Comportement asymptotique pour une inequation parabolique .Applications a diverses equations de la mecanique des fluides visqueux incompressibles

J.M. Ghidaglia

IRIA
CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 288

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UNE INÉQUATION PARABOLIQUE

APPLICATIONS A DIVERSES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES

Jean-Michel GHIDAGLIA

Avril 1984

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UNE INEQUATION PARABOLIQUE

APPLICATIONS A DIVERSES EQUATIONS DE LA MECANIQUE

DES FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES

Jean-Michel GHIDAGLIA

Résumé :

Dans ce travail nous caractérisons le comportement, lorsque le temps croit indéfiniment, des solutions d'une inéquation différentielle parabolique abstraite. Nous en donnons plusieurs applications et étudions en détail le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes (sur un ouvert borné ou une variété) et des équations de la thermohydraulique lorsque les forces extérieures sont nulles (ou exponentiellement décroissantes).

Abstract :

In this work we characterize the behavior, as time goes to infinity of solutions of an abstract differential inequality of parabolic type. We give several applications and go into details for the behavior of solutions of Navier-Stokes (in a bounded open set or on a Manifold) and Thermo-hydraulic Equations, when the exterior forces vanishe (or decay exponentialy).

PLAN

0 - INTRODUCTION

Ce travail est divisé en deux parties. La première (paragraphes I et II est consacrée à l'étude du comportement, lorsque le temps (t) croit indéfiniment, d'une fonction $\phi(t)$ à valeurs dans un espace de Hilbert Y qui vérifie l'inéquation différentielle ($\nu > 0$) :

$$(0.1) \qquad \left|\frac{d}{dt}\phi(t) + \nu\mathcal{A}\phi(t)\right|_Y \leq n(t)\|\phi(t)\|_{D(\mathcal{A}^{1/2})} \quad \text{p.p. } t \geq 0$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint positif et non borné dans Y de domaine $D(\mathcal{A})$.

Nous montrons que lorsque $n \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ (1), il existe un couple valeur propre-vecteur propre $(\Lambda^\alpha,\phi^\alpha)$ pour $\mathcal{A}$ tel que

$$(0.2) \qquad \lim_{t\to+\infty} \|e^{\nu\Lambda^\alpha t}\phi(t) - \phi^\alpha\|_{D(\mathcal{A}^{1/2})} = 0.$$

Nous précisons ce comportement dans le cas d'une équation non linéaire du type

$$(0.3) \qquad \frac{d\phi}{dt} + \nu\mathcal{A}\phi + B(\phi,\phi)^{(2)} = 0$$

et nous donnons dans ce cas le début du développement asymptotique de $\phi(t)$. Ces résultats généralisent certains travaux de C. FOIAS et J.C. SAUT [1,2,3] et C. GUILLOPE [1,2,3].

Dans la seconde partie (paragraphes III, IV) nous utilisons les résultats qui précèdent pour étudier le comportement de la solution des équations de Navier-Stokes associée à une force exponentiellement décroissante ($\delta > 0$) :

(1) Cette condition est optimale cf. Remarque 1.1.

(2) B ne vérifie pas nécessairement $(B(\phi,\phi),\phi)_Y = 0$.

$$(0.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \,, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \,, \\ u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \,, \; t \geq 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in \Omega \,; \end{cases}$$

où $f = f(x,t) = f(x)\, e^{-\nu\delta\, t}$ (cf. Théorème 3.1.).

Ce dernier résultat est, à notre connaissance, le premier qui précise le comportement de la solution de (0.3) lorsque rot $f(x,t) \not\equiv 0$.

Nous étudions au paragraphe IV les équations de la thermohydraulique (cf. (4.1)-(4.5)). Bien que ces équations peuvent se mettre sous la forme abstraite (0.3) (cf. J.M. GHIDAGLIA [1]) l'opérateur $\mathscr{A}$ n'est pas audoadjoint.
Nous traitons néanmoins ce cas et donnons le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$ (cf. Théorème 4.1). Ce dernier résultat montre que la température a un comportement exactement exponentiel (décroissant) et qu'il en est de même pour la vitesse sauf dans un cas fortement résonnant.

Nous avons présenté quelques applications des résultats abstraits aux équations de Navier-Stokes toutefois il est possible d'obtenir des résultats similaires pour les équations de la magnétohydrodynamique qui peuvent s'écrire sous la forme (0.3) (cf. G. DUVAUT et J.L. LIONS [2] , M. SERMANGE et R. TEMAM [1]).

Dans un travail ultérieur, nous étudierons le cas où l'opérateur $\mathscr{A}$ dépend du temps.

L'auteur tient à remercier Monsieur R. TEMAM pour ses nombreux conseils et Monsieur J.C. SAUT pour toutes les discussions qui ont permis l'élaboration de ce travail.

I - PRINCIPAUX RESULTATS (FORME ABSTRAITE)

I.1 - Cadre abstrait

Soient Y un espace de Hilbert réel séparable et $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire autoadjoint non borné de domaine $D(\mathcal{A})$. Nous supposons que, lorsque $D(\mathcal{A})$ est muni de la norme du graphe, $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur Y, que son inverse $\mathcal{A}^{-1}$ est compact dans Y et que

(1.1) $\quad \forall\phi \in D(\mathcal{A}),\ \phi \neq 0 \quad (\mathcal{A}\phi,\phi) > 0$;

où (,) désigne le produit scalaire sur Y et $|.|$ la norme associée.

Sous les hypothèses qui précèdent, $\mathcal{A}^{-1}$ est diagonalisable sur Y : il existe une suite d'éléments de Y, $\{\xi_j\}_{j\geq 1}$, et une suite croissante de réels $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ qui vérifient :

(1.2) $\quad Sp\ \{\xi_j\}$ est dense dans Y,

(1.3) $\quad (\xi_i,\xi_j) = \delta_{ij}$,

(1.4) $\quad \xi_j = \lambda_j\ \mathcal{A}^{-1}\ \xi_j$.

Et, dans le cas que nous envisageons ici, lorsque $\dim Y = +\infty$,

(1.5) $\quad \lim_{j\to+\infty} \lambda_j = +\infty$.

Nous notons $\{\Lambda_j\}_{j\geq 1}$ (1) la famille des valeurs propres de $\mathcal{A}$ comptées sans multiplicité

(1.6) $\quad \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots . < \Lambda_j < \ldots .$.

(1) Nous notons $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Lambda_j\}_{j\geq 1}$.

Remarquons que (1.1) prouve que $\Lambda_1 = \lambda_1 > 0$.

Nous définissons alors $\mathcal{A}^s$, $s \in \mathbb{R}$ de la manière suivante :

(1.7) $$s \geq 0,\ D(\mathcal{A}^s) = \{\phi \in Y,\ \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{2s} (\phi, \xi_j)^2 < +\infty\},$$

qui est muni de la norme

(1.8) $$\|\phi\|_s = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{2s} (\phi, \xi_j)^2\right)^{1/2}.$$

Puis pour $s \leq 0$,

(1.9) $$\mathcal{A}^s = (\mathcal{A}^{-s})^{-1}.$$

Nous notons alors

(1.10) $$X_s = D(\mathcal{A}^s),$$

et en particulier

(1.11) $$X_o = Y, \quad X_1 \overset{\text{def.}}{\equiv} X.$$

Lorsque nous identifions $Y = X_o$ à son dual nous pouvons identifier X_{-s} à $(X_s)'$.

I.2 - Unicité rétrograde

T et ν désignent des réels strictement positifs.

Théorème 1.1. : Si ϕ vérifie

(1.18) $\phi \in C([0,T]\ ;\ X) \cap L^2(0,T;D(\mathcal{A}))$,

(1.19) $\begin{cases} \dfrac{d\phi(t)}{dt} + \nu\mathcal{A}\phi(t) \in Y & \text{pour presque tout } t \in [0,T], \\ \left|\dfrac{d\phi}{dt} + \nu\mathcal{A}\phi\right| \leq n\ \|\phi\| & \end{cases}$

où

(1.20) $n \in L^2(0,T)$.

Alors

(1.21) $\phi(T) = 0 \Rightarrow \phi \equiv 0$.

Preuve : Nous adoptons la notation suivante :

(1.22) $L(\phi) = \dfrac{d\phi}{dt} + \nu\mathcal{A}\phi$.

Remarquons que si $\phi \in C([0,T];\ Y) \cap L^2([0,T];\ X)$ vérifie (1.19)-(1.20) alors $\forall\delta > 0$ $\phi \in C([\delta,T];X) \cap L^2([\delta,T];\ D(\mathcal{A}))$ (1) et (1.21) est vérifié.

Nous allons montrer que s'il existe $t_o \in [0,T[$ tel que $|\phi(t_o)| > 0$ alors $|\phi(T)| > 0$, ce qui prouvera (1.21).
D'après (1.18) $t \to |\phi(t)|$ est une application continue sur $[0,T]$, s'il existe $t_o \in [0,T[$ tel que $|\phi(t_o)| > 0$ nous avons l'alternative suivante :

(i) $\forall t \in [t_o,T]$ $|\phi(t)| > 0$

ou

(ii) $\exists\ t_1 \in]t_o, T[$, $\forall t \in [t_o,t_1[$ $|\phi(t)| > 0$, $|\phi(t_1)| = 0$.

---

(1) Se reporter à l'annexe pour cette notation.

Plaçons nous dans le cas (ii). D'après (1.19) et (1.20), $L(\phi) \in L^2(0,T;Y)$ et donc $\phi' \in L^2(0,T;Y)$. Si nous notons

$$(1.23) \qquad \Lambda(t) = \frac{\|\phi(t)\|^2}{|\phi(t)|^2}$$

nous avons $\Lambda(t) = \dfrac{(\mathscr{A}\phi(t),\phi(t))}{|\phi(t)|^2}$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 2\,\frac{(\mathscr{A}\phi - \Lambda\phi\ ,\phi')}{|\phi|^2} .$$

D'autre part, $(\mathscr{A}\phi - \Lambda\phi,\phi) = 0$, il s'en suit que

$$(1.24) \quad \frac{1}{2}\frac{d\Lambda}{dt} + \nu\,\frac{|\mathscr{A}\phi - \Lambda\phi|^2}{|\phi|^2} = \frac{(L(\phi),\mathscr{A}\phi - \Lambda\phi)}{|\phi|^2} .$$

Alors de (1.19) après application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(1.25) \qquad \frac{d\Lambda}{dt} + \nu\,\frac{|\mathscr{A}\phi - \Lambda\phi|^2}{|\phi|^2} \leq n^2\,\frac{\Lambda}{\nu} .$$

Nous en déduisons pour $t \in [t_o, t_1[$

$$(1.26) \qquad \Lambda(t) \leq \Lambda(t_o)\exp\left(\frac{1}{\nu}\int_0^T n^2(s)ds\right) \equiv C_o .$$

D'autre part

$$\frac{1}{2|\phi|^2}\,\frac{d|\phi|^2}{dt} = \frac{(\phi,\phi')}{|\phi|^2} = \frac{(\phi,\ L(\phi)-\nu\mathscr{A}\phi)}{|\phi|^2} = \frac{(\phi,L(\phi))}{|\phi|^2} - \nu\Lambda(t),$$

et alors puisque $\Lambda(t) \geq \Lambda_1$,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Log}|\phi| \geq -\left(\nu + \frac{n}{\Lambda_1^{1/2}}\right) C_o .$$

Par intégration entre t_o et $t \in [t_o,t_1[$,

$$(1.27) \qquad |\phi(t)| \geq |\phi(t_o)|\exp - C_o\int_{t_0}^{t}\left(\nu + \frac{n(s)}{\Lambda_1^{1/2}}\right) ds .$$

Et d'après (1.20) $C_o \int_{t_o}^{t} (\nu + \frac{n}{\Lambda_1^{1/2}})ds \leq C_o \int_{t_o}^{T} (\nu + \frac{n(t)}{\Lambda_1^{1/2}})dt < +\infty$

ce qui prouve que (ii) n'est pas réalisé. □

Nous avons prouvé que si ϕ , vérifiant les hypothèses du Théorème 1.1, s'annulait à un instant, ϕ était nul auparavant. Nous allons montrer que si ϕ s'annule à un instant, ϕ est identiquement nul.

<u>Proposition 1.1.</u> : Sous les hypothèses du Théorème 1.1 si $\phi(0) = 0$ alors ϕ est identiquement nulle.

<u>Preuve</u> : Nous avons

$$\frac{d(\phi,\phi)}{dt} = 2(\phi,\phi') \qquad \text{et alors}$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{d|\phi|^2}{dt} + \nu\ \|\phi\|^2 = (L(\phi),\phi) \leq n|\phi|\ \|\phi\|$$

puis

$$\frac{d|\phi|^2}{dt} \leq \frac{n^2}{2\nu}\ |\phi|^2 .$$

Il en résulte que

$$|\phi(t)|^2 \leq |\phi(0)|^2 \ \exp \frac{1}{2\nu}\int_0^T n^2(s)ds . \tag{1.28}$$

□

I.3 - Comportement asymptotique lorsque $t \to +\infty$.

Nous nous intéressons ici au comportement lorsque $t \to +\infty$ d'une fonction ϕ de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ dans X qui vérifie

(1.29) $\Phi \in C([0,T]\,;X) \cap L^2(0,T;D(\mathscr{A})), \forall T > 0,$

(1.30) $\begin{cases} \dfrac{d\phi(t)}{dt} + \nu \mathscr{A}\phi(t) \in Y, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}_+, \\ \left|\dfrac{d}{dt} + \nu \mathscr{A}\phi\right| \leq n\|\phi\|, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$

où

(1.31) $n \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Conformément au Théorème 1.1, une telle fonction ϕ est identiquement nulle ou ne s'annule pas. Nous nous placerons dans ce deuxième cas.

Etant donné $\tilde{\Lambda}$, une valeur propre de $\mathscr{A}$, nous désignons par $\Pi_{\tilde{\Lambda}}$ la projection orthogonale sur l'espace propre associé à $\tilde{\Lambda}$ et par $P_{\tilde{\Lambda}}$ l'opérateur $P_{\tilde{\Lambda}} = \sum_{\lambda \leq \tilde{\Lambda}} \Pi_\lambda$.

Théorème 1.2. : Si ϕ vérifie (1.29)-(1.30) et si n vérifie (1.31) alors lorsque t tend vers $+\infty$,

(1.32) $\Lambda(t)^{(1)} \to \Lambda^\infty$,

(1.33) où Λ^∞ est une valeur propre de $\mathscr{A}$.

De plus

(1.34) $$\lim_{t \to +\infty} \left\| (I - \Pi_{\Lambda^\infty}) \frac{\phi}{|\phi|} \right\| = 0$$

et

(1.35) $$\int_0^{+\infty} |\Lambda(t) - \Lambda^\infty|\, dt < +\infty .$$

(1) Cf. (1.23).

Sous une hypothèse renforcée nous avons le

Théorème 1.3. : *Si n vérifie* (1.31) *et*

(1.36) $$\int_0^{+\infty} n(s)ds < +\infty ,$$

alors il existe un vecteur $\phi^\infty \in D(\mathcal{A})$ *tel que*

(1.37) $$e^{\nu\Lambda^\infty t}\phi(t) \to \phi^\infty \text{ dans } X,$$

(1.38) $$\mathcal{A}\phi^\infty = \Lambda^\infty\phi^\infty \neq 0.$$

Remarque 1.1. : L'hypothèse (1.31) ne suffit pas pour montrer (1.37) comme le prouve l'exemple suivant :

$X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = id_{\mathbb{R}}$, $\phi(t) = e^{-t+4t^{1/4}}$ alors $\Lambda = \Lambda^\infty = 1$, $n(t) = \frac{1}{t^{3/4}}$

et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t\phi(t) = +\infty$.

Démonstration du Théorème 1.2. :

Nous déduisons de (1.25) que

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leq \frac{n^2}{\nu}\Lambda$$

et par intégration entre t_1 et t_o, $t_1 \geq t_o$:

(1.39) $$\Lambda_1 \leq \Lambda(t_1) \leq \Lambda(t_o) \exp \frac{1}{\nu}\int_{t_o}^{\infty} n^2(s)ds ,$$

d'où

$$\Lambda_1 \leq \Lambda(t_1) \leq \Lambda(t_o) \exp \frac{1}{\nu}\int_{t_o}^{\infty} n^2(s)\, ds.$$

En prenant la limite supérieure lorsque $t_1 \to +\infty$, il vient

$$\Lambda_1 \leq \limsup_{t_1 \to +\infty} \Lambda(t_1) \leq \Lambda(t_o) \exp \frac{1}{\nu}\int_{t_o}^{\infty} n^2(s)ds$$

puis la lim inf lorsque $t_o \to +\infty$

(1.40) $\quad \Lambda_1 \leq \limsup_{t_1 \to +\infty} \Lambda(t_1) \leq \liminf_{t_0 \to +\infty} \Lambda(t_0)$.

Il s'en suit que $\Lambda(t)$ converge vers une limite finie Λ^∞ et d'après (1.39) :

(1.41) $$\Lambda(t) \geq \Lambda^\infty \exp - \frac{1}{\nu} \int_t^{+\infty} n^2(s)\, ds.$$

Nous notons $\psi = \dfrac{\phi}{|\phi|}$ et par retour à (1.25),

$$\Lambda(t_1)-\Lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} |(\mathcal{A}-\Lambda)\psi|^2 ds \leq \left(\sup_{t \geq t_0} \Lambda(t)\right) \int_{t_0}^{t_1} n^2(s) ds.$$

Compte tenu de (1.31) nous déduisons de cette dernière inégalité que $(\mathcal{A}-\Lambda)\psi \in L^2(\mathbb{R}_+,Y)$. Il existe une suite (t_j) qui tend vers $+\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$ telle que $|(\mathcal{A}-\Lambda)\psi(t_j)| \to 0$ et alors $|(\mathcal{A}-\Lambda^\infty)\psi(t_j)| \to 0$ donc la suite $|(\mathcal{A}\psi(t_j)|$ est bornée. Par compacité de $\mathcal{A}^{-1}$ nous sommes assurés de l'existence d'une sous-suite de (t_j) toujours notée (t_j) telle que $\psi(t_j) \to \psi^\infty$ pour la topologie forte sur X. Il en résulte que $(\mathcal{A}-\Lambda^\infty)\, \psi(t_j)$ converge vers $\mathcal{A}\psi^\infty - \Lambda^\infty \psi^\infty$ dans X' et alors $\mathcal{A}\psi^\infty = \Lambda^\infty \psi^\infty, |\psi^\infty| = 1$: Λ^∞ est donc valeur propre de $\mathcal{A}$.

Nous allons établir une équation d'évolution pour ψ .

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{|\phi|}\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2|\phi|^3}\frac{d|\phi|^2}{dt}\phi \quad , \quad \frac{d\phi}{dt} = L(\phi) - \nu\, \mathcal{A}\phi \qquad \text{et}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{|\phi|^2}\frac{d|\phi|^2}{dt} = \frac{(\phi,\phi')}{|\phi|^2} = -\nu\Lambda + \frac{(\phi,L(\phi))}{|\phi|^2}\psi .$$

Alors

(1.42) $$\frac{d\psi}{dt} + \nu(\mathcal{A}-\Lambda)\psi = \frac{L(\phi)}{|\phi|} - \frac{(L(\phi),\phi)}{|\phi|^2}\psi \quad .$$

Nous allons montrer que (1.34) et (1.35) résultent de (1.42).

Lemme 1.1. : Etant donné une fonction ψ à valeurs dans X telle que

(1.43) $\quad \psi \in C([0, +\infty[; X) \cap L^2(0, +\infty ; D(\mathcal{A})),$

(1.44) $|\psi(t)| = 1, \quad \forall t \geq 0, \quad \frac{d\psi}{dt} + \nu \mathcal{A}\psi \in Y$ pour presque tout $t \geq 0$,

(1.45) $\left|\frac{d\psi}{dt} + \nu(\mathcal{A} - \Lambda)\psi\right| \leq \rho$.

où

(1.46) $\Lambda(t) \to \Lambda^{\infty}$ valeur propre de $\mathcal{A}$,

(1.47) $\rho \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Alors

(1.48) $\lim\limits_{t \to +\infty} \|(I-\Pi_{\Lambda^\infty})\psi\| = 0,$

(1.49) $\int_0^{\infty} \|(I-\Pi_{\Lambda^\infty})\psi\|^2(s)ds < +\infty.$

Nous reportons la preuve de ce lemme après la démonstration du Théorème 1.3. Montrons que le Lemme 1.1 permet de prouver (1.34) et (1.35) :

Si nous notons $\rho = \left|\frac{L(\phi)}{|\phi|} - \frac{(L(\phi),\phi)\psi}{|\phi|^2}\right|$, de (1.30) et (1.31) nous déduisons que (1.47) est vérifié et

(1.50) $\int_0^{+\infty} \rho(s)^2 ds \leq (\sup\limits_{t\geq 0} \Lambda(t)) \int_0^{+\infty} n^2(s)ds.$

Ainsi d'après le Lemme 1.1 (1.34) est vérifié.
Remarquons que :

(1.51) $|\Lambda - \Lambda^{\infty}| \leq (1 + \frac{\Lambda^{\infty}}{\Lambda_1}) \|(I - \Pi_{\Lambda^\infty})\psi\|^2$

alors de (1.49) nous déduisons (1.35). □

<u>Démonstration du Théorème 1.3.</u> :

Nous allons établir une proposition qui précise la convergence de ϕ vers 0.

<u>Proposition 1.2.</u> : Il existe une constante positive C telle que

(1.52) $\quad |\phi(t)| \leq C\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t} \quad \forall t \geq 0,$

(1.53) $\quad \|\phi(t)\| \leq C\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t} \quad \forall t \geq 0.$

<u>Preuve</u> : Puisque $\Lambda(t)$ est borné, il suffit de montrer (1.52).

Nous avons l'égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + \nu\|\phi\|^2 = (L(\phi),\phi) \leq n\, \Lambda^{1/2}\, |\phi|^2 ,$$

de $\|\phi\|^2 \geq \Lambda|\phi|^2$ et de cette dernière inégalité, il vient

$$\frac{d}{dt}\, \mathrm{Log}(|\phi|^2\, e^{2\nu\Lambda^{\alpha} t}) \leq 2n\, \Lambda^{1/2} + 2\nu(\Lambda-\Lambda^{\alpha}) .$$

De (1.32), (1.35) et (1.36) nous déduisons (1.52).
Ceci achève la preuve de la Proposition 1.2. □

Revenons à la preuve du Théorème 1.3.
Nous avons après projection de (1.22) à l'aide de Π_{Λ^α} :

$$\frac{d}{dt}(e^{\nu\Lambda^{\alpha} t}\, \Pi_{\Lambda^\alpha}\phi) + e^{\nu\Lambda^{\alpha} t}\, \Pi_{\Lambda^\alpha} L(\phi) = 0,$$

et par intégration : $(\Pi(t) \equiv \Pi_{\Lambda^\alpha}\, \phi)$

(1.54) $$e^{\nu\Lambda^{\alpha} t}\, \Pi(t) - e^{\nu\Lambda^{\alpha} s}\, \Pi(s) = -\int_s^t e^{\nu\Lambda^{\alpha}\sigma}\, \Pi_{\Lambda^\alpha} L(\phi)(\sigma)d\sigma .$$

Or $|L(\phi)| \leq n\|\phi\| \leq C\, n\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t}$ d'après (1.53) et alors

(1.55) $$\left|\int_s^t e^{\nu\Lambda^{\alpha}\sigma}\, \Pi_{\Lambda^\alpha} L(\phi)(\sigma)d\sigma\right| \leq C\int_s^t n(\sigma)d\sigma \leq C\int_s^{+\infty} n(\sigma)d\sigma .$$

Par conséquent, compte tenu de (1.36) l'intégrale au second membre de (1.54) est convergente et $e^{\nu\Lambda^{\alpha} t}\Pi(t)$ converge dans Y.

Si $\lim_{t \to +\infty} e^{\nu\Lambda^\alpha t}\Pi(t) = \phi^\alpha = 0$, alors de (1.54) nous déduisons

$$e^{\nu\Lambda^\alpha t}\Pi(t) = \int_t^\infty e^{\nu\Lambda^\alpha \sigma}\ \Pi_{\Lambda^\alpha}L(\phi)(\tau)d\sigma \ ,$$

et puisque $|e^{\nu\Lambda^\alpha \sigma}\Pi_{\Lambda^\alpha}\ L(\phi)(\sigma)| \leq C\ n(\sigma)$

$$|\Pi(t)| \leq C\ e^{-\nu\Lambda^\alpha t}\int_t^{+\infty} n(\sigma)d\sigma \ .$$

D'après le Théorème 1.2., $\lim_{t \to +\infty} \frac{|\Pi(t)|}{|\phi(t)|} = 1$ et alors pour t assez grand

$$|\phi(t)| \geq 2\ C\ e^{-\nu\Lambda^\alpha t}\int_t^\infty n(\sigma)d\sigma \ .$$

De

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 + \Lambda|\phi|^2 \geq -n\ \Lambda^{1/2}\ |\phi|^2 \ ,$$

nous déduisons que

$$|\phi(t)| \geq |\phi(0)|\ \exp - \int_0^t (\Lambda(\sigma) - n\ \Lambda^{1/2}(\sigma))d\sigma \ .$$

Par comparaison avec (1.52), il vient alors

$$\int_0^t [\Lambda(\sigma) - \Lambda^\alpha - n\ \Lambda^{1/2}(\sigma)]d\sigma \geq \text{Log}\ \frac{|\phi^o|}{2C} - \text{Log}\int_t^{+\infty} n(\sigma)d\sigma \ .$$

D'après (1.35) et (1.36) le membre de gauche de cette inégalité est majoré alors que toujours d'après (1.36) le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$. L'hypothèse $\phi^\alpha = 0$ est donc absurde, $e^{\nu\Lambda^\alpha t}\Pi(t)$ converge dans Y vers $\phi^\alpha \neq 0$, mais (1.34) nous montre que $\Pi(t)$ et $\phi(t)$ sont équivalents dans X et alors $e^{\nu\Lambda^\alpha t}\ \phi(t)$ converge dans X vers ϕ^α et (1.38) provient du fait que Ker Π_{Λ^α} est fermé. □

Preuve du Lemme 1.1. :

Nous notons $q = (I-P_{\Lambda^\alpha})\psi$ alors si nous appliquons $I-P_{\Lambda^\alpha}$ à $\frac{d\psi}{dt} + \nu(\mathcal{A} - \Lambda)\psi$ et nous prenons le produit scalaire dans Y du résultat avec $\mathcal{A}q$ il vient

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|q\|^2 + \nu(|\mathcal{A}q|^2 - \Lambda\|q\|^2) \leq \rho|\mathcal{A}q|$$

compte tenu de (1.45).

Puis de $2\rho\,|\mathcal{A}q| \leq 2\nu\varepsilon\,|\mathcal{A}q|^2 + \dfrac{\rho^2}{2\nu\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$,

$$(1.56)\qquad \frac{d}{dt}\|q\|^2 + 2\nu[(1-\varepsilon)|\mathcal{A}q|^2 - \Lambda\|q\|^2] \leq \frac{1}{2\nu\varepsilon}\,\rho^2.$$

Nous notons $\Lambda^\alpha + \delta_1$ la première valeur propre de $\mathcal{A}$ strictement supérieure à Λ^α, alors $|\mathcal{A}q|^2 \geq (\Lambda^\alpha + \delta_1)\|q\|^2$ et puisque

$$\lim_{t\to+\infty}[(1-\varepsilon)(\Lambda^\alpha + \delta_1) - \Lambda] = \delta_1 - \varepsilon(\Lambda^\alpha + \delta_1) > \frac{\delta_1}{2}$$

si $\varepsilon = \dfrac{\delta_1}{4(\Lambda^\alpha + \delta_i)}$.

Il existe donc $t_o \geq 0$ tel que pour $t \geq t_o$

$$(1-\varepsilon)(\Lambda^\alpha + \delta_1) - \Lambda \geq \frac{\delta_1}{2}\ .$$

De (1.56) nous déduisons alors que

$$\frac{d}{dt}\|q\|^2 + \nu\delta_1\|q\|^2 \leq \frac{2(\Lambda^\alpha + \delta_1)}{\nu\,\delta_1}\,\rho^2\ .$$

Nous désignons par $m(t)$ le second membre de cette inégalité, et alors par intégration pour $t \geq t_o$,

$$(1.57)\qquad \|q(t)\|^2 \leq \|q(t_o)\|^2\,e^{-\nu\delta_1(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} m(s)e^{-\delta_1(t-s)}ds.$$

Pour $t \geq 2t_o$, $\displaystyle\int_{t_o}^{t} m(s)e^{-\delta_1(t-s)}ds = \int_{t_o}^{t/2} m(s)e^{-\delta_1(t-s)}ds + \int_{t/2}^{t} m(s)e^{-\delta_1(t-s)}ds$

puis

$$(1.58)\qquad \int_{t_o}^{t} m(s)e^{-\delta_1(t-s)}ds \leq e^{-\frac{\delta t}{2}}\int_{t_o}^{+\infty} m(s)ds + \int_{t/2}^{t} m(s)ds$$

et compte tenu (1.47), de (1.58) et (1.57) nous voyons que

(1.59) $$\lim_{t \to +\infty} \|q(t)\| = 0.$$

Montrons que

(1.60) $$\int_0^\infty \| q(t) \|^2 \, dt < + \infty ,$$

d'après (1.57) il suffit de montrer que

(1.61) $$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^t m(s) e^{-\delta_1 (t-s)} ds \right) dt < + \infty$$

Cette intégrale s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\nu\delta_1 s} \left(\int_s^{+\infty} m(t-s) dt \right) ds = \frac{1}{\nu\delta_1} \int_0^{+\infty} m(s) ds < + \infty$$

ce qui prouve (1.61) et (1.60) est prouvé.

Si $\Lambda^\alpha = \Lambda_1$ nous avons montré (1.48) et (1.49).
Sinon soit $\Lambda^\alpha - \delta_2$ la plus grande valeur propre de $\mathcal{A}$ strictement inférieure à Λ^α. Appliquons $P_{\Lambda^\alpha - \delta}$ à $\frac{d\psi}{dt} + \nu(\mathcal{A} - \Lambda)\psi$ et prenons le produit scalaire dans Y du résultat avec $\theta = P_{\Lambda^\alpha - \delta_2} \phi$ il vient alors compte tenu de (1.45) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta|^2 + \nu(\|\theta\|^2 - \Lambda|\theta|^2) \geq -\rho|\theta| .$$

Or $\|\theta\|^2 \leq (\Lambda^\alpha - \delta_2) |\theta|^2$ et il existe $t_1 \geq 0$ tel que

$$\Lambda(t) - \Lambda^\alpha + \delta_2 \geq \frac{3}{4} \delta_2 , \quad \forall t \geq t_1 .$$

Pour $t \geq t_1$, $-\|\theta\|^2 + \Lambda|\theta|^2 \geq \frac{3}{4} \delta_2 |\theta|^2$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta|^2 \geq \frac{3\nu}{4} \delta_2 |\theta|^2 - \rho|\theta| .$$

Puis de $\rho|\theta| \leq \frac{\nu\delta_2}{4} |\theta|^2 + \frac{1}{\nu\delta_2} \rho^2$,

$$\frac{d}{dt}\ |\theta|^2 \geq \nu\delta_2\ |\theta|^2 - \frac{2}{\nu\delta_2}\ \rho^2\ .$$

Soient $T \geq t \geq t_1$, par intégration nous obtenons

$$|\theta(t)|^2 \leq e^{-\nu\delta_2(T-t)}\ |\theta(T)|^2 + \int_t^T \frac{2\rho^2}{\nu\delta_2}(s)\ e^{-\nu\delta_2(s-t)}ds$$

et en faisant $T \to +\infty(|\theta| \leq |\psi| = 1)$:

$$(1.62)\qquad |\theta(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu\delta_2} \int_t^{+\infty} \rho^2(s)e^{-\nu\delta_2(s-t)}ds\ .$$

Alors compte tenu de (1.47) et de $e^{-\nu\delta_2(s-t)} \leq 1$ pour $s \geq t$

$$\lim_{t\to+\infty} |\theta(t)| = 0.$$

Cette limite jointe à (1.59) montre (1.48) (nous avons utilisé le fait que sur $P_{\Lambda^{\alpha}-\delta_2}Y$ toutes les normes étaient équivalentes).

Pour montrer que $\int_0^{+\infty} |\theta(s)|^2 ds < +\infty$ montrons que

$$(1.63)\qquad \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \rho^2(s)e^{-\nu\delta_2(s-t)}ds\right)dt < +\infty.$$

Or

$$\int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} \rho^2(s)e^{-\nu\delta_2(s-t)}ds = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \rho^2(s+t)e^{-\nu\delta_2 s}\ ds\ dt$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \rho^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\nu\delta_2 s}ds\right) < +\infty\ .$$

Nous avons donc montré (1.63) qui, avec (1.60), prouve (1.49). □

<u>Remarque 1.2.</u> : Nous pouvons écrire les Théorèmes 1.1 à 1.3 avec le triplet $(X_s, X_{s-1}, \mathcal{A})$ au lieu de $(X,Y;\mathcal{A})$ pour $s \geq 1$.

Plus précisément nous avons le Théorème :

<u>Théorème 1.4.</u> : <u>Si ϕ vérifie</u>

(1.64) $\quad \phi \in C([0,T]\,;X_s) \cap L^2(0,T;X_{s+1}), \quad \forall T > 0,$

(1.65) $$\begin{cases} \dfrac{d\phi(t)}{dt} + \nu \mathcal{A}\phi \in X_{s-1} & \underline{\text{p.p. } t \in \mathbb{R}_+}, \\ \left\| \dfrac{d\phi}{dt} + \nu \mathcal{A}\phi \right\|_{s-1} \leq n_s \|\phi\|_s & \underline{\text{p.p. } t \in \mathbb{R}_+}, \end{cases}$$

<u>où</u>

(1.66) $\quad n_s \in L^2(\mathbb{R}_+)$

<u>et</u>

(1.67) $\quad n_s \in L^1(\mathbb{R}_+)$,

<u>alors il existe</u> $\phi_s^\infty \in V_{s+1}$ <u>tel que</u>

(1.68) $\quad e^{\nu\Lambda_s^\infty t}\,\phi(t) \to \phi_s^\infty$ <u>dans</u> X_s ,

(1.69) $\quad \mathcal{A}\phi_s^\infty = \Lambda_s\ \phi_s^\infty$. $\square$

I.4 - Application aux équations de Navier-Stokes sur une variété.

L'écoulement atmosphérique peut être modélisé, dans le cas où les vitesses sont supposées horizontales et proportionnelles à la distance au centre de la terre, par l'étude d'un écoulement visqueux incompressible sur la sphère S^2 (cf. A. AVEZ et Y. BAMBERGER [1]).

D'une manière plus générale (cf. D. EBIN et J.MARSDEN [1]) les équations de Navier-Stokes sur une variété riemanienne M orientée et sans bord sont :

$$(1.70) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \quad \Delta\, u + D_u u + \nabla p = f\ ,$$

$$(1.71) \qquad \operatorname{div} u = 0.$$

Nous désignons par $\mathscr{V}$ l'ensemble des champs de vecteurs tangents de classe C^∞ sur M à divergence nulle.

Soient H et V les adhérences dans L^2 et H^1 de $\mathscr{V}$ (1), ces espaces sont respectivement munis des produits scalaires

$$(1.72) \qquad (u,v) = \int (u|v)\,dM$$

et

$$((u,v)) = \int (\nabla u|\nabla v)\,dM.$$

Nous supposons que M est connexe, compacte, de dimension inférieure ou égale à 3 et que $||u|| = ((u,u))^{1/2}$ est une norme sur V équivalente à la norme $\mathbb{H}^1$ (dans J.M. GHIDAGLIA [1] on trouvera des conditions suffisantes pour que ce soit le cas, il y est prouvé que pour S^2 c'est bien le cas par exemple).

L'opérateur $A \in \mathscr{L}(V, V')$ défini par

$$(1.73) \qquad \langle Au,v\rangle = ((u,v)) \qquad \forall u,v \in V$$

(1) cf. T. AUBIN [1] pour ces notations.

satisfait aux hypothèses du cadre abstrait et

(1.74) $\quad V_m = D(A^{\frac{m}{2}}) = \{u \in \mathbb{H}^m, \text{ div } u = 0\} = H \cap \mathbb{H}^m, \; m \geq 0.$

D'autre part, nous définissons $B \in \mathcal{L}(V \times V, V')$ par

(1.75) $\quad \langle B(u,v),w\rangle = \int (D_u v | w) dM,$

alors si $u \in C([0,+\infty[; V)$, $u' \in C([0, +\infty ; H)$

est solution de

(1.76) $\quad u' + \nu Au + B(u,u) = 0,$

qui est la forme opérationnelle de (1.70)-(1.71),
nous savons qu'il existe $\tau > 0$ tel que

(1.77) $\quad \int_t^{+\infty} (| A u|^2 ds \leq K e^{-\nu\Lambda_1 t} \quad \forall t \geq \tau .$

Pour la preuve de ce qui précède et en particulier de (1.77), confère J.M. GHIDAGLIA [1] , Proposition I.4.1 page 26 .

Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème 1.4 avec $s = 2$ et $Y = H$, $X = V$, $\mathcal{A} = A$; nous en déduisons l'existence d'un couple $(u^\alpha, \Lambda^\alpha)$ tel que

(1.78) $\quad u(t) \sim u^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t}$ dans $D(A)$,

(1.79) $\quad A u^\alpha = \Lambda^\alpha u^\alpha .$

D'autre part (cf. R. TEMAM [2])

(1.80) $\quad u \in C^\infty([\tau, +\infty[; V_m) \quad \forall m \geq 0.$

Proposition 1.3 : Lorsque t tend vers + ∞ , $e^{\nu\Lambda^{\alpha}t}u(t)$ converge vers u^{α} dans V_m quelque soit $m \geq 0$.

Preuve : Nous allons montrer par récurrence que :

$$(1.81) \qquad \lim_{t \to +\infty} \| u(t)\, e^{\nu\Lambda^{\alpha}t} - u^{\alpha} \|_m = 0.$$

Pour m = 2 c'est bien le cas d'après (1.78) ; supposons alors (1.81) réalisé pour $m \geq 2$. Nous avons l'estimation

$$(1.82) \qquad \| B(u,v) \|_m \leq C_m \| u \|_m \, \| u \|_{m+1} \quad \text{pour } m \geq 2$$

et d'après (1.81), $n_{m+1}(t) = C_m \|u\|_m = O(e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t})$; nous pouvons appliquer le Théorème 1.4 pour $s = m+1$ et alors

$$(1.83) \qquad u(t) \sim u^{\alpha}_{m+1}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}_{m+1}t} \quad \text{dans } V_{m+1}$$

et par comparaison avec (1.81)

$$(1.84) \qquad u(t) \sim u^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} \quad \text{dans } V_{m+1}\,. \qquad \square$$

Ce résultat a été prouvé par C.GUILLOPÉ [2,3] lorsque M est un tore muni de la métrique plate.

II - LE CAS QUADRATIQUE AVEC FORCE NULLE

II.1 - Comportement dans $D(\mathcal{A})$

Etant donné B une application bilinéaire continue de $X \times X$ dans X' qui vérifie la condition supplémentaire :

(2.1) $$\exists K > 0, \quad |B(\phi,\psi)| + |B(\psi,\phi)| \leq K |\mathcal{A}\phi| \, \|\psi\| \qquad \forall\phi \in D(\mathcal{A}),\ \forall\psi \in D(\mathcal{A}),$$

nous étudions le comportement de $\phi(t)$ solution de l'équation différentielle :

(2.2) $$\phi'(t) + \nu \mathcal{A}\phi(t) + B(\phi(t),\phi(t)) = 0,$$

avec la condition initiale

(2.3) $$\phi(0) = \phi^{o} \in D(\mathcal{A}).$$

Remarquons que nous ne demandons pas à B de vérifier l'identité $< B(\phi,\phi),\phi> = 0$ pour $\phi \in X$, mais nous nous intéressons aux solutions de (2.2) qui vérifient

(2.4) $$\phi \in C([0,+\infty[;\ D(\mathcal{A})), \quad \phi' \in C([0,+\infty[;\ Y),$$

(2.5) $$\int_0^{+\infty} |\mathcal{A}\phi(s)|\,ds < +\infty \quad , \quad \int_0^{+\infty} |\mathcal{A}\phi(s)|^2\,ds < +\infty .$$

Remarque 2.1. : (i) L'équation (2.2) est autonome, par conséquent l'origine des temps 0 ne joue aucun rôle particulier, nous pourrions la remplacer par un quelconque réel t_o.

(ii) Si ϕ vérifie (2.2) et (2.4) alors

$$\phi \in C^{\infty}(]0,+\infty[;\ D(\mathcal{A}))$$ (cf. J.M. GHIDAGLIA [1]).

Si nous notons $n(t) = K|\mathcal{A}\,\phi(t)|$, alors de (2.1) et (2.2) nous déduisons que

(2.6) $\qquad |\phi' + \nu\mathcal{A}\,\phi| \leq n(t)\|\phi\|$.

Conformément au Théorème 1.1, nous avons la propriété d'unicité rétrograde pour (2.2) (n vérifie (1.20) en vertu de (2.5)).

Dans ce qui suit, nous supposons que

(2.7) $\qquad \phi^{o} \neq 0$

ce qui assure

(2.8) $\qquad |\phi(t)| > 0 \quad \forall t \geq 0.$

Théorème 2.1. : Soit ϕ vérifiant (2.2) à (2.5) alors quelque soit $j \in \mathbb{N}$

(2.9) $\qquad \phi_j(t) \equiv \dfrac{d^j\phi}{dt^j} \sim (-\nu\Lambda^{\alpha})^j \phi^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}$ dans $D(\mathcal{A})$ quand $t \to +\infty$

où $(\phi^{\alpha},\Lambda^{\alpha})$ est un couple vecteur propre, valeur propre de $\mathcal{A}$.

Preuve : Nous appliquons le Théorème 1.3 à ϕ puisque (2.5) assure (1.31) et (1.36), il en résulte qu'il existe $(\phi^{\alpha},\Lambda^{\alpha})$ tel que

(2.10) $\qquad \phi(t) \sim \phi^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}$ dans X.

Conformément à la Remarque 2.1 (ii), la fonction ϕ est indéfiniment dérivable à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ et par dérivation de (2.2) par rapport à t il vient

$$\phi_1' + \nu\,\mathcal{A}\,\phi_1 + B(\phi_1,\phi) + B(\phi,\phi_1) = 0,$$

alors

$$(2.11) \qquad \left|\frac{d\phi_1}{dt} + \nu \mathcal{A}\phi_1\right| \leq K|\mathcal{A}\phi| \, \|\phi_1\|$$

et par application du Théorème 1.3 à ϕ_1 nous avons

$$(2.12) \qquad \phi_1(t) \sim \phi_1^{\infty} e^{-\nu\Lambda_1^{\infty} t} \quad \text{dans X.}$$

Revenons à (2.2), de (2.1) et (2.10) il résulte que

$$\nu \mathcal{A}\phi + B(\phi,\phi) \sim \nu \mathcal{A}\phi \quad \text{dans Y}$$

et $$- \phi_1^{\infty} e^{-\nu\Lambda_1^{\infty} t} \sim - \phi_1 = + \nu\mathcal{A}\phi + B(\phi,\phi) \sim \nu \mathcal{A}\phi \quad \text{dans Y}$$

montre que

$$(2.13) \qquad \phi \sim \phi^{\infty} e^{-\nu\Lambda^{\infty} t} \quad \text{dans } D(\mathcal{A}),$$

$$(2.14) \qquad \phi_1 \sim -\nu\Lambda^{\infty}\phi^{\infty} e^{-\nu\Lambda^{\infty} t} \quad \text{dans X.}$$

Si nous dérivons (2.2) deux fois par rapport à t il vient :

$$(2.15) \qquad \phi_2' + \nu \mathcal{A}\phi_2 = - 2B(\phi_1,\phi_1) - B(\phi_2,\phi) - B(\phi,\phi_2)$$

et alors

$$(2.16) \qquad |\phi_2' + \nu \mathcal{A}\phi_2| \leq K(|\mathcal{A}\phi_1| \, \|\phi_1\| + |\mathcal{A}\phi| \, \|\phi_2\|)$$

nous notons alors $\vec{\phi} = (\phi_1,\phi_2)$, $\mathcal{A}\vec{\phi} \equiv (\mathcal{A}\phi_1, \mathcal{A}\phi_2)$

et de (2.16), (2.11)

$$(2.17) \qquad \left|\frac{d\vec{\phi}}{dt} + \nu\mathcal{A}\vec{\phi}\right| \leq K(2|\mathcal{A}\phi| + |\mathcal{A}\phi_1|) \, \|\vec{\phi}\| .$$

Nous allons montrer que $|\mathcal{A}\phi_1| \in L^1(t_*,+\infty) \cap L^2(t_*,+\infty)$ pour un certain t_* .

De (2.11) nous déduisons que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi_1\|^2 + (\nu - K\|\phi_1\|)|\mathcal{A}\phi_1|^2 \leq 0$$

il en résulte aisément l'existence de t, tel que

$$(2.18)\qquad \int_t^{+\infty} |\mathscr{A}\phi_1(s)|ds < +\infty \ ,\quad \int_t^{+\infty} |\mathscr{A}\phi_1(s)|^2 ds < +\infty \ .$$

A l'aide de (2.5) et (2.18) nous concluons que le Théorème 1.3 s'applique à $\vec{\phi}$ en vertu de (2.17) et

$$(2.19)\qquad \phi_2 \sim \phi_2^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans} \quad X.$$

Par retour à $\nu \mathscr{A}\phi_1 = \phi_2 + B(\phi,\phi_1) + B(\phi_1,\phi)$

nous déduisons que

$$(2.20)\qquad \phi_1 \sim -\nu\Lambda^\alpha\phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } D(\mathscr{A}),$$

$$(2.21)\qquad \phi_2 \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^2 \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans} \quad X.$$

Puis de (2.17) il résulte qu'il existe $t_2 > 0$ tel que

$$(2.22)\qquad \int_{t_2}^{+\infty} |\mathscr{A}\phi_2(s)|\, ds < +\infty \ ,\quad \int_{t_2}^{+\infty} |\mathscr{A}\phi_2(s)|^2 ds < +\infty \ .$$

Lorsque $\ell \geq 2$ nous faisons l'hypothèse de récurrence

$$\mathscr{H}_\ell \begin{cases} (2.23) \qquad \phi_j \sim (\nu\Lambda^\infty)^j \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } D(\mathscr{A}) \text{ pour } 0 \leq j \in \ell - 1, \\ (2.24) \qquad \phi_\ell \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^\ell \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans} \quad X. \end{cases}$$

Nous avons prouvé $(\mathscr{H})_2$ par (2.20)-(2.21), donnons-nous $\ell \geq 3$ et supposons $(\mathscr{H})_{\ell-1}$ établi. Si nous dérivons $\ell-1$ fois (2.2) par rapport à t il vient

$$(2.25)\qquad \frac{d\phi_\ell}{dt} + \nu \mathscr{A}\phi_\ell = - \sum_{k=0}^{\ell} C_\ell^k B(\phi_k,\phi_{\ell-k})$$

Nous allons estimer les $B(\phi_k,\phi_{\ell-k})$:

<u>pour $k = 0,1$ ou $k = \ell - 1, \ell$</u>

$$(2.26)\quad \begin{cases} |B(\phi_k,\phi) + B(\phi,\phi_\ell)| \leq K\ |\mathcal{A}\ \phi|\ \|\phi_\ell\| \\ |B(\phi_{\ell-1},\phi_1) + B(\phi_1,\phi_{\ell-1})| \leq K\ |\mathcal{A}\phi_1|\ \|\phi_{\ell-1}\| \end{cases}$$

Pour $2 \leq k \leq \ell-2$

$$(2.27)\quad |B(\phi_k,\phi_{\ell-k}) + B(\phi_{\ell-k},\phi_k)| \leq K|\mathcal{A}\ \phi_k|\ \|\phi_{\ell-k}\|$$

Nous notons $\vec{\phi} = (\phi_1,\ldots,\phi_\ell)$, $\mathcal{A}\vec{\phi} \equiv (\mathcal{A}\ \phi_1,\ldots,\mathcal{A}\ \phi_\ell)$ alors il existe une constante C positive telle que

$$\left|\frac{d\vec{\phi}}{dt} + \nu\mathcal{A}\vec{\phi}\right| \leq C\ \left(\sum_{k=0}^{\ell-2} |\mathcal{A}\ \phi_\ell|\right)\ \|\vec{\phi}\|$$

d'après les inégalités (2.27) et (2.28).

L'hypothèse de récurrence assure que

$$\int_{t_\ell}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{\ell-2}|\mathcal{A}\ \phi_\ell|(s)ds < +\infty, \quad \int_{t_\ell}^{+\infty}[\sum_{k=0}^{\ell-2}|\mathcal{A}\ \phi_\ell|(s)]^2\ ds < +\infty$$

et par application du Théorème 1.3 au triplet $(Y^\ell, D(\mathcal{A})^\ell, \mathcal{A})$:

$$(2.28)\quad \vec{\phi} \sim \vec{\phi}^\alpha\ e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } X^\ell .$$

Puis de $-\phi_\ell = \nu\mathcal{A}\phi_{\ell-1} + B(\phi,\phi)^{(\ell-1)}$ nous déduisons que

$$(2.29)\quad \phi_\ell \sim (-\nu\Lambda^\alpha)\ \phi^\alpha\ e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } X,$$

et de

$$-\nu\mathcal{A}\phi_{\ell-1} = \phi_\ell + B(\phi,\phi)^{(\ell-1)}$$

il résulte que $-\nu\mathcal{A}\phi_{\ell-1} \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^\ell\ \phi^\alpha\ e^{-\nu\Lambda^\alpha t}$ dans Y,
avec (2.29) ceci prouve $(\mathcal{H})_\ell$. □

Remarque 2.2. : (i) Noter que (2.9) implique en particulier que $|\mathscr{A}\phi(t)| \sim \Lambda^{\alpha}|\phi^{\alpha}|\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}$ qui est bien plus fort que (2.5).

(ii) Pour des raisons techniques nous avons à envisager le cas où B est un polynôme en t de degré N (cf. (2.39)). Dans ce cas le Théorème 2.1 reste valable si au lieu de (2.5) nous avons

$$\text{(2.5)bis}\quad \int_0^{+\infty} s^N|\mathscr{A}\phi(s)|ds < +\infty \quad , \int_0^{+\infty} s^{2N}|\mathscr{A}\phi(s)|^2 ds. \quad \square$$

Nous allons donner le début d'un développement asymptotique de $\phi(t)$ lorsque $t \to +\infty$. Dans l'énoncé qui suit les 0 sont envisagés dans $D(\mathscr{A})$.

Théorème 2.2. : Sous les hypothèses du Théorème 2.1, soit λ une valeur propre de $\mathscr{A}$,

(i) $\Lambda_1 \leq \lambda < \Lambda^{\alpha}$

$$\Pi_\lambda\,\phi(t) = \frac{e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}}{\nu(2\Lambda^{\alpha}-\lambda)}\,\Pi_\lambda\, B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(e^{-(2\nu\Lambda^{\alpha}+\alpha_\lambda)t})$$

$$\alpha_\lambda > 0 .$$

(ii) $\Lambda^{\alpha} \leq \lambda < 2\Lambda^{\alpha}$

$$\Pi,\ \phi(t) = e^{-\nu\lambda t}\phi^{\alpha} + \frac{e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}}{\nu(2\Lambda^{\alpha}-\lambda)}\,\Pi_\lambda\, B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(e^{-(2\nu\Lambda^{\alpha}+\alpha_\lambda)t}$$

$$\alpha_\lambda > 0 .$$

(iii) $\lambda = 2\Lambda^{\alpha}$

$$\Pi_\lambda\,\phi(t) = -\,t\,e^{-\nu\lambda t}\Pi_\lambda\, B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}) .$$

(iv) $\lambda > 2\Lambda^{\alpha}$

$$\Pi_\lambda\,\phi(t) = -\frac{e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}}{\nu(\lambda-2\Lambda^{\alpha})}\,\Pi_\lambda\, B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(e^{(\nu\Lambda^{\alpha}+\alpha_\lambda)t})$$

$$\alpha_\lambda > 0.$$

Ce théorème est essentiellement du à C. FOIAS et J.C. SAUT [1] pour les équations de Navier-Stokes, ces auteurs ont achevé le développement de $\phi(t)$ cf. [3] .

Avant de prouver ce Théorème, nous allons en donner un corollaire qui résulte trivialement de l'énoncé qui précède.

Corollaire 2.1. : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Lambda^{\alpha} \geq \Lambda_k$ est

$$\text{pour } \lambda = \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{k-1}, \lim_{t \to +\infty} \Pi_\lambda \phi(t) = 0 . \qquad \square$$

Preuve du Théorème 2.2. :
Soit λ une valeur propre de $\mathscr{A}$, notons $\omega = e^{\nu\lambda t}\phi(t)$, nous avons alors l'équation d'évolution :

$$(2.30) \qquad \omega' + \nu(\mathscr{A} - \lambda)\omega + e^{-\nu\lambda t} B(\omega,\omega) = 0,$$

puis par projection à l'aide de Π_λ :

$$(\Pi_\lambda \omega)' + e^{-\nu\lambda t} \Pi_\lambda B(\omega,\omega) = 0$$

qui s'intègre en $(t \leq T)$

$$(2.31) \qquad \Pi_\lambda \omega(t) - \Pi_\lambda \omega(T) = \int_t^T e^{-\nu\lambda s} \Pi_\lambda B(\omega,\omega)(s)ds .$$

Nous savons que ϕ est équivalent dans $D(\mathscr{A})$ à $\phi^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t}$, mais dans le cas présent (non linéarité quadratique) nous sommes en mesure de préciser cette équivalence :

De (1.55) nous déduisons que :

$$(2.32) \qquad |e^{\nu\Lambda^{\alpha} t} \Pi_{\Lambda^{\alpha}} \phi(t) - \phi^{\alpha}| \leq C \int_t^{+\infty} n(\sigma)d\sigma ,$$

puis de (2.9)

$$(2.33)\qquad |e^{\nu\Lambda^\alpha t}\ \Pi_{\Lambda^\alpha}\ \phi(t) - \phi^\alpha| \le C_2\ C^{-\nu\Lambda^\alpha t}\ ;$$

et de $|\phi(t)| \sim |\phi^\alpha| e^{-\nu\Lambda^\alpha t}$, (1.39), (1.42) et $(2.9)_{j=0}$

$$(2.34)\qquad e^{\nu\Lambda^\alpha t} |\mathcal{A}\ (\phi(t) - \Pi_{\Lambda^\alpha}\ \phi(t))| \le C_3\ e^{-\nu\varepsilon t}\ ,\ \varepsilon > 0.$$

De (2.33)-(2.34) nous déduisons qu'il existe C^*, $\varepsilon^* > 0$ tels que

$$(2.35)\qquad |\mathcal{A}\ (e^{\nu\Lambda^\alpha t}\ \phi(t) - \phi^\alpha)| \le C^*\ e^{-\nu\varepsilon^* t}\ .$$

Il s'en suit que (nous utilisons (2.1))

$$(2.36)\qquad e^{-\nu\lambda t}\Pi_\lambda B(\omega(t),\omega(t)) = \Pi_\lambda\ B(\phi^\alpha,\phi^\alpha) e^{-\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda)t} + $$
$$+\ O(e^{-\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda+\varepsilon^*)t})\ .$$

Ainsi l'intégrale au second membre de (2.32) converge pour $\lambda < 2\Lambda^\alpha$ et

$$(2.37)\qquad \Pi_\lambda\ \omega(t) - \Pi_\lambda\ \omega(+\infty) = \int_0^{+\infty} e^{-\nu\lambda s}\ \Pi_\lambda B(\omega,\omega)ds,\quad \lambda < 2\Lambda^\alpha\ .$$

Or compte tenu de (2.36), pour $\lambda < 2\Lambda^\alpha$

$$\Pi_\lambda\ \omega(t) - \Pi_\lambda\ \omega\ (+\infty) = \frac{e^{-\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda)t}}{\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda)}\ \Pi_\lambda\ B(\phi^\alpha,\phi^\alpha) + $$
$$+\ O(e^{-\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda\ +\varepsilon^*)t}).$$

Soit

$$\Pi_\lambda\ \phi(t) = e^{-\nu\lambda t}\ \Pi_\lambda\omega(+\infty) + \frac{e^{-\nu\Lambda^\alpha t}}{\nu(2\Lambda^\alpha-\lambda)}\ \Pi_\lambda\ B(\phi^\alpha,\phi^\alpha) + $$
$$+\ O(e^{-\nu(2\Lambda^\alpha+\varepsilon^*)t})$$

De cette dernière égalité, de (2.35) il résulte les points (i) et (ii) du Théorème 2.2.

Pour $\lambda = 2\Lambda^{\alpha}$, (2.31) et (2.36) montrent que

$$\Pi_\lambda\ \omega(0) - \Pi_\lambda\ \omega(t) = t\Pi_\lambda\ B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(1)$$

et (iii) en résulte.

Pour $\lambda > 2\Lambda^{\alpha}$, nous notons $\eta(t) = e^{2\nu\Lambda^{\alpha}t}\ \phi(t)$ et alors

$$\eta' + \nu(\mathscr{A} - 2\Lambda^{\alpha})\eta + e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}\ B(\eta,\eta) = 0,$$

par projection à l'aide de Π_λ :

$$(\Pi_\lambda\eta)' + \nu(\lambda - 2\Lambda^{\alpha})\eta + e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}\ \Pi_\lambda\ B(\eta,\eta) = 0\ . \tag{2.38}$$

Or d'après (2.34), $e^{-2\nu\Lambda^{\alpha}t}\ \Pi_\lambda\ B(\eta,\eta) = \Pi_\lambda\ B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha}) + 0(e^{-\nu\varepsilon^{*}t})$,

par suite (2.38) s'écrit avec $\bar{\eta} = \Pi_\lambda\eta + \dfrac{\Pi_\lambda B(\phi^{\alpha},\phi^{\alpha})}{\nu(\lambda - 2\Lambda^{\alpha})}$,

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} + \nu(\lambda - 2\Lambda^{\alpha})\bar{\eta} = 0(e^{-\nu\varepsilon^{*}t})\ ;$$

ce qui implique l'existence de $\alpha_\lambda > 0$ tel que

$$\bar{\eta} = 0(e^{-\nu\alpha_\lambda t})$$

puis le point (iv) en résulte trivialement.

Nous avons achevé la preuve du Théorème 2.2. □

Nous pouvons étendre le Théorème 2.2 au cas où l'opérateur B dépend du temps de manière polynômiale c'est-à-dire

$$B(t)(\phi_1,\phi_2) = \sum_{\ell=0}^{N} t^{\ell}\ B_\ell(\phi_1,\phi_2), \tag{2.39}$$

où chacun des B_ℓ vérifie (2.1).

Théorème 2.3. : Nous faisons les hypothèses du Théorème 2.1 où (2.5) est remplacé par (2.5) bis (cf. Remarque 2.2 (ii)). Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$, les développements de l'énoncé du Théorème 2.2 sont valables avec au lieu de $B(\phi^{\infty},\phi^{\infty})$, $B^{\lambda}(\phi^{\infty},\phi^{\infty})$ qui est un polynôme du type (2.39).

Preuve :

Dans le cas $\Lambda_1 \leq \lambda < \Lambda^{\infty}$ il s'agit en vertu de (2.37) et (2.36) d'intégrer

$$\int_t^{\infty} e^{-\nu(2\Lambda^{\infty}-\lambda)t}\ \Pi_{\lambda} B(\phi^{\infty},\phi^{\infty})(s)ds.$$

En raison de (2.39) cette dernière intégrale est le produit d'un polynôme de degré N avec $e^{-\nu(2\Lambda^{\infty}-\lambda)t}$ ce qui prouve le résultat annoncé.

Dans le cas $\lambda = 2\Lambda^{\infty}$

$$\Pi_{\lambda}\ \omega(0) - \Pi_{\lambda}\ \omega(t) = \int_0^t \Pi_{\lambda} B(\phi^{\infty},\phi^{\infty})(s)ds$$

et nous concluons de la même manière.

Dans le cas $\lambda > 2\Lambda^{\infty}$ nous prenons

$$\bar{\eta} = \Pi_{\lambda}\ \eta + \Pi_{\lambda}\ B^{\lambda}\ (\phi,\phi)$$

où $B^{\lambda}(t)$, solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dB^{\lambda}(t)}{dt} + \nu(\lambda-2\Lambda^{\infty})\ B^{\lambda}(t) + B(t) = 0\ , \\ B^{\lambda}(0) = B(0) = B_o\ ; \end{cases}$$

est un polynôme de degré N. □

II.2 - Comportement dans E_m.

Bien que $\mathscr{A}$ soit un opérateur continu de X_{m+2} dans X_m hormis les cas m=-1,m=0 $\mathscr{A}$ n'est pas en général un isomorphisme de X_{m+2} dans X_m.

Nous introduisons une famille $\{E_m\}_{m\geq 0}$ d'espaces de Hilbert qui vérifie :

(2.40) $\quad E_{m+1} \subset E_m$, $X_m \subset E_m$,

ces injections étant continues ;

(2.41) $\quad$ la restriction X_m de la norme $\|\cdot\|_{E_m}$ est équivalente à la norme $\|\ \|_m$;

(2.42) $\quad \mathscr{A}$ est un isomorphisme de $E_{m+2} \cap X$ sur E_m ;

(2.43) $\quad$ B est un opérateur continu de $E_m \times E_{m+1}$ dans E_m, $m \geq 2$;

(2.44) $\quad \begin{cases} \text{B est un opérateur continu de } E_2 \times E_2 \text{ dans } E_1, \\ \text{B " " " " " } E_1 \times E_2 \text{ et } E_2 \times E_1 \text{ dans } E_0. \end{cases}$

(2.45) $\quad E_0 = Y$, $E_2 \cap X = D(\mathscr{A})$.

Le Théorème 2.1 nous a permis d'expliciter le comportement de $\phi(t)$ dans $D(\mathscr{A})$. Nous allons généraliser ce résultat en montrant que l'équivalence (2.9) a lieu dans E_m pour tout m. Le résultat que nous allons prouver a été démontré par C. GUILLOPE [2,3] pour les équations de Navier-Stokes, nous en donnons ici une preuve moins technique.

<u>Théorème 2.4.</u> : <u>Sous les hypothèses du Théorème 2.1, quel que soit $(j,m) \in \mathbb{N}^2$,</u>

(2.46) $$\frac{d^j\phi}{dt^j} = \phi_j(t) \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^j \phi^\infty e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \underline{\text{dans } E_m}\ .$$

<u>Preuve</u> : Nous montrons ce Théorème par récurrence :

$(\mathscr{H})_k \quad \phi_j \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^j \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t}$ dans E_k

Nous avons vérifié $(\mathcal{H}_2)$ en vertu du Théorème 2.1; supposons $(\mathcal{H})_k$ établi avec $k \geq 2$.

$$- \nu \mathcal{A} \phi_j = \phi_{j+1} + \sum_{\ell = 0}^{j} C_j^{\ell} B(\phi_\ell, \phi_{j-\ell})$$

et d'après (2.43)-(2.44) nous déduisons de $(\mathcal{H})_k$ que

$$B(\phi_\ell, \phi_{j-\ell}) = O(e^{-2\nu\Lambda^\alpha t}) \quad \text{dans } E_{k-1} ,$$

$$\phi_{j+1} \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^{j+1} \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } E_{k-1} .$$

Alors

$$- \nu \mathcal{A} \phi_j \sim (-\nu\Lambda^\alpha)^{j+1} \phi^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha t} \quad \text{dans } E_{k-1}$$

puis par (2.42) $(\mathcal{H})_{k+1}$ est prouvé. □

<u>Remarque 2.3.</u> : Les Théorèmes 2.2 et 2.3 sont valables dans E_m pour tout m : quel que soit $m \geq 0$ les développements ii) à iv) ont lieu avec des O( ) dans E_m.

II.3 - Application aux équations de Navier-Stokes sur un ouvert borné.

Soit Ω un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^d$ (d=2 ou 3) et Γ sa frontière. Nous supposons que

(2.47) Γ est une variété de classe C^∞ de dimension d-1 et Ω est situé localement d'un seul côté de Γ.

Soient H et V les adhérences dans $L^2(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$, respectivement, de

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}(\Omega)^d,\ \mathrm{div}\ u = 0\}^{(1)}.$$

Les espaces H et V sont respectivement muni des produits scalaires

$$(u,v) = \int_\Omega u_j . v_j \ dx$$

et

$$((u,v)) = \int_\Omega D_j\, u_k . D_j\, v_k\ dx\ .$$

Nous notons aussi $|u| = (u,u)^{1/2}$ et $\|u\| = ((u,u))^{1/2}$ pour u dans H et V respectivement.

L'injection de V dans H est dense, après avoir identifié H à son dual

(2.48) $V \subset H \subset V'$,

chaque injection étant dense, continue et compacte.

Soit A l'opérateur de V dans V',

(2.49) $\langle Au,v \rangle = ((u,v))$.

---

(1) Se reporter à R.A. ADAMS [1] pour les notations.

Si nous désignons par P le projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)^d$ sur H, nous avons le résultat suivant (cf. R. TEMAM [1] Remarque 1.6 p. 18)

(2.50) P est linéaire et continu de $H^m(\Omega)^d$ sur $H^m(\Omega)^d \cap H$, $\forall m \geq 0$,

et l'orthogonal de H dans $L^2(\Omega)^d$ est

(2.51) $H^\perp = \{u = \nabla q,\ q \in H^1(\Omega)\}$.

Rappelons un résultat de régularité pour le système de Stokes :

Soient $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ solutions de

(2.52) $\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \ ; \end{cases}$

(2.53) $\begin{cases} \text{si } f \in \mathbb{H}^m(\Omega) \text{ alors } u \in \mathbb{H}^{m+2}(\Omega)^d \quad p \in \mathbb{H}^{m+1}(\Omega),\ m \geq -1 \\ \text{et } \quad \|u\|_{m+2} + \|p\|_{m+1} \leq C_m \|f\|_m \end{cases}$

(cf. R. TEMAM [1] et la bibliographie de ce livre).

Il résulte de (2.50) et (2.53) que

(2.54) $D(A) = \mathbb{H}^2(\Omega) \cap V,$

(2.55) $\exists\ \alpha,\beta > 0 \quad \alpha \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \leq |Au| \leq \beta \|u\|_{H^2(\Omega)^d} \quad \forall u \in D(A),$

(2.56) $A = -P\Delta$.

Nous pouvons voir alors que ($m \geq 0$)

(2.57) $V_m = D(A^{\frac{m}{2}})$ s'injecte continuement dans $\mathbb{H}^m(\Omega)^d$.

Si nous notons

(2.58) $\quad E_m = H^m(\Omega)^d \cap H,$

de (2.53) il vient

(2.59) $\quad$ A est un isomorphisme de $V \cap E_{m+2}$ sur E_m , $m \geq 0$.

Pour u,v,w dans $H^1(\Omega)^d$ nous posons

(2.60) $$b(u,v,w) = \int_\Omega u_j (D_j v_k) w_k \, dx,$$

qui est trilinéaire continue sur $H^1(\Omega)^d$ et

(2.61) $\quad b(u,w,v) = -b(u,v,w)$ si div $u = 0$ et

l'un au moins des u,v,w est dans $H^1_0(\Omega)$.

De plus - cf. R. TEMAM [3] -

(2.62) $\quad$ b est trilinéaire et continue sur $H^{s_1}(\Omega)^d \times H^{s_2+1}(\Omega)^d \times H^{s_3}(\Omega)^d$

où $s_i \geq 0$ et

$s_1 + s_2 + s_3 \geq \frac{d}{2}$ si tous les s_i sont $\neq \frac{d}{2}$,

$s_1 + s_2 + s_3 > \frac{d}{2}$ si l'un des $s_i = \frac{d}{2}$.

D'autre part, si nous notons $B \in \mathcal{L}(V \times V,V')$:

(2.63) $\quad \langle B(u,v),w\rangle = b(u,v,w) \quad \forall u,v,w \in V$;

toujours d'après R. TEMAM [3]

(2.64) $\quad$ B est linéaire et continu de $E_2 \times E_2$ dans E_1,

(2.65) $\quad$ B " " " " " $E_m \times E_{m+1}$ dans E_m, $m \geq 2$.

Avec les notations qui précèdent les équations de Navier-Stokes avec forces nulles (ou ce qui revient au même dérivant d'un potentiel) s'écrivent

(2.66) $\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) = 0,$

(2.67) $u(0) = u^0$.

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, quel que soit $u^0 \in H$ le problème (2.66)-(2.67) possède une <u>unique</u> solution
$u \in C([0, +\infty[; H) \cap L^2(0,+\infty; V)$ et

(2.68) $u \in C^\infty(]0, +\infty[; E_m)$ pour tout $m \geq 0$.

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le problème (2.66)-(2.67) possède au moins une solution $u \in L^\infty(0,+\infty; H) \cap L^2(0,+\infty; V)$ et il existe un instant $\tau(u^0) > 0$ tel que

(2.69) $u \in C^\infty(]\tau(u^0),+\infty[; E_m)$ pour tout $m \geq 0$.

Pour une preuve de ces résultats, désormais classiques, confère R. TEMAM [1,3] .

Rappelons que nous avons les estimations $(t_1 > \tau(u^0))$:

(2.70) $\int_{t_1}^{+\infty} |Au(s)| ds < +\infty \quad , \quad \int_{t_1}^{+\infty} |Au(s)|^2 ds < +\infty$.

La preuve de (2.70) est standard. Remarquer qu'il s'agit d'un cas particulier de la Proposition 3.1.

Nous sommes en mesure d'appliquer le Théorème 2.4 (ces résultats ont été prouvés par C. GUILLOPÉ [2,3] .

Théorème 2.5. : Il existe un vecteur propre u^{α} de l'opérateur de Stokes A, associé à la valeur propre Λ^{α} tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(2.71) \qquad \frac{d^j u}{dt^j} \sim (-\nu\Lambda^{\alpha})^j \, e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t} \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathbb{H}^m(\Omega) \,. \qquad \square$$

Remarque 2.4. : Conformément à la Remarque 2.3, le Théorème 2.2 donne le début du développement asymptotique de u(t) dans $\mathbb{H}^m(\Omega)$, C. FOIAS et J.C. SAUT [1] ont montré ce résultat dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Remarque 2.5. : Lorsque Ω est un ouvert simplement connexe (1) les équations de la magnétohydrodynamique peuvent se mettre sous la forme (2.2) (cf. M. SERMANGE et R. TEMAM [1] , J.M. GHIDAGLIA [1], d'après une présentation de G. DUVAUT et J.L. LIONS [2]).
Le Théorème 2.5 possède un analogue qui permet de connaitre le comportement du couple (u,B) (u désigne la vitesse, B le champ magnétique) dans tous les espaces $\mathbb{H}^m(\Omega)^2$. Dans ce cas précis du fait que le champ magnétique vérifie une inéquation du type (0.1) il résulte que u et B possèdent un comportement exactement exponentiel décroissant. Signalons que K. KHERIEF [1] a étudié ce comportement par une méthode directe.

---

(1) Cette hypothèse supplémentaire n'est pas essentielle, elle permet une exposition plus simple.

III - LES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC FORCE EXPONENTIELLEMENT DECROISSANTE

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous forme fonctionnelle (cf. § II pour les notations) :

(3.1) $$\frac{du(t)}{dt} + \nu Au(t) + B(u(t),u(t)) = f(t),$$

(3.2) $$u(0) = u^0 \in V.$$

Dans la section II.3 nous avons étudié le cas $f(t) \equiv 0$ et nous avons obtenu que $u(t)$ se comporte de manière totalement similaire au cas où $B \equiv 0$ (i.e. le cas linéaire). Dans ce paragraphe nous nous consacrons au cas où $f(t) = f\, e^{-\nu\delta t}$ pour $f \in H$ et $\delta > 0$; ce type de second membre peut être regardé comme une première approximation pour les équations de la thermohydraulique (cf. § IV). Signalons que le Théorème 3.1 est, à notre connaissance, le premier résultat qui décrit le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes associées à des forces non nulles.

III.1 - Décroissance vers 0

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(0, +\infty ; H)$ les équations (3.1)-(3.2) possèdent une unique solution [1]

$$(3.3) \qquad u \in C([0,+\infty[; V) \cap L^2(0,+\infty ; D(A))$$

qui vérifie les deux égalités d'énergie :

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \| u \|^2 = (f,u) , \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu |Au|^2 + b(u,u,Au) = (f,Au). \end{cases}$$

Lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $f \in L^2(0,+\infty ; H)$ vérifie

$$(3.5) \qquad |f| = O(e^{-\nu\delta t}) , \delta > 0 ;$$

il existe au moins une solution [2] $u \in L^2(0, +\infty; V)$ telle que $(T > 0)$

$$(3.6) \qquad u \in C([T, +\infty[, V) \cap L^2(T, +\infty ; D(A))$$

et pour $t \geq T$, u vérifie (3.4).

Proposition 3.1 : Avec les notations qui précèdent et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (d=2 ou 3), si $f(t)$ vérifie (3.5) il existe t_o tel que $(C > 0, \rho > 0)$

$$(3.7) \qquad t \geq t_o, \int_t^{+\infty} (|Au(s)) + |Au(s)|^2) ds \leq C e^{-\rho t} .$$

Preuve : De (3.4)-(3.5) nous déduisons que

$$(3.8) \qquad \frac{d}{dt} |u|^2 + \nu \|u\|^2 = O(e^{-2\nu\delta t}) ,$$

(1) Ce résultat est classique cf. R. TEMAM [3].

(2) Cf. Remarque 3.1.

puis si nous notons $\rho = \min\left(\frac{\lambda_1}{2}, \delta\right)$ et remarquons que $\|u\|^2 \geq \lambda_1 |u|^2$ il vient

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2\rho\, |u|^2 = 0(e^{-2\nu\delta t}).$$

Il en résulte que

$$|u|^2 = 0(e^{-\nu\rho t}). \tag{3.9}$$

Puis de (3.8) nous déduisons que

$$\int_t^{+\infty} \|u(s)\|^2\, ds = 0(e^{-\nu\rho t}). \tag{3.10}$$

De (3.4), compte tenu de

$$|B(u,v)| \leq C_1 \|u\|\, |Av| \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + (\nu - 2C_1\|u\|)\, |Au|^2 = 0(e^{-2\nu\delta t}). \tag{3.12}$$

Nous allons montrer que (3.10) et (3.12) impliquent que $\|u\|$ décroit exponentiellement vers 0 pour t assez grand.

<u>Lemme 3.1.</u> : Soient y et z deux fonctions absolument continues, positives qui vérifient ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont quatre nombres > 0)

$$\frac{dy}{dt} + (\nu - \beta\sqrt{y})\, z \leq \gamma\, e^{-2\nu\delta t}, \tag{3.13}$$

$$\int_0^{+\infty} y(s)ds < +\infty, \quad 2\alpha y \leq z, \tag{3.14}$$

alors il existe un temps t_o

$$t_o \geq \frac{1}{2\nu\delta} \operatorname{Log}\left(\frac{\nu\,\alpha^3}{4\beta^2}\right), \tag{3.15}$$

tel que pour $t \geq t_o$

(3.16) $\quad \nu - \beta \sqrt{y} \geq \frac{\nu}{2}.$

Nous reportons la preuve de ce Lemme en fin de démonstration.

De (3.12), à l'aide de $|Au|^2 \geq \lambda_1 \|u\|^2$, si nous posons $y = \|u\|^2$, $z = |Au|^2$; par application du Lemme 3.1 il résulte de (3.16) que (3.12) entraîne :

(3.17) $\quad \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \nu |Au|^2 = 0(e^{-2\nu\delta t})$

pour $t \geq t_o$.

Ainsi de (3.17) nous déduisons l'existence d'un réel strictement positif ρ_1 tel que

(3.18) $\quad \|u\|^2 = 0(e^{-\nu\rho_1 t}) \quad t \geq t_o,$

(3.19) $\quad \int_t^{+\infty} |Au(s)|^2 \, ds = 0(e^{-\nu\rho_1 t}) \quad t \geq t_o .$

Il reste à montrer que $\int_t^{+\infty} |Au(s)| ds$ converge, or si nous notons $F(t) = \int_t^{+\infty} |Au(s)|^2 ds$, d'après l'inégalité d'Young

(3.20) $\quad 2|Au(s)| \leq e^{-\frac{\nu\rho_1}{2} s} + e^{\frac{\nu\rho_1}{2} s} |Au(s)|^2 ,$

puis $\int_t^{+\infty} e^{\frac{\nu\rho_1}{2} s} |Au(s)|^2 ds = - \int_t^{+\infty} e^{\frac{\nu\rho_1}{2} s} F'(s) ds =$

$e^{\frac{\nu\rho_1}{2} t} F(t) + \int_t^{+\infty} e^{\frac{\nu\rho_1}{2} s} F(s) ds .$

Alors

$$\int_t^{+\infty} e^{\frac{\nu\rho_1}{2} s} |Au(s)|^2 ds = 0(e^{-\frac{\nu\rho_1}{2} t}) + 0(e^{-\frac{\nu\rho_1}{2} t}) ,$$

et (3.7) est vérifié.

Il nous reste à prouver le Lemme 3.1.

D'après (3.14) il existe un nombre $t_o \geq \frac{1}{2\nu\delta} \text{Log} \left(\frac{\alpha\nu^3}{4\beta^2}\right)$ tel que $y(t_o) < \frac{\nu^2}{4\beta^2}$. Si la condition (3.16) n'était pas réalisée, l'ensemble $\{ \xi \geq t_o, y(\xi) = \frac{\nu^2}{4\beta^2}\}$ serait non vide.

Soit alors $\xi_o = \min \ \{\xi \geq t_o, y(\xi) = \frac{\nu^2}{4\beta^2}\}$,

$$\text{(3.21)} \qquad \text{pour } \xi \in [t_o, \xi_o[\quad y(\xi) < \frac{\nu^2}{4\beta^2}, \; y(\xi_o) = \frac{\nu^2}{4\beta^2} .$$

Lorsque $\xi \in [t_o, \xi_o]$, d'après (3.13)

$$\frac{dy}{dt} + \alpha\nu\, y \leq \gamma\, e^{-2\nu\delta t}$$

qui s'intègre entre $[\xi - \varepsilon, \xi_o]$ $(0 < \varepsilon \leq \xi_o - t_o)$

$$y(\xi_o)\, e^{\alpha\nu\xi_o} - y(\xi_o-\varepsilon) e^{\alpha\nu(\xi_o-\varepsilon)} \leq \gamma \int_{\xi_o-\varepsilon}^{\xi_o} e^{-(2\delta-\alpha)\nu t} dt$$

alors d'après (3.21)

$$\text{(3.22)} \qquad y(\xi_o) \leq \frac{\nu^2}{4\beta^2}\, e^{-\nu\alpha\varepsilon} + \gamma\, e^{-\nu\alpha\xi_o} \int_{\xi_o-\varepsilon}^{\xi_o} e^{-(2\delta-\alpha)\nu t}\, dt .$$

Soit $\phi(\varepsilon)$ le second membre de (3.22);

$$\phi(0) = \frac{\nu^2}{4\,\beta^2} \quad \text{et} \quad \phi'(0) = -\frac{\alpha\nu^3}{4\,\beta^2} + \gamma\, e^{-2\nu\delta\xi_o} .$$

Compte tenu de $\xi_o > t_o$ et de (3.15), $\phi'(o) < 0$ ce qui prouve qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ petit tel que $\phi(\varepsilon_o) < \phi(o) = \frac{\nu^2}{4\beta^2}$ alors (3.22) conduit à $y(\xi_o) \leq \phi(\varepsilon_o) < \frac{\nu^2}{4\beta^2}$ ce qui contredit (3.21).

Le Lemme 3.1 est ainsi démontré. □

Remarque 3.1 : Dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'existence de u vérifiant (3.6) peut être obtenu lorsque f vérifie (3.5) par la méthode de Faedo-Galerkin (cf. R. TEMAM [1,3]).

Nous construisons ainsi une suite (u_m) qui vérifie les inégalités d'énergie (3.4) (le signe = est à remplacer par $\leq$) et la preuve donnée à la Proposition 3.1 s'applique à (u_m) au lieu de u. Nous obtenons ainsi qu'il existe $T > 0$ tel que (u_m) vérifie (3.6) et cette suite reste bornée uniformément par rapport à m dans ces espaces. En passant à la limite, l'existence de u vérifiant (3.4)-(3.6) est assurée. □

III.2 - Comportement asymptotique dans le cas où f(t) est une exponentielle décroissante.

Dans ce paragraphe nous supposons que f(t) est de la forme

(3.23) $f(t) = f\, e^{-\nu\delta t}$, $f \in H$, $\delta > 0$.

La condition (3.2) est alors vérifiée et en vertu du Théorème 3.1, nous savons qu'il existe une solution forte sur $[t_o, +\infty[$ de l'équation (3.1). Remarquons que d'après (3.23), u solution de (3.1) sur $[t_o, +\infty[$ vérifie en outre (cf. C. GUILLOPÉ [1] , J.M. GHIDAGLIA [1]) $u \in C^\infty([t_o, +\infty[; D(A))$.

Nous désignons par $\mathcal{O}_f$ l'ensemble des éléments u^o de V tels que l'équation (3.1) avec la condition initiale (3.2) soit telle que

(3.24) $u \in C^\infty(]0, +\infty[; D(A))$.

En fait il suffit de s'assurer que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; V)$ pour que (3.24) ait lieu. Dans le cas des équations de Navier-Stokes en dimension 2 d'espace (c'est aussi le cas pour les équations de la Thermohydraulique et celles de la Magnetohydrodynamique) nous savons - cf. J.L. LIONS [1] , R. TEMAM [1,3],... - que $\mathcal{O}_f = V$.

Dans le cas de la dimension 3, nous savons que $\mathcal{O}_f$ est un ouvert de V qui contient 0 (1).

La Proposition 3.1 montre que quel que soit $u^o \in H$, il existe un temps t_o tel que u solution de (3.1)-(3.5) vérifie $u(t_o) \in \mathcal{O}_{fe^{-\nu\delta t_o}}$.

Définition 3.1 : Etant donné $\delta > 0$ et $f \in H$ nous dirons que $f(t) = f\, e^{-\nu\delta t}$ est résonnant lorsque $\delta \in \sigma(A)$ et $f_\delta \neq 0$ (2).

Nous allons préciser le comportement asymptotique de u(t) lorsque $t \to +\infty$ (noter que ce comportement est identique à celui obtenu dans le cas linéaire).

(1) Le problème qui consiste à savoir si $\mathcal{O}_f = V$ est ouvert dans ce cas.

(2) f_λ désigne la projection de f sur $\mathrm{Ker}(A-\lambda)$ lorsque $\lambda \in \sigma(A)$.

Théorème 3.1. : Soit $f \in H$, $f \neq 0$, quel que soit $u^o \in \mathcal{O}_f$, la limite

(3.25) $$\lim_{t \to +\infty} - \frac{\operatorname{Log}|u(t)|}{t} = \nu \Lambda^\alpha(u^o)$$

existe et $\Lambda^\alpha(u^o) \in \{\delta\} \cup (\sigma(A) \cap [\lambda_1, \delta])$.

(i) Si $\Lambda^\alpha(u^o) < \delta$, il existe un vecteur propre de A, u^α tel que

(3.26) $$u(t) \sim u^\alpha e^{-\nu\Lambda^\alpha(u^o)t} \quad \text{dans } D(A).$$

(ii) Si $\Lambda^\alpha(u^o) = \delta$,

dans le cas non résonnant, il existe $u^\alpha \in D(A)$ tel que

(3.27) $$u(t) \sim u^\infty e^{-\nu\delta t} \quad \text{dans } D(A) ;$$

dans le cas résonnant

(3.28) $$u(t) \sim \frac{1}{\nu} t f_\delta e^{-\nu\delta t} \quad \text{dans } D(A).$$

Remarque 3.2. :

(i) Si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ alors les équivalences précédentes ont lieu dans $H^m(\Omega)$ pour tout $m \geq 0$ (application du Théorème 2.4).

(ii) A l'aide des Théorèmes 2.2 et 2.3 nous pourrions donner le début du développement asymptotique de $u(t)$.

(iii) Nous introduisons la famille finie de sous variétés de V :

(3.29) $$M^{\lambda_1} \subset M^{\lambda_2} \subset \ldots \subset M^\delta \equiv \mathcal{O}_f$$

où

$$M^\rho \overset{\text{def}}{\equiv} \{ u^o \in \mathcal{O}_f , \ \Lambda^\alpha(u^o) \geq \rho \} .$$

Ces variétés jouent le rôle de celles introduites par C. FOIAS et J.C. SAUT [1, 2] dans le cas $f = 0$.

Preuve du Théorème 3.1. Donnons nous $f \in H$, $f \neq 0$ et $u^o \in \mathcal{O}_f$.

1°) Le cas non résonnant.

Nous désignons par g l'élément de D(A)

$$(3.29)\qquad g = \sum_{\lambda_i \neq \delta} \frac{f_{\lambda_i}}{\nu(\lambda_i - \delta)} \ ;$$

g est solution de l'équation

$$\nu(A-\delta)g = f \ .$$

Nous définissons alors

$$(3.30)\qquad v(t) = u(t) - g\, e^{-\nu\delta t}, \quad \sigma(t) = f\, e^{-\nu\delta t} \ .$$

Avec ces notations, compte tenu de (3.1) et (3.23),

$$(3.31)\qquad \frac{dv}{dt} + \nu A v + B(v+\sigma g, v+\sigma g) = 0,$$

$$(3.32)\qquad \frac{d\sigma}{dt} + \nu\delta\sigma = 0.$$

Il est alors naturel d'introduire

$$(3.33)\qquad Y = H \times \mathbb{R}, \quad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \ \vec{B}(\phi_1,\phi_2) = \begin{bmatrix} B(v_1 + g\sigma_1, v_2 + g\sigma_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

où ϕ désigne le couple $(v,\sigma) \in Y$.

Dans ces conditions $D(\mathscr{A}) = D(A) \times \mathbb{R}$ et (3.31)-(3.32) s'écrivent

$$(3.34)\qquad \frac{d\phi}{dt} + \nu \mathscr{A}\phi + \vec{B}(\phi,\phi) = 0.$$

Il est alors immédiat que $\vec{B}$ vérifie (2.1) où $X = V \times \mathbb{R}$.
Pour appliquer le Théorème 2.1, nous devons vérifier (2.5),

$$|\mathscr{A}\phi|^2 \overset{\text{def}}{\equiv} |Av|^2 + \delta|\sigma|^2 = |A(u(t)-g\, e^{-\nu\delta t})|^2 + \delta|f|^2 e^{-2\nu\delta t},$$

$$(3.35)\qquad |\mathscr{A}\phi|^2 \leq 2|Au|^2 + (2|Ag|^2 + \delta|f|^2)e^{-2\nu\delta t} \ .$$

Compte tenu de (2.7) cette dernière inégalité prouve (2.5) : il existe donc $(v^\alpha,\sigma^\alpha) \neq 0$ et Λ^α tels que

$$(3.36)\quad \begin{cases} e^{\nu\Lambda^{\alpha} t}(v,\sigma) \sim (v^{\alpha},\sigma^{\alpha}) & \text{dans } D(A)\times \mathbb{R}, \\ Av^{\alpha} = \Lambda^{\alpha} v^{\alpha} \quad , \quad \delta\sigma^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}\sigma^{\alpha}. \end{cases}$$

(i) Si $\Lambda^{\alpha} \neq \delta$ alors $\sigma^{\alpha} = 0$ et $v^{\alpha} \neq 0$.

De $\sigma = f\, e^{-\nu\delta t} = o(e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t})$, nous déduisons que $\Lambda^{\alpha} < \delta$ et de $u = v^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t} + g\, e^{-\nu\delta t} + o(e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t})$ nous déduisons (3.26).

(ii) Si $\Lambda^{\alpha} = \delta$ alors $v^{\alpha} = 0$ ou $v^{\alpha} \neq 0$, $g_{\delta} = 0$.

Lorsque $v^{\alpha} = 0$, $u \sim g\, e^{-\nu\delta t}$,
lorsque $v^{\alpha} \neq 0$, $u \sim (v^{\alpha} + g) e^{-\nu\delta t}$ (remarquer que $(v^{\alpha} + g)_{\delta} = v^{\alpha} \neq 0$) ;
nous avons ainsi montré (3.27).

2°) Le cas résonnant.
Au lieu de (3.30) nous notons

$$(3.37)\qquad v(t) = u(t) - g(t)\, e^{-\nu\delta t} \quad , \quad \sigma(t) = f\, e^{-\nu\delta t}$$

où

$$(3.38)\qquad g(t) = \frac{1}{\nu}\, t f_{\delta} + \sum_{\lambda_i \neq \delta} \frac{f_{\lambda_i}}{\nu(\lambda_i - \delta)}.$$

Remarquons que $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ et

$$(3.39)\qquad \frac{d}{dt} g(t) + \nu(A-\delta) g(t) = f\, e^{-\nu\delta t} \quad ;$$

Il en résulte que ϕ vérifie (3.33) où

$$(3.40)\qquad \vec{B}(t)\,(\phi_1,\phi_2) = \begin{bmatrix} B(v_1 + g(t)\sigma_1,\ v_2 + g(t)\sigma_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui est un polynôme du type (2.39) avec $N = 2$.
Compte tenu de (3.19) il résulte que

$$(3.41)\qquad \int_0^{+\infty} s^2 |Au(s)|\, ds < +\infty \quad , \quad \int_0^{+\infty} s^4\, |Au(s)|^2\, ds \ ,$$

et d'après (3.35) nous déduisons que (3.41) est vérifié par $\mathcal{A}$.
Nous pouvons appliquer le Théorème 2.1 (cf. Remarque 2.2 (ii)) et
(3.27)-(3.28) s'obtiennent aisément.

Nous achevons la preuve du Théorème 3.1 en notant que dans les deux cas, (3.25) se déduit trivialement de (3.27)-(3.28). $\square$

IV - EQUATIONS DE LA THERMOHYDRAULIQUE AVEC FORCES NULLES

IV.1 - Position du problème

Un fluide incompressible et visqueux remplit un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), il est soumis à une force extérieure f et à des sources de chaleur s. $\theta(x,t)$ représente la température au point x à l'instant t.

Les équations sont alors (cf. P.C. FIFE [1] , P.C. FIFE et D.D. JOSEPH [1] par exemple) dans le cadre de l'approximation de Boussinesq :

$$(4.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + \sigma\theta + \nabla p = f ,$$

$$(4.2) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + (u.\nabla)\theta - \kappa\Delta\theta = s ,$$

$$(4.3) \qquad \nabla.u = 0 ,$$

$$(4.4) \qquad u(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0,T[,$$

$$(4.5) \qquad \theta(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0,T[.$$

Ici κ représente le coefficient de Fourier du fluide et σ un vecteur <u>fixe</u> de $\mathbb{R}^d$, parallèle à la verticale descendante, mesurant le couplage température-fluide.
Nous reprenons les notations du paragraphe II.3 et nous désignons par $\Sigma \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H)$ l'opérateur

$$(4.6) \qquad \theta \to P(\sigma.\theta).$$

Nous notons A_1 l'opérateur $-\Delta$ sur $H^1_0(\Omega)$ et $B_1 \in \mathcal{L}(V \times H^1_0(\Omega), H^{-1}(\Omega))$

$$(4.7) \qquad \langle B_1(u,\theta),\eta\rangle = \int_\Omega u_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \eta \, dx .$$

Il est alors aisé de vérifier que

(4.8) $\quad \forall\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \Sigma A_1\theta = A\Sigma\theta$

D'autre part lorsque $\sigma \neq 0$, l'opérateur Σ est injectif sur $H_0^1(\Omega)$. Cela résulte de la Proposition :

Proposition 4.1. : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Etant donné $\sigma \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \neq 0$ et $\theta \in H_0^1(\Omega)$, s'il existe $q \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que

$$\sigma\theta = \nabla q$$

alors $\theta = 0$.
La preuve de cette proposition est immédiate. □

Remarque 4.1. :
(i) Si nous prenons pour Ω la bande $\Omega = \mathbb{R} \times]0,1[$, $\sigma = (0,1)$ et $\theta(x) = f(x_2)$ avec $f(o) = f(1) = 0$ alors $\sigma\theta = \nabla(\int_0^{x_2} f(s)ds)$ et la conclusion de la Proposition 4.1 est fausse.

(ii) Dans le cas des conditions aux limites périodiques en espace la Proposition 4.1 reste vraie si σ n'est parallèle à aucune des arêtes du parallélipipède de périodicité. Elle est fausse dans le cas contraire. □

Dans le cas $f = 0$, $s = 0$ les équations (4.1)-(4.5) s'écrivent sous forme fonctionnelle :

(4.9) $\quad \dfrac{du}{dt} + \nu Au + B(u,u) + \Sigma\theta = 0,$

(4.10) $\quad \dfrac{d\theta}{dt} + \kappa A_1\theta + B_1(u,\theta) = 0,$

avec les conditions initiales

(4.11) $\quad u(0) = u^o \in V, \quad \theta(0) = \theta^o \in H_0^1(\Omega).$

Nous désignons alors par $\mathcal{G}$ l'ouvert formé par les couples $(u^o,\theta^o) \in V \times H_0^1(\Omega)$ tels que (4.9)-(4.11) possèdent une solution appartenant à $C([0,+\infty[; V \times H_0^1(\Omega))$. Alors d'après J.M. GHIDAGLIA [1]

(4.12) $(u,\theta) \in C^{\infty}(]0, +\infty[; H^2(\Omega)^{d+1})$.

Proposition 4.2. : Avec les notations qui précèdent, il existe C et $\rho > 0$ tels que

(4.13) $$\|u(t)\| + \|\theta(t)\| \leq C\, e^{-\rho t} \quad ,$$

(4.14) $$t \geq 0, \int_t^{+\infty} (|Au(s)| + |Au(s)|^2 + |A_1\theta(s)| + |A_1\theta(s)|^2)ds \leq C\, e^{-\rho t} \; .$$

Preuve : De (4.10) nous déduisons que $(b_1(u,\theta,\theta) = 0)$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta|^2 + \kappa \quad \|\theta\|^2 = 0$$

et alors $|\Sigma\theta| = 0(e^{-\kappa\omega_1 t})$, $\omega_1 = \underset{\theta \in H_0^1(\Omega)}{\mathrm{Min}} \dfrac{\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx}{\int_\Omega \theta^2\, dx}$.

En appliquant alors la Proposition 3.1 avec $f(t) = -\Sigma\theta(t)$ nous déduisons que

$$t \geq t_1, \int_{t_1}^{+\infty} (|Au| + |Au|^2) ds \leq C_1\, e^{-\rho_1 t} \; , \; C_1 > 0, \; \rho_1 > 0.$$

Puis en revenant à (4.10) ces dernières estimations permettent de prouver (4.13)-(4.14). □

IV. 2 - Comportement pour $t \to +\infty$

La Proposition 4.3 nous permet de donner le comportement de $\theta(t)$.

<u>Proposition 4.3.</u> : <u>Lorsque $\theta^o \neq 0$, il existe un couple valeur propre vecteur propre $(\tilde{\omega},\tilde{\theta})$ de A_1 tel que</u>

(4.15) $\quad \theta(t) \sim \tilde{\theta}\, e^{-\kappa\tilde{\omega}t}$ <u>dans</u> $H_0^1(\Omega)$,

(4.16) $\quad A_1\tilde{\theta} = \tilde{\omega}\,\tilde{\theta} \neq 0$.

<u>Preuve</u> : Nous allons appliquer le Théorème 1.3 avec $Y = L^2(\Omega)$, $\mathscr{A} = A_1$, $D(A_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

De (4.10) nous déduisons que

$$\left|\frac{d\theta}{dt} + \kappa\, A_1\theta\right| \leq C|Au|\,\|\theta\|$$

et (4.14) prouve (1.31) et (1.36) pour $n = C|Au|$. □

<u>Remarque 4.2.</u> : Si $\theta^o = 0$, en vertu du Théorème 1.2, $\theta \equiv 0$ et nous sommes ramenés au cas des équations de Navier-Stokes étudiées au pagraphe II.3. Nous supposerons donc $\theta^o \neq 0$ dans tout ce qui suit. □

Ainsi, d'après (4.15), l'équation (4.9) apparaît comme une équation de Navier-Stokes avec force exponentiellement décroissante. Une approximation consisterait donc à remplacer $\theta(t)$ par $\tilde{\theta}e^{-\kappa\tilde{\omega}t}$, le paragraphe 3.2 nous permet de connaître $u(t)$ dans ce cas.
Nous allons dans ce qui suit sans aucune approximation donner le comportement de $u(t)$ [(1)] :

---

(1) Remarquer que le résultat exact obtenu au Théorème 4.1 est celui que nous aurions obtenu au Théorème 3.1 avec $f(t) = -\Sigma\tilde{\theta}e^{-\kappa\tilde{\omega}t}$ de manière approchée.

Théorème 4.1. : Quel que soit $(u^o,\theta^o) \in \mathcal{O}$, $\theta^o \neq 0$; la limite

(4.17) $$\lim_{t \to +\infty} - \frac{\mathrm{Log}|u(t)|}{t} = \nu\Lambda^{\alpha}(u^o)$$

existe et $\Lambda^{\alpha}(u^o) \in \{ \frac{\kappa}{\nu}\tilde{\omega} \} \cup (\sigma(A) \cap [\lambda_1, \frac{\kappa}{\nu}\tilde{\omega}])$.

Il existe $u^{\alpha} \neq 0$ tel que

(i) si $\nu \neq \kappa$ ou $\nu = \kappa$ et $\Lambda^{\alpha} < \tilde{\omega}$

(4.18) $$u \sim u^{\alpha} e^{-\nu\Lambda^{\alpha} t} \quad \text{dans } D(A),$$

(ii) si $\nu = \kappa$ et $\Lambda^{\alpha} = \tilde{\omega}$

(4.19) $$u \sim -t\, \Sigma\, \tilde{\theta}\, e^{-\kappa\tilde{\omega}t} \quad \text{dans } D(A).$$

De plus l'équivalence (4.15) a lieu dans $H^2(\Omega)$.

Remarque 4.3. : (i) La preuve du théorème 4.1 montrera que u^{α} est un vecteur propre de A associé à Λ^{α} lorsque $\Lambda^{\alpha} < \frac{\kappa\tilde{\omega}}{\nu}$.

(ii) Les équivalences obtenues au Théorème 4.1 sont valables dans $H^m(\Omega)$, $\forall m \geq 0$.

Démonstration du Théorème 4.1. :

Comme pour le Théorème 3.1 nous allons introduire une nouvelle fonction inconnue qui remplace u(t). A cet effet nous notons

(4.20) $$S = A^{-1}\Sigma$$

qui est un opérateur régularisant : $S \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), D(A))$.

1°) Le cas $\nu \neq \kappa$

Nous prenons pour nouvelle fonction

$$v(t) = u(t) - \frac{S\,\theta(t)}{\kappa - \nu},$$

d'après (4.9)-(4.10) :

$$\frac{dv}{dt} + \nu Av + B\left(v + \frac{S\theta}{\kappa-\nu}, v + \frac{S\theta}{\kappa-\nu}\right) - S B_1\left(v + \frac{S\theta}{\kappa-\nu}, \theta\right) = (\nu AS - \kappa SA_1 + \Sigma)\theta \quad . \tag{4.21}$$

D'après (4.8) et (4.20) le second membre de (4.21) est nul.

Nous désignons par ϕ le couple (v,θ), $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{\nu} A_1 \end{bmatrix}$,

$$\vec{B}(\phi_1,\phi_2) = \begin{bmatrix} B\left(v_1 + \frac{S\theta_1}{\kappa-\nu}, v_2 + \frac{S\theta_2}{\kappa-\nu}\right) - S B_1\left(v_1 + \frac{S\theta_1}{\kappa-\nu}, \theta_2\right) \\ B_1\left(v_1 + \frac{S\theta_1}{\kappa-\nu}, \theta_2\right) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

les équations (4.9)-(4.10) s'écrivent alors

$$\frac{d\phi}{dt} + \nu \mathcal{A}\phi + \vec{B}(\phi,\phi) = 0 \ . \tag{4.23}$$

Nous allons appliquer le Théorème 2.1 à (4.23) :

<u>Proposition 4.4.</u> : Il existe un couple $(\Lambda^\alpha,\phi^\alpha)$ valeur propre vecteur propre de $\mathcal{A}$ tel que

$$e^{\nu\Lambda^\alpha t}\phi(t) \to (v^\alpha,\sigma^\alpha) \equiv \phi^\alpha \quad \text{dans } D(A)\times D(A_1), \tag{4.24}$$

$$Av^\alpha = \Lambda^\alpha v^\alpha, \quad \frac{\kappa}{\nu} A_1 \sigma^\alpha = \Lambda^\alpha \sigma^\alpha . \tag{4.25}$$

<u>Preuve</u> : Dans le cas présent, $X = V \times H_0^1(\Omega)$ et (2.1) résulte des estimations

$$|B(u,v)| + |B(v,u)| \le C_1|Au| \, \|v\| ,$$

$$|B_1(u,\theta)| \le C_2|Au| \, \|\theta\| ,$$

$$|AS\theta| \le C_3 |\theta| .$$

D'autre part (4.14) montre que (2.5) est vérifié ; nous pouvons appliquer le Théorème 2.1, la Proposition 4.4 en découle. □

Revenons à la preuve du Théorème 4.1.
De (4.15) et (4.24) nous déduisons que

$$(4.26)\quad \begin{cases} u(t) = v^{\alpha}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} + \dfrac{S\,\theta^{\alpha}}{\kappa-\nu}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} + o(e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}), \\ \theta(t) = \theta^{\alpha}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} = \tilde{\theta}\, e^{-\kappa\tilde{\omega}t} + o(e^{-\kappa\tilde{\omega}t}). \end{cases}$$

(i) Si $\nu\Lambda^{\alpha} \neq \kappa\tilde{\omega}$, de (4.26) et $\tilde{\theta} \neq 0$ il résulte que $\theta^{\alpha} = 0$ alors $v^{\alpha} \neq 0$ et $\nu\Lambda^{\alpha} < \kappa\tilde{\omega}$, $Av^{\alpha} = \Lambda^{\alpha} v^{\alpha}$: (4.18) est prouvé dans ce cas.

(ii) Si $\nu\Lambda^{\alpha} = \kappa\tilde{\omega}$, de $(4.26)_2$ il vient $\tilde{\theta} = \theta^{\alpha}$ et de $(4.26)_1$

$$u(t) = \left(v^{\alpha} + \frac{S\theta^{\alpha}}{\kappa-\nu}\right) e^{-\kappa\tilde{\omega}t} + (e^{-\kappa\tilde{\omega}t}).$$

Lorsque $v^{\alpha} + \dfrac{S\theta^{\alpha}}{\kappa-\nu} \neq 0$, (4.18)$_{\alpha}$ est prouvé. Nous reviendrons ultérieurement (cf. page 56) au cas $v^{\alpha} + \dfrac{S\theta^{\alpha}}{\kappa-\nu} = 0$.

<u>2°) Le cas $\nu = \kappa$</u> .

Dans ce cas nous prenons

$$(4.27)\quad v(t) = u(t) + t\,\Sigma\,\theta(t),$$

$$\vec{B}(t)(\phi_1,\phi_2) = \begin{bmatrix} B(v_1 - t\,\Sigma\theta_1, v_2 - t\,\Sigma\theta_2) + t\,B_1(v_1 - t\,\Sigma\theta_1,\theta_2)) \\ B_1(v_1 - t\,\Sigma\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Avec les autres notations précédentes inchangées, (4.9)-(4.10) s'écrivent

$$(4.28)\quad \frac{d\phi}{dt} + \nu\,\mathcal{A}\,\phi + \vec{B}(t)(\phi,\phi) = 0.$$

De manière identique au cas $\nu \neq \kappa$, nous pouvons établir dans ce cas en vertu du Théorème 2.1 (cf. Remarque 2.2 (ii))la Proposition 4.4.
Il en résulte

$$(4.29)\quad \begin{cases} u(t) = v^{\alpha}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} - \dfrac{t\Sigma\theta^{\alpha}}{\kappa-\nu}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} + o(te^{-\Lambda^{\alpha}t}), \\ \theta(t) = \theta^{\alpha}\, e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} + o(e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}) = \tilde{\theta}\, e^{-\nu\tilde{\omega}t} + o(e^{-\nu\tilde{\omega}t}). \end{cases}$$

(i) Si $\Lambda^{\alpha} \neq \tilde{\omega}$, $\theta^{\alpha} = 0$, $v^{\alpha} \neq 0$ et $\Lambda^{\alpha} < \tilde{\omega}$, $Av^{\alpha} = \Lambda^{\alpha} v^{\alpha}$: (4.18) est prouvé dans ce cas.

(ii) Si $\Lambda^{\alpha} = \tilde{\omega}$, d'après la Proposition 4.1, $\Sigma\tilde{\theta} \neq 0$ et par $(4.29)_1$

$$u(t) = - t \frac{\Sigma\tilde{\theta}}{\kappa-\nu} e^{-\nu\Lambda^{\alpha}t} + o(te^{-\nu\Lambda^{\alpha}t}).$$

Etant donné que (4.24) a lieu dans $D(\mathcal{A})$, (4.15) a bien lieu dans $D(A_1)$.

3°) Revenons au cas $\nu \neq \kappa$, $\nu\Lambda^{\alpha} = \kappa\tilde{\omega}$.
Suivant la démarche de C. FOIAS et J.C. SAUT [3] nous introduisons $\{\mu_i\}_{i\geq 1}$ le semi groupe additif engendré par les $\{\Lambda_j\}_{j\geq 1}$ (valeurs propres de $\mathcal{A}$) et ordonnées en i croissant.
D'après ces auteurs, il existe des polynômes $\{\phi_j(t)\}$ à valeurs dans D(A) de degré $\leq j-1$ tels que pour tout $N \geq 1$, ϕ admet le comportement asymptotique dans D(A) :

$$(4.30) \qquad \phi(t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(t)\, e^{-\mu_j t} + O(e^{-(\mu_N+\varepsilon_N)t})$$

où $\varepsilon_N > 0$.
Il en résulte que u admet un développement similaire où

$$u_j(t) = v_j(t) + \frac{S\theta_j(t)}{\kappa - \nu}$$

et $\phi_j = (v_j, \theta_j)$.
Si nous montrons qu'il existe un entier j tel que le polynôme $u_j(t)$ n'est pas identiquement nul alors (4.18) est prouvé.
S'il n'en est pas ainsi,

$$(4.31) \qquad \forall\mu \in \mathbb{R}_+ \quad u(t) = o(e^{-\mu t}) \quad \text{dans } D(A).$$

De (4.9) et (4.15) nous déduisons alors que

$$\frac{du}{dt} \sim - \Sigma\, \tilde{\theta}\, e^{-\kappa\tilde{\omega}t} \quad \text{dans } H.$$

En particulier $\frac{d}{dt}(u,\Sigma\tilde{\theta}) \sim + \ |\Sigma\tilde{\theta}|^2 \ e^{-\kappa\tilde{\omega}t}$

et alors pour t assez grand ($t \geq T$)

$$\frac{d}{dt}(u,\Sigma\tilde{\theta}) \leq -\frac{1}{2} |\Sigma\tilde{\theta}|^2 \ e^{-\kappa\tilde{\omega}t}$$

En intégrant cette inégalité ($t \geq T$) de t à $+\infty$,

$$(u(t),\Sigma\tilde{\theta}) = -\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}(u(s),\Sigma\tilde{\theta})ds \geq \frac{1}{2} |\Sigma\tilde{\theta}|^2 \int_t^{+\infty} e^{-\kappa\tilde{\omega}s} \, ds$$

soit

$$(u(t),\Sigma\tilde{\theta}) \geq \frac{|\Sigma\tilde{\theta}|^2}{2k\tilde{\omega}} \ e^{-\kappa\tilde{\omega}t} ,$$

ce qui contredit (4.31). □

ANNEXE : DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES

(cf. L. Schwartz [2])

Soient a et b deux nombres $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et soit X un espace de Banach. Pour α, $1 \leq \alpha < +\infty$, $L^{\alpha}(a,b;X)$ désigne l'espace des fonctions de $[a,b]$ dans X dont la norme est dans $L^{\alpha}(a,b)$. Cet espace est un Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^{\alpha}(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^{\alpha} \right)^{1/\alpha} .$$

L'espace $L^{\infty}(a,b;X)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées de $[a,b]$ dans X , la norme

$$\|f\|_{L^{\infty}(a,b;X)} = \underset{t\in[a,b]}{\text{ess}} \quad \sup \|f(t)\|_X$$

en fait un espace de Banach.

REFERENCES

[1] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[1] T. AUBIN, Nonlinear Analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations, Springer-Verlag.

[1] A. AVEZ & Y. BAMBERGER, Mouvements sphériques des fluides visqueux incompressibles, Journal de mécanique vol. 17 n° 1 (1978).

[1] C. BARDOS & L. TARTAR, Sur l'unicité retrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, A.R.M.A. 50, (1973), 10-25.

[1] G. DUVAUT & J.L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris 1972.

[2] G. DUVAUT & J.L. LIONS, Inéquations en thermoélasticité et M.H.D., A.R.M.A. 46, (1972), pp. 241-279.

[1] D. EBIN & J. MARSDEN, Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid, Annals of Math. 92, 1970, pp. 102-163.

[1] P.C. FIFE, The Benard Problem for general Fluid Dynamical Equations and Remarks on the Bousinesq approximation, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 20, n° 4, 1970.

[1] P.C. FIFE & D.D. JOSEPH, Existence of convective Solutions of the generalized Benard Problem which are analytic in their norm, A.R.M.A., vol. 33, pp. 116-138, 1969 .

[1] C. FOIAS & J.C. SAUT, Asymptotic behavior as $t \to \infty$ of Solutions of N.S.E., Indiana University Mathematics Journal (à paraître).

[2] C. FOIAS & J.C. SAUT, On the smoothness of the Nonlinear Spectral Manifolds associated to the Navier Stokes Equations. Indiana University Mathematics Journal (à paraître)

[3] C. FOIAS & J.C. SAUT, Transformation fonctionnelle linéarisant les équations de Navier-Stokes, C.R.A.S. Serie I t.295 p.325-327

[1] J.M. GHIDAGLIA, Etude d'écoulements de fluides visqueux incompressibles : comportement pour les grands temps et applications aux attracteurs, Thèse Orsay et INRIA, Janvier 1984.

[1] C. GUILLOPE, Comportement à l'infini des solutions des équations de Navier-Stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs), Ann. Inst. Fourier. Grenoble 32.3 (1982) 1-37

[2] C. GUILLOPE, Thèse Orsay (1983)

[3] C. GUILLOPE, Remarques à propos du comportement lorsque $t \to \infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées a une force nulle. Bull.Soc.Math.France.111.fasc.II (1983).

[1] K. KHERIEF, à paraître, ORSAY.

[1] O.A. LADYSLENSKAYA, *Viscous Incompressible Flow,* Gordon and Breach (1964)

[1] J.L. LIONS & B. MALGRANGE., Sur l'unicité retrograde dans les problèmes paraboliques, Math.Scand.8 227-286 (1960)

[1] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions* Hermann, Paris 1957

[2] L. SHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I,II) Annales de l'Institut Fourier 7.1957 p 1-139 & 8, 1958 p 1-209

[1] M. SERMANGE & R. TEMAM, Some Mathematical Questions related to the M.H.D. Equations. Comm. on pure and applied Math. Vol XXXVI, 1983 p 634-664

[1] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod Paris (1969)

[1] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, 2nd Edition,* North-Holland 1979

[2] R. TEMAM, Behaviour at time t = 0 of the Solutions of Semi-Linear Evolution Equations. J. of differential equations 43, 73-92 (1982)

[3] R. TEMAM, Navier-Stokes Equations and non-linear Functional Analysis NSF/CBMS Regional Conferences series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1983.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique