma v(s)\| |\phi(s)| ds \\ &\leq \left(\int_0^t |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|g(s)\|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_0^t |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\psi_\sigma v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^t |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|g(s)\|^2 ds \right)^{1/2} + \sigma^* \left(\int_0^t |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ \int_0^t \|g(s)\| \|v(s)\| ds &\leq \left(\int_0^t \|g(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

Introduisons alors :

$$\left| \begin{aligned} \|\phi\| &= \left(\int_0^T |\phi(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ \|g\| &= \left(\int_0^T \|g(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons finalement pour tout t dans $[0, T]$:

$$(2.9) \quad \frac{\mu}{2} \|u(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \frac{\mu}{2} \|u_0\|^2 + (\|g\| + \sigma^* \|\phi\|) \left(\int_0^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ + \|g\| \|\phi\| + \int_0^t |\phi(s)| \|u(s)\| ds$$

Utilisons alors les inégalités :

$$\left| \begin{aligned} \|g\| \left(\int_0^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} &\leq \frac{\sigma^*}{4} \int_0^t \|v(s)\|^2 ds + \frac{1}{\sigma^*} \|g\|^2 \\ \sigma^* \|\phi\| \left(\int_0^t \|v(s)\|^2 ds \right)^{1/2} &\leq \frac{\sigma^*}{4} \int_0^t \|v(s)\|^2 ds + \frac{(\sigma^*)^2}{\sigma^*} \|\phi\|^2 \end{aligned} \right.$$

ce qui nous donne, après avoir reporté dans (2.9) :

$$(2.10) \quad \frac{\mu}{2} \|u(t)\|^2 + \frac{\sigma}{2^*} \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \frac{\mu}{2} \|u_0\|^2 + \|g\| \|\phi\| + \frac{1}{\sigma^*} \|g\|^2 + \frac{(\sigma^*)^2}{\sigma^*} \|\phi\|^2 + \int_0^t |\phi(s)| \|u(s)\| ds$$

Donc en particulier,

$$(2.11) \quad \left| \begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \|u_0\|^2 + \frac{2}{\mu} \|g\| \|\phi\| + \frac{2}{\mu \sigma^*} \|g\|^2 + 2 \frac{(\sigma^*)^2}{\mu \sigma^*} \|\phi\|^2 + \frac{2}{\mu} \int_0^t |\phi(s)| \|u(s)\| ds \\ \int_0^T \|v(s)\|^2 ds &\leq \frac{\mu}{\sigma^*} \|u_0\|^2 + \frac{2}{\sigma^*} \|g\| \|\phi\| + \frac{2}{\sigma^*} \|g\|^2 + \frac{(\sigma^*)^2}{\sigma^*} \|\phi\|^2 + \frac{2}{\mu} \int_0^t |\phi(s)| \|u(s)\| ds \end{aligned} \right.$$

Nous utilisons alors une version généralisée du Lemme de Gronwall (qui s'établit de façon classique).

LEMME 2.1

Soit $F(t)$ une fonction continue et positive définie sur $[0, T]$, $m(t)$ une fonction positive de $L^1(0, T)$, C une constante strictement positive et α un réel strictement compris entre 0 et 1. On suppose que :

$$\forall t \in [0, T] \quad F(t) \leq C + \int_0^t m(s) F(s)^\alpha ds$$

Alors on a l'inégalité :

$$\forall t \in [0, T] \quad F(t) \leq \left\{ C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Appliquons ce lemme en faisant :

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \| u(t) \|^2 \\
 m(t) &= \frac{2}{\mu} \phi(t) \\
 C &= \| u_0 \|^2 + \frac{2}{\mu \sigma_*} \| g \|^2 + 2 \frac{(\sigma^*)^2}{\mu \sigma_*} \| \phi \|^2 + \frac{2}{\mu} \| g \| \| \phi \| \\
 \alpha &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\| u(t) \|^2 \leq \left\{ C^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^t m(s) ds \right\}^2$$

D'où

$$\| u(t) \| \leq C^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^t m(s) ds$$

Et par conséquent, pour tout t dans $[0, T]$

$$(2.12) \quad \| u(t) \| \leq \| u_0 \| + \left(\frac{2}{\mu \sigma_*} \right)^{1/2} \| g \| + \frac{2}{\mu} \| g \| \| \phi \| + \sigma^* \left(\frac{2}{\mu \sigma_*} \right)^{1/2} \| \phi \| + \frac{1}{\mu} \int_0^T |\phi(t)| dt$$

C'est-à-dire la première estimation annoncée.

Ensuite on a, d'après (2.11) :

$$\int_0^T \| v(t) \|^2 dt \leq \frac{\mu}{\sigma_*} \| u_0 \|^2 + \frac{2}{\sigma_*} \| g \| \| \phi \| + \frac{2}{\sigma_*^2} \| g \|^2 + \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_*} \right)^2 \| \phi \|^2 + \frac{2}{\sigma_*} \int_0^T |\phi(t)| \| u(t) \| dt$$

inégalité dont on tire très simplement la deuxième estimation sur

$$\| v \|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))} \quad \text{en utilisant (2.12).}$$

Par suite pour obtenir l'estimation sur $\frac{\partial u}{\partial x}$ il suffit d'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\psi_\sigma v + g$$

D'où

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \sigma^* \| v \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \| g \|$$

Enfin, pour obtenir l'estimation sur $\frac{\partial u}{\partial t}$, il suffit d'utiliser le fait que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}(L^2(0,T;L^2(\Omega)); L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)))$$

et que

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

② Existence de la solution

On utilise le procédé constructif de Galerkin en considérant une base hilbertienne $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ de $H^1(\Omega)$ et on construit une solution approchée (u_n, v_n) en résolvant le problème approché suivant :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver :} \\ \quad u_n(t) : [0,T] \rightarrow V_n = [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ \quad v_n(t) : [0,T] \rightarrow V_n = [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ \text{vérifiant :} \\ \\ \forall u^* \in V_n \quad \mu \frac{d}{dt}(u_n(t), u^*) - (v_n(t), \frac{du^*}{dx}) + \phi(t) u^*(0) = 0 \\ \forall v^* \in V_n \quad (\psi_\sigma v_n(t), v^*) + (\frac{du_n^*}{dx}(t), v^*) = (g(t), v^*) \\ \\ u_n(0) = u_{0,n} \in V_n \quad u_{0,n} \rightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

On obtient alors les estimations a priori sur la solution approchée $(u_n(t), v_n(t))$ puis on passe à la limite.

Signalons que le problème approché (2.13) n'est pas tout à fait de type classique. En effet, si on pose :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_n^j(t) w_j \\ v_n(t) = \sum_{j=1}^n v_n^j(t) w_j \end{array} \right.$$

Alors en introduisant les vecteurs de \mathbb{R}^n :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_n(t) = (u_n^j(t))_{1 \leq j \leq n} \\ V_n(t) = (v_n^j(t))_{1 \leq j \leq n} \\ \Phi_n(t) = (w_j(0)\phi(t))_{1 \leq j \leq n} \\ G_n(t) = (w_j, g(t))_{1 \leq j \leq n} \end{array} \right.$$

et les matrices carrées $n \times n$ suivantes :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A_n = \left(\left(\mu(w_i, w_j) \right) \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \leq j \leq n}} & \text{(symétrique définie positive)} \\ B_n = \left(\left(\left(\frac{dw_i}{dx}, w_j \right) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} & \text{(antisymétrique)} \\ C_n = \left(\left(\left(w_i, \frac{dw_j}{dx} \right) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} & \text{(antisymétrique)} \\ \Sigma_\infty = \left(\left(\int_{\Omega} \sigma_\infty(x) w_i(x) w_j(x) dx \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} & \text{(symétrique définie positive)} \\ \Sigma_1(t) = \left(\left(\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_1(x, t) w_i(x) w_j(x) dx \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} & \in L^1(0, T) \end{array} \right.$$

Alors le problème approché (2.13) est équivalent au problème suivant :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U_n(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ V_n(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{solution système intégro-différentiel} \\ A_n \frac{dU_n}{dt}(t) - B_n V_n(t) + \Phi_n(t) = 0 \\ \Sigma_\infty V_n(t) + \int_0^t \Sigma_1(t-s) V_n(s) ds + C_n U_n(t) = G_n(t) \end{array} \right.$$

$$U_n(0) = U_0^n = (u_{0,n}^j)_{1 \leq j \leq n}$$

avec

$$u_{0,n} = \sum_{j=1}^n u_{0,n}^j w_j$$

On le démontre alors le :

LEMME 2.2

Le problème approché (2.13) admet une solution et une seule :

- $u_n(t) \in C^0(0,T;V_n) \cap H^1(0,T;V_n)$
- + $v_n(t) \in C^0(0,T;V_n)$

Démonstration du lemme :

Il suffit d'écrire le système intégral-différentiel sous forme intégrale :

$$(S_n) \begin{cases} A_n(U_n(t) - U_0) - B_n \int_0^t V_n(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds = 0 \\ \Sigma_\infty V_n(t) + C_n U_n(t) + \int_0^t \Sigma_1(t-s) V_n(s) ds = \int_0^t G_n(s) ds \end{cases}$$

On élimine $U_n(t)$ entre les deux équations ce qui est possible car la matrice A_n est inversible :

$$U_n(t) = U_0 + A_n^{-1} B_n \int_0^t V_n(s) ds - A_n^{-1} \int_0^t \phi_n(s) ds$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \Sigma_\infty V_n(t) &= \int_0^t G_n(s) ds + \int_0^t \Sigma_1(t-s) V_n(s) ds \\ &\quad - C_n (U_0 + A_n^{-1} B_n \int_0^t V_n(s) ds - A_n^{-1} \int_0^t \phi_n(s) ds) \end{aligned}$$

L'idée consiste d'appliquer alors le théorème du point fixe à l'application dans $C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n)$ ($0 \leq T_0 \leq T$)

$$\begin{aligned} \Phi : C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n) &\rightarrow C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n) \\ V(t) &\rightarrow \Phi V(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi V(t) = & \Sigma_{\infty}^{-1} \left\{ \int_0^t G_n(s) ds - \int_0^t \Sigma_1(t-s) V(s) ds \right\} \\ & - \Sigma_{\infty}^{-1} C_n \left\{ U_0 + A_n^{-1} B_n \int_0^t V(s) ds - A_n^{-1} \int_0^t \phi_n(s) ds \right\} \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que :

$$\begin{aligned} \Phi V_2(t) - \Phi V_1(t) = & \Sigma_{\infty}^{-1} \int_0^t \Sigma_1(t-s) (V_1(s) - V_2(s)) ds \\ & + \Sigma_{\infty}^{-1} C_n A_n^{-1} B_n \int_0^t (V_1(s) - V_2(s)) ds \end{aligned}$$

D'où l'on déduit l'estimation, pour tout $t \in [0, \theta]$

$$\begin{aligned} |\Phi V_2(t) - \Phi V_1(t)| \leq & |\Sigma_{\infty}^{-1}| \left(\int_0^t |\Sigma_1(s)| ds \right) \|V_2 - V_1\|_{L^{\infty}(0, T_0)} \\ & + |\Sigma_{\infty}^{-1} C_n A_n^{-1} B_n| t \|V_2 - V_1\|_{L^{\infty}(0, T_0)} \end{aligned}$$

Alors comme $\Sigma_1(s)$ est dans $L^1(0, T)$, on peut toujours choisir T_0 suffisamment petit pour que :

$$|\Sigma_{\infty}^{-1}| \int_0^{T_0} |\Sigma_1(s)| ds + T_0 |\Sigma_{\infty}^{-1} C_n A_n^{-1} B_n| < \frac{1}{2}$$

Auquel cas on déduit que :

$$\forall (V_1, V_2) \in C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n)^2 \quad \|\Phi(V_2 - V_1)\|_{L^{\infty}(0, T_0)} \leq \frac{1}{2} \|V_2 - V_1\|_{L^{\infty}(0, T_0)}$$

Le théorème du point fixe permet alors d'affirmer que Φ admet un point fixe unique :

$$V_n \in C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n)$$

Alors en posant :

$$U_n(t) = U_0 + A_n^{-1} B_n \int_0^t V_n(s) ds - A_n^{-1} \int_0^t \phi_n(s)$$

On voit que $U_n \in C^0(0, T_0; \mathbb{R}^n) \cap H^1(0, T_0; \mathbb{R}^n)$ et que le couple (U_n, V_n) est bien solution de (S_n) sur $[0, T_0]$

Il suffit alors de réitérer le procédé, en prenant $t = T_0$ comme nouvel instant initial, ce qui permet de prolonger la solution ainsi construite sur $[T_0, 2T_0]$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre T . ■

Le passage à la limite et l'interprétation de la condition initiale se font alors sans problème ce qui achève la démonstration du théorème. ■

En particulier, pour le problème (2.1) qui nous intéresse on a le

COROLLAIRE 2.1

Avec les hypothèses :

- $\phi \in L^2(0, T)$
- $u \in L^2(\Omega)$

Le problème (2.1) admet une solution et une seule $(u(t), v(t))$ dans $\mathcal{H}(0, T)$ et on a les estimations : (ou les constantes qui interviennent ne dépendent que de μ, σ_, σ^*).*

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \|u_0\| + C'_1 \|\phi\| + C'_2 \int_0^T |\phi(t)| dt$$

$$\|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C'_3 \|u_0\| + C'_4 \|\phi\| + C'_5 \int_0^T |\phi(t)| dt$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C'_6 \|u_0\| + C'_7 \|\phi\| + C'_8 \int_0^T |\phi(t)| dt$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C'_9 \|u_0\| + C'_{10} \|\phi\| + C'_{11} \int_0^T |\phi(t)| dt$$

De même, les estimations obtenues prouvent que sous certaines hypothèses, les solutions peuvent être prolongées pour tout $t > 0$ en solutions globales. Plus précisément on a le :

COROLLAIRE 2.2

Avec les hypothèses :

• $\phi \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$

• $g \in L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega))$

Alors le problème (2.1) admet une unique solution globale vérifiant :

• $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega))$

• $\frac{du}{dt}(t) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega))$

• $v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega))$

En outre le caractère linéaire des équations permet d'affirmer que si on fait l'hypothèse :

(2.18) $\left\{ \begin{array}{l} \text{supp } \hat{\phi} \cap \mathbb{R}^+ \subset [\omega_*, \omega^*] \\ \text{où } \hat{\phi} \text{ désigne la transformée de Fourier de } \phi \text{ et où} \\ 0 < \omega_* < \omega^* < +\infty \end{array} \right.$

Alors si $V(x, \omega)$ désigne la transformée de Fourier en temps de $v(x, t)$ alors on a si on suppose en outre que la donnée initiale u_0 est identiquement nulle alors on a :

(2.19) $\text{supp } V(x, \omega) \subset \Omega \times [\omega_*, \omega^*]$

Il suffit de voir que si on pose en outre par $U(x, \omega)$ la transformée de Fourier en temps de $u(x, t)$; pour tout ω , le couple $(U(x, \omega), V(x, \omega))$ est solution du problème :

$$(2.20) \quad \begin{cases} i\mu\omega U(x,\omega) + \frac{dv}{dx}(x,\omega) = u_0(x) \\ \sigma(x,\omega)V(x,\omega) + \frac{dU}{dx}(x,\omega) = 0 \\ V(0,\omega) = \hat{\phi}(\omega) \end{cases}$$

Pour achever cette étude préliminaire, donnons deux exemples d'hypothèses qui permettent d'obtenir un résultat de régularité et de pouvoir interpréter au sens des traces la condition aux limites.

Nous considérons les 2 groupes d'hypothèses :

$$(2.21) \quad \begin{cases} \phi \in H^1(0,T) \\ u_0 = 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{(Condition de raccord).}$$

$$(2.22) \quad \begin{cases} \phi \in H^1(0,T), \quad \tilde{\sigma}_1 \in L^2(0,T) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \in L^2(\Omega) \\ \phi(0) = - \left(\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)(0) \end{cases} \quad \text{(Condition de raccord).}$$

REMARQUE 2.2

- La condition (2.21) équivaut à considérer le problème en supposant que le milieu est initialement au repos.
- L'hypothèse (2.22) est vérifiée par toutes les lois de polarisation de l'ensemble $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$; en revanche elle n'est pas vérifiée par les lois de Warbourg

THEOREME. 2.2

Avec les hypothèses (2.20) ou (2.21), l'unique solution du problème (2.1) vérifie :

- $u \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$
- $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$

et on a en outre l'égalité :

$$v(0,t) = \phi(t) \quad \text{dans } L^2(0,T)$$

Démonstration du Théorème

Formellement, il suffit de raisonner sur les équations dérivées par rapport aux temps, qui s'écrivent, compte tenu du théorème 1.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0 \\ \psi_\sigma \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -u_0 \otimes \tilde{\sigma}_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, t) = \phi'(t) \end{array} \right.$$

On peut, en fait introduire (\dot{u}, \dot{v}) unique solution, au sens du théorème 2.3, du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = 0 \\ \psi_\sigma \dot{v} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \otimes \tilde{\sigma}_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ \dot{u}(x, 0) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \in L^2(\Omega) \\ \dot{v}(0, t) = \phi'(t) \in L^2(0, T) \end{array} \right.$$

On construit alors (u, v) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}(s) ds \\ v(t) = -\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \int_0^t \dot{v}(s) ds \end{array} \right.$$

Vérifions alors, au moins formellement, que (u, v) est bien la solution du problème :

-On a :

$$\int_0^t \left(\mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) (s) ds = 0$$

$$\mu \dot{u}(t) - \mu \dot{u}(0) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^t \dot{v}(s) ds \right) = 0$$

- La condition $u(0) = u_0$ est immédiate par construction même :
- Enfin on a :

$$\begin{aligned} V(0,t) &= \int_0^t \dot{v}(0,s) ds - (\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x})(0) \\ &= \int_0^t \phi'(s) ds - (\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x})(0) \\ &= \phi(t) - \phi(0) - (\sigma_\infty^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial x})(0) \\ &= \phi(t) \end{aligned}$$

grâce à la condition de raccord.

Ceci établit, formellement, le résultat annoncé. Une démonstration rigoureuse s'obtient par exemple en raisonnant sur la solution approchée $u_n(t), v_n(t)$. ■

Notons cependant que les conditions (2.21) et (2.22), notamment les conditions de raccord, ne sont nécessaires que pour obtenir la régularité jusqu'au bord.

On peut en fait montrer que, à l'instar de ce qui se passe pour l'équation de la chaleur, le système étudié présente un effet "régularisant" à l'intérieur.

Dans le cas d'un milieu homogène, avec donnée initiale nulle, le résultat est une conséquence immédiate d'une expression explicite de la solution par transformation de Fourier en temps. On a plus précisément le :

THEOREME 2.2bis

On suppose le milieu homogène et on prend :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \quad u_0 = 0 \\ \bullet \quad \phi(t) \in L^2(0,T) \end{array} \right\}$$

Alors la solution (u,v) du problème de Cauchy vérifie :

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad u \in C^\infty(0,T; H^1(\varepsilon, +\infty)) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad v \in C^\infty(0,T; H^1(\varepsilon, +\infty)) \end{array}$$

en particulier, pour tout $L > 0$, on peut définir les traces :

$$u_L(t) = u(L, t) \in C^\infty(0, T)$$

$$v_L(t) = v(L, t) \in C^\infty(0, T)$$

Démonstration du Théorème :

Etant donné $\phi(t)$ dans $L^2(0, T)$ nous définissons la fonction $\phi^*(t)$ telle que :

$$\phi^*(t) = \phi(t) \quad \text{si } 0 \leq t \leq T$$

$$\phi^*(t) = -\phi(2T - t) \quad \text{si } T \leq t \leq 2T$$

$$\phi^*(t) = 0 \quad \text{si } t \notin [0, 2T]$$

de telle sorte que l'on a :

$$\phi^*(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n |\phi^*(t)| dt < +\infty$$

d'où l'on déduit que, si $\hat{\phi}^*(\omega)$ désigne la transformée de Fourier de $\phi(t)$ on a :

$$\begin{cases} \hat{\phi}^*(\omega) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \hat{\phi}^*(0) = 0 \end{cases}$$

Soit alors (u^*, v^*) , la solution globale, au sens du corollaire 2.2, du problème (2.1) associé aux données $u_0 = 0$ et ϕ^* . On sait que les transformées de Fourier en temps (U^*, V^*) de (u^*, v^*) sont solution du

système différentiel ordinaire :

$$\begin{cases} i\mu\omega U^*(x,\omega) + \frac{dV^*}{dx}(x,\omega) = 0 \\ \sigma(\omega)V^*(x,\omega) + \frac{dU^*}{dx}(x,\omega) = 0 \\ V^*(0,\omega) = \hat{\phi}^*(\omega) \end{cases}$$

dont la solution est donnée par :

$$\begin{cases} V^*(x,\omega) = \hat{\phi}^*(\omega) e^{-(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} x} \\ U^*(x,\omega) = \left(\frac{\sigma(\omega)}{i\mu\omega}\right)^{1/2} e^{-(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} x} \\ \text{où } \operatorname{Re}(z^{1/2}) > 0 \text{ lorsque } z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Nous utilisons alors le :

LEMME 2.3

Soit $\tilde{\sigma}(\omega)$ la fonction réelle et positive définie par :

$$|\tilde{\sigma}(\omega)|^{1/2} = \operatorname{Re}((i\sigma(\omega))^{1/2})$$

alors on a les propriétés :

(i) $\omega \rightarrow \tilde{\sigma}(\omega)$

(ii) $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \tilde{\sigma}(\omega) \geq \tilde{\sigma}_* = \left(\frac{\sigma^* - \sigma_*}{2\sigma_*}\right)^{1/2} \sigma_* > 0$

(iii) $\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) \frac{\sqrt{2}}{2}$

Démonstration du lemme :

(i) est une conséquence de la continuité de $\omega \rightarrow \sigma(\omega)$

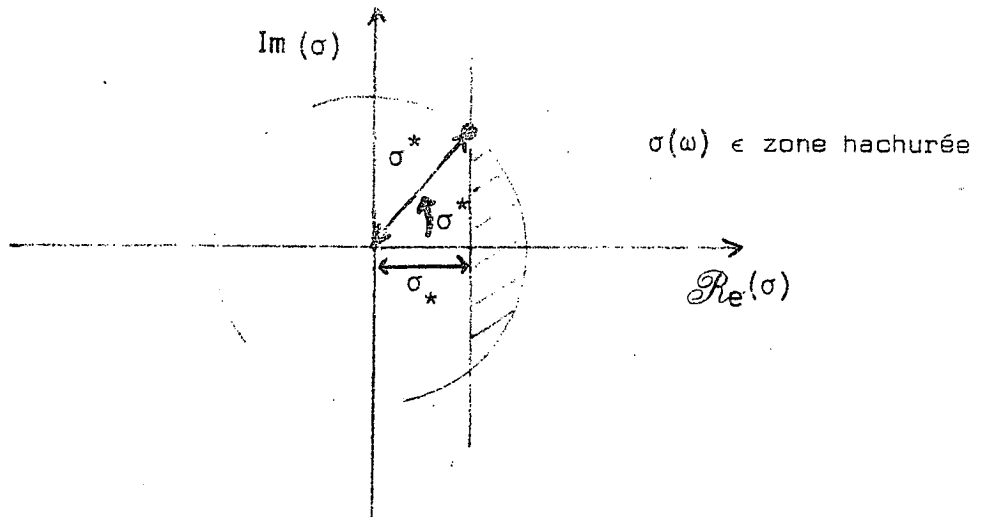
(ii) Posons $\sigma(\omega) = |\sigma(\omega)| e^{i\theta(\omega)} \quad -\pi \leq \theta(\omega) \leq \pi$

Avec les hypothèses sur $\sigma(\omega)$, on sait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma(\omega)| \leq \sigma^* \\ \operatorname{Re}(\sigma(\omega)) \geq \sigma_* \end{array} \right.$$

Graphiquement, on vérifie alors immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\theta(\omega)| \leq \theta^* \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \cos \theta^* \leq \frac{\sigma_*}{\sigma^*} \end{array} \right.$$



Par suite,

$$|\tilde{\sigma}(\omega)|^{1/2} = |\sigma(\omega)|^{1/2} \cos\left(\frac{\theta(\omega)}{2}\right)$$

D'où

$$\tilde{\sigma}(\omega) = |\sigma(\omega)| \cos^2\left(\frac{\theta(\omega)}{2}\right) = |\sigma(\omega)| \left(\frac{1 + \cos \theta(\omega)}{2}\right)$$

Donc,

$$\sigma(\omega) \geq \frac{\sigma^*}{2} (1 + \cos \theta^*) = \frac{\sigma^*}{2} \left(1 + \frac{\sigma^*}{\sigma^*}\right)$$

(iii) résulte du fait que $\sigma(0) \in \mathbb{R}_*^+$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{+\infty} |V^*(x, \omega)|^2 dx &= |\phi^*(\omega)|^2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-2(\mu\tilde{\sigma}(\omega)\omega)^{1/2}x} \\ &= \frac{e^{-2(\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/2}\varepsilon}}{(\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/2}} |\phi^*(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\|V^*(\cdot, \omega)\|_{L^2(\varepsilon, +\infty)} = \frac{|\phi^*(\omega)|}{(\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/4}} e^{-2(\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/2}\varepsilon}$$

De même un calcul analogue donne

$$\left\| \frac{dV^*}{dx}(\cdot, \omega) \right\|_{L^2(\varepsilon, +\infty)} = (\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/4} |\phi^*(\omega)| e^{-2[\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega)]^{1/2}\varepsilon}$$

Compte tenu du fait que $\hat{\phi}^*(0) = 0$, on voit que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\omega^2)^p \|V^*(\cdot, \omega)\|_{H^1(\varepsilon, +\infty)}^2 d\omega < +\infty$$

ce qui prouve que, par transformation de Fourier inverse :

$$v^*(t) \in C^\infty(0, +\infty; H^1(\varepsilon, +\infty))$$

De la même façon, on montre que :

$$u^*(t) \in C^\infty(0, +\infty; H^1(\varepsilon, +\infty))$$

Or, par causalité on a :

$$\begin{cases} u(t) = u^*(t) & \forall t \in [0, T] \\ v(t) = v^*(t) & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Par conséquent il vient :

$$u(t) \in C^\infty(0, T; H^1(\varepsilon, +\infty))$$

$$v(t) \in C^\infty(0, T; H^1(\varepsilon, +\infty))$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

On doit pouvoir étendre (mais c'est technique!) ce résultat au cas hétérogène, lorsque la donnée initiale vérifie par exemple :

$$u_0 \in H^1(\varepsilon, +\infty) \quad \forall \varepsilon > 0$$

2.2 - Continuité de la solution par rapport à σ

Le corollaire 2.1 nous a permis de construire une application :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_T : \quad & L^2(\Omega) \times L^2(0,T) \times \Sigma(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}(0,T) \\
 & (u_0, \phi, \sigma) \rightarrow (u, v)
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

où (u, v) est l'unique solution du problème associé aux données (u_0, ϕ, σ)

- La dépendance $(u_0, \phi) \rightarrow \mathcal{U}_T(\sigma, u_0, \phi)$ est linéaire.
- La dépendance $\sigma \rightarrow \mathcal{U}_T(\sigma, u_0, \phi)$ est non linéaire.

Le corollaire 2.1 prouve que l'application \mathcal{U}_T est continue par rapport à (u_0, ϕ) ; nous nous intéressons maintenant à la continuité de \mathcal{U}_T par rapport à σ .

THEOREME 2.3

ϕ et u_0 étant fixes dans $L^2(0,T)$ et $L^2(\Omega)$; alors l'application $\sigma \rightarrow \mathcal{U}_T(\sigma, u_0, \phi)$ est localement lipschitzienne de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}(0,T)$. Plus précisément étant donnés (σ_1, σ_2) dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})^2$, il existe une constante positive $C(\mu, \sigma_1, u_0, \phi, T)$ telle que :

$$\|\mathcal{U}_T(\sigma_2, u_0, \phi) - \mathcal{U}_T(\sigma_1, u_0, \phi)\|_{\mathcal{H}(0,T)} \leq C(\mu, \sigma_1, u_0, \phi, T) \|\sigma_1 - \sigma_2\|_0
 \tag{2.24}$$

Démonstration du théorème

Posons:

$$\begin{aligned}
 (u_1, v_1) &= \mathcal{U}_T(\sigma_1, u_0, \phi) \\
 (u_2, v_2) &= \mathcal{U}_T(\sigma_2, u_0, \phi) \\
 (\tilde{u}, \tilde{v}) &= (u_1 - u_2, v_1 - v_2)
 \end{aligned}$$

Alors (\tilde{u}, \tilde{v}) est solution du problème :

$$\left| \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0 \\ \psi_{\sigma_1} \tilde{v} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = (\psi_{\sigma_2} - \psi_{\sigma_1}) v_2 \\ \tilde{u}(x, 0) = 0 \\ \tilde{v}(x, t) = 0 \end{array} \right.$$

Autrement dit (\tilde{u}, \tilde{v}) est solution du problème (2.3) avec :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{u}_0 = 0 \\ \tilde{\phi} = 0 \\ \tilde{g} = (\psi_{\sigma_2} - \psi_{\sigma_1}) v_2 \end{array} \right.$$

Nous utilisons alors le théorème (2.1) pour en déduire que l'on a donné l'estimation :

$$\| (\tilde{u}, \tilde{v}) \|_{\mathcal{H}(0, T)} \leq C_1(\mu, \sigma_1) \| \tilde{g} \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$$

Or, nous savons grâce au théorème 1.10 que :

$$\| \tilde{g} \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = \| (\psi_{\sigma_2} - \psi_{\sigma_1}) v_2 \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \| \sigma_2 - \sigma_1 \|_{\infty} \| v_2 \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$$

Posons alors,

$$C(\mu, \sigma_1, \sigma_2, u_0, \phi, T) = C_1(\mu, \sigma_1) \| v_2 \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$$

Nous obtenons alors bien l'estimation annoncée. ■

Du théorème 2.3 découle le :

COROLLAIRE 2.3

Soit σ_n une suite de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ convergeant vers σ dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$. Nous posons :

$$(u_n, v_n) = \mathcal{U}_T(\sigma_n, u_0, \phi)$$

$$(u, v) = \mathcal{U}_T(\sigma, u_0, \phi)$$

où (u_0, ϕ) est donné dans $L^2(\Omega) \times L^2(0, T)$. Alors (u_n, v_n) converge vers (u, v) dans $\mathcal{H}_0(0, T)$ et on a l'estimation d'erreur :

(2.25)

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_{\mathcal{H}_0(0, T)} \leq C(\mu, \sigma, u_0, \phi, T) \|\sigma_n - \sigma\|_{\infty}$$

III - JUSTIFICATION THEORIQUE DE L'APPROXIMATION DE LA LOI DE WARBOURG PAR

UNE SOMME DE FRACTIONS RATIONNELLES

3.1 - Introduction

Le principe d'approximation du problème (2.3) proposé dans [2] consiste, rappelons le, à remplacer la loi de polarisation $\sigma(x,\omega)$ de $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$ par une loi de polarisation approchée $\sigma_a(x,\omega)$ dans l'ensemble $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$ décrit au paragraphe 1, ce qui a pour principal effet de substituer à l'opérateur de convolution ψ_σ , un opérateur différentiel en temps, donc local, dont la discrétisation par différences finies permet de constituer une méthode performante d'intégration numérique dans le domaine espace-temps du problème approché, (Cf. le théorème 1.14).

D'un point de vue théorique, cette approche se justifie entièrement si la loi de polarisation du problème initial $\sigma(x,\omega)$ appartient à l'adhérence de $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$ dans $\Sigma(\Omega; \mathbb{R})$. En effet si on suppose :

$$\sigma \in \overline{\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})} \subset \Sigma(\Omega; \mathbb{R})$$

Alors on peut trouver une suite σ_n dans $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$ telle que :

$$\sigma_n \rightarrow \sigma \text{ dans } \Sigma(\Omega; \mathbb{R})$$

On sait alors, d'après le théorème que la solution du problème approché (u_n, v_n) converge, dans $\mathcal{H}(0,T)$ vers la solution (u,v) du problème de départ et qu'on a une estimation d'erreur du type :

$$\|(u_n, v_n) - (u, v)\|_{\mathcal{H}(0,T)} \leq C(\sigma) \|\sigma_n - \sigma\|_\infty$$

Le but de ce paragraphe est de montrer que toute loi de Warbourg peut-être approchée par une suite σ_n d'éléments de $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$ autrement dit de prouver qu'on a l'inclusion :

$$\Sigma_w(\Omega; \mathbb{R}) = \overline{\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})} \subset \Sigma(\Omega; \mathbb{R})$$

en fournissant un procédé constructif de la suite σ_n et en donnant des estimations précises de la différence $\sigma - \sigma_n$.

3.2 - Approximation de la loi de Warbourg par une somme de fractions rationnelles

3.2.1 - Réduction du problème à un problème plus simple

Il suffit de se ramener à l'approximation de la fonction :

$$\omega \rightarrow \frac{1}{1+(i\omega)^{1/2}}$$

En effet, si on fait l'approximation :

$$\frac{1}{1+(i\omega)^{1/2}} \approx f_n(i\omega) = \sum_{k=2}^n \frac{\beta_n^k}{1+i\alpha_n^k \omega}$$

Alors il suffit de faire les approximations suivantes :

$$\frac{1}{1+ i \left[\frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2}} \approx \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{1+i\alpha_k \frac{\omega}{\omega_c(x)}}$$

Alors on approche la loi de Warbourg :

$$\sigma(x, \omega) = \sigma_0(x) \left\{ \frac{1+\lambda(x) i \left[\frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2}}{1+ i \left[\frac{\omega}{\omega_c(x)} \right]^{1/2}} \right\}$$

par la loi approché

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, \omega) &= \sigma_\infty(x) + [\lambda(x)-1] \sigma_0(x) f_n\left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right) \\ &= \sigma_\infty(x) + \sum_{k=1}^n \frac{b_k(x)}{1+i a_k(x) \omega} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_\infty(x) = \lambda(x)\sigma_0(x) \\ b_k(x) = \beta_n^k \sigma_0(x) [\lambda(x)-1] \\ a_k(x) = \alpha_n^k \omega_c(x)^{-1} \end{cases}$$

On vérifie alors très facilement que, compte tenu des hypothèses sur les fonctions $\sigma_0(x)$, $\lambda(x)$, $\omega_c(x)$ la suite $\sigma_n(x, \omega)$ ainsi construite appartient bien à $\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})$. En outre, en posant $f(z) = (1 + z^{1/2})^{-1}$, avec $\operatorname{Re}(z^{1/2}) > 0$, on voit que l'identité :

$$\sigma_n(x, \omega) = \sigma_0(x) [\lambda(x)-1] \left\{ f_n\left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right) - f\left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right) \right\}$$

nous fournit la majoration :

$$\|\sigma_n - \sigma\|_\infty \leq (\sigma_0)^* (\lambda^* - 1) \|f_n - f\|_{L^\infty}$$

avec

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |f_n(i\omega) - f(i\omega)|$$

3.2.2 - Approximation de la fonction $f(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}}$ par une suite de fractions rationnelles.

L'idée de base consiste à caractériser, pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $f(z)$ comme point fixe d'une application contractante : $y \rightarrow \phi(y, z)$ de type homographique :

$$\phi(y, z) = \frac{a(z)y + b(z)}{c(z)y + d(z)}$$

où $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$ dépendent de façon affine de la variable z , puis d'appliquer la méthode des approximations successives en définissant par récurrence la suite :

$$f_{n+1}(z) = \phi(f_n(z), z)$$

Dans ce but posons $y = f(z)$. Nous avons donc :

$$(1+\sqrt{z}) = \frac{1}{y}$$

$$\implies z = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2 = 1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$\implies zy^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\implies zy - y + 2 = \frac{1}{y}$$

$$\implies y = \frac{1}{2 + (z-1)y}$$

Nous définissons alors la suite de fonctions $f_n(z)$ par récurrence :

$$\begin{cases} f_0(z) = 0 \\ f_{n+1}(z) = \frac{1}{2 + (z-1)f_n(z)} \end{cases}$$

Nous allons alors établir un premier résultat de convergence sur la suite $f_n(z)$ décrit dans le

THEOREME 3.1

La suite $f_n(z)$ est donnée explicitement par la formule :

$$f_n(z) = f(z) \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}} \right\} \quad \forall z \notin \mathbb{R}^-$$

En particulier en tout $z \notin \mathbb{R}^-$; $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ avec en outre :

$$f_n(0) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$z \neq 0 \quad |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{2|z|^{1/2}}{|1+\sqrt{z}|} \left| \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \right|^n \frac{1}{1-|\phi(z)|}$$

où
$$\phi(z) = \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \quad (|\phi(z)| < 1)$$

Démonstration du Théorème :

Elle est conséquence d'un résultat général sur les suites homographiques dans \mathbb{C} dont un cas particulier est le :

LEMME 3.1

Soient (a, b, c, d) quatre nombres complexes satisfaisant les conditions suivantes :

(i) l'équation du second degré:

$$l(cl + d) = (al + b)$$

admet deux racines distinctes l_1 et l_2

(ii) $ad - bc \neq 0$

Nous désignons par ψ l'application

$$\psi(u) = \frac{b - du}{cu - a} \quad (u \neq \frac{a}{c})$$

Etant donné un complexe u_0 vérifiant :

(iii) $u_0 \notin \{\psi^{(n)}(-\frac{d}{c}) ; n \in \mathbb{N}\}$

$\psi^{(n)}$ désignant le $n^{\text{ème}}$ itéré de ψ

Alors la suite définie par récurrence par la formule :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

existe et vérifie :

$$\frac{u_{n+1} - l_1}{u_{n+1} - l_2} = \frac{cl_1 + d}{cl_2 + d} \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$$

Démonstration du Lemme :

La condition (ii) entraîne que $-\frac{d}{c}$ n'est pas solution de (i) et donc que $-\frac{d}{c} \notin \{l_1, l_2\}$. (iii) assure que la suite est parfaitement définie puisque l'application ψ n'est autre que l'application réciproque de l'appli-

cation $u \rightarrow \frac{au + b}{cu + a}$, qui est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.
Il reste à vérifier l'égalité

or,

$$\frac{al_1 + b}{cl_1 + d} = l_1$$

Donc,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - l_1 &= \frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{al_1 + b}{cl_1 + d} \\ &= \frac{(au_n + b)(cl_1 + d) - (cu_n + d)(al_1 + b)}{(cu_n + d)(cl_1 + d)} \end{aligned}$$

Soit encore tous calculs effectués :

$$u_{n+1} - l_1 = \frac{(ad-bc)}{cu_n + d} \frac{u_n - l_1}{cl_1 + d}$$

De la même façon,

$$u_{n+1} - l_2 = \frac{ad-bc}{cu_n + d} \frac{u_n - l_2}{cl_2 + d}$$

Il suffit de faire le quotient membre à membre de ces deux égalités pour conclure ce qui démontre le lemme. ■

Nous pouvons appliquer le lemme, pour tout : $z \neq 0$ ou 1 avec :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = z-1 \\ d = 2 \end{cases}$$

L'équation donnant les limites possibles de la suite $f_n(z)$ s'écrit :

$$\ell(2 + (z-1)\ell) = 1$$

$$\iff (z-1)\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$$

équation dont on vérifie que les deux solutions sont données par :

$$\begin{cases} \ell_1(z) = f(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}} \\ \ell_2(z) = g(z) = \frac{1}{1-\sqrt{z}} \end{cases}$$

qui sont donc bien distinctes pour $z \neq 0$ et 1 . Par conséquent en remarquant que :

$$c\ell_1 + d = (z-1) f(z) + 2 = 1+\sqrt{z}$$

$$c\ell_2 + d = (z-1) g(z) + 2 = 1-\sqrt{z}$$

Nous en déduisons que la suite $f_n(z)$ vérifie :

$$\frac{f_{n+1}(z)-f(z)}{f_{n+1}(z)-g(z)} = \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right) \frac{f_n(z)-f(z)}{f_n(z)-g(z)}$$

D'où, pour tout n dans \mathbb{N}^*

$$\frac{f_n(z)-f(z)}{f_n(z)-g(z)} = \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^n \frac{f(z)}{g(z)}$$

Soit encore :

$$\frac{f_n(z)-f(z)}{f_n(z)-g(z)} = \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}$$

Par conséquent,

$$f_n(z) \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}\right) = f(z) - g(z) \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}$$

D'où nous tirons l'expression de $f_n(z)$:

$$f_n(z) = f(z) \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}} \right)$$

Et par suite, une expression de "l'erreur"

$$f(z) - f_n(z) = \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^n \left(\frac{1 + \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}} \right)$$

Soit finalement :

$$f(z) - f_n(z) = \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \frac{\left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{n+1}}$$

Alors, pour $z \neq 0$, la convergence de $f_n(z)$ vers $f(z)$ est une conséquence du :

LEMME 3.2

L'application $z \rightarrow \phi(z) = \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$ applique

$\mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}^-\}$ dans le disque unité ouvert :

$$D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

Démonstration du lemme :

Nous savons que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}^-\} \quad \operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0$. Nous pouvons donc écrire :

$$\sqrt{z} = x + iy \quad \text{avec } x > 0$$

Alors,

$$|1+\sqrt{z}|^2 = (1+x)^2 + y^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2x$$

$$|1-\sqrt{z}|^2 = (1-x)^2 + y^2 = 1 + x^2 + y^2 - 2x$$

Par conséquent comme $x > 0$

$$\left| \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \right|^2 = 1 - \frac{4x}{(1+x)^2 + y^2} < 1$$

ce qui démontre le lemme. ■

Par conséquent pour tout $z \notin i\mathbb{R}^-$, en posant :

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{2|\sqrt{z}|}{|1+\sqrt{z}|} \frac{|\phi(z)|^n}{1-|\phi(z)|}$$

La convergence de $f_n(z)$ vers $f(z)$ est donc exponentielle.

Pour $z = 0$, remarquons que l'on a :

$$f_{n+1}(0) = \frac{1}{2-f_n(0)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f_0(0) = 0 &\implies f_1(0) = \frac{1}{2} \\ f_1(0) = \frac{1}{2} &\implies f_2(0) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ &\implies f_3(0) = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Et par récurrence :

$$f_n(0) = 1 - \frac{1}{n+1} \implies f_{n+1}(0) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

(On remarque que l'on peut obtenir ce résultat grâce à un développement limité de l'expression de $f_n(z)$ au voisinage de $z = 0$). ■

Il s'agit maintenant de montrer que $f_n(z)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de fractions rationnelles dont les pôles sont réels strictement négatifs. C'est précisément l'objet du :

THEOREME 3.2

Pour tout n , la fonction $z \rightarrow f_n(z)$ se prolonge en une fraction rationnelle admettant, suivant la parité de n , la décomposition en éléments simples suivante :

$$(i) \quad f_{2n}(z) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+z \cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$$

$$(ii) \quad f_{2n+1}(z) = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+z \cotg^2 \frac{k\pi}{2n+2}}$$

Démonstration du théorème :

En raisonnant par récurrence il est très facile d'établir que $f_n(z)$ est une fraction rationnelle. Plus précisément un simple calcul montre que si on introduit la famille de polynômes (P_n, Q_n) de degré n , définie par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} P_{n+1}(z) = (z-1) P_n(z) + 2Q_n(z) \\ Q_{n+1}(z) = (z-1) Q_n(z) + 2P_n(z) \\ P_0(z) = 0 \\ Q_0(z) = 2 \end{cases}$$

Alors on a pour tout entier n

$$\begin{cases} f_{2n}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \\ f_{2n+1}(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \end{cases}$$

Remarquons qu'en particulier :

- La partie entière de $f_{2n}(z)$ est nulle
- La partie entière de $f_{2n+1}(z)$ est constante

① Recherche des pôles de $f_p(z)$

Sur l'expression de $f_p(z)$ fournie par le théorème, il est clair que les pôles de $f_p(z)$ sont solutions de :

$$\begin{cases} \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right)^{p+1} = 1 \\ \left(\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right) \neq 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} = \omega_{p+1}^k & k = 1, 2, \dots, p \\ \text{avec } \omega_{p+1}^k = e^{\frac{2ik\pi}{p+1}} \end{cases}$$

Soit encore, pour chaque valeur de $k = 1, 2, \dots, p$:

$$z = \left(\frac{1 - \omega_{p+1}^k}{1 + \omega_{p+1}^k}\right)^2$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \omega_{p+1}^k}{1 + \omega_{p+1}^k} &= \frac{(1 - \omega_{p+1}^k)(1 + \overline{\omega_{p+1}^k})}{1 + \omega_{p+1}^k + \overline{\omega_{p+1}^k} + |\omega_{p+1}^k|^2} \\ &= \frac{1 - (\omega_{p+1}^k - \overline{\omega_{p+1}^k}) - |\omega_{p+1}^k|^2}{1 + \omega_{p+1}^k + \overline{\omega_{p+1}^k} + |\omega_{p+1}^k|^2} \end{aligned}$$

Comme,

$$\begin{cases} |\omega_{p+1}^k| = 1 \\ \omega_{p+1}^k + \overline{\omega_{p+1}^k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{p+1} \\ \omega_{p+1}^k - \overline{\omega_{p+1}^k} = 2i \sin \frac{2k\pi}{p+1} \end{cases}$$

Il vient :

$$\frac{1 - \omega_{p+1}^k}{1 + \omega_{p+1}^k} = i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{p+1} \quad (p+1 \neq 2k)$$

Et par conséquent :

$$z = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{p+1} \right) \quad (p+1 \neq 2k)$$

En récapitulant, compte tenu que $\operatorname{tg}(\pi-x) = -\operatorname{tg}x$, nous obtenons donc :

(i) pour $p = 2n$

Les pôles de $f_{2n}(z)$ sont les n réels strictement négatifs :

$$(3.10) \quad p_{2n}^k = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(ii) pour $p = 2n+1$

Les pôles de $f_{2n+1}(z)$ sont les n réels strictement négatifs :

$$(3.11) \quad p_{2n+1}^k = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+2} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

② Recherche des zéros de $f_p(z)$

Des calculs absolument identiques aux précédents donnent :

(i) pour $p = 2n$

Les zéros de $f_{2n-1}(z)$ sont les $(n-1)$ réels strictement négatifs :

$$(3.12) \quad z_{2n}^k = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(ii) pour $p = 2n+1$

Les zéros de $f_{2n+1}(z)$ sont les n réels strictement négatifs :

$$(3.13) \quad z_{2n+1}^k = -\operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

③ Ecriture des fractions rationnelles $f_{2n}(z)$ et $f_{2n+1}(z)$

De ce qui précède on déduit qu'il existe deux constantes A_n et B_n (qui sont nécessairement réelles d'après la relation de récurrence entre f_n et f_{n+1}) telles que :

$$f_{2n}(z) = A_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n})}{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1})}$$

$$f_{2n+1}(z) = B_n \frac{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1})}{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+2})}$$

constantes encore caractérisées par :

$$\begin{cases} A_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f_{2n}(x) \\ B_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2n+1}(x) \end{cases}$$

Or nous avons :

$$\begin{cases} f_{2n+1}(x) = \frac{1}{2+(x-1)f_{2n}(x)} \\ x f_{2n+2}(x) = \frac{x}{2+(x-1)f_{2n+1}(x)} \end{cases}$$

En passant à la limite dans ces égalités, il vient :

$$\begin{cases} B_n = \frac{1}{2+A_n} \\ A_{n+1} = \frac{1}{B_n} \end{cases}$$

D'où l'on déduit :

$$A_{n+1} = A_n + 2$$

Comme $A_0 = 0$, on en déduit :

$$\begin{cases} A_n = 2n \\ B_n = \frac{1}{2(n+1)} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$(3.14) \quad f_{2n}(z) = 2n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n})}{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1})}$$

$$(3.15) \quad f_{2n+1}(z) = \frac{1}{2n+1} \frac{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1})}{\prod_{k=1}^n (z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+2})}$$

④ Décomposition de $f_{2n}(z)$ et $f_{2n+1}(z)$ en éléments simples

Il est clair que l'on peut écrire :

$$(3.16) \quad \begin{cases} f_{2n}(z) = \sum_{k=1}^n \frac{r_{2n}^k}{z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \\ f_{2n+1}(z) = \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{r_{2n+1}^k}{z + tg^2 \frac{k\pi}{2n+2}} \end{cases}$$

Où l'on rappelle que :

$$\begin{cases} f_{2n}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} \\ f_{2n+1}(z) = \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \end{cases}$$

(i) Cas de $f_{2n}(z)$

Les pôles de f_{2n} sont tous simples, on a donc :

$$r_{2n}^k = \frac{P_{n-1}(z_{2n}^k)}{Q'_n(z_{2n}^k)} \quad z_{2n}^k = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Or,

$$\frac{1}{f_{2n}(z)} = \frac{Q_n(z)}{P_{n-1}(z)}$$

Donc en posant, $h_{2n}(z) = \frac{1}{f_{2n}(z)}$

$$h'_{2n}(z) = \frac{Q'_n(z)}{P_{n-1}(z)} - \frac{P'_{n-1}(z)Q_n(z)}{P_{n-1}(z)^2}$$

Comme,

$$\begin{cases} Q_n(z_{2n}^k) = 0 \\ P_{n-1}(z_{2n}^k) \neq 0 \\ Q'_n(z_{2n}^k) \neq 0 \end{cases}$$

Il vient,

$$h'_{2n}(z_{2n}^k) = \frac{Q'_n(z_{2n}^k)}{P_{n-1}(z_{2n}^k)}$$

D'où l'on déduit finalement :

$$(3.17) \quad r_{2n}^k = \frac{1}{h'_{2n}(z_{2n}^k)}$$

Or, d'après le théorème 3.1,

$$f_{2n}(z) = f(z) \frac{1-\phi(z)^{2n}}{1-\phi(z)^{2n+1}}$$

avec,

$$\begin{cases} f(z) = 1+\sqrt{z} \\ \phi(z) = \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \end{cases}$$

Posons alors, $h(z) = f(z)^{-1}$

$$h_{2n}(z) = h(z) \frac{1-\phi(z)^{2n+1}}{1-\phi(z)^{2n}} = \left(\frac{h(z)}{1-\phi(z)^{2n}} \right) (1-\phi(z)^{2n+1})$$

Donc,

$$\begin{aligned} h'_{2n}(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ \left(\frac{h(z)}{1-\phi(z)^{2n}} \right) \right\} (1-\phi(z)^{2n+1}) \\ &\quad - (2n+1) \frac{h(z)\phi'(z)\phi(z)^{2n}}{1-\phi(z)^{2n}} \end{aligned}$$

Or,

$$\phi(z_{2n}^k)^{2n+1} = 1$$

Donc,

$$h'_{2n}(z_{2n}^k) = (2n+1) \frac{h(z_{2n}^k)\phi'(z_{2n}^k)\phi(z_{2n}^k)^{2n}}{\phi(z_{2n}^k)^{2n} - 1}$$

et par suite,

$$r_n^k = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{h(z_{2n}^k)\phi'(z_{2n}^k)} \left(1 - \frac{1}{\phi(z_{2n}^k)^{2n}} \right)$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{\phi(z_{2n}^k)^{2n}} = \phi(z_{2n}^k)$$

D'où finalement,

$$r_{2n}^k = \frac{1}{2n+1} \frac{1-\phi(z_{2n}^k)}{h(z_{2n}^k)\phi'(z_{2n}^k)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)} f(z_{2n}^k) \frac{1-\phi(z_{2n}^k)}{\phi'(z_{2n}^k)}$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \\ \phi'(z) = -\frac{1}{\sqrt{z}(1+\sqrt{z})^2} \\ 1-\phi(z) = \frac{2\sqrt{z}}{(1+\sqrt{z})} \end{array} \right.$$

Donc,

$$\frac{1-\phi(z)}{\phi'(z)} = -2z(1+\sqrt{z})$$

D'où,

$$\frac{f(z)(1-\phi(z))}{\phi'(z)} = -2z$$

Donc finalement il vient :

$$(3.18) \quad r_{2n}^k = -\frac{2z_n^k}{2n+1} = \frac{2\operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2n+1}$$

Par conséquent, en reportant dans :

$$f_{2n}(z) = \frac{2}{(2n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{z + \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Soit,

$$(3.7) \quad f_{2n}(z) = \frac{1}{2(2n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+z \cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$$

(ii) Cas de $f_{2n+1}(z)$.

Les calculs sont exactement les mêmes, on a :

$$(3.19) \quad r_{2n+1}^k = \frac{1}{h'_{2n+1}(z_{2n+1}^k)} = \frac{2}{2n+2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+2} \right)$$

ce qui nous mène finalement à l'expression :

$$(3.8) \quad f_{2n+1}(z) = \frac{1}{2n+2} + \frac{2}{2n+2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+z \cotg^2 \left(\frac{k\pi}{2n+2} \right)}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Pour terminer, nous établissons un résultat de convergence uniforme de la fonction $\omega \mapsto f_n(i\omega)$ vers la fonction $\omega \mapsto f(i\omega)$. Plus précisément nous nous intéressons à la suite des termes impairs $f_{2n+1}(z)$ pour laquelle nous pouvons énoncer le résultat suivant :

THEOREME 3.3

Pour tout z dans \mathbb{C} et tout entier n on a la relation :

$$f_{2n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) - f_{2n+1}(z)$$

et on a l'estimation :

$$\forall |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad |f_{2n+1}(z) - f(z)| \leq \frac{1}{2n+2}$$

d'où l'on déduit en particulier :

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} |f_{2n+1}(z) - f(z)| = \frac{1}{2n+2}$$

Démonstration du Théorème :

Introduisons : $\psi(z) = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$ et posons :

$$\epsilon_{2n+1}(z) = f_{2n+1}(z) - f(z)$$

grâce au théorème 3.2, on sait que :

$$(3.20) \quad \epsilon_{2n+1}(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}} \frac{1-\psi(z)}{1-\psi(z)^{2n+2}}$$

Remarquons alors que $\psi\left(\frac{1}{z}\right) = -\psi(z)$; il vient :

$$\epsilon_{2n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \frac{1+\psi(z)}{1-\psi(z)^{2n+2}}$$

Or,

$$1 + \psi(z) = 1 + \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = \frac{2}{1-\sqrt{z}}$$

$$1 - \psi(z) = 1 - \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = -\frac{2\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$$

Par conséquent :

$$\sqrt{z} (1+\psi(z)) = -(1-\psi(z))$$

Donc,

$$\epsilon_{2n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{1+\sqrt{z}} \frac{1-\psi(z)}{1-\psi(z)^{2n+2}} = -\epsilon_{2n+1}(z)$$

ce qui établit la première partie du théorème.

De l'expression (3.20), on déduit encore que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2n+1}(z) = \frac{1}{(1+\sqrt{z})(1+\psi(z))} \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} (\psi(z) - \omega_{2n+2}^k) \right\} \\ \text{avec } \omega_{2n+2}^k = \exp \frac{2ik\pi}{2n+2} \end{array} \right.$$

Or,

$$\begin{aligned} \psi(z) - \omega_{2n+2}^k &= \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - \omega_{2n+2}^k \\ &= \frac{1}{1-\sqrt{z}} (1 - \omega_{2n+2}^k + (1 + \omega_{2n+2}^k)\sqrt{z}) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \psi(z) - \omega_{2n+2}^k &= \frac{1+\omega_{2n+2}^k}{1-\sqrt{z}} \left(\sqrt{z} + \frac{1-\omega_{2n+2}^k}{1+\omega_{2n+2}^k} \right) \\ &= \frac{1+\omega_{2n+2}^k}{1-\sqrt{z}} \left(\sqrt{z} - i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\varepsilon_{2n+2}(z) = \frac{(1-\sqrt{z})^{2n}}{(1+\sqrt{z})(\psi(z)+1)} \delta_{2n+1}(z)$$

$$\text{avec } \delta_{2n+1}(z) = \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} (1+\omega_{2n+2}^k) \left(\sqrt{z} - i \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \right\}^{-1}$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{(2n+2-k)\pi}{2(n+1)} = - \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2(n+1)} \\ \omega_{2n+2}^{2n+2-k} = \omega_{2n+2}^k \end{array} \right.$$

Par conséquent, en regroupant deux à deux les termes conjugués, il vient :

$$\delta_{2n}(z) = \left(\prod_{k=1}^n |1 + \omega_{2n+2}^k|^2 \left(z + \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) \right)^{-1}$$

Or, pour tout z vérifiant $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, on a la minoration évidente :

$$\left| z + \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right| \geq \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Donc,

$$|\delta_{2n+2}(z)| \leq \left\{ \prod_{k=1}^n |1 + \omega_{2n+2}^k|^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right\}^{-1} = \delta_{2n}(0)$$

Or, comme $\psi(0) = 1$, de (3.21) on tire que :

$$\varepsilon_{2n+1}(0) = \frac{1}{2} \delta_{2n+1}(0)$$

D'où

$$\delta_{2n+1}(0) = \frac{2}{2n+2}$$

Par conséquent :

$$\forall z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad |\delta_{2n+1}(z)| \leq \frac{2}{2n+2}$$

Donc,

$$|\delta_{2n+1}(z)| \leq \frac{2}{2n+2} \left| \frac{(1-\sqrt{z})^{2n}}{(1+\sqrt{z})(\psi(z)+1)} \right|$$

Or,

$$(1+\sqrt{z})(1+\psi(z)) = 2 \frac{(1+\sqrt{z})}{1-\sqrt{z}}$$

Donc,

$$|\varepsilon_{2n+1}(z)| \leq \frac{1}{2n+2} \left| \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} \right| |1-\sqrt{z}|^{2n}$$

Or, pour $|z| \leq 1$, il est facile de voir que :

$$|1-\sqrt{z}| \leq 1$$

Par conséquent :

$$\forall |z| \leq 1 / \operatorname{Re}(z) \geq 0 \quad |\varepsilon_{2n+1}(z)| \leq \frac{1}{2n+1}$$

Comme d'autre part on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{2n+1}(0) = \frac{1}{2n+2} \\ |\varepsilon_{2n+1}(\frac{1}{2})| = |\varepsilon_{2n+1}(z)| \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement :

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} |\varepsilon_{2n+1}(z)| = \frac{1}{2n+2}$$

ce qu'il fallait démontrer

REMARQUE 3.1

Pour la suite des termes pairs, on peut conjecturer que l'on a également :

$$\sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} |f_{2n}(z) - f(z)| = \frac{1}{2n+1}$$

mais la démonstration est beaucoup plus délicate. En fait il est facile d'établir le résultat pour $|z| \leq 1$, mais on n'a plus l'égalité :

$$|f_{2n}(z) - f(z)| = |f_{2n}(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})|$$

ce qui empêche de conclure.

Nous utilisons les théorèmes 3.2 et 3.3 pour énoncer le résultat qui finalement nous intéresse :

THEOREME 3.4

Lorsqu'on se restreint à l'axe imaginaire on a les estimations suivantes :

$$(i) \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |f_{2n+1}(i\omega) - f(i\omega)| = \frac{1}{2(n+1)}$$

(ii) Pour tout couple (ω_*, ω^*) tel que :

$$0 < \omega_* \leq \omega^* < +\infty$$

Il existe une constante $\alpha(\omega_*, \omega^*)$ strictement plus petite que 1, et une constante $C(\omega_*, \omega^*)$ positive telle que :

$$\sup_{\omega \in [\omega_*, \omega^*]} |f_{2n+1}(i\omega) - f(i\omega)| \leq C(\omega_*, \omega^*) \alpha(\omega_*, \omega^*)^{2n+1}$$

Pour illustrer la convergence de la suite des fonctions $f_n(\omega)$ nous avons présenté sur la figure 3.1 les variations du module de la différence $|\epsilon_n(i\omega)| = |f_n(i\omega) - f(i\omega)|$ en fonction de ω . Les courbes en trait plein correspondent aux valeurs impaires de n ($n = 1, 3, 5$) ; les courbes en pointillé aux valeurs paires ($n = 2, 4, 6$). L'échelle en ω est logarithmique.

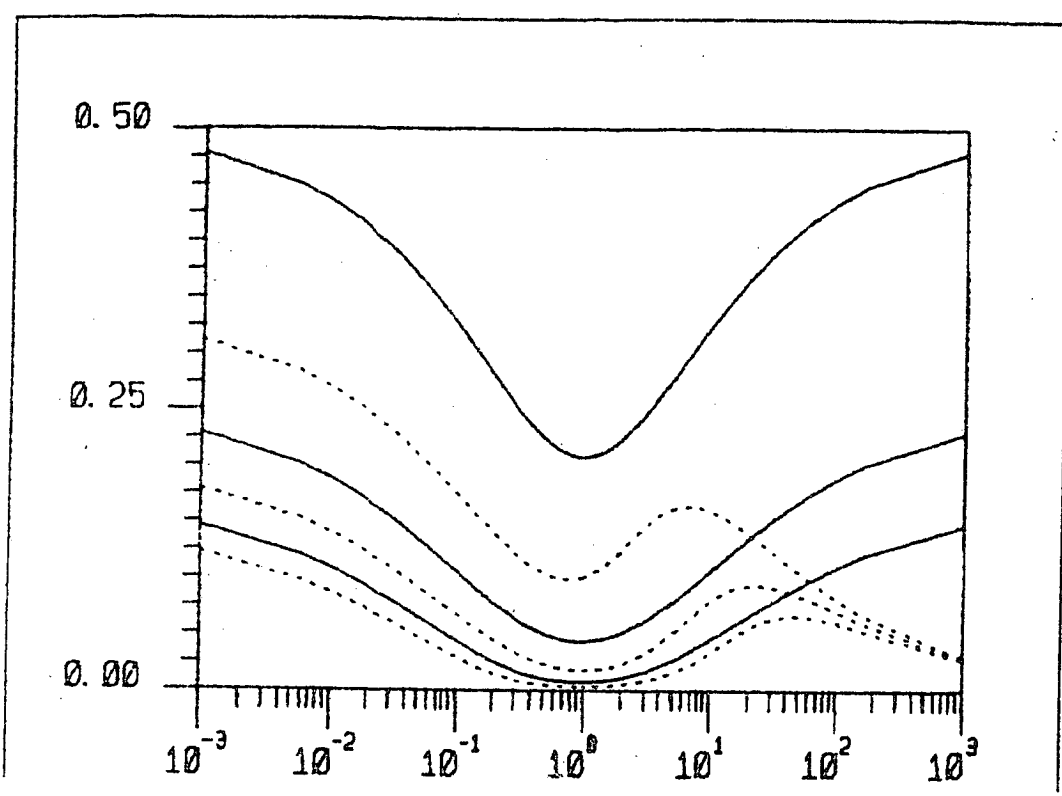


Figure 3.1

On voit clairement apparaître la différence de comportement des fonctions $f_n(i\omega)$ pour n pair et n impair. La symétrie des courbes en trait plein pour n impair traduit l'égalité $|\epsilon_{2n+1}(z)| = |\epsilon_{2n+1}(\frac{1}{z})|$. Pour n impair les courbes $\omega \rightarrow |\epsilon_{2n}(\omega)|$ passent par un maximum relatif d'abscisse $\omega_n^* > 1$. Les suites $\omega \rightarrow |\epsilon_{2n+1}(\omega)|$ d'une part et $\omega \rightarrow |\epsilon_{2n}(\omega)|$ d'autre part, sont toujours décroissantes. Pour $|\omega| < 1$, toute la suite $|\epsilon_n(\omega)|$ est décroissante. Pour $|\omega| > 1$ elle est oscillante.

Pour compléter la figure 3.1 nous avons représenté le lien décrit dans le plan complexe par $\epsilon_n(i\omega)$ quand ω varie. La figure 3.2 correspond aux valeurs impaires de n . Toutes ces courbes sont rassemblées sur la figure 3.4.

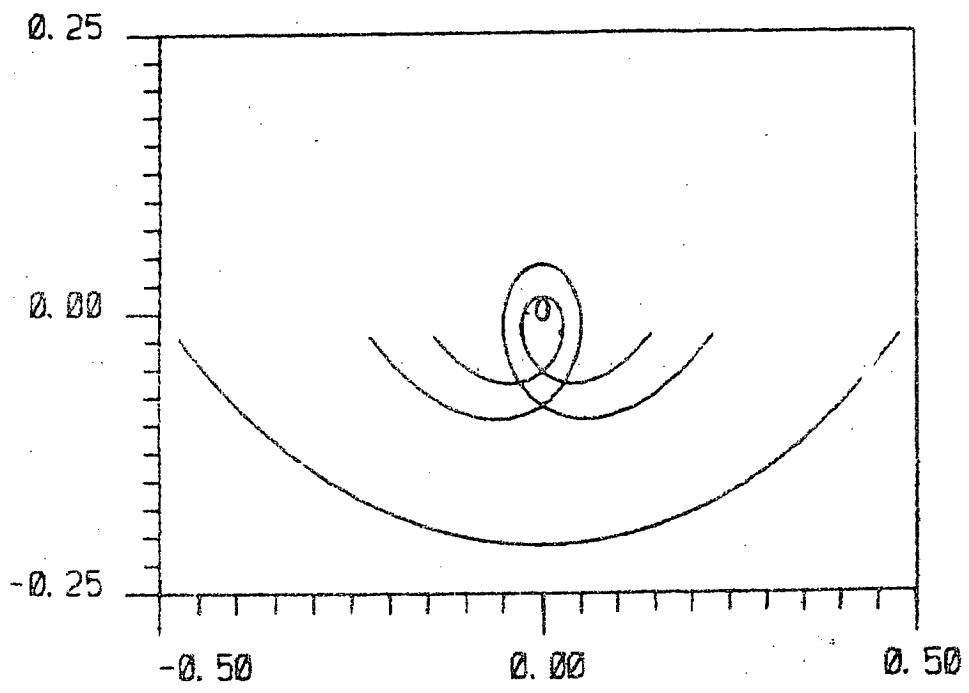


Figure 3.2

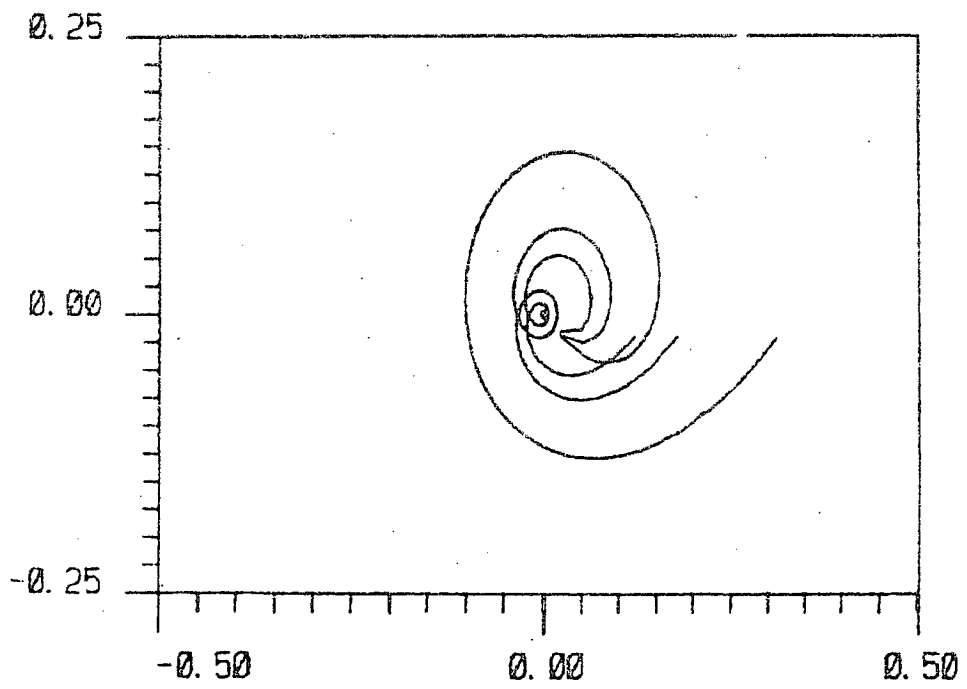


Figure 3.3

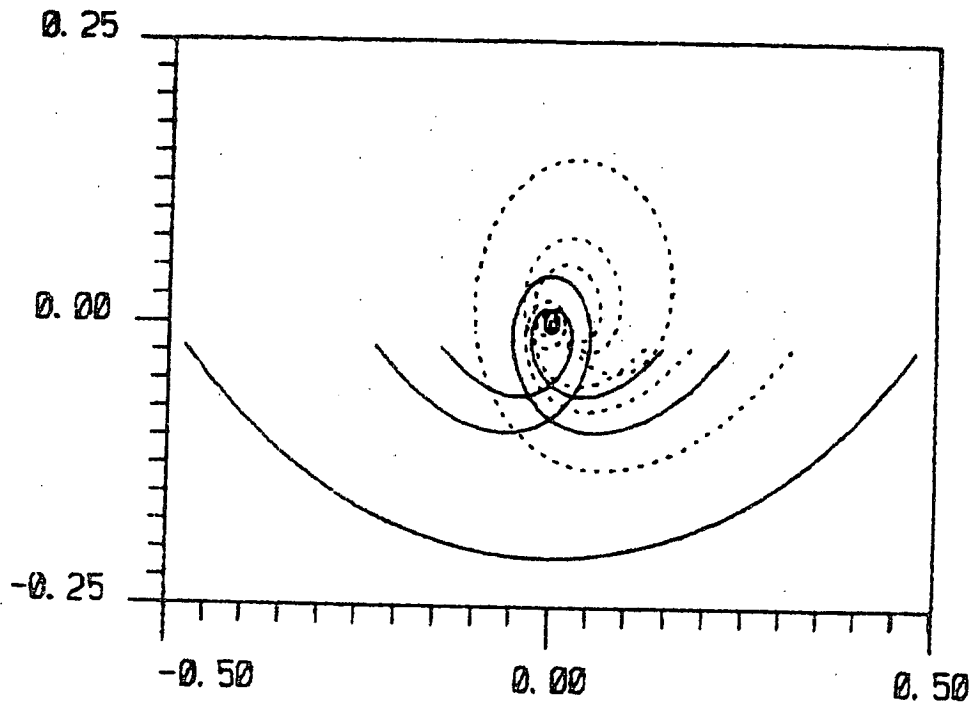


Figure 3.4

3.2.3 - Application à l'approximation de la loi de Warbourg - Estimations d'erreur

Posons $\phi_n(z) = f_{2n+1}(z)$

Nous avons :

$$\phi_n(z) = \frac{2}{2n+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+z \cotg \frac{k\pi}{2(n+1)}} + \frac{1}{n+1}$$

et on a en outre :

$$\begin{aligned} |\phi_n(i\omega) - f(i\omega)| &\leq |f_{2n+1}(i\omega) - f(i\omega)| \\ &\leq \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Soit encore

$$\|\phi_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2(n+1)}$$

Par conséquent, introduisons la loi approchée

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, \omega) &= \sigma_{\infty}(x) - (\lambda(x)-1)\sigma_0(x)\phi_n\left(i \frac{\omega}{\omega_c(x)}\right) \\ &= \sigma_{\infty}(x) - \frac{(\lambda(x)-1)\sigma_0(x)}{n+1} - \frac{(\lambda(x)-1)\sigma_0(x)}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+i \frac{\omega}{\omega_c(x)} \cotg^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}} \end{aligned}$$

Nous avons l'estimation (Cf. paragraphe 3.2.1) :

$$\|\sigma_n - \sigma\|_{\infty} \leq \frac{\sigma^*(\lambda^*-1)}{2(n+1)}$$

Ce qui prouve bien que :

$$\sigma \in \overline{\Sigma_a(\Omega; \mathbb{R})} \quad \Sigma(\Omega; \mathbb{R})$$

Et on sait, d'après le paragraphe 2, que si (u, v) désigne la solution du problème de Cauchy (2.1) associé à la loi de Warbourg σ et si (u_n, v_n)

celle associée à la loi approchée σ_n on a alors le :

THEOREME 3.5

Avec la seule hypothèse $\phi \in L^2(0,T)$ on a l'estimation d'erreur :

$$\| (u_n, v_n) - (u, v) \|_{\mathcal{H}(0,T)} \leq C(\sigma) \frac{\sigma^*(\lambda^* - 1)}{2(n+1)}$$

3.3 - Généralisation du résultat - Conjecture

D'un point de vue théorique, il serait intéressant de pouvoir généraliser le résultat d'approximation, établi de façon constructive dans le cas de la loi de Warbourg, à une classe beaucoup plus large de lois de polarisation.

Notre conjecture est que, dans le cas homogène, toute loi de polarisation "admissible" peut-être approchée en norme L^∞ , par une suite de lois s'écrivant sous forme de sommes de fractions rationnelles.

Plus exactement, le résultat serait le suivant :

- Soit $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ l'ensemble des lois de polarisations "homogènes" défini au chapitre 1.

- Soit $\Sigma_{a,\omega}(\mathbb{R})$ l'ensemble des lois de polarisations approchées homogènes défini par :

$$\Sigma_{a,\omega}(\mathbb{R}) = \left\{ \sigma_a(\omega) = \sigma_\infty + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{1+ia_k\omega} \mid (3.21), (3.22), (3.23) \right\}$$

$$(3.21) \quad a_k > 0, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$(3.22) \quad \sigma_\infty > 0$$

$$(3.23) \quad \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \sigma_\infty + \sum \frac{b_k}{1+a_k^2 \omega^2} \right\} > 0$$

CONJECTURE 3.1

L'ensemble $\Sigma_{a,\omega}(\mathbb{R})$ est dense dans l'ensemble $\Sigma_\omega(\mathbb{R})$ muni d'une structure d'espace métrique par la norme L^∞

Une démonstration de cette conjecture, non constructive semble possible par le biais du théorème de Stone-Weierstrass.

Cette conjecture permettrait alors d'étendre le résultat d'approximation

- aux milieux stratifiés, c'est-à-dire, pour lesquels la loi de polarisation $\sigma(x,\omega)$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [x_i, x_{i+1}[\quad \sigma(x,\omega) = \sigma_i(\omega) \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = +\infty \\ \text{ou } \sigma_i(\omega) \in \Sigma_\omega(\mathbb{R}) \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right.$$

- aux lois de polarisation s'écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(x,\omega) = \tilde{\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_c(x)} \right) \quad \tilde{\sigma} \in \Sigma_\omega(\mathbb{R}) \\ \omega_k \leq \omega_c(x) \leq \omega^* \end{array} \right.$$

- etc

IV - JUSTIFICATION THEORIQUE DE L'UTILISATION DE CONDITIONS AUX LIMITES A

DISTANCE FINIE POUR L'APPROXIMATION NUMERIQUE DU PROBLEME (2.3)

4.1 - Introduction

Le problème (2.3) est posé dans un ouvert $\Omega =]0, +\infty[$ non borné. La résolution numérique impose bien entendu de travailler dans un ouvert borné $\Omega_L =]0, L[$. Il faut alors, pour obtenir un problème bien posé, se donner une condition aux limites en $x = L$. L'équation étudiée étant du type diffusion, il est bien connu que les solutions décroissent "assez vite" à l'infini. Aussi est-il naturel d'introduire les deux problèmes "approchés" suivants, où l'on impose soit à u , soit à v , d'être nul en $x = L$, L étant choisi assez grand pour que $\text{supp } u_0 \subset]0, L[$.

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial u_L}{\partial t} + \frac{\partial v_L}{\partial x} = 0 & (x, t) \in \Omega_L \times]0, T[\\
 & \psi_\sigma v_L + \frac{\partial u_L}{\partial x} = 0 & (x, t) \in \Omega_L \times]0, T[\\
 & v_L(0, t) = \phi(t) & t \in]0, T[\\
 & v_L(L, t) = 0 & t \in]0, T[\\
 & u_L(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega_L
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial u_L}{\partial t} + \frac{\partial v_L}{\partial x} = 0 & (x, t) \in \Omega_L \times]0, T[\\
 & \psi_\sigma v_L + \frac{\partial u_L}{\partial x} = 0 & (x, t) \in \Omega_L \times]0, T[\\
 & v_L(0, t) = \phi(t) & t \in]0, T[\\
 & u_L(L, t) = 0 & t \in]0, T[\\
 & u_L(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega_L
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

REMARQUE 4.1

En toute rigueur, il faut tout d'abord, pour justifier l'écriture des problèmes 4.1 et 4.2, définir ψ_σ comme opérateur de $L^2(0,T;L^2(\Omega_L))$ dans lui même, ce qui se fait bien évidemment sans problème.

Bien sur toutes les propriétés de ψ_σ en tant qu'opérant sur $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (coercivité, continuité, ... etc ...) restent vrai pour ψ_σ opérant sur $L^2(0,T;L^2(\Omega_L))$

REMARQUE 4.2

L'étude de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (4.1) et (4.2) s'effectue bien entendu comme pour le problème (2.3) et les estimations a priori obtenues sont exactement les mêmes (au changement de Ω par Ω_L près). Par conséquent, avec les hypothèses (2.2), le problème (4.1) (respectivement (4.2)) admet bien une solution faible et une seule vérifiant :

- $u_L \in L^2(0,T;H^1(\Omega_L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))$
- $v_L \in L^2(0,T;L^2(\Omega_L))$
- $\frac{du_L}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_L))$

La justification de l'introduction des problèmes (4.1) et (4.2) consiste à prouver que, dans un sens à préciser on a :

$$\begin{aligned} u_L &\rightarrow u && \text{quand} && L \rightarrow +\infty \\ v_L &\rightarrow v && \text{quand} && L \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

et si possible obtenir des estimations sur $\|u_L - u\|$ et $\|v_L - v\|$ en fonction de L .

C'est précisément l'objet de ce chapitre où nous nous restreindrons toutefois, par souci de simplifier les calculs et les démonstrations, au cas très simple suivant :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Le milieu est homogène} \quad \sigma(x, \omega) = \sigma(\omega) \\ \bullet \text{ Le milieu est initialement au repos } u_0(x) = 0 \end{array} \right.$$

On peut conjecturer que la plupart des résultats obtenus peuvent se généraliser lorsque par exemple, le milieu est homogène à partir d'une certaine profondeur L_0 et la donnée initiale est à support compact ou à décroissance suffisamment rapide à l'infini.

4.2 - Etude du cas du problème 4.1

Nous confondons ici dans la notation (u, v) la solution du problème (2.3), définie sur $\Omega \times]0, T[$, et sa restriction à $\Omega_L \times]0, T[$.

Nous introduisons alors les fonctions définies sur $\Omega_L \times]0, T[$ par :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_L(x, t) = u(x, t) - u_L(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega_L \times]0, T[\\ \tilde{v}_L(x, t) = v(x, t) - v_L(x, t) \quad \forall x, t \in \Omega_L \times]0, T[\end{array} \right.$$

et nous désignons par $v_L(t)$ la fonction définie sur $]0, T[$ par :

$$v_L(t) = v(L, t)$$

(Nous savons (cf. Théorème 2.2 bis) que $v_L \in C^\infty(0, T)$). Les équations vérifiées par les fonctions \tilde{u}_L et \tilde{v}_L s'écrivent alors :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} = 0 \\ \psi_\sigma \tilde{v}_L + \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} = 0 \\ \tilde{v}_L(0, t) = 0 \\ \tilde{v}_L(L, t) = v_L(t) \\ \tilde{u}_L(x, 0) = 0 \end{cases}$$

La suite de la démonstration de la convergence de $(\tilde{u}_L, \tilde{v}_L)$ vers 0 peut alors se décomposer en deux étapes :

- ① Estimation de (u_L, v_L) en fonction de $v_L(t)$
- ② Estimation de $v_L(t)$ en fonction de L et ϕ

Première Etape : Estimation de $(\tilde{u}_L, \tilde{v}_L)$ en fonction de v_L

Dans ce paragraphe $\|\cdot\|$ et (\cdot, \cdot) désigneront respectivement la norme et le produit scalaire de $L^2(\Omega_L)$.

LEMME 4.1

Avec l'hypothèse : $v_L \in L^2(0, T)$, on a les estimations suivantes :

$$\|\tilde{u}_L\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_L))} \leq C_1 (1 + \sqrt{T}) \|v_L\|$$

$$\|\tilde{v}_L\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_L))} \leq C_2 (1 + \sqrt{T}) \|v_L\|$$

$$\|\tilde{u}_L\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_L))} \leq C_3 (1 + \sqrt{T}) \|v_L\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_L))} \leq C_4 (1 + \sqrt{T}) \|v_L\|$$

où les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 ne dépendent que de μ et σ et où l'on a posé :

$$\|v_L\| = \|v_L\|_{L^2(0,T)}$$

Démonstration du Lemme

Réécrivons les 2 équations de (4.6) :

$$\begin{array}{l} (4.6)_1 \\ (4.6)_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mu \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} = 0 \\ \psi_\sigma \tilde{v}_L + \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

Multiplions (4.6)₁ par \tilde{u}_L , (4.6)₂ par \tilde{v}_L puis intégrons sur Ω_L . On obtient alors aisément :

$$(4.7) \quad \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |\tilde{v}_L(s)| \tilde{u}_L(L,s) ds$$

Nous utilisons alors une version précise du théorème de traces :

LEMME 4.2

Pour toute fonction u dans $H^1]0,L[$, on a l'inégalité :

$$|u(L)|^2 \leq \text{Max} \left(2, \frac{2}{L^2} \right) \|u\|_{H^1(0,L)}^2$$

Soit P_0 le sous-espace des fonctions constantes de $H^1]0,L[$; P_0^\perp l'orthogonal de P_0 dans $H^1]0,L[$ qui est encore le sous ensemble des fonctions de moyenne nulle. Pour tout u dans $H^1(0,L)$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + C \\ C = -\frac{1}{L} \int_0^L u(x) dx \\ u_0 \in P_0^\perp \end{array} \right.$$

u_0 étant de moyenne nulle, il existe un point x_0 où u_0 s'annule et par suite

$$u_0(L) = 2 \int_{x_0}^L u_0(x) \frac{du_0}{dx}(x) dx$$

d'où

$$|u_0(L)|^2 \leq \|u_0\|_{H^1(0,L)}^2$$

or,

$$\|u\|_{H^1(0,L)}^2 = \|u_0\|_{H^1(0,L)}^2 + L^2 C^2$$

$$|u(L)|^2 = (u_0(L) + C)^2 \leq 2|u_0(L)|^2 + 2C^2$$

$$\leq 2\|u_0\|_{H^1(0,L)}^2 + \frac{2}{L^2} C^2 L^2$$

$$\leq \text{Max} \left(2, \frac{2}{L^2} \right) \|u\|_{H^1(0,L)}^2$$

ce qui démontre le lemme. ■

Supposons $L \geq 1$, alors

$$|(\tilde{u}_L(L,t))|^2 \leq 2 \left\{ \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(t) \right\|^2 \right\}$$

⇒

$$|\tilde{u}_L(L,t)|^2 \leq \sqrt{2} \left(\|\tilde{u}_L(t)\| + \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(t) \right\| \right)^2$$

D'où nous déduisons, d'après (4.7)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds &\leq \sqrt{2} \left(\int_0^t |v_L(s)| \|\tilde{u}_L(s)\| ds \right) \\ &+ \sqrt{2} \left(\int_0^t |v_L(s)| \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(s) \right\| ds \right) \end{aligned}$$

Or,

$$|v_L(s)| \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(s) \right\| \leq \frac{\alpha}{2} |v_L(s)|^2 + \frac{1}{2\alpha} \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(s) \right\|^2 \quad \alpha > 0$$

Don en déduisant,

$$\|v_L\| = \left(\int_0^t |v_L(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

il vient pour tout t dans $[0, t]$, (α positif arbitraire) :

$$\left| \begin{aligned} \mu \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds &\leq \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \|v_L\|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2\alpha} \int_0^t \left\| \frac{d\tilde{u}_L}{dx}(s) \right\|^2 ds \\ &+ \sqrt{2} \int_0^t |v_L(s)| \|\tilde{u}_L(s)\| ds \end{aligned} \right.$$

Utilisons alors l'équation (4.6)₂, on en déduit, avec les propriétés de ψ_σ , que :

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^2 ds \leq (\sigma^*) \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds$$

D'où nous tirons finalement,

$$(4.8) \quad \left| \begin{aligned} \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds &\leq \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \|v_L\|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2\alpha} (\sigma^*)^2 \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \\ &+ \sqrt{2} \int_0^t |v_L(s)| \|\tilde{u}_L(s)\| ds \end{aligned} \right.$$

On choisit alors α de telle sorte que $\frac{\sqrt{2}}{2\alpha} (\sigma^*)^2 = \frac{\sigma}{2}$, auquel cas on obtient :

$$\frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \frac{\sigma_*}{2} \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \leq \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \|v_L\|^2 + \sqrt{2} \int_0^t |v_L(s)| \|\tilde{u}_L(s)\| ds$$

On applique alors le lemme de Gronwall généralisé 2.1 pour obtenir l'estimation :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad \|\tilde{u}_L(t)\| &\leq C_1 \left(\|v_L\| + \int_0^t |v_L(t)| dt \right) \\ &\leq C_1 (1 + \sqrt{T}) \|v_L\| \end{aligned}$$

Soit finalement,

$$\|\tilde{u}_L\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1(1+\sqrt{T})\|v_L\|$$

Reportons cette inégalité dans (4.8). On obtient, en faisant $t = T$.

$$\frac{\sigma_*}{2} \int_0^T \|\tilde{v}_L(t)\|^2 dt \leq \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \|v_L\|^2 + C_1 \sqrt{2} (1+\sqrt{T}) \int_0^T |v_L(t)| dt$$

D'où l'on déduit aisément :

$$\|\tilde{v}_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1(1+\sqrt{T})\|v_L\|$$

Il suffit alors de réutiliser les deux équations (4.6)₁ et (4.6)₂ pour obtenir les deux dernières estimations. ■

Deuxième Etape : Estimation de $v_L(t)$ en fonction de L .

Nous donnons tout d'abord le résultat lorsque $\sigma(\omega)$ est une constante.

① Le résultat sans polarisation

La fonction v est dans ce cas solution de l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\sigma \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(0,t) = \phi(t) \end{array} \right.$$

dont la solution est donnée par : (on fait $\mu\sigma = 1$)

$$v(L,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{t-s}} \phi(s) ds$$

En faisant $x = L$ nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_L = G_L * \phi \\ G_L(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{L^2}{4t}} \end{array} \right.$$

Nous utilisons alors l'inégalité classique :

$$\|G_L * \phi\|_{L^2(0,T)} \leq \|G_L\|_{L^1(0,T)} \|\phi\|_{L^2(0,T)}$$

Il nous suffit donc d'évaluer $\|G_L\|_{L^1(0,T)}$

Or,

$$\|G_L\|_{L^1(0,T)} = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{L^2}{4t}} dt$$

Nous faisons le changement de variable :

$$s = \frac{L^2}{t}$$

ce qui donne :

$$\|G_L\|_{L^1(0,T)} = \frac{L}{\sqrt{4\pi}} \int_{\frac{T}{L^2}}^{+\infty} \frac{e^{-s/4}}{s^{3/2}} ds$$

D'où, en particulier la majoration :

$$\|G_L\|_{L^1(0,T)} \leq \frac{2L}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{L^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{L^2}{T}}$$

Ce qui nous fournit finalement l'estimation ($\|\cdot\|$ représente la norme dans $L^2(0,T)$).

$$\|v_L\| \leq \frac{2L}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{L^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{L^2}{T}} \|\phi\|$$

La décroissance de $\|v_L\|$ vers 0 est donc exponentielle par rapport au paramètre $\frac{L^2}{T}$!

Dans le cas polarisable, on n'a pas d'expression explicite de la solution élémentaire. Néanmoins l'utilisation de la transformation de Fourier en temps va permettre d'établir que la convergence de v_L vers 0 dans $L^2(0,T)$ est plus rapide que toute puissance de $\frac{T}{L^2}$.

② Le résultat avec polarisation

LEMME 4.2

On fait les hypothèses : ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \cdot \quad \forall j \leq n-1 \quad & \int_0^T t^j \phi(t) dt = 0 \\ \cdot \quad & \int_0^T t^n \phi(t) dt \neq 0 \end{aligned}$$

Alors, pour tout entier k positif, on a l'estimation ; pour $L \geq L_0(n, k)$

$$\|v_L\| \leq \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} n!} \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|}{2\sigma(0)^{n+k+1/2}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^k \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}}$$

REMARQUE 4.1

Pour $n=0$, c'est-à-dire lorsque $\int_0^T \phi(t) dt \neq 0$ l'estimation obtenue s'écrit précisément :

$$\|v_L\| \leq \frac{(4k+1)!}{2^{k/2} \sqrt{\pi}} \frac{\int_0^T |\phi(t)| dt}{|2\sigma(0)|^{k+1/2}} \cdot \frac{1}{\mu L^2} \cdot \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^k$$

Démonstration du Lemme :

Pour troncature à $[0, I]$, on peut tout d'abord se ramener au cas où $\text{supp } \phi \subset [0, T]$ en effet si on pose :

$$\begin{cases} \phi^*(t) = \phi(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ \phi^*(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T] \end{cases}$$

Alors si $(u^*(t), v^*(t))$ désigne la solution globale du problème (2.3) associé à la donnée $\phi^*(t)$ au bord, par causalité on a :

$$\begin{cases} u^*(t) = u(t) & \forall t \in [0, T] \\ v^*(t) = v(t) & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Or, rappelons que les transformées de Fourier en temps $U^*(x, \omega)$ et $V^*(x, \omega)$ de u^* et v^* sont des fonctions régulières de ω qui (on note $\hat{\phi}^*$ la transformée de Fourier de ϕ^*)

$$\begin{cases} i\mu\omega U^*(x, \omega) + \frac{dV^*}{dx}(x, \omega) = 0 \\ \sigma(\omega)V^*(x, \omega) + U^*(x, \omega) = 0 \\ V^*(0, \omega) = \hat{\phi}^*(\omega) \end{cases}$$

D'où nous tirons en particulier :

$$\begin{cases} V^*(x, \omega) = \hat{\phi}^*(\omega) e^{-(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} x} \\ \text{avec } \operatorname{Re}((i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2}) > 0 \end{cases}$$

En particulier pour $x = L$, nous pouvons écrire en posant $V_L^*(\omega) = V^*(L, \omega)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |V_L^*(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}^*(\omega)|^2 \left| e^{-2(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} L} \right| d\omega$$

Or, comme $v_L^*(t)$ est une fonction réelle :

$$V_L^*(-\omega) = V_L^*(\omega)$$

En outre, d'après le théorème de Plancherel :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2k} |V_L^*(\omega)|^2 d\omega$$

Par conséquent :

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \omega^{2k} |\hat{\phi}^*(\omega)|^2 \left| e^{-2(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} L} \right| d\omega$$

Or,

$$|\exp - 2(i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} L| = \exp - 2 \operatorname{Re} \left((i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} \right) L$$

Comme,

$$\operatorname{Re} \left((i\mu\omega\sigma(\omega))^{1/2} \right) = (\mu\omega)^{1/2} \operatorname{Re} \left((i\sigma(\omega))^{1/2} \right)$$

en posant,

$$|\tilde{\sigma}(\omega)|^{1/2} = \operatorname{Re} \left((i\sigma(\omega))^{1/2} \right)$$

Il vient finalement,

$$(4.9) \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_{L^*}}{dt^k}(t) \right|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \omega^{2k} |\hat{\phi}^*(\omega)|^2 e^{-2(\mu\omega\tilde{\sigma}(\omega))^{1/2} L} d\omega$$

Rappelons que l'on a le :

LEMME 2.3

La fonction réelle et positive $\tilde{\sigma}(\omega)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) $\omega \rightarrow \tilde{\sigma}(\omega)$ est continue
- (ii) $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \tilde{\sigma}(\omega) \geq \tilde{\sigma}_* = \left(\frac{\sigma^* - \sigma}{2\sigma^*} \right)^{1/2} \sigma_*$
- (iii) $\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) \frac{\sqrt{2}}{2}$

Effectuons dans l'intégrale (4.9), le changement de variable :

$$\tau = \omega \mu L^2$$

Nous obtenons alors :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \left| \hat{\phi}^* \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right) \right|^2 \frac{\tau^{2k}}{(\mu L^2)^{2k}} e^{-2\tilde{\sigma} \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right)^{1/2}} \tau^{1/2} \frac{d\tau}{\mu L^2}$$

Soit encore :

$$(4.10) \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = \frac{2}{(\mu L^2)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \tau^{2k} \left| \hat{\phi}^* \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right) \right|^2 e^{-2\tilde{\sigma} \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right)^{1/2}} \tau^{1/2} d\tau$$

grâce à un développement de Taylor de $\hat{\phi}^*$ nous avons :

$$\hat{\phi}^*(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^j \hat{\phi}^*(0)}{d\omega^j} \frac{\omega^j}{j!} + \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^n \hat{\phi}^*}{d\omega^n}(\theta\omega) \quad \theta \in [0,1]$$

D'où nous déduisons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^n} \left\{ \hat{\phi}^*(\omega) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^j \hat{\phi}^*}{d\omega^j}(0) \frac{\omega^j}{j!} \right\} = \frac{1}{n!} \frac{d^n \hat{\phi}^*}{d\omega^n}(0)$$

Or,

$$\frac{d^j \hat{\phi}^*}{d\omega^j}(0) = \frac{(-i)^j}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T t^j \phi(t) dt$$

Par conséquent, avec les hypothèses :

- $\forall j \leq n-1 \quad \int_0^T t^j \phi(t) dt = 0$
- $\int_0^T t^n \phi(t) dt \neq 0$

Nous avons; (on utilise le fait que $\phi(t) = 0$ pour $t \notin [0, T]$)

$$(4.11) \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^n} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n!} \left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right| \\ \left| \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\omega^n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} n!} \int_0^T t^n |\phi(t)| dt \end{array} \right.$$

Or, d'après (4.10) nous avons :

$$\frac{1}{2} (\mu L^2)^{2k+1} (\mu L^2)^{2n} \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_{L^*}}{dt^k}(t) \right|^2 dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu L^2}{\tau} \right)^{2n} \left| \hat{\phi}^* \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right) \right|^2 \tau^{2(n+k)} e^{-2\tilde{\sigma} \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right)^{1/2} \tau} dt$$

Or, grâce à (4.11) et aux propriétés de $\tilde{\sigma}(\omega)$ il vient :

$$\begin{aligned} \bullet \forall \tau \geq 0 \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mu L^2}{\tau} \right)^{2n} \left| \hat{\phi}^* \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right) \right|^2 \tau^{2(n+k)} e^{-2|\sigma \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right)|^{1/2} \tau} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_0^{\tau} t^n \phi(t) dt \right|^2 \frac{\tau^{2(n+k)}}{(n!)^2} e^{-\sqrt{2} |\tilde{\sigma}(0)|^{1/2} \tau^{1/2}} \\ \bullet \left(\frac{\mu L^2}{\tau} \right)^{2n} \left| \hat{\phi}^* \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right) \right|^2 \tau^{2(n+k)} e^{-2|\tilde{\sigma} \left(\frac{\tau}{\mu L^2} \right)|^{1/2} \tau} \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left| \int_0^{\tau} t^n \phi(t) dt \right|^2 \frac{\tau^{2(n+k)}}{(n!)^2} e^{-\sqrt{2} |\sigma(0)|^{1/2} \tau}}_{\in L^1(\mathbb{R}^+)} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lebesgue et en déduire que :

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (\mu L^2)^{2n} \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_{L^*}}{dt^k}(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_0^{\tau} t^n \phi(t) dt \right|^2}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2} |\sigma(0)|^{1/2} \tau^{1/2} \tau^{2(n+k)}} d\tau$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2} |\sigma(0)|^{1/2} \tau^{1/2} \tau^{2n+2k}} d\tau = \frac{1}{|\sigma(0)|^{2n+2k+1}} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}} u^{2n+2k} du$$

et,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{u}} u^{2(n+k)} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{4(n+k)+1} ds = (4n+4k+1)!$$

Par conséquent on en déduit que :

$$(4.12) \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4n+4k+1)!}{\pi(n!)^2} \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|^2}{|2\sigma|^{2n+2k+1} (\mu L^2)^{2n+2k+1}}$$

Il nous reste à utiliser alors le fait que la fonction $t \rightarrow v_L^*(t)$ est de classe C^∞ et vérifie, pour tout k :

$$\frac{d^k v_L^*}{dt^k}(0) = 0$$

Par conséquent :

$$\int_0^T |v_L^*(t)|^2 dt \leq \left(\frac{T^2}{2}\right)^k \left(\int_0^T \left| \frac{d^k v_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt \right)$$

En effet,

$$v_L^*(t) = \int_0^t \frac{dv_L^*}{ds}(s) ds$$

D'où

$$\begin{aligned} |v_L^*(t)|^2 &\leq t \left(\int_0^t \left| \frac{dv_L^*}{ds}(s) \right|^2 ds \right) \\ &\leq t \left(\int_0^T \left| \frac{dv_L^*}{ds}(s) \right|^2 ds \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^T |v_L^*(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{2} \int_0^T \left| \frac{dv_L^*}{ds}(s) \right|^2 ds$$

Il suffit alors de réitérer le procédé pour obtenir le résultat annoncé.

Or, d'après (4.12) on a, pour L assez grand, soit $L \geq L_0(n,k)$:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k v_L}{dt^k}(t) \right|^2 dt \leq \frac{(4n+4k+1)!}{\pi(n!)^2} \frac{\left(\int_0^T t^n \phi(t) dt \right)^2}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2} \right)^{2k} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}}$$

Par conséquent, on en tire :

$$\forall k, \int_0^T |v_L(t)|^2 dt \leq \frac{(4n+4k+1)!}{2^k \pi(n!)^2} \frac{\left(\int_0^T t^n \phi(t) dt \right)^2}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2} \right)^{2k} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}}$$

c'est-à-dire l'estimation annoncée dans l'énoncé du lemme. ■

Nous rassemblons maintenant les résultats des lemmes 4.1 et 4.2 pour énoncer le :

THEOREME 4.1

Avec les hypothèses (4.3) et si on suppose :

- $\forall j \leq n+1 \quad \int_0^T t^j \phi(t) dt = 0$
- $\int_0^T t^n \phi(t) dt \neq 0$

On a, pour tout entier k , les estimations d'erreur suivantes pour

$$L \geq L_0(n,k)$$

$$\|u - u_L\|_{\infty, L(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1(1+\sqrt{T}) \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} n!} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2} \right)^k \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|}{|2\sigma(0)|^{n+k+1/2}}$$

$$\|v - v_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1(1+\sqrt{T}) \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} n!} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2} \right)^k \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|}{|2\sigma(0)|^{n+k+1/2}}$$

$$\|u - u_L\|_{L^2(0, T; H^k(\Omega_L))} \leq C_3 (1 + \sqrt{T}) \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} n!} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^k \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{|2\sigma(0)|^{n+k+1/2}}$$

$$\left\| \frac{du}{dt} - \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^2(0, T; H^{k-1}(\Omega_L))} \leq C_3 (1 + T) \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} n!} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^k \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{|2\sigma(0)|^{n+k+1/2}}$$

REMARQUE 4.2

Nous avons indiqué de façon précise dans nos estimations la manière dont intervenaient L et T . Il apparaît clairement, ce qui était intuitivement évident, que pour une précision donnée, lorsque l'on désire voir évoluer la solution sur une période de temps plus élevée, il est nécessaire d'augmenter L .

Il est amusant de constater que, lorsque les premiers moments de la donnée au bord $\phi(t)$ sont nuls, alors on gagne des puissances de L^2 dans les estimations, sans que T intervienne.

Enfin, il est bon de préciser que les estimations portent sur des normes calculées sur tout le domaine de calcul et qu'il serait également intéressant d'obtenir des renseignements sur des normes L^2 calculées dans $[0, L_0]$, L_0 étant fixée !

4.3 - Etude du cas du problème 4.2

Nous allons voir que les résultats sont notablement différents que ceux obtenus pour le problème 4.1 et qu'ils sont plus difficiles à obtenir.

Comme au paragraphe 4.2, nous introduisons les fonctions définies sur $\Omega_L \times]0, T[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_L(x, t) = u(x, t) - u_L(x, t) \\ \tilde{v}_L(x, t) = v(x, t) - v_L(x, t) \end{cases}$$

et nous désignons par $u_L(t)$ la fonction définie sur $]0, T[$ par :

$$u_L(t) = u(L, t) \in C^\infty(0, T)$$

On vérifie alors aisément que, en particulier :

$$\begin{cases} \tilde{u}_L \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_L)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega_L)) \\ \tilde{v}_L \in L^2(0, T; L^2(\Omega_L)) \\ \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_L)) \end{cases}$$

et que $(\tilde{u}_L, \tilde{v}_L)$ est l'unique solution de :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} + \frac{\tilde{u}_L}{\partial x} = 0 \\ \psi_\sigma \tilde{v}_L + \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} = 0 \\ \tilde{v}_L(0, t) = 0 \\ \tilde{u}_L(L, t) = u_L(t) \\ \tilde{u}_L(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Comme précédemment, nous décomposons la suite des calculs en deux étapes (les notations du paragraphe 4.2 étant conservées).

Première Etape : Estimation de $(\tilde{u}_L, \tilde{v}_L)$ en fonction de u_L

LEMME 4.3

Avec l'hypothèse $u_L \in H^1(0,T)$, la solution $(\tilde{u}_L, \tilde{v}_L)$ du problème (4.13) vérifie les deux séries d'estimations suivantes (les constantes ne dépendent que de μ et σ , et $\|\cdot\|$ représentent dans $L^2(0,T)$).

$$(i) \quad \|\tilde{u}_L\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1 T^{1/9} \|u_L\|^{2/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^{1/3}$$

$$\|\tilde{v}_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_2 T^{1/9} \|u_L\|^{2/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^{1/3}$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_3 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_4 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_5 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$(ii) \quad \|\tilde{u}_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_1 L^{1/6} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\|\tilde{v}_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_2 L^{1/6} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_3 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_4 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_5 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

Démonstration du Lemme :

Récrivons les deux équations du problème (4.13)

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} = 0 & (4.13)_1 \\ \psi_\sigma \tilde{v}_L + \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} = 0 & (4.13)_2 \end{cases}$$

① Première estimation a priori

On multiplie (4.13)₁ par u et (4.13)₂ par v , on obtient alors de façon classique l'estimation :

$$(4.14) \quad \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |u_L(s)| |\tilde{v}_L(L,s)| ds$$

qui est toutefois insuffisante car on ne peut estimer la trace de \tilde{v}_L à l'aide de $\|\tilde{u}_L\|$ et $\|\tilde{v}_L\|$.

② Deuxième estimation a priori

Nous appliquons l'opérateur ψ_σ à l'équation (4.13)₁ en utilisant le fait que le milieu est homogène :

Nous obtenons ainsi :

$$\mu \psi_\sigma \left(\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\psi_\sigma \tilde{v}_L) = 0$$

Soit encore, compte tenu de (4.13)₂ :

$$(4.15) \quad \mu \psi_\sigma \left(\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2} = 0$$

Nous multiplions alors cette équation par $\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}$ et intégrons par rapport à x sur Ω_L :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 + \mu \left(\psi_\sigma \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(t), \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(t) \right) = \left(\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,t), \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(L,t) \right)$$

Soit, après intégration en temps entre 0 et t utilisation de la coercivité de ψ_σ

$$(4.16) \quad \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 + \mu \sigma_* \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds \leq \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,s) \right| ds$$

Or, comme \tilde{V}_L est nulle en $x=0$, en utilisant l'équation (4.13)₂ et en mettant à profit le fait que le milieu est homogène, il vient :

$$\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(0,s) = 0 \quad \forall s \in [0,T]$$

Nous pouvons alors faire à ce niveau deux estimations différentes :

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,s) \right|^2 = 2 \int_0^L \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(x,s) \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(x,s) ds$$

D'où nous tirons :

$$(4.17) \quad \left| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,s) \right| \leq \sqrt{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\| \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,s) = \int_0^L \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(x,s) ds$$

D'où nous tirons :

$$(4.18) \quad \left| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(L,s) \right| \leq \sqrt{L} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|$$

D'où nous tirons deux inégalités différentes :

(i) En utilisant (4.17) il vient, d'après (4.16) :

$$(4.19) \quad \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 + \mu \sigma_* \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds \leq \sqrt{2} \int_0^t \left| \frac{d\tilde{u}_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^{1/2} ds$$

Or, nous avons l'inégalité d'Young, pour tout α positif :

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \leq \alpha^p \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\alpha^{p'}} \frac{b^{p'}}{p'} \\ \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{array} \right.$$

En outre, on vérifie aisément que :

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|^{1/2} \in L^{4/3} (0, T) \\ s \rightarrow \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^{1/2} \in L^4 (0, T) \end{array} \right.$$

Par conséquent, en appliquant Young avec :

$$p = 4 \quad p' = \frac{4}{3}$$

$$a = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(s) \right\|^{1/2}$$

$$b = \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^{1/2}$$

On obtient l'inégalité :

$$\left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^{1/2} \leq \frac{\alpha^4}{4} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(s) \right\|^2 + \frac{3}{4\alpha^{4/3}} \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3}$$

En reportant dans (4.19), ce qui est licite en vertu de (4.20), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 + \mu \sigma_* \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \alpha^4 \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^2 ds + \\ &+ \frac{3\sqrt{2}}{4\alpha^{4/3}} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds \end{aligned}$$

Or, comme $\frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2} = \psi_\sigma \left(\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right)$, nous savons que :

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^2 ds \leq (\sigma^*) \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds$$

Par conséquent en choisissant α tel que :

$$\frac{\sqrt{2}\alpha^4}{4} (\sigma^*)^2 = \frac{\mu\sigma_*}{2}$$

On voit que l'on aboutit à

$$(4.21) \quad \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 + \frac{\mu \sigma^*}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds \leq C \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds$$

où la constante C ne dépend que de μ , σ_* et σ^* .

En particulier :

$$\forall t \in [0, T] \quad \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(t) \right\|^2 \leq 2C \int_0^t \left| \frac{du_L}{ds}(s) \right|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds$$

D'après le lemme 2.1, appliqué avec $\alpha = \frac{1}{3}$, on déduit aisément que :

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_L))} \leq C_3 \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^{4/3}(0, T)}$$

Or, d'après l'inégalité de Holder :

$$\left\| \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^{4/3}(0, T)} \leq T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

D'où finalement,

$$(4.22) \quad \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_L))} \leq C_3 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

Par suite, en revenant à (4.21) en faisant $t = T$.

$$\begin{aligned} \frac{\mu \sigma^*}{2} \int_0^T \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t}(s) \right\|^2 ds &\leq C' \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^{4/3}(0, T)}^{2/3} \left(\int_0^T \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^{4/3} ds \right) \\ &\leq C' \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^{4/3}(0, T)}^2 \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_L))} \leq C_4 \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|_{L^{4/3}(0, T)} \leq C_4 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

Alors, en utilisant l'équation (4.13)₁, il vient :

$$(4.23) \quad \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_8 T^{1/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

Mais, comme $\tilde{v}_L(0,s) = 0$ pour tout s , on a :

$$|\tilde{v}_L(L,s)| \leq \sqrt{2} \|\tilde{v}_L(s)\|^{1/2} \left\| \frac{d\tilde{v}_L}{ds}(s) \right\|^{1/2}$$

Donc en revenant à l'estimation initiale (4.14) :

$$(4.24) \quad \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \sigma_* \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \leq \sqrt{2} \int_0^t |u_L(s)| \|\tilde{v}_L(s)\|^{1/2} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{1/2} ds$$

Effectuons la majoration :

$$|u_L(s)| \|\tilde{v}_L(s)\|^{1/2} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{1/2} \leq \frac{\alpha^4}{4} \|\tilde{v}_L(s)\|^2 + \frac{3}{4\alpha^4} |u_L(s)|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3}$$

Alors en choisissant α tel que $\frac{\alpha^4}{4} = \frac{\sigma_*}{2}$, il vient :

$$\frac{\mu}{2} \|\tilde{u}_L(t)\|^2 + \frac{\sigma_*}{2} \int_0^t \|\tilde{v}_L(s)\|^2 ds \leq \frac{3\sqrt{2}}{4\alpha^4} \int_0^t |u_L(s)|^{4/3} \left\| \frac{d\tilde{v}_L}{dx}(s) \right\|^{2/3} ds$$

Appliquons l'inégalité de Holder ($p = \frac{3}{2}$, $p' = 3$).

$$\left(\int_0^T |u_L(s)|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds \right) \leq \left(\int_0^T |u_L(s)|^2 ds \right)^{2/3} \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^2 ds \right)^{1/3}$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\int_0^T |u_L(s)|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds \leq \|u_L\|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))}^{2/3}$$

Donc, compte tenu de (4.23)

$$\int_0^T |u_L(s)|^{4/3} \left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x}(s) \right\|^{2/3} ds \leq C_4^{2/3} T^{2/9} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^{2/3} \|u_L\|^{4/3}$$

Alors, en reportant dans (4.24), on obtient facilement :

$$\|\tilde{u}_L\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_1 T^{1/3} \|u_L\|^{2/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^{1/3}$$

$$\|\tilde{v}_L\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C_2 T^{1/3} \|u_L\|^{2/3} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^{1/3}$$

(ii) Nous utilisons maintenant (4.18). Il vient :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} (t) \right\|^2 + \mu \sigma_* \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} (s) \right\|^2 ds \leq L^{1/2} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2} (s) \right\| ds$$

Or,

$$L^{1/2} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\|^2 ds \leq \alpha L^{1/2} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2} (s) \right\|^2 ds + \frac{L^{1/2}}{\alpha} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^2 ds$$

Soit encore, comme $\frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2} = \psi_\sigma \left(\frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right)$

$$L^{1/2} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right| \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}_L}{\partial x^2}(s) \right\| ds \leq \alpha L^{1/2} (\sigma^*)^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} (s) \right\|^2 dx + \frac{L^{1/2}}{\alpha} \int_0^t \left| \frac{du_L}{dt}(s) \right|^2 ds$$

Choisissons alors $\alpha = \frac{\sigma_*}{2(\sigma^*)^2 L^{1/2}}$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} (t) \right\|^2 + \frac{\mu \sigma_*}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} (s) \right\|^2 ds \leq 2 \frac{L(\sigma^*)^2}{\sigma_*} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

D'où l'on déduit les estimations :

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_3 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_4 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

et donc, grâce à l'équation (4.31)₁ :

$$\left\| \frac{\partial \tilde{v}_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} \leq C'_5 L^{1/2} \left\| \frac{du_L}{dt} \right\|$$

Les deux dernières estimations s'obtiennent alors exactement comme au cas (i) ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Deuxième Etape : Estimation de $\|u_L\|$ et $\|\frac{du_L}{dt}\|$ en fonction de L et ϕ

Une nouvelle fois, nous allons établir, par transformation de Fourier en temps, que $\|u_L\|$ et $\|\frac{du_L}{dt}\|$ décroissent plus vite que toute puissance de $\frac{T}{L^2}$. De façon plus précise nous avons le :

LEMME 4.4

Avec les hypothèses ($n \in \mathbb{N}$)

- $\forall j \leq n-1 \int_0^T t^j \phi(t) dt = 0$
- $\int_0^T t^n \phi(t) dt \neq 0$

Alors pour tout entier k positif on a les estimations :
pour $L \geq L_0(n,k)$

$$\|u_L\| \leq \left(\frac{2\sigma^*}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)} \Gamma}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|}{2^{k/2} (\mu L^2)^n} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^k$$

$$\left\| \frac{du_L}{dt} \right\| \leq \left(\frac{2\sigma^*}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)} \Gamma}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1}$$

Démonstration du Lemme :

Nous reprenons les notations de la démonstration du lemme (4.2). Rappelons que $\hat{\phi}^*(\omega)$, $\hat{U}^*(x,\omega)$ et $\hat{V}^*(x,\omega)$ désignent les transformées de Fourier respectives des fonctions $\phi^*(t)$, $u^*(x,t)$ et $v^*(x,t)$.

Rappelons que :

$$V^*(x,\omega) = \phi^*(\omega) e^{-i\mu\omega\sigma(\omega)^{1/2}x}$$

et que

$$i\mu\omega U^*(x,\omega) + \frac{dV^*}{dx}(x,\omega) = 0$$

Par conséquent un rapide calcul donne :

$$U^*(x, \omega) = \left(\frac{\sigma(\omega)}{i\mu\omega}\right)^{1/2} \hat{\phi}^*(\omega) e^{-[i\mu\omega\sigma(\omega)]^{1/2} x}$$

Notons que on a seulement :

$$\begin{cases} x \rightarrow U^*(x, \omega) \in L^1(\mathbb{R}) \\ x \rightarrow U^*(x, \omega) \notin L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$

$$\begin{cases} t \rightarrow u^*(x, t) \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \\ t \rightarrow u^*(x, t) \notin L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

En particulier, pour $x = L$, on a :

$$\begin{cases} u_L(t) \in C^0(0, T) \\ u_L(0) = 0 \end{cases}$$

Par contre, il vient :

$$\omega^k U^*(x, \omega) = \omega^{k-1} \left(\frac{\sigma(\omega)}{i\mu}\right)^{1/2} \hat{\phi}^*(\omega) e^{-[i\mu\omega\sigma(\omega)]^{1/2} x}$$

Donc, pour $k \geq 1$, pour tout $x > 0$

$$t \rightarrow \frac{d^k u^*}{dt^k}(x, t) \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

Et on a le théorème de Plancherel

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k u_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sigma(\omega)|}{\mu} \omega^{2k-1} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-2|\tilde{\sigma}(\omega)|^{1/2} (\mu\omega)^{1/2} L} d\omega$$

Nous reprenons alors la même démarche que pour le lemme 4.2. Par le changement de variable $\tau = \omega \mu L^2$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k u_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt = \frac{2}{(\mu L^2)^{2k}} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sigma(\frac{\tau}{\mu L^2})}{\mu} \right| \left| \hat{\phi}\left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right) \right|^2 e^{-2\left|\sigma\left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right)\right|^{1/2} \tau^{1/2}} \tau^{2k} d\tau$$

Alors, en raisonnant comme au lemme (4.2), il est facile d'établir que, avec les hypothèses faites on a :

$$\left| \phi^*\left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right) \right|^2 \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \left| \frac{d^n \phi^*}{d\omega^n}(0) \right|^2 \left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right)^{2n}$$

et

$$\left| \phi^*\left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right) \right|^2 \leq \left| \frac{d^n \phi^*}{d\omega^n}(0) \right|^2 \left(\frac{\tau}{\mu L^2}\right)^{2n}$$

D'où l'on déduit facilement la majoration :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d^k u_L^*}{dt^k}(t) \right|^2 dt \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sigma^*}{\mu(n!)^2} \frac{1}{(\mu L^2)^{2n+2k}} \left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|^2 \left(\int_0^{+\infty} \tau^{2n+2k} e^{-\sqrt{2|\sigma(0)|} \tau^{1/2}} d\tau \right)$$

D'où l'on tire, pour L suffisamment grand :

$$\left\| \frac{d^k u_L^*}{dt^k} \right\|^2 \leq \frac{2\sigma^*}{\mu(n!)^2} \frac{\left| \int_0^T t^n \phi(t) dt \right|^2}{(\mu L^2)^{2n+2k}} \frac{(4n+4k+1)!}{|2\sigma(0)|^{4n+4k+1}}$$

Il suffit alors d'utiliser les inégalités :

$$\left\| \frac{du_L}{dt} \right\|^2 \leq \left(\frac{T^2}{2}\right)^{k-1} \left\| \frac{d^k u_L^*}{dt^k} \right\|^2$$

$$\|u_L\|^2 \leq \left(\frac{T^2}{2}\right)^k \left\| \frac{d^k u_L^*}{dt^k} \right\|^2$$

pour conclure. ■

En regroupant les lemmes 4.3 et 4.4 nous obtenons finalement les estimations :

THEOREME 4.2

Avec les hypothèses $(n \in \mathbb{N})$

- $\forall j \leq n-1 \int_0^T t^j \phi(t) dt = 0$
- $\int_0^T t^n \phi(t) dt = 0$

Alors pour tout entier $k > 0$, on a, pour $L \geq L_0(n,k)$ les estimations d'erreur suivantes :

(1)

$$\begin{aligned}
\|u - u_L\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}_1 T^{1/3} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{|\int_0^T t^n \phi(t) dt|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1/3}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1/3} \\
\|v - v_L\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}_2 T^{1/3} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{|\int_0^T t^n \phi(t) dt|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1/3}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1/3} \\
\left\| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}_3 T^{1/3} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{|\int_0^T t^n \phi(t) dt|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1} \\
\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}_4 T^{1/3} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{|\int_0^T t^n \phi(t) dt|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1} \\
\left\| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}_5 T^{1/3} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{|\int_0^T t^n \phi(t) dt|}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|u - u_L\|_{L^\infty(0, T; L(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}'_1 L^{1/6} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1/3}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1/3} \\
 \|v - v_L\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}'_2 L^{1/6} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1/3}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1/3} \\
 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_L}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}'_3 L^{1/2} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1} \\
 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_L}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}'_4 L^{1/2} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1} \\
 \left\| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v_L}{\partial x} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_L))} &\leq \tilde{C}'_5 L^{1/2} \frac{\sqrt{(4n+4k+1)!}}{|2\sigma(0)|^{2n+2k+1/2}} \frac{\int_0^T t^n \phi(t) dt}{2^{k/2} (\mu L^2)^{n+1}} \left(\frac{T}{\mu L^2}\right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

où toutes les constantes qui interviennent ne dépendent que de μ et σ .

CONCLUSION

L'étude menée ici permet donc de définir une bonne classe de lois de polarisation pour lesquelles le système des équations de Maxwell en milieu polarisable monodimensionnel est mathématiquement bien posé. Ces hypothèses assurent la causalité, la continuité et la coercivité de l'opérateur de convolution ψ_0 apparaissant dans ces équations. Cette classe de lois de polarisation englobe notamment les lois de Warbourg, qui apparaissent le plus souvent dans la littérature ainsi que les lois approchées s'écrivant sous la forme d'une somme de fractions rationnelles simples.

On a pu en outre, mettre en évidence un résultat de continuité de la solution vis-à-vis de la loi de polarisation, puis on a pu démontrer, par un procédé constructif, que les lois de Warbourg étaient limites de suites de lois approchées, pour la bonne topologie. Ce résultat apporte une justification à la méthode d'approximation numérique proposée dans [1] [2]. Rappelons que la principale idée de cette méthode consiste à remplacer l'opérateur de convolution ψ_0 par un opérateur local pouvant se décomposer en une série d'équations différentielles linéaires du premier ordre en temps. Le résultat obtenu ici présente surtout un intérêt théorique. La suite de lois approchées construite n'est sûrement pas optimale. Une méthode de détermination d'une telle suite optimale a été proposée dans [1], [2].

Signalons enfin que des estimations précises ont été obtenues pour justifier l'emploi de conditions aux limites homogènes à distance finie (chapitre 4) et que la conjecture faite à la fin du chapitre 3 doit permettre de généraliser le résultat d'approximation par fractions rationnelles à une très large famille de lois de polarisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Cockburn.,
"Etude Mathématique et numérique des équations de Maxwell dans les milieux polarisables".
Thèse de 3ième Cycle - 1981.
- [2] B. Cockburn., Y. Goldman.,
"Etude et comparaison de deux méthodes de résolution numérique des équations de Maxwell en milieu polarisable monodimensionnel".
Rapport INRIA à paraître.
- [3] C.A. Dias.,
"Analytical model for a polarisable medium at radio and lower frequencies".
Journal of Geophysical research, vol. 77 n°26.
- [4] R.P. Feynmann.,
"Lectures on Physics".
Addison - Wesley - 1969.
- [5] Y. Goldman.,
"Analyse de la sensibilité d'un modèle de polarisation électromagnétique vis-à-vis de ses paramètres".
Rapport INRIA à paraître.
- [6] R.F. Harrington.,
"Time Harmonic Electromagnetic fields".
Mac Grax Hill 1961.
- [7] J.L. Lions., E. Magenes.,
"Problèmes aux limites non homogènes et applications".
vol. 1., Dunod, Paris 1968.
- [8] A. Papoulis.,
"The Fourier integral and its application".
Mc. Graw Hill. 1962.
- [9] A.N. Tychonov., A.A. Samarski.,
"Partial differential equations of mathematical physics".
Holden day vol 2, 1967.
- [10] H.S. Wall.,
"Analytic theory of continued fractions".
Chelsea Publishing Company, 1948.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

