Gestion d'un stock a deux niveaux

A. Haouba, Jean-Marie Proth

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 302

GESTION D'UN STOCK À DEUX NIVEAUX

Ahmedou HAOUBA
Jean-Marie PROTH

Mai 1984

GESTION D'UN STOCK A DEUX NIVEAUX

A. HAOUBA*

J.M. PROTH**

* Dauphine, UER de Mathématiques de la Décision

** INRIA, BP 105, 78153 LE CHESNAY

Tél : (3) 954 90 20

ABSTRACT

This paper is devoted to the two levels inventory problem with concave costs. The costs involved are the ordering costs and the inventory costs at each level. We show that the backward dynamic programming equations are suitable in order to obtain an optimal solution.

RESUME

Ce papier est consacré au problème de stockage à deux niveaux, avec coûts concaves. Les coûts qui interviennent sont les coûts de commande et de stockage à chacun des deux niveaux. Nous montrons que les équations de la programmation dynamique de type rétrograde sont adaptées au calcul d'une solution optimale.

0. INTRODUCTION

Les lignes qui suivent s'intéressent à un problème de stockage à deux niveaux, chacun de ces niveaux comportent un stock unique.

Les coûts de réapprovisionnement du niveau haut, les coûts de transfert du niveau haut vers le niveau bas, ainsi que les coûts de stockage à chacun de ces niveaux sont concaves et non stationnaires.

Les stocks initiaux sont non négatifs, mais pas nécessairement nuls. On verra que cette hypothèse tout à fait générale complique considérablement la recherche d'une solution optimale. On observera que si les stocks initiaux étaient nuls, les réapprovisionnements seraient toujours égaux à la somme d'un nombre consécutif de demandes.

Les équations de la programmation dynamique que nous donnons dans ce papier, ainsi que les ensembles finis de réapprovisionnement à explorer et de niveaux du stocks à considérer à chaque pas, sont suffisants pour permettre le calcul d'une solution optimale.

Après avoir donné les notations et les définitions que nous utilisons, nous nous intéressons aux états des stocks en fin de période. Puis nous établissons quelques propriétés des réapprovisionnements optimaux qui conduisent aux ensembles finis dont il vient d'être question.

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Nous considérons un système de stockage à deux niveaux. Le niveau 0 est constitué d'un stock unique, noté S_0, réapprovisionné de l'extérieur. Nous supposons que les ressources extérieures sont illimitées. Le niveau 1 est constitué d'un stock S_1 réapprovisionné par S_0 et qui satisfait une demande extérieure connue. La figure 1 schématise cette situation.

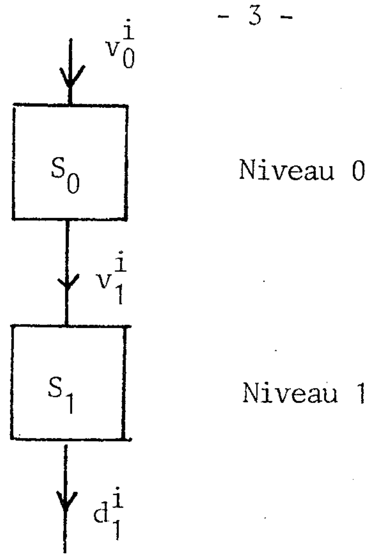

Figure 1

Si N est l'horizon du problème, c'est à dire la période d'étude, la demande qui apparaît au niveau 1 et à l'instant i (i = 1,2,...,N) s'écrit d_1^i.

Pour j = 0,1, $v_j^i \geq 0$ est le réapprovisionnement de S_j décidé à l'instant i et qui prend effet à l'instant i+1. De même y_j^i est le niveau du stock S_j sur $[i,i+1)$. y_0^{-1} et y_1^0, qui désignent les stocks initiaux, sont connus. On exige que les niveaux des différents stocks restent positifs ou nuls (en d'autres termes, les ruptures ne sont pas admises).

Les équations suivantes, appelées équations d'état, donnent les niveaux des stocks sur les intervalles $[i,i+1)$ pour i = 0,1,...,N-1 :

$$\left.\begin{aligned} y_0^{i+1} &= y_0^i + v_0^i - v_1^{i+1} \\ y_1^{i+1} &= y_1^i + v_1^i - d_1^{i+1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Et les contraintes suivantes sont toujours vérifiées :

$$\left.\begin{aligned} v_j^i &\geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\dots,N-1 \\ y_j^i &\geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\dots,N \end{aligned}\right\} \quad j = 0,1 \qquad (2)$$

Nous notons :

$$\left.\begin{array}{l} V_j = \{v_j^i\}^{i=0,\dots,N-1} \\ Y_j = \{y_j^i\}^{i=0,1,\dots,N} \end{array}\right\} \quad j = 0,1$$

et

$V = (V_0,V_1)$ est appelé contrôle.

$Y = (Y_0,Y_1)$ est l'ensemble des états obtenus à l'aide de V en appliquant (1).

1. lorsqu'un contrôle ou un ensemble de niveaux des stocks sont donnés par une majuscule, les composantes correspondantes sont les minuscules des mêmes lettres.
2. lorsqu'on est contraint d'utiliser un indice pour distinguer un contrôle, cet indice sera toujours placé en tête de la lettre et en première position. Le second indice placé en tête désignera le temps alors que l'indice placé au pied de la lettre continuera, comme précédemment, à désigner le niveau. L'ensemble des états correspondants suivra les mêmes règles.

   $Y^0 = (y_0^{-1}, y_1^0)$, niveau des stocks à l'instant 0, étant connu, un contrôle V qui vérifie (2) est dit admissible.

Pour $j = 0,1$ et $i = 0,1,\dots,N-1$:

- Le coût de lancement d'une quantité $v \geq 0$ décidé au niveau j et à l'instant i et qui prend effet à l'instant i+1 est une fonction concave et non décroissante de v. On la note c_j^i
- Le coût de stockage d'une quantité $y \geq 0$ au niveau j sur $[i,i+1)$ est une fonction concave et non décroissante de y. On la note f_j^i.

  Si V est un contrôle admissible et Y l'ensemble des états correspondants, le coût associé à V s'écrit :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{1} [c_j^i\ (v_j^i) + f_j^i\ (y_j^i)] \tag{3}$$

Si $D(y_0^{-1},y_1^0)$ est l'ensemble des contrôles admissibles, le contrôle admissible V^* est optimal si :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^*) = \min_{V\in D\ (y_0^{-1},y_1^0)} K\ (y_0^{-1},y_1^0,V)$$

Nous noterons parfois plus simplement ce contrôle

$$K^*(y_0^{-1},y_1^0)$$

II. CONDITIONS SUR LES STOCKS EN FIN DE PERIODE.

Si y_0^{-1} est le niveau du stock sur $[-1,0[$, alors (c.f.(1)) la condition pour que $D\ (y_0^{-1},y_1^0)$ ne soit pas vide s'écrit :

$$y_0^{-1} - y_0^0 + y_1^0 \geq d_1^1 \tag{4}$$

Nous noterons :

$$\alpha_1 = (y_1^0 - \sigma_1^{1,N})^+$$

$$\sigma_1^{p,q} = \begin{cases} \sum_{i=p}^{q} d_1^i & \text{si } p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a^+ = \text{Max } \{0,a\}$$

Le théorème que nous allons énoncer dit que si le stade initial du niveau 0 n'est pas suffisant pour réapprovisionner le stock S_1 durant la période $[0,N]$, alors il existe un contrôle optimal qui conduit à un niveau nul pour S_0 à l'instant N-1 et à un niveau égal à α_1 pour S_1 au dernier instant.

Théorème 1 :

$$\text{Si } D(y_0^{-1},y_1^0) \neq \emptyset \tag{5}$$

$$\text{et si } y_0^{-1} < (\sigma_1^{1,N} - y_1^0)^+ \tag{6}$$

alors il existe un contrôle optimal V tel que

$$y_0^{N-1} = 0$$

$$\text{et} \quad y_1^N = \alpha_1 \tag{7}$$

<u>Démonstration</u> :

Soit V^0 un contrôle optimal et Y^0 l'ensemble des états correspondants.

1. Supposons : $y_0^{0,N} > 0$

Soit i_0 est le plus grand indice de $\{0,1,\ldots,N-1\}$ tel que $v_0^{0,i_0} > 0$.

Nous construisons le contrôle V^1 de la manière suivante :

$$V_1^1 = V_1^0 \tag{8}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} v_0^{1,i} = v_0^{0,i} & \text{si } i \neq i_0 \\ v_0^{1,i_0} = v_0^{0,i_0} - \text{Min } \{y_0^{0,N}, v_0^{0,i_0}\} & \end{array}\right\} \tag{9}$$

L'existence de i_0 est assurée par la seconde contrainte (2) et l'hypothèse (6).

Nous noterons Y^1 l'ensemble des états correspondants à V^1.

a) Nous montrons que V^1 est admissible.

D'après (8) et (9), toutes les composantes de V^1 sont positives ou nulles.

De plus :

$$Y_1^1 = Y_1^0 \tag{10}$$

et considérant (9) et (1) :

$$\begin{cases} y_0^{1,i} = y_0^{0,i} \quad \text{pour } i = 0,\ldots,i_0 & (11) \\ y_0^{1,i} = y_0^{0,i} - \text{Min } \{y_0^{0,N}, v_0^{0,i_0}\} \text{ pour } i = i_0+1,\ldots,N-1 & (12) \end{cases}$$

Considérons (12). Par définition de i_0

$v_0^{1,i} = v_0^{0,i} = 0 \quad$ pour $i = i_0+1,\ldots,N-1$, donc

$y_0^{0,i} \geq y_0^{0,N} \quad$ pour $i = i_0+1,\ldots,N$ et

$y_0^{1,i} \geq 0 \quad$ pour $i = i_0+1,\ldots,N$

Finalement, (11) et (12) montrent que les composantes de $y_0^{1,i}$ sont toutes positives ou nulles et, compte tenu de (10), que toutes les composantes de Y^1 sont positives ou nulles. Ce qui établit que

V^1 est admissible.

b) Nous montrons maintenant que V^1 est optimal.

En considérant (3) :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^1) = K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) - c_0^{i_0}(v_0^{0,i_0}) + c_0^{i_0}(v_0^{1,i_0})$$

$$+\sum_{i=i_0+1}^{N-1}\{-f_0^i(y_0^{0,i}) + f_0^i(y_0^{1,i})\} \qquad (13)$$

Compte tenu de (9) et (12) on a :

$$-c_0^{i_0}(v_0^{0,i_0}) + c_0^{i_0}(v_0^{1,i_0}) \leq 0 \qquad (14)$$

$$-f_0^i(y_0^{0,i}) + f_0^i(y_0^{1,i}) \leq 0 \text{ pour } i= i_0+1,\ldots,N-1 \text{ (c.f.(12))} \qquad (15)$$

et, compte tenu de (13), (14) et (15) :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^1) \leq K(y_0^{-1},y_1^0,V^0)$$

et, comme V^0 est optimal, V^1 l'est aussi.

c) Nous sommes conduits à considérer deux cas :

a_1. $y_0^{0,N} = \text{Min}(y_0^{0,N},v_0^{0,i_0})$

alors $y_0^{1,N} = 0$ et nous posons $V^*=V^1$

a_2. $v_0^{0,i_0} = \text{Min}(y_0^{0,N},v_0^{0,i_0})$

Dans ce cas $v_0^{1,i_0} = 0$ et V_0^1 a une composante strictement positive de moins que V_0^0. Nous contruisons alors V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0 et ainsi de suite. Nous sommes assurés d'aboutir, après un nombre fini d'itérations, au contrôle optimal V^k $(k \leq N-1)$ pour lequel nous sommes dans le cas a_1 ci-dessus.

Nous posons $V^* = V^k$.

d) Nous montrons que si Y^* est la suite des états correspondants à V^*, alors $y_0^{*N-1} = 0$

V^* est tel que $y_0^{*N} = 0$

L'équation d'état montre que :

$y_0^{*N} = y_0^{*N-1} + v_0^{*N-1}$

Puisque $y_0^{*N} = 0$ et que $y_0^{*N-1} \geq 0$ et $v_0^{*N-1} \geq 0$ alors nécessairement

$y_0^{*N-1} = v_0^{*N-1} = 0$

donc V^* est un contrôle optimal avec $y_0^{*N-1} = 0$.

2. Nous allons démontrer la relation (7).

Posons $V^0 = V^*$ (16)

Supposons : $y_1^{0,N} > \alpha_1$ (17)

Désignons par :

* i_1 le plus grand indice $i \in \{0,1,\dots,N-1\}$ tel que $v_1^{0,i} > 0$
* i_0 est le plus grand de tous les i vérifiant :

$$\text{et}\ \begin{cases} i < i_1 \\ v_0^{0,i} > 0 \end{cases}$$

i_1 existe à cause de (17)

i_0 existe à cause de (6) et du fait que i_1 existe.

* $\Delta = \mathrm{Min}\ \{v_0^{0,i_0},\ v_1^{0,i_1},\ y_1^{0,N}\}$ (18)

On construit V^1 de la manière suivante :

$$V_1^1 = \begin{cases} v_1^{1,i} = v_1^{0,i} & \text{si } i \neq i_1 \\ v_1^{1,i_1} = v_1^{0,i_1} - \Delta \end{cases} \tag{19}$$

$$V_0^1 = \begin{cases} v_0^{1,i} = v_0^{0,i} & \text{si } i \neq i_0 \\ v_0^{1,i_0} = v_0^{0,i_0} - \Delta \end{cases} \tag{20}$$

On a alors les états suivants pour V^1 :

$$Y_1^1 = \begin{cases} y_1^{1,i} = y_1^{0,i} & \text{si } i \leq i_1 \\ y_1^{1,i} = y_1^{0,i} - \Delta & \text{si } i > i_1 \end{cases} \tag{21}$$

$$Y_0^1 = \begin{cases} y_0^{1,i} = y_0^{0,i} & \text{si } i \leq i_0 \text{ et } i > i_1 \\ y_0^{1,i} = y_0^{0,i} - \Delta & \text{si } i_0 < i \leq i_1 \end{cases} \tag{22}$$

En considérant les relations de (18) à (22) nous voyons que V^1

est admissible.

En outre, les états et composantes du contrôle V^1 sont tous inférieurs ou égaux aux états et composantes correspondant du contrôle V^0. Or les coûts sont croissants, si bien que :

$K\ (y_0^{-1}, y_1^0, V^1) \leq K\ (y_0^{-1}, y_1^0, V^0)$.

V^0 étant optimal, V^1 l'est aussi.

Considérons (18) :

a) si $\Delta = y_1^{0,N}$ alors $y_1^{1,N} = 0$ (c.f.(21)) et (7) est vrai

b) si $\Delta = v_0^{0,i_0}$ alors V_0^1 comporte une composante strictement positive de moins que V_0^0. (c.f.(20))

c) si $\Delta = v_1^{0,i_1}$ alors V_1^1 comporte une composante strictement positive de moins que V_1^0. (c.f.(19))

Dans les cas b et c, nous construisons V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0.

Si $y_1^{2,N} = 0$ (éventualité a. ci-dessus), (7) est vrai et la démonstration est terminée.

Sinon, nous sommes dans une des éventualités b (ou c) c'est à dire que V_0^2 (ou V_1^2) comporte une composante strictement positive de moins que V_0^1 (ou V_1^1). Dans ce cas, nous construisons V^3 à partir de V^2, comme V^2 l'a été à partir de V^1, et ainsi de suite. Nous sommes assurés d'aboutir, après un nombre fini d'itérations, à un contrôle optimal V^k tel que $y_1^{k,N} = \alpha_1$.

Ce qui achève la démonstration.

□

Nous allons maintenant énoncer un théorème qui achèvera de montrer qu'il existe un contrôle optimal qui ne peut conduire qu'à un nombre fini de niveaux de stock en fin de période.

<u>Théorème 2</u> :

Si $D\ (y_0^{-1}, y_1^0) \neq \emptyset$ (c'est la relation (5))

et si $y_0^{-1} \geq (\sigma_1^{1,N} - y_1^0)^+$ (23)

alors il existe un contrôle optimal $V^* = (V_0^*, V_1^*)$ tel que :

1) V_0^* a toutes ses composantes nulles (24)

2) Et

$$\left.\begin{array}{l} \text{soit } y_0^{*N-1} = 0 \text{ et } y_1^{*N} = y_1^0 + y_0^{-1} - \sigma_1^{1,N} \\ \text{soit } y_0^{*N-1} = y_0^{-1} - (\sigma_1^{1,N} - y_1^0)^+ \text{ et } y_1^{*N} = \alpha_1 \end{array}\right\} \quad (25)$$

Dans le premier cas, le stock du niveau 0 (niveau haut) est entièrement transféré au niveau bas. Dans le second cas, seule la quantité strictement nécessaire au réapprovisionnement du niveau bas est transférée.

Démonstration :

Supposons qu'il existe un contrôle optimal V^0 tel que V^0 ne vérifie pas (24), c'est à dire, qu'il existe k tel que $v_0^{0,k} > 0$.

1. Mise en évidence du contrôle optimal vérifiant (24).

1.1. Première itération.

Nous définissons : $d_0 = \underset{v_0^{0,i} > 0}{\text{Max }} i$ (26)

1.1.1. S'il n'existe pas $v_1^{0,i} > 0$ tel que $i > d_0$ alors on construit V^1 comme suit :

V^1 a toutes ses composantes égales à celles de V^0, sauf v_0^{1,d_0} qui est égale à zéro. Nous laissons au lecteur le soin de montrer que V^1 est admissible (conséquence de la condition (23)). Il est également optimal. En effet, les composantes de V^1 sont inférieures ou égales à celles de V^0 ; il en est donc de même des composantes de Y^1 par rapport à celles de Y^0 ; en conséquence, les coûts étant non décroissants, le coût associé à V^1 est inférieur ou égal au coût associé à V^0. V^0 étant optimal, V^1 est optimal. Et on passe à la deuxième partie de la démonstration.

1.1.2. S'il existe $v_1^{0,i} > 0$ tel que $i > d_0$, nous définissons :

$$* \; d_1 = \underset{v_1^{0,i} > 0}{\text{Max}}$$

$$* \; \Delta = \text{Min} \{v_0^{0,d_0}, v_1^{0,d_1}\} \tag{27}$$

On construit V^1 de la manière suivante :

V^1 à toutes ses composantes égales à V^0 excepté :

$$\begin{cases} v_0^{1,d_0} = v_0^{0,d_0} - \Delta \\ \text{et } v_1^{1,d_1} = v_1^{0,d_1} - \Delta \end{cases} \tag{28}$$

Les états correspondants s'écrivent :

$$Y_0^1 = \begin{cases} y_0^{1,i} = y_0^{0,i} - \Delta & \text{si } d_0 < i < d_1 \\ y_0^{1,i} = y_0^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{29}$$

$$Y_1^1 = \begin{cases} y_1^{1,i} = y_1^{0,i} - \Delta & \text{si } i > d_1 \\ y_1^{1,i} = y_1^{0,i} & \text{si } i \leq d_1 \end{cases} \tag{30}$$

Compte tenu de (27), les relations (28), (29) et (30) montrent que V^1 est admissible.

Ces mêmes relations montrent que les composantes de V^1 et Y^1 sont inférieures ou égales aux composantes de V^0 et Y^0 respectivement. Les coûts étant non décroissants, le coût total associé au contrôle V^1 est inférieur ou égal au coût total associé au contrôle V^0. V^0 étant optimal, V^1 est optimal. En considérant (27) on est amené à envisager deux cas :

i) si $\Delta = v_0^{0,d_0}$ alors $v_0^{1,d_0} = 0$

V_0^1 a une composante strictement positive de moins que V_0^0 et l'on passe à 1.2 (seconde partie de la démonstration)

ii) si $\Delta = v_1^{0,d_1}$ alors $v_1^{1,d_1} = 0$

Et on construit V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0. Si on est dans l'éventualité i, on passe à la deuxième partie de la démonstration, sinon on construit comme précédemment un nouveau contrôle optimal. On est assuré, après un nombre fini d'itérations, d'aboutir à un contrôle optimal V^k tel que $v_0^{k,d_0} = 0$. On aborde alors la seconde partie de la démonstration.

1.2. Poursuite des itérations.

A partir du dernier contrôle optimal obtenu, on élimine la dernière composante strictement positive de niveau zéro en procédant comme dans la première partie de la démonstration précédente. Au bout d'un nombre fini d'itérations on est assuré d'aboutir au contrôle optimal V^ℓ qui a toutes ses composantes nulles : c'est une conséquence de (23).

2. Démonstration de (25).

Soit V un contrôle optimal vérifiant (24).

Observons que (les notations sont celles de (24) et (25)) :

* si $y_0^{*N-1} = 0$ et si (24) est vérifiée, alors
  $y_1^{*N} = y_1^0 + y_0^{-1} - \sigma_1^{1,N}$

* si $y_1^{*N} = \alpha_1$ et si (24) est vérifiée, alors
  $y_0^{*N-1} = y_0^0 - (\sigma_1^{1,N} - y_1^0)^+$

Lorsque (24) est vérifiée, les deux propositions suivantes sont donc équivalentes :

$$\text{et}\left\{\begin{array}{l}(25)\\(y_0^{*N-1} = 0 \text{ ou } y_1^{*N} = \alpha_1)\end{array}\right. \tag{33}$$

Soit V un contrôle optimal vérifiant (24). Dire qu'il ne vérifie pas (25) s'écrira donc :

$$y_0^{N-1} > 0 \text{ et } y_1^N > \alpha_1 \quad \text{(c.f.(33))} \tag{34}$$

Nous définissons :

$$k = \underset{v_1^i > 0}{\mathrm{Max}}\ i \tag{31}$$

et $\Delta = \mathrm{Min}\ \{y_0^{N-1}, \delta_1, v_1^k\}$ (32)

avec $\delta_1 = y_1^N - \alpha_1$.

2.1. Construction de deux nouveaux contrôles optimaux.

On construit les contrôles V^a et V^b comme suit :

V^a à toutes ses composantes égales à V sauf :

$$v_1^{a,k} = v_1^k - \Delta \tag{35}$$

V^b à toutes ses composantes égales à V sauf :

$$v_1^{b,k} = v_1^k + \Delta \tag{36}$$

Nous allons montrer que V^a et V^b sont optimaux.

2.1.1. V^a et V^b sont admissibles.

En considérant (32), (35) et (36) :

$$\begin{cases} v_1^{a,i} = v_1^i \geq 0 & \text{si } i \neq k \\ v_1^{a,k} = v_1^k - \Delta \geq 0 & \text{car } \Delta \leq v_1^k \end{cases}$$

En outre : $V_0^a = V_0$.

Donc toutes les composantes de V^a sont positives ou nulles.

Considérons maintenant les états correspondants :

$y_1^{a,i} = y_1^i \geq 0$ si $i \leq k$

$y_1^{a,i} = y_1^i - \Delta$ si $i > k$

Mais $\Delta \leq \delta_1$

Donc :

$$y_1^{a,i} \geq y_1^i - \delta_1$$

Soit :

Or $y_1^{a,i} \geq y_1^i - y_1^N + \alpha_1$

:

$y_1^N \leq y_1^i$ (c.f(31))

et

$\alpha_1 \geq 0$

Finalement :

$y_1^{a,i} \geq 0$

Au niveau 0 :

$y_0^{a,i} = y_1^i \geq 0$ si $i < k$

et $y_0^{a,i} = y_0^i + \Delta > 0$ si $i \geq k$

Nous venons de montrer que V^a est admissible.

Considérons maintenant V^b.

$$\begin{cases} v_1^{b,i} = v_1^i \geq 0 & \text{si } i \neq k \\ v_1^{b,k} = v_1^k + \Delta > v_1^k \geq 0 \end{cases}$$

En outre, $V_0^b = V_0$

Donc toutes les composantes de V^b sont positives ou nulles.

Nous considérons les états correspondants à V^b.

$$\begin{cases} y_1^{b,i} = y_1^i \geq 0 & \text{si } i \leq k \\ y_1^{b,i} = y_1^i + \Delta \geq y_1^i \geq 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

et, au niveau 0 :

$y_0^{b,i} = y_0^i \geq 0$ si $i < k$

$y_0^{b,i} = y_0^i - \Delta$

Mais $\Delta \leq y_0^{N-1}$ et $y_0^{N-1} \leq y_0^i$

Donc $\Delta \leq y_0^i$ et :

$y_0^{b,i} \geq 0$

Finalement, V^b est admissible.

2.1.2. V^a et V^b sont optimaux

Le coût associé au contrôle admissible V^a s'écrit :

$$K(y_0^{-1}, y_1^0, V^a) = K(y_0^{-1}, y_1^0, V) + c_1^k (v_1^k - \Delta) - c_1^k (v_1^k)$$

$$+ \sum_{i=k}^{N-1} [f_0^i (y_0^i + \Delta) - f_0^i (y_0^i)] + \sum_{i=k+1}^{N-1} [f_1^i (y_1^i - \Delta) - f_1^i (y_1^i)]$$

De manière analogue, le coût associé au contrôle admissible V^b s'écrit :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^b) = K(y_0^{-1},y_1^0,V) + c_1^k(v_1^k+\Delta) - c_1^k(v_1^k)$$

$$+ \sum_{i=k}^{N-1} [f_0^i(y_0^i-\Delta) - f_0^i(y_0^i)] + \sum_{i=k+1}^{N-1} [f_1^i(y_1^i+\Delta) - f_1^i(y_1^i)]$$

La concavité et la non décroissance des fonctions de coût donnent :

$$c_1^k(v_1^k+\Delta) - c_1^k(v_1^k) \leq c_1^k(v_1^k) - c_1^k(v_1^k-\Delta)$$

$$f_0^i(y_0^i+\Delta) - f_0^i(y_0^i) \leq f_0^i(y_0^i) - f_0^i(y_0^i-\Delta)$$

$$f_1^i(y_1^i+\Delta) - f_1^i(y_1^i) \leq f_1^i(y_1^i) - f(y_1^i-\Delta)$$

Les relations ci-dessus entraînent

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) - K(y_0^{-1},y_1^0,V) \leq -[K(y_0^{-1},y_1^0,V^b) - K(y_0^{-1},y_1^0,V)]$$

Du fait que V est optimal on a :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V) \leq K(y_0^{-1},y_1^0,V^a)$$

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V) \leq K(y_0^{-1},y_1^0,V^b)$$

Ce qui donne :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V) = K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) = K(y_0^{-1},y_1^0,V^b)$$

D'où l'optimalité de V^a et V^b.

2.2. Construction d'un contrôle vérifiant (25).

En considérant (32) nous sommes conduits à envisager trois cas :

a) Si $\Delta = y_0^{N-1}$ on pose $V^1 = V^b$, et $y_0^{1,N-1} = 0$

Alors (33) (donc (25)) est vérifiée.

b) Si $\Delta = \delta_1$ on pose $V^1 = V^a$, et $y_1^{1,N} = \alpha_1$

Alors (33) (donc (25)) est vérifiée.

c) Si $\Delta = v_1^k$ on pose $V^1 = V^a$

V_1^1 comporte alors une composante strictement positive de moins que V. On construit V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V. Au bout d'un nombre fini d'itérations on est assuré d'aboutir à un contrôle optimal ayant les propriétés (24) et (33), donc (25).

V^* est le contrôle ayant les propriété (24) et (33).

□

III. PROPRIETES DU CONTROLE OPTIMAL.

Nous définissons :

* $i_0^0, i_0^1, \ldots, i_0^k, \ldots i_0^{d_0}$ les instants de décision de réapprovisionnements non nuls de S_0.
* $i_1^0, i_1^1, \ldots, i_1^k, \ldots, i_1^{d_1}$ les instants de décision de réapprovisionnements non nuls de S_1.
* $i_1^{s(k)}$ est le plus petit indice i tel que $v_1^i > 0$ et $i > i_0^k$

Théorème 3 :

Si $D\ (y_0^{-1}, y_1^0) \neq \emptyset$ (condition (5))

et si $y_0^{-1} < (\sigma_1^{1,N} - y_1^0)^+$ (condition (6))

alors il existe un contrôle optimal V ayant la propriété P_1 suivante :

$$\begin{cases} y_1^{i_1^n} = 0 \text{ pour } n \in \{1,2,\ldots,d_1\} \text{ et } n \neq s(k),\ k = 0,\ldots,d_0 \\ \text{et il est possible que } y_1^{i_1^n} > 0 \text{ si } n = 0 \text{ ou } n = s(k) \text{ pour } k = 0,\ldots,d_0 \end{cases}$$

Le théorème 3 exprime que si, à l'instant initial, la somme des niveaux des stocks S_0 et S_1 est inférieure à la demande totale, alors les réapprovisionnements de S_1 se font lorsque le niveau du stock est nul, sauf peut-être dans le cas où un tel réapprovisionnement est le premier de S_1, ou lorsqu'il est le premier qui apparaît après un réapprovisionnement de S_0.

La figure 2 résume cette situation :

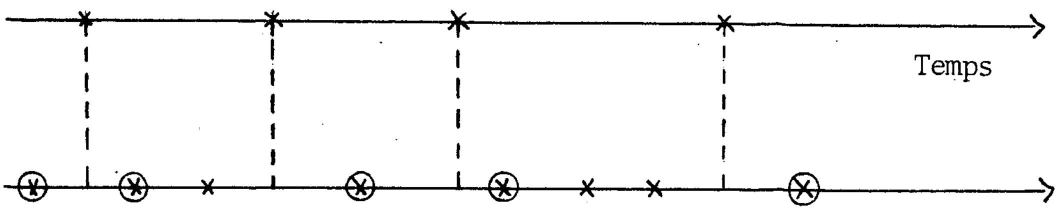

Figure 2.

Au niveau du stock S_1 :

⊗ indiquent les instants auxquels peuvent se décider des réapprovisionnements non nuls sans pour autant que le niveau de S_1 soit nul

x indiquent des instants de réapprovisionnement.

<u>Démonstration</u> :

Soit V^0 un contrôle optimal ne vérifiant pas P_1, c'est à dire qu'il existe $n \in \{1,2,\dots,d_1\}$ et $n \neq \{s(k),\ k = 0,\dots,d_0$ tel que $y_1^{i_1^n} > 0$

On définit

$$\Delta = \text{Min}\ \{y_1^{0,i_1^n},\ v_1^{0,i_1^n},\ v_1^{0,i_1^{n-1}}\} \tag{37}$$

On construit deux contrôles V^a et V^b de la manière suivante :

$$v_1^{a,i} = v_1^{0,i} \quad \text{si } i \neq i_1^{n-1} \text{ et } i \neq i_1^n$$

$$v_0 = v_0 \tag{39}$$

Les états correspondant à V^a sont alors les suivants :

$$Y_1^a = \begin{cases} y_1^{a,i} = y_1^{0,i} - \Delta & \text{si } i_1^{n-1} < i \leq i_1^n \\ y_1^{a,i} = y_1^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{40}$$

$$Y_0^a = \begin{cases} y_0^{a,i} = y_0^{0,i} + \Delta & \text{si } i_1^{n-1} \leq i < i_1^n \\ y_0^{a,i} = y_0^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{41}$$

Le contrôle V^b est donné par :

$$V_1^b = \begin{cases} v_1^{b,i} = v_1^{0,i} & \text{si } i \neq i_1^{n-1} \text{ et } i \neq i_1^n \\ v_1^{b,i_1^{n-1}} = v_1^{0,i_1^{n-1}} + \Delta & \\ v_1^{b,i_1^n} = v_1^{0,i_1^n} - \Delta & \end{cases} \tag{42}$$

$$V_0^b = V_0^0 \tag{43}$$

Les états correspondants à V^b sont alors :

$$Y_1^b = \begin{cases} y_1^{b,i} = y_1^{0,i} + \Delta & \text{si } i_1^{n-1} < i \leq i_1^n \\ y_1^{b,i} = y_1^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{44}$$

$$Y_0^b = \begin{cases} y_0^{b,i} = y_0^{0,i} - \Delta & \text{si } i_1^{n-1} \leq i < i_1^n \\ y_0^{b,i} = y_0^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{45}$$

a) Nous montrons que V^a et V^b sont admissibles.

a.1 Considérons le contrôle V^a

D'après (38)

$v_1^{a,i} = v_1^{0,i} \geq 0 \quad$ si $i \neq i_1^{n-1}$ et $i \neq i_1^n$

$v_1^{a,i_1^{n-1}} = v_1^{0,i_1^{n-1}} - \Delta$

≥ 0 (voir (37))

$v_1^{a,i_1^n} = v_1^{0,i_1^n} + \Delta > v_1^{0,i_1^n} \geq 0$

et (voir 39)) :

$v_0^{a,i} = v_0^{0,i} \geq 0 \quad$ pour $i = 0,1,\ldots,N-1$

Donc toutes les composantes de V^a sont supérieures ou égales à zéro.

Considérons maintenant (40).

Si $i_1^{n-1} < i \leq i_1^n$,

$$y_1^{a,i} = y_1^{0,i} - \Delta$$
$$\geq y_1^{0,i} - y_1^{0,i_1^n} \quad \text{(voir (37))}$$

Mais $y_1^{0,i_1^n} \leq y_1^{0,i}$ car $i_1^{n-1} < i \leq i_1^n$

Donc :

$$y_1^{a,i} \geq y_1^{0,i_1^n} - y_1^{0,i_1^n} = 0$$

Si $i \leq i_1^{n-1}$ ou $i > i_1^n$

$$y_1^{a,i} = y_1^{0,i} \geq 0$$

En considérant maintenant la relation (41), nous voyons que

$$y_0^{a,i} \geq y_0^{0,i} \geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots,N$$

Finalement, toutes les composantes de Y^a sont positives. Nous pouvons donc conclure que V^a est admissible.

a.2 Nous considérons maintenant le contrôle V^b.

D'après les relations (42) :

$$v_1^{b,i} = v_1^{0,i} \geq 0 \quad \text{si } i \neq i_1^{n-1} \text{ et } i \neq i_1^n$$
$$v_1^{b,i_1^{n-1}} = v_1^{0,i_1^{n-1}} + \Delta > v_1^{0,i_1^{n-1}} \geq 0$$
$$v_1^{b,i_1^n} = v_1^{0,i_1^n} - \Delta$$
$$\geq v_1^{0,i_1^n} - v_1^{0,i_1^n} \quad \text{(voir (37))}$$

Soit $v_1^{b,i_1^n} > 0$

En outre (c.f.(43)) :

$$v_0^{b,i} = v_0^{0,i} \geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots,N-1$$

Toutes les composantes de V^b sont donc nulles.

En considérant (44), nous voyons que :

$$y_1^{b,i} \geq y_1^{0,i} \geq 0 \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots,N$$

Nous considérons maintenant la relation (45).

Si $i_1^{n-1} \leq i < i_1^n$

$$y_0^{b,i} = y_0^{0,i} - \Delta$$

Mais $y_0^{0,i} \geq v_1^{0,i_1^n}$ car $n \neq s(k)$ avec $k = 0,\dots,d_0$

et $\Delta \leq v_1^{0,i_1^n}$ (c.f.(37))

Si bien que $y_0^{b,i} \geq 0$

Si $i^{\cdot} < i_1^{n-1}$ et $i \geq i_1^n$

$y_0^{b,i} = y_0^{0,i} \geq 0$

Finalement, V^b est admissible.

b) <u>Nous montrons que V^a et V^b sont optimaux.</u>

Ecrivons d'abord les coûts associés à V^a et V^b en fonction du coût associé à V^0.

$$\left.\begin{aligned} K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) &= K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) + c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}} - \Delta) - c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}}) \\ &+ c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n} + \Delta) - c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n}) + \sum_{i_1^{n-1}+1}^{i_1^n} [f_1^i(y_1^{0,i}-\Delta) - f_1^i(y_1^{0,i})] \\ &+ \sum_{i_1^{n-1}}^{i_1^n-1} [f_0^i(y_0^{0,i}+\Delta) - f_0^i(y_0^{0,i})] \end{aligned}\right\} (46)$$

$$\left.\begin{aligned} K(y_0^{-1},y_1^0,V^b) &= K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) + c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}} + \Delta) - c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}}) \\ &+ c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n} - \Delta) - c_1^{i_1^n}(v^{0,i_1^n}) + \sum_{i_1^{n-1}+1}^{i_1^n} [f_1^i(y_1^{0,i}+\Delta) - f_1^i(y_1^{0,i})] \\ &+ \sum_{i=i_1^{n-1}}^{i_1^n-1} [f_0^i(y_0^{0,i}-\Delta) - f_0^i(y_0^{0,i})] \end{aligned}\right\} (47)$$

La non décroissance et la concavité des fonctions coûts donnent :

$$\left.\begin{aligned} c_1^{i_1^{n-1}}(v^{0,i_1^{n-1}}+\Delta) - c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}}) &\leq c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}}) - c_1^{i_1^{n-1}}(v_1^{0,i_1^{n-1}}-\Delta) \\ c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n}+\Delta) - c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n}) &\leq c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n}) - c_1^{i_1^n}(v_1^{0,i_1^n}-\Delta) \\ f_1^i(y_1^{0,i}+\Delta) - f_1^i(y_1^{0,i}) &\leq f_1^i(y_1^{0,i}) - f_1^i(y_0^{0,i}-\Delta) \\ f_0^i(y_1^{0,i}+\Delta) - f_0^i(y_0^{0,i}) &\leq f_0^i(y_0^{0,i}) - f_0^i(y_0^{0,i}-\Delta) \end{aligned}\right\} (48)$$

Les deux dernières inégalités sont vraies pour $i = i_1^{n-1},\dots,i_1^n$

(46), (47) et (48) conduisent à :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) - K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) \leq - [K(y_0^{-1},y_1^0,V^b) - K(y_0^{-1},y_1^0,V^0)] \qquad (49)$$

Du fait que V^0 est optimal on a :

$$\left.\begin{aligned} K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) &\leq K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) \\ K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) &\leq K(y_0^{-1},y_1^0,V^b) \end{aligned}\right. \qquad (50)$$

(49) et (50) entraînent :

$$K(y_0^{-1},y_1^0,V^0) = K(y_0^{-1},y_1^0,V^a) = K(y_0^{-1},y_1^0,V^b)$$

Donc V^a et V^b sont optimaux.

c. Discussion.

Considérons (37) :

c1. Si $\Delta = y_1^{0,i_1^n}$ on pose $V^1 = V^a$ et $y_1^{1,i_1^n} = 0$

V^1 vérifie alors la propriété P_1.

c2. Si $\Delta = v_1^{0,i_1^n}$ on pose $V^1 = V^b$ et $v_1^{1,i_1^n} = 0$. Donc V^1 vérifie la propriété P_1.

c3. Si $\Delta = v_1^{0,i_1^{n-1}}$ on pose $V^1 = V^a$ et $v_1^{1,i_1^{n-1}} = 0$

La propriété P_1 n'est pas vérifiée mais V^1 à une composante strictement positive de moins que V^0.

On construit alors V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0, et ainsi de suite. On est assuré, compte tenu de (6), d'aboutir à un contrôle optimal ayant la propriété P_1.

$\square$

Le théorème que nous présentons maintenant concerne le niveau 0. Il montre qu'il existe un contrôle optimal vérifiant la propriété suivante : tous les réapprovisionnements qui interviennent au niveau 0, sauf peut-être le premier, interviennent à un instant où le stock est nul. Une conséquence de cette propriété est que, pour ce contrôle optimal, tous les réapprovisionnements non nuls conduisent le niveau du stock à être en mesure de satisfaire un nombre exact de demandes consécutives dont la première est la suivante. Autre conséquence : tous les réapprovisionnements non nuls faisant partie de ce contrôle, sauf peut-être le premier, sont égaux à une somme de demandes consécutives dont la première est la suivante.

Théorème 4

Nous supposons que (5) et (6) sont vérifiées, c'est à dire :

1. que l'ensemble des contrôles admissibles n'est pas vide
2. que le niveau initial de S_0 n'est pas suffisant pour compléter le stock au niveau bas afin de satisfaire la demande.

Alors il existe un contrôle optimal V vérifiant la propriété P_2 suivante :

$$y_0^{i_0^n} = 0 \text{ pour } n = 1,2,\dots, d_0.$$

Une conséquence de cette propriété est que :

1. $$v_0^{i_0^0} = \sum_{i=0}^{i_0^1} v_1^i - y_0^{-1}$$

2. pour $r = 1,2,\dots, d_0 - 1$:

$$v_0^{i_0^r} = \sum_{i_0^r+1}^{i_0^{r+1}} v_1^i$$

3. $$v_0^{i_0^{d_0}} = \sum_{i=i_0^{d_0}+1}^{N-1} v_1^i$$

Démonstration.

Soit $V^0 = (V_0^0, V_1^0)$ un contrôle optimal.

Considérons alors le problème mono-produit, à niveau unique et horizon N admettant :

* y_0^{-1} comme stock initial
* les composantes de V_1^0 comme demandes
* $c_0^i, i = 0,1,\dots,N-1$, comme fonctions de coût de lancement

* f_0^i, $i = 0,1,\ldots,N-1$, comme fonctions de coût de stockage

Nous savons que ce problème admet un contrôle $V_0 = \{v_0^i\}^{\,i=0,\ldots,N-1}$ tel que, pour $i = 1,2,\ldots,N-1$: $v_0^i > 0 \Longleftrightarrow y_0^i = 0$ si v_0^i n'est pas le premier réapprovisionnement strictement positif.

On trouvera la démonstration de cette propriété dans [2]

Donc

$$V = (V_0, V_1^0)$$

vérifie la propriété P_2 et ses conséquences.

□

Le théorème que nous présentons maintenant précise le théorème 3.

Théorème 5 :

Sous les hypothèses (5) et (6), il existe un contrôle optimal V vérifiant les propriétés P_1, P_2 et de plus P_3, définie comme suit :

$$\text{si } i_1^n > i_0^1 \text{ alors } y_1^{i_1^n} = 0 \tag{51}$$

Ce théorème indique que deux réapprovisionnements non nuls de S_1 seulement peuvent intervenir alors que le niveau du stock est encore en mesure de satisfaire la demande suivante. Il s'agit du premier réapprovisionnement non nul et de celui qui suit immédiatement (dans le temps) le premier réapprovisionnement non nul de S_0.

La figure 3 résume cette situation. Nous y représentons également les résultats du théorème 4.

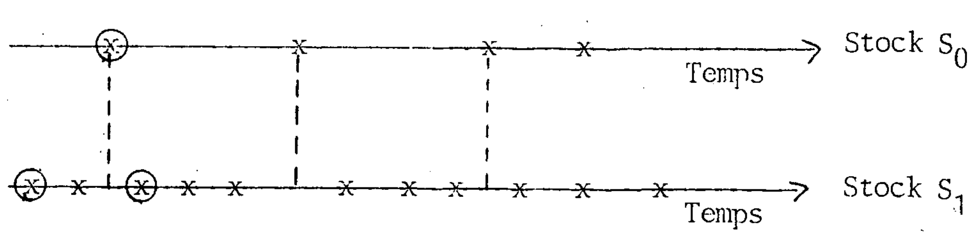

Figure 3

Aux niveaux des stocks S_0 et S_1 :

ⓧ indiquent les instants auxquels se décident des réapprovisionnements non nuls sans pour autant que le niveau du stock correspondant soit nécessairement nul

x indiquent les instants auxquels se décident des réapprovisionnements non nuls avec nécessairement un niveau du stock correspondant nul.

Cette figure est à comparer à la figure 2 pour ce qui concerne le stock S_1. Observons encore que si le premier réapprovisionnement non nul de S_0 intervient avant le premier réapprovisionnement non nul de S_1, alors seul le premier réapprovisionnement non nul de S_1 peut être décidé alors que le niveau du stock n'est pas nul.

<u>Démonstration</u>.

Soit V^0 un contrôle optimal vérifiant les propriétés P_1 et P_2, mais non P_3. C'est à dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $y_1^{i_1^{s(k)}} > 0$ (voir la définition de s(k) en début du paragraphe III)

Nous définissons :

$$\Delta = \text{Min } \{v_0^{0,i_0^{k-1}} , v_1^{0,i_1^{s(k)-1}} , v_1^{0,i_1^{s(k)}} , y_1^{0,i_1^{s(k)}}\} \tag{52}$$

Les positions des différents réapprovisionnements non nuls considérés sont données par la figure 4, construite comme la figure 3.

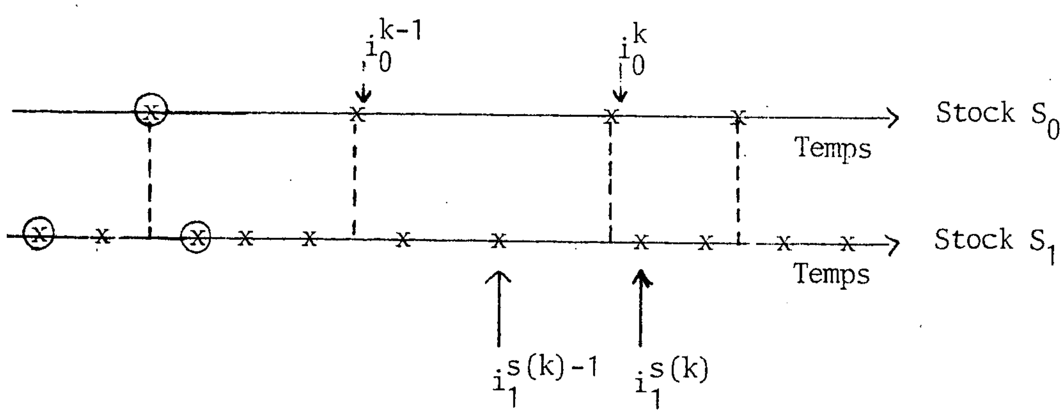

Figure 4.

A. Première partie.

Nous construisons V^a de la manière suivante :

$$V_1^a = \begin{cases} v_1^{a,i_1^{s(k)-1}} = v_1^{0,i_1^{s(k)-1}} - \Delta \\ v_1^{a,i_1^{s(k)}} = v_1^{0,i_1^{s(k)}} + \Delta \\ v_1^{a,i} = v_1^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{53}$$

$$V_0^a = \begin{cases} v_0^{a,i_0^{k-1}} = v_0^{0,i_0^{k-1}} - \Delta \\ v_0^{a,i_0^{k}} = v_0^{0,i_0^{k}} + \Delta \\ v_0^{a,i} = v_0^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{54}$$

Les états correspondant à V^a s'écrivent :

$$Y_1^a = \begin{cases} y_1^{a,i} = y_1^{0,i} - \Delta \quad \text{si } i_1^{s(k)-1} < i \leq i_1^{s(k)} \\ y_1^{a,i} = y_1^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{55}$$

$$Y_0^a = \begin{cases} y_0^{a,i} = y_0^{0,i} - \Delta \quad \text{si } i_0^{s(k)-1} \leq i < i_1^{s(k)} \\ y_0^{a,i} = y_0^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{56}$$

Nous construisons V^b comme suit :

$$V_1^b = \begin{cases} v_1^{b,i_1^{s(k)-1}} = v_1^{0,i_1^{s(k)-1}} + \Delta \\ v_1^{b,i_1^{s(k)}} = v_1^{0,i_1^{s(k)}} - \Delta \\ v_1^{b,i} = v_1^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{57}$$

$$V_0^b = \begin{cases} v_0^{b,i_0^{k-1}} = v_0^{0,i_0^{k-1}} + \Delta \\ v_0^{b,i_0^{k}} = v_0^{0,i_0^{k}} - \Delta \\ v_0^{b,i} = v_0^{0,i} \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{58}$$

Les états correspondants sont donnés par :

(59)

$$Y_1^b = \begin{cases} y_1^{b,i} = y_1^{0,i} + \Delta & \text{si } i_1^{s(k)-1} < i \leq i_1^{s(k)} \\ y_1^{b,i} = y_1^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{59}$$

$$Y_0^b = \begin{cases} y_0^{b,i} = y_0^{0,i} + \Delta & \text{si } i_0^{s(k)-1} \leq i < i_1^{s(k)} \\ y_0^{b,i} = y_0^{0,i} & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{60}$$

Les relations (53) à (60) montrent, compte tenu de (52), que V^a et V^b sont admissibles. On démontre alors, en exprimant les coûts associés à V^a et V^b en fonction de V^0, que V^a et V^b sont optimaux (la démonstration est analogue à celle du théorème 3 et nous ne la répétons pas).

La relation (52) nous conduit à considérer trois cas.

a) Si $\Delta = y_1^{0,i_1^{s(k)}}$ on pose $V^1 = V^a$ et on a $y_1^{1,i_1^{s(k)}} = 0$

V^1 comporte donc un indice k de moins que V^0 qui l'éloigne de la propriété P_3. On passe à la seconde parties de la démonstration.

b) Si $\Delta = v_1^{0,i_1^{s(k)}}$ on pose $V^1 = V^b$ et $v_1^{1,i_1^{s(k)}} = 0$

La conclusion est la même que dans le cas a. et nous passons à la seconde partie de la démonstration.

c) Si $\Delta = v_1^{0,i_1^{s(k)-1}}$ on pose $V^1 = V^a$ et $v_1^{1,i_1^{s(k)-1}} = 0$

On obtient un contrôle optimal qui présente une composante strictement positive de moins en S_1.

d) Si $\Delta = v_0^{0,i_0^{k-1}}$ on pose $V^1 = V^a$ et $v_0^{1,i_0^{k-1}} = 0$

On obtient un contrôle optimal qui présente une composante strictement positive de moins en S_0.

Nous passons à la seconde partie de la démonstration.

B Seconde partie.

Si, au cours de la première partie de la démonstration, on a abouti à l'un des cas a. ou b., alors V^1 est plus proche de la propriété P_3 que V^0. Si V^1 vérifie la propriété P_3, la démonstration est terminée. Sinon, on construit V^2 à partir de V^1 comme V^1 a été construit à partir de V^0.

Si, au cours de la première partie de la démonstration, on a abouti à l'un des cas c. ou d., alors V^1 comporte une composante strictement positive de moins que V^0. On construit alors V^2 à partir de V^1 comme V^1 a été construit à partir de V^0.

On est donc conduit à construire une suite $V^0, V^1, V^2, \dots, V^k$, de contrôles optimaux, et un terme V^k de cette suite $(k > 0)$:

- soit comporte un indice de moins que V^{k-1} qui l'éloigne de la propriété P_3
- soit comporte une composante strictement positive de moins que V^{k-1}.

Ces deux ensembles d'indices étant finis, nous sommes donc assurés :

- soit d'aboutir à un contrôle optimal dont toutes les composantes sont nulles et qui vérifie P_1, P_2 et P_3 par défaut
- soit d'aboutir à un contrôle optimal qui vérifie P_3, mais aussi P_1 et P_2 car V^0 vérifiant ces conditions et aucune des transformations mises en oeuvre pour construire la suite $V^0, V^1, V^2, \dots, V^k, \dots$ ne remet ces propriétés en cause.

Le théorème que nous présentons maintenant simplifie encore les propriétés que nous venons de dégager.

Théorème 6

Sous les hypothèses (5) et (6) et si $i_1^0 \leq i_0^0$

il existe un contrôle optimal V vérifiant les propriétés P_1, P_2 et P_3 et de plus la propriété P_4, à savoir :

$$\text{Si } y_{1}^{i_1^{s(0)}} > 0 \text{ alors } y_{0}^{i_0^0} = 0 \tag{61}$$

En d'autres termes, il existe un contrôle optimal tel que, si le premier réapprovisionnement non nul de S_1 ne se décide pas <u>après</u> le premier réapprovisionnement non nul de S_0, alors si le premier réapprovisionnement non nul de S_1 qui suit le premier réapprovisionnement non nul de S_0 est décidé alors que le niveau du stock S_1 est strictement positif, le premier réapprovisionnement non nul de S_0 est décidé alors que le niveau de S_0 est nul.

La figure 5 illustre cette propriété. Les notations sont celles des figures précédentes.

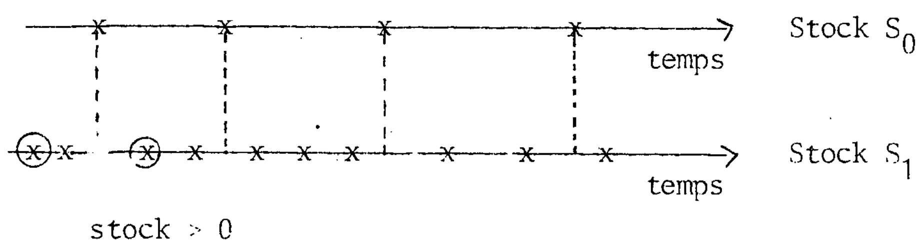

Figure 5

<u>Démonstration</u> :

Soit V^0 un contrôle optimal vérifiant les propriétés P_1, P_2, P_3 et ne vérifiant pas P_4, c'est à dire $y_1^{0,i_1^{s(0)}} > 0$ et $y_0^{0,i_0^0} > 0$

$$\text{Posons : } \Delta = \text{Min} \left\{ v_1^{0,i_1^{s(0)}} , \; v_1^{0,i_1^{s(0)-1}} , \; y_0^{i_0^0} \right\} \tag{62}$$

On construit V^a et V^b :

$$V_1^a = \begin{cases} v_1^{a,i_1^{s(0)-1}} = v_1^{0,i_1^{s(0)-1}} - \Delta \\ v_1^{a,i_1^{s(0)}} = v_1^{0,i_1^{s(0)}} + \Delta \\ v_1^{a,i} = v_1^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{63}$$

$$V_0^a = V_0^0 \tag{64}$$

$$V_1^b = \begin{cases} v_1^{b,i_1^{s(0)-1}} = v_1^{0,i_1^{s(0)-1}} + \Delta \\ v_1^{b,i_1^{s(0)}} = v_1^{0,i_1^{s(0)}} - \Delta \\ v_1^{b,i} = v_1^{0,i} \quad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{65}$$

$$V_0^b = V_0^0 \tag{66}$$

On montre, en utilisant la même démarche que dans la démonstration du théorème 3, que V^a et V^b sont admissibles, puis optimaux.

Partant de la relation (62), nous sommes conduits à envisager plusieurs cas.

a. Si $\Delta = y_0^{0,i_0^0}$ on pose $V^1 = V^b$

   et $y_0^{1,i_0^0} = 0$

   Alors V^1 vérifie P_4 tout en continuant à vérifier P_1, P_2 et P_3. La démonstration est terminée.

b. Si $\Delta = v_1^{0,i_1^{s(0)}}$, on pose $V^1 = V^b$

   et $v_1^{1,i_1^{s(0)}} = 0$

Nous aboutissons à la même conclusion que dans le cas a.

c. Si $\Delta = v_1^{0,i_1^{s(0)-1}}$ on pose $V^1 = V^a$

   et $v_1^{1,i_1^{s(0)-1}} = 0$

Dans ce cas on a une décision de réapprovisionnement non nul de moins pour V^1, en $i_1^{s(0)-1}$.

- Si $s(0) > 1$ on construit V^2 à partir de V^1 comme V^1 l'a été à partir de V^0 et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'itérations, on est assuré d'aboutir aux conclusions de théroème

- Sinon le problème ne se pose plus.

□

Le théroème 6 joue un rôle particulier. Considérons la figure 6.

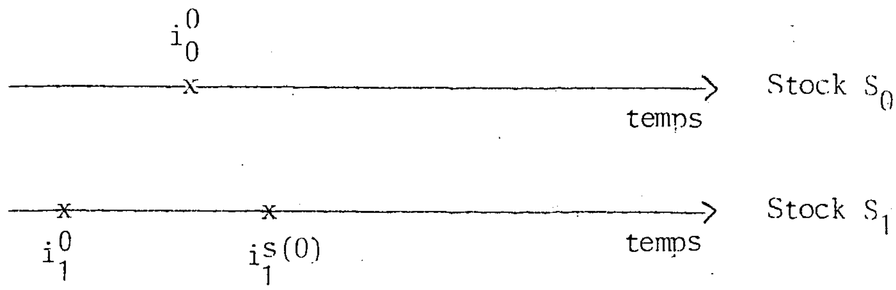

Figure 6

Cette figure est tracée pour le réapprovisionnement optimal vérifiant les propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4 et noté V.

En nous référant au thérorème 6, nous sommes conduits à envisager deux cas :

a. ou bien $y_1^{i_1^{s(0)}} > 0$ et $y_0^{i_0^0} = 0$

Alors :

$$\sum_{i=i_1^0}^{i_1^{s(0)-1}} v_1^i = y_0^{-1}$$

et :

a_1. v_1^i, $i = i_1^0,\ldots,i_1^{s(0)-2}$, sont des réapprovisionnements qui conduisent le niveau du stock à satisfaire exactement un certain nombre de demandes ultérieures consécutives dont la suivante est la première. Cet énoncé disparait si $s(0) = 1$

a_2. $v_1^{i_1^{s(0)-1}} = y_0^{-1} - \sum_{i=i_1^0}^{i_1^{s(0)-2}} v_1^i$. La somme est nulle si $s(0) = 1$

b. ou bien $y_1^{i_1^{s(0)}} = 0$ et $y_0^{i_0^0} \geq 0$

Alors v_1^i, $i = i_1^0,\ldots, i_1^{s(0)-1}$, vérifient la propriété énoncée dans a_1.

Dans tous les cas :

v_1^i, $i = i_1^{s(0)}, i_1^{s(0)+1},\ldots, i_1^{d_1}$

vérifient les propriétés énoncées dans a_1.

Dans tous ce qui précède, nous avons supposé que le niveau du stock S_0 à l'instant initial n'est pas suffisant pour compléter S_1 de façon à satisfaire les demandes (condition (6)). Le théorème qui suit s'intéresse au cas où le niveau total des stocks à l'instant initial, suffit à satisfaire à l'ensemble des demandes.

Théorème VII.

Sous les hypothèses (5) et (23), il existe un contrôle optimal tel que

$$y_1^{i_1^n} = 0 \quad \text{pour } n = 1,2,\dots, d_1$$

En d'autres termes, sous les hypothèses (5) et (23), il existe un contrôle optimal tel que les réapprovisionnements strictement positifs, à l'exception peut-être du premier, n'ont lieu que si le stock est nul.

Démonstration.

Le théorème 2 indique que, sous les conditions (5) et (23), il existe un contrôle optimal $V = (V_0,V_1)$ tel que toutes les composantes de V_0 sont nulles.

Il suffit alors de reprendre à l'identique la démonstration du théorème 3 en observant que la condition $n \in \{1,2,\dots, d_1\}$ et $n \neq s(k)$, $k = 0,\dots, d_0$ se réduit à $n \in \{1,2,\dots, d_1\}$. □

Ce théorème nous permet de conclure que, sous les conditions (5) et (23), les réapprovisionnements strictement positifs conduisent le niveau au stock S_1 à satisfaire exactement un certain nombre de demandes consécutives, la première de celle-ci étant celle qui suit la décision de réapprovisionnement, à l'exception peut-être du dernier réapprovisionnement lorsqu' il est égal au stock restant en S_0.

L'ensemble des résultats qui précèdent permet d'obtenir, dans tous les cas de figure, un ensemble fini de réapprovisionnements possibles et de niveaux de stock que l'on peut explorer à l'optimum.

IV. EQUATIONS DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE DE TYPE RETROGRADE.

Nous notons

$U^n(y_0^n, y_1^n)$ le coût optimal pour la restriction du problème à $[n,N]$ lorsque y_0^n est le stock pour S_0 sur $[n,n+1[$ et y_1^n est le stock pour S_1 sur $[n,n+1[$.

Les équations de la programmation dynamique s'écrivent alors :

$U^N \equiv 0$

Pour $n = N-1, N-2, \ldots, 0$

$$U^n(y_0^n, y_1^n) = f_0^n(y_0^n) + f_1^n(y_1^n) + \inf_{v_0^n, v_1^n} \{c_0^n(v_0^n) + c_1^n(v_1^n) + U^{n+1}(y_0^n + v_0^n - v_1^{n+1}, y_1^n + v_1^n - d_1^{n+1})\}$$

où :

y_0^n, y_1^n, v_0^n, v_1^n sont déduits des conditions a et b page 30 et du théorème 7.

CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent que :

- soit le stock initial S_0 est transféré entièrement au niveau bas, en une ou plusieurs fois.
- soit les transferts de S_0 vers S_1 se font de manière à satisfaire un nombre exact de demandes.

On observe également que le calcul des décisions optimales de réapprovisionnement de S_0 à un instant n-1 nécessite le calcul préalable des décisions optimales de réapprovisionnement de S_1 à l'instant n.

Les deux niveaux de stockage ne sont pas séparables. D'où une complexité des calculs comparable à celle du problème à deux produits et niveau unique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. BENSOUSSAN, M. CROUHY, J.M. PROTH, 'Mathematical Theory of Production Planning", Advanced Series in Management, North Holland Publishing, 83.

[2] A. BENSOUSSAN, J.M. PROTH, "Gestion de stocks avec coûts concaves", RAIRO Automatique/Systems Analysis and Control, Vol.15, n°3, PP 201, 1981.

[3] A. BENSOUSSAN and J.M. PROTH, "Inventory Planning in a Deterministic Environment : Concave Cost set up in Discrete and Continous Time", Vienna, December, 81.

[4] L.A. JOHNSON and MONTGOMERY, "Operations Research in Production Planning", Scheduling and Inventory Control, Wiley, New-York, 1974.

[5] W.I. ZANGWILL , A backloging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system. A network approach, Management Sci. 15 (1969) 506-527.

[6] A. EDWARD SILVER, "Coordinated Replenishements of items under Time-Varying Demand : Dynamic Programmation Formulation", Naval Research Logistics Quartely, vol.26, n°, March, 79.

[7] H.M. WAGNER and T.M. WHITIN, Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, Management Science, 5, 89-96, (1958).

[8] W.I. ZANGWILL, A backloging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System. A Network Approach, Management Sciences 15, 506-527 (1969).

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique