



Vecteur de courant et fluides parfaits en aerodynamique numerique tridimensionnelle

Fadi El Dabaghi, Olivier Pironneau

► To cite this version:

Fadi El Dabaghi, Olivier Pironneau. Vecteur de courant et fluides parfaits en aerodynamique numerique tridimensionnelle. [Rapport de recherche] RR-0275, INRIA. 1984. inria-00076283

HAL Id: inria-00076283

<https://hal.inria.fr/inria-00076283>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt

BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 275

VECTEUR DE COURANT ET FLUIDES PARFAITS EN AÉRODYNAMIQUE NUMÉRIQUE TRIDIMENSIONNELLE

Fadi El DABAGHI
Olivier PIRONNEAU

Mars 1984

VECTEUR DE COURANT ET FLUIDES PARFAITS
EN AERODYNAMIQUE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNELLE*

Fadi El Dabaghi
Olivier Pironneau

-0-

RESUME

Partant des travaux de Bernardi et Dominguez sur l'unicité de la décomposition d'un champ de vecteur en un champ dérivant d'un potentiel et un champ dérivant d'un vecteur de courant, on se propose d'étudier le problème des conditions aux limites non homogènes et les applications aux écoulements non visqueux dans des tuyères ou autour de voilures.

On donne une méthode d'implémentation en éléments finis conformes et des essais numériques sur des cas non portants.

ABSTRACT

Starting from the work of Bernardi and Dominguez on the uniqueness of a stream vector for a divergence free vector field, we propose to study the boundary conditions and applications to inviscid flows in nozzles and around wing structures.

A conforming finite element implementation is given as well as numerical tests.

ERRATA

RAPPORT TECHNIQUE N° 275

VECTEUR DE COURANT ET FLUIDES PARFAITS
EN AERODYNAMIQUE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNELLE

-o-

Fadi El Dabaghi

Olivier Pironneau

-o-

Une erreur s'est glissée dans la démonstration du Théorème 4.2. Le résultat est correct à condition de remplacer $|n-n_h|_{o,\Gamma}$ par $|\sqrt{\pi_h}[(n-n_h)^2]|_{o,\Gamma}$ où π_h est l'interpolation P^1 par les sommets. Par ailleurs on a oublié de préciser que ψ est la solution exacte autour du même domaine que ψ_h (donc Ω polygonal). La formule (4.22) est fautive et doit être remplacée par

$$(4.22) \quad \left| \int_{\Gamma} n \times (\chi_h - \psi_h) \nabla \times \psi \, d\gamma \right| \leq |\nabla \times \psi|_{\infty, \Gamma} |\sqrt{\pi_h} (n \times n_h)^2|_{o, \Gamma} |\sqrt{\pi_h} ((\chi_h - \psi_h) \cdot n_h)^2|_{o, \Gamma}$$

on remplace (4.23) par

$$(4.23) \quad |\sqrt{\pi_h} [(\chi_h - \psi_h) \cdot n_h]^2|_{o, \Gamma} \leq C |\nabla (\chi_h - \psi_h)|_{o, \Omega}$$

Enfin (4.26) est remplacée par

$$\begin{aligned} a(\psi - \psi_h, \psi - \psi_h) &\leq Ch^2 \|\psi\|_{2, \Omega}^2 - a(\chi_h - \psi_h, \chi_h - \psi_h) \\ &\quad + \left[\left(\frac{C'}{h} + 1 \right) a(\chi_h - \psi_h, \chi_h - \psi_h) \right]^{1/2} |\sqrt{\pi_h} (n \times n_h)^2|_{o, \Gamma} \\ &\leq C''h^2 + C'''h a(\psi - \psi_h, \psi - \psi_h)^{1/2} \end{aligned}$$

Remarque : Ce résultat impose un raffinement en $h\sqrt{h}$ du maillage au voisinage des arêtes de Ω ou des "coins" pour avoir $|n-n_h|$ en $h\sqrt{h}$.

P L A N

0. - INTRODUCTION

1. - LE PROBLEME CONTINU

- 1.1 Le cas homogène
- 1.2 Le cas non homogène

2. - APPLICATIONS : ECOULEMENTS IRROTATIONNELS

- 2.1 Tuyères
- 2.2 Ailes

3. - APPLICATIONS : EQUATIONS TRANSSONIQUES STATIONNAIRES

- 3.1 Equations de base
- 3.2 Equations sur w
- 3.3 Equations sur ρ
- 3.4 Equations potentielles avec correction
- 3.5 Relations de discontinuités aux chocs
- 3.6 Conditions aux limites

4. - DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS ET ESSAIS NUMERIQUES

- 4.1 Discrétisation
- 4.2 Estimation d'erreurs
- 4.3 Mise en oeuvre informatique
- 4.4 Algorithme

5. - ESSAIS NUMERIQUES

INTRODUCTION

C'est un résultat bien connu d'analyse que d'exprimer un champ de vecteur u , a divergence nulle, comme le rotationnel d'un vecteur de courant ψ . Cette propriété est très utile en mécanique des fluides bidimensionnelle car ψ a seulement une composante non nulle et la dimension du problème est ainsi réduite. En dimension trois le vecteur de courant n'a pas été très employé jusqu'à maintenant, sans doute parce cette transformation ne réduit pas le nombre de variables comme en dimension deux mais probablement aussi parce que u ne définit pas ψ de façon unique.

Récemment plusieurs résultats nouveaux ont suscité un regain d'intérêt pour l'utilisation des vecteurs de courant en dimension trois. D'abord l'observation par les aérodynamiciens (Lacor et Hirsch [1], Sokhey [2], Papailou [3]) que dans certaines configurations on peut définir un ψ de façon unique ; ensuite et surtout les travaux de Bernardi [4] et Dominguez [5] sur l'unicité de ψ lorsqu'on lui rajoute une condition de divergence nulle. Une implémentation en éléments finis non conformes a été proposé par Nedelec [6].

Le but de cet article est de proposer une implémentation en éléments finis conformes de la méthode et d'étudier quelques applications à l'aérodynamique en fluide parfait. Au paragraphe 1 on rappelle la méthode et on étend les résultats aux conditions aux limites non homogènes. On montre ainsi que si ψ n'est pas donné au bord alors la condition de glissement du fluide implique la résolution d'un problème de Laplace-Beltrami sur la frontière. Comme les surfaces avec angles sont fréquentes on étudie aussi les conditions de transmission aux angles.

Au paragraphe 2, on applique les résultats de décomposition aux deux problèmes classiques de l'aérodynamique : écoulement dans une tuyère, écoulement autour d'une voilure. Au paragraphe 3 on montre comment les résultats de décomposition peuvent être utilisés pour calculer un correcteur du potentiel transsonique dans le cas des équations d'Euler stationnaires avec chocs forts ; la méthode ainsi obtenue, concurrente de celle proposée par Amara [7], généralise les cas particuliers envisagés par Lacor et Hirsch [1].

et Sokhey [2]. Enfin au paragraphe 4 et 5 on présente l'implémentation et les résultats numériques d'une méthode de discrétisation par éléments finis conformes d'ordre 1.

1. - LE PROBLEME CONTINU

Etant donné un champ de vecteur u , on se propose d'étudier la décomposition.

$$(1.1) \quad \underset{\sim}{u}(x) = \nabla\phi(x) + \underset{\sim}{\nabla\times}\psi(x), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 .$$

Cette décomposition n'est pas unique mais on va chercher des conditions sur ϕ et ψ pour qu'elle le soit ; le calcul de ϕ ou de ψ sera alors un problème bien posé.

Pour faciliter l'exposé on procède par étape en étudiant d'abord le cas où $u \cdot n$ est nul au bord du domaine Ω de définition de u qu'on suppose simplement connexe. Ces résultats sont sous-jacents dans Bernardi [4].

1.1. - LE CAS HOMOGENE

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , **simplement connexe** et de frontière Γ Lipchitz et C^2 par morceaux ; $n(x)$ désignera la normale extérieure à Γ et $s^1(x)$, $s^2(x)$ deux tangentes formant avec $n(x)$ un repère orthonormé direct. On pose :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} H(\nabla., \Omega) &= \{u \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\} \\ H(\nabla \times, \Omega) &= \{u \in L^2(\Omega)^3 : \nabla \times u \in L^2(\Omega)^3\} \\ H(\Delta, \Omega) &= \{\phi \in H^1(\Omega) : \Delta\phi \in L^2(\Omega)\} \end{aligned}$$

LEMME 1

$$(1.4) \quad v \in H(\nabla., \Omega) \quad \nabla \times v = 0 \iff \nabla\phi = v, \quad \phi \in H(\Delta, \Omega)$$

DEMONSTRATION

Cf de Rham [8], Bernardi [4].

LEMME 2

$$\phi \in H(\Delta, \Omega) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$u \in H(\nabla \cdot, \Omega) \Rightarrow u \cdot n \Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

$$u \in H(\nabla \times, \Omega) \Rightarrow u \times n \Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma)^3$$

LEMME 3

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} v \cdot \nabla \times u \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla \times v \, dx + \int_{\Gamma} u \cdot (v \times n) \, d\gamma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)^2$$

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} w \nabla \cdot u \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma} u \cdot n \, w \, d\gamma \quad \forall u \in H(\nabla \cdot, \Omega), w \in H^1(\Omega)$$

DEMONSTRATION

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} v \cdot \nabla \times u \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} v_i u_{k,j} \, dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} v_{i,j} u_k \, dx + \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijk} v_i u_k n_j \, d\gamma$$

Le lemme 2 se déduit de (1.5) et (1.6).

LEMME 4 - Si Γ est C^1 , et C^2 par morceaux, on a

$$(1.8) \quad \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla \times \psi \cdot \nabla \times v \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot \psi \nabla \cdot v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\psi \cdot v}{R} \, d\gamma$$

$\forall \psi, v \in H_{\infty}^1(\Omega)$, où R est le rayon de courbure moyen de Γ et

$$(1.9) \quad H_{\infty}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)^3 : v \times n \Big|_{\Gamma} = 0\}$$

DEMONSTRATION

On part de l'identité d'opérateur

$$(1.10) \quad -\Delta \psi = \nabla \times \nabla \times \psi - \nabla \nabla \cdot \psi \quad \forall \psi$$

qu'on intègre par parties sur Ω après multiplication par v :

$$(1.11) \quad \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot v \, d\gamma = \int_{\Omega} \nabla \times \psi \nabla \times v \, dx + \int_{\Gamma} \nabla \times \psi \cdot v \times n \, d\gamma \\ + \int_{\Omega} \nabla \cdot \psi \nabla \cdot v \, dx - \int_{\Gamma} \nabla \cdot \psi \, v \cdot n \, d\gamma$$

$$\forall \psi, v \in H^1(\Omega)^3$$

Lorsque $v \times n$ et $\psi \times n$ sont nuls au bord il ne reste qu'une intégrale sur Γ au second membre :

$$(1.12) \quad \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot v - \nabla \cdot \psi \, v \cdot n \right) d\gamma$$

Puisque $\psi \times n$ est nul, ψ est porté par la normale. On écrit $\nabla \cdot \psi$ dans le repère (s^1, s^2, n) formé par les tangentes et la normale des courbes osculatrices à Γ (i.e. ayant une normale principale égale à la normale n à Γ). Soient σ_1 et σ_2 les deux abscisses curvilignes. Si ψ est régulier on a :

$$(1.13) \quad \nabla \cdot \psi - \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot n = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_1} \cdot s^1 + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_2} \cdot s^2 = \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (\psi \cdot s^1) - \psi \frac{\partial s^1}{\partial \sigma_1} = -\psi \cdot n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Le lemme est donc vrai pour ψ régulier et s'étend par densité à tout ψ appartenant à $H_{x_0}^1(\Omega)$.

LEMME 5

Soit Ω simplement connexe et Γ_i les composantes connexes de sa frontière :

$$(1.14) \quad \nabla \times \psi = 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0, \quad \int_{\Gamma_i} \psi \cdot n \, d\gamma = 0 \quad \forall i, \quad \psi \times n|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \psi = 0$$

DEMONSTRATION

D'après le lemme 1 il existe ϕ tel que

$$(1.15) \quad \psi = \nabla \phi, \quad \Delta \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_j} \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad j = 1, 2, \forall i.$$

On doit donc avoir

$$(1.16) \quad \phi|_{\Gamma_i} = K_i, \text{ constant.}$$

Mais

$$(1.17) \quad 0 = \int_{\Gamma_i} \psi \cdot n d\gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\gamma = \frac{1}{K_i} \int_{\Gamma_i} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\gamma$$

donc

$$(1.18) \quad 0 = \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\gamma = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \Rightarrow \phi \text{ constant dans } \Omega$$

LEMME 6

Soient $\{\Gamma_i\}_{i=1}^m$ les composantes connexes de Γ .

$\forall f \in L^2(\Omega)$ avec $\int_{\Omega} f dx = 0$, il existe $\{K_i\}$ tel que

$$(1.19) \quad -\Delta \phi = f, \quad \phi|_{\Gamma_i} = K_i \Rightarrow \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\gamma = 0 \quad \forall i.$$

DEMONSTRATION

On définit θ^i et ϕ^o par

$$(1.20) \quad -\Delta \theta^i = 0 \quad \theta^i|_{\Gamma_j} = \delta_{ij}$$

$$(1.21) \quad -\Delta \phi^o = f \quad \phi^o|_{\Gamma} = 0$$

Alors

$$(1.22) \quad \phi = \phi^o + \sum_1^m K_j \theta^j$$

$$\begin{aligned}
(1.23) \quad \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\gamma &= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi^0}{\partial n} d\gamma + \sum_j K_j \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \theta^j}{\partial n} d\gamma \\
&= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi^0}{\partial n} d\gamma + \sum_j K_j \int_{\Gamma} \theta^i \frac{\partial \theta^j}{\partial n} d\gamma \\
&= \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi^0}{\partial n} d\gamma + \sum_j K_j \int_{\Omega} \nabla \theta^i \cdot \nabla \theta^j d\gamma \quad \forall i
\end{aligned}$$

On a donc un système linéaire pour $\{K_j\}$. D'autre part d'après le théorème des traces et l'inégalité de Poincaré on a

$$\begin{aligned}
(1.24) \quad \int_{\Gamma} \left(\phi - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \phi d\gamma \right)^2 d\gamma &\leq c \left\| \phi - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \phi d\gamma \right\|_{1,\Omega}^2 \\
&\leq c' \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(1.25) \quad \sum_j \left(K_j - \frac{\sum_i K_i / m}{i} \right)^2 &= \int_{\Gamma} \left(\phi - \phi^0 - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} (\phi - \phi^0) d\gamma \right)^2 d\gamma \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla(\phi - \phi^0)|^2 dx = \sum_i K_i K_j \int_{\Omega} \nabla \theta^i \cdot \nabla \theta^j dx
\end{aligned}$$

Le système linéaire en K (1.23) est donc positif défini dans \mathbb{R}^{m-1} . La condition de compatibilité pour f vient de la formule de Green appliqué avec ϕ^0 et 1.

LEMME 7

$$v \in H^1(\Omega)^3, \quad v \times n|_{\Gamma} = 0 \quad \implies (\nabla \times v) \cdot n|_{\Gamma} = 0$$

car

$$\int_{\Gamma} (v \times n) \cdot \nabla w d\gamma = \int_{\Gamma} (\nabla \times v) \cdot n w d\gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

DEMONSTRATION

Le lemme 3 donne

$$(1.26) \quad \int_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{y}) \cdot \nabla w + w \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{y})] dx = \int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} w d\gamma$$

Le lemme 3 donne

$$(1.27) \quad \int_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla w - \mathbf{v} \nabla \times \nabla w] dx = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \nabla w d\gamma$$

Finalement* on obtient

$$(1.28) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \nabla w d\gamma = \int_{\Gamma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} w d\gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

THEOREME 1 (fondamental)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 simplement connexe de frontière C^2 par morceaux.

Soit \mathbf{u} un champ de vecteur dans $L^2(\Omega)$ avec $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ , et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans Ω .

Soit ψ la solution du problème variationnel :

$$(1.29) \quad (\nabla \times \psi, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V; \quad \psi \in V$$

$$V = \{\mathbf{v} : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega), \nabla \times \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3,$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \int_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0 \quad \forall \Gamma_i \text{ composante connexe de } \Gamma\}$$

alors

$$(1.30) \quad \mathbf{u} = \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0$$

DEMONSTRATION

En prenant \mathbf{v} égal à $\nabla \phi \in V$ dans (1.29) on trouve

$$(1.31) \quad (\nabla \cdot \psi, \Delta \phi) = 0 \quad \forall \phi \in H^2(\Omega), \phi|_{\Gamma_i} = \text{constante}, \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\gamma = 0$$

donc d'après le lemme 6, $\nabla \cdot \psi$ est nulle. Alors (1.29) implique

$$(1.32) \quad \nabla \times (\nabla \times \psi - u) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Evidemment on a aussi (cf Lemme 7)

$$(1.33) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \psi - u) = 0, \quad (\nabla \times \psi - u) \cdot n \Big|_{\Gamma} = 0$$

Grâce à (1.32) on applique le Lemme 1, puis (1.33) :

$$(1.34) \quad \nabla \times \psi - u = \nabla \phi, \quad \Delta \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

$\nabla \phi$ est donc nul, d'où le résultat.

Remarque

D'après le lemme 4, (1.29) peut être remplacé par

$$(1.35) \quad (\nabla \psi, \nabla v) - \int_{\Gamma} \frac{1}{R} \psi v \, d\gamma = (u, \nabla \times v) \quad \forall v \in H_{\times 0}^1(\Omega) ; \psi \in H_{\times 0}^1(\Omega).$$

Proposition 1

Si Ω est convexe, simplement connexe, borné de frontière Lipchitz et C^2 par morceaux, le problème (1.29) admet une solution unique. Si Ω n'est pas convexe la solution, si elle existe, est unique.

DEMONSTRATION

On considère le problème d'optimisation

$$(1.36) \quad \min_{\psi \in V} \frac{1}{2} a(\psi, \psi) - (u, \nabla \times \psi)$$

avec

$$(1.37) \quad a(\psi, v) = (\nabla \times \psi, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot v).$$

Lorsque Ω est convexe, R est négatif et d'après (1.8) on a

$$|\nabla \psi|_0^2 \leq |\nabla \times \psi|_0^2 + |\nabla \cdot \psi|_0^2$$

Cette inégalité s'étend au cas ΓC^2 par morceaux si Ω reste convexe. Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré s'applique sur V , donc $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique.

Enfin $a(,)$ est un produit scalaire sur V car

$$(1.38) \quad a(\psi, \psi) = 0 \implies \nabla \times \psi = 0, \nabla \cdot \psi = 0$$

et d'après le lemme 5 ψ doit être nul.

La fonctionnelle minimisée est donc quadratique strictement convexe, continue, et vaut $+\infty$ à l'infini : le minimum existe et est unique.

Remarque 2 :

On a cherché à relier V à $H(\nabla \cdot, \Omega) \cap H(\nabla \times, \Omega)$ et non pas à $H^1(\Omega)$. Ceci est justifié par le fait que $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur V même si Ω n'est pas convexe. Si Ω n'est pas convexe V n'est pas, a priori un sous espace de $L^2(\Omega)$. Cette difficulté n'existe pas en discret.

THEOREME 2 (première décomposition)

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 de frontière C^2 par morceaux. Soit $u \in L^2(\Omega)$. La décomposition

$$(1.39) \quad u = \nabla \phi + \nabla \times \Sigma$$

est unique si on prescrit $\Sigma \in V$ à divergence nulle i.e.

$$(1.40) \quad \nabla \cdot \Sigma = 0, \Sigma \times n|_{\Gamma} = 0, \int_{\Gamma_i} \Sigma \cdot n \, d\gamma = 0$$

et ϕ et Σ sont les solutions uniques dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et V respectivement des problèmes variationnels suivants :

$$(1.41) \quad (\nabla \phi, \nabla w) = (u, \nabla w) \quad \forall w \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}; \quad \phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

$$(1.42) \quad (\nabla \times \Sigma, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \Sigma, \nabla \cdot v) = (u, \nabla \times v) \quad \forall v \in V; \quad \Sigma' \in V. \quad \square$$

DEMONSTRATION

Soit ϕ la solution du problème (1.41) ; c'est-à-dire

$$(1.43) \quad \Delta \phi = \nabla \cdot u \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\Gamma} = u \cdot n$$

Ce système, comme (1.41), détermine ϕ à une constante près et implique

$$(1.44) \quad \nabla \cdot (u - \nabla \phi) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (u - \nabla \phi) \cdot n|_{\Gamma} = 0.$$

On applique le théorème 1 au champ de vecteur $u - \nabla\phi$; il existe donc Σ dans V tel que

$$(1.45) \quad u - \nabla\phi = \nabla \times \Sigma \quad \nabla \cdot \Sigma = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(1.46) \quad (\nabla \times \Sigma, \nabla \times v) \times + (\nabla \cdot \Sigma, \nabla \cdot v) = (u - \nabla\phi, \nabla \times v) \quad \forall v \in V$$

Ceci démontre le théorème puisque $(\nabla\phi, \nabla \times v)$ est nul pour tout v tel que $v \times n = 0$ sur Γ . L'unicité de la décomposition vient de ce que $\Sigma \times n|_{\Gamma} = 0$ et (1.39) implique (1.43b), implique ϕ unique dans $H^1(\Omega)/R$.

Remarque 3

Si u est le champ de vitesse d'un fluide, ϕ est le potentiel vecteur et Σ la partie "rotationnelle" de la vitesse. Ainsi si le champ est presque irrotationnel, Σ sera petit puisque ses conditions aux limites sont nulles ; nous utiliserons cette décomposition pour calculer la correction rotationnelle d'un écoulement transsonique à choc fort.

Remarque 4

Le problème (1.29) s'interprète par

$$(1.47) \quad -\Delta\psi = \nabla \times u \text{ dans } \Omega$$

$$(1.48) \quad \psi \cdot s^1 = 0, \quad \psi \cdot s^2 = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} \cdot n - \frac{1}{R} \psi \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Il s'agit donc d'un problème mixte Dirichlet-Fourier vectoriel, les composantes étant couplées par les conditions aux limites, (sauf si Ω est un parallélépipède rectangle).

1.2. - LE CAS NON HOMOGENE

On se propose maintenant d'étendre le théorème 1 au cas $u \cdot n \neq 0$ sur Γ . Pour cela on va procéder par translation, c'est-à-dire qu'on va chercher ψ^0 tel que

$$(1.49) \quad \nabla \times \psi^0 - u \in H(\nabla, \Omega), \quad (\nabla \times \psi^0 - u) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \cdot \psi^0 = 0 \text{ dans } \Omega$$

La dernière condition n'est pas indispensable mais elle permet d'avoir $\psi - \psi^0$ dans V .

En coordonnées locales sur Γ (1.49) implique

$$(1.50) \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial \sigma_1} \cdot s^2 - \frac{\partial \psi^0}{\partial \sigma_2} \cdot s^1 = u \cdot n \text{ sur } \Gamma$$

$$(1.51) \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial \sigma_1} \cdot s^1 + \frac{\partial \psi^0}{\partial \sigma_2} \cdot s^2 + \frac{\partial \psi^0}{\partial n} \cdot n = 0$$

Enfin puisque ψ^0 est une translation de ψ il est logique de garder la compatibilité avec (1.47) (1.48) c'est-à-dire d'imposer

$$(1.52) \quad -\Delta \psi^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \psi^0}{\partial n} \cdot n - \frac{1}{R} \psi^0 \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \psi^0 \cdot s^1 = 0, \quad \psi^0 \cdot s^2 = 0 \text{ sur } \Gamma$$

On peut alors réécrire (1.50) et (1.51) sous la forme :

$$(1.53) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (\psi^0 \cdot s^2) - \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (\psi^0 \cdot s^1) = u \cdot n \text{ sur } \Gamma$$

$$(1.54) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (\psi^0 \cdot s^1) + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} (\psi^0 \cdot s^2) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

car

$$(1.55) \quad \frac{\partial s^2}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial s^1}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial s^1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial s^2}{\partial \sigma_2} = \frac{n}{R}.$$

Par ailleurs, (1.54) suggère de poser

$$(1.56) \quad \psi^0 \cdot s^1 = \frac{\partial q}{\partial \sigma_2} \quad \psi^0 \cdot s^2 = - \frac{\partial q}{\partial \sigma_1}$$

de telle sorte que (1.53) devient

$$(1.57) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_2^2} = -u \cdot n \text{ sur } \Gamma$$

on énonce le résultat :

Proposition 2

Soit $u \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla \cdot u = 0$ dans Ω . Si chaque morceau Γ_i simplement connexe de Γ est C^2 alors la solution ψ du problème variationnel ci-dessous satisfait à

$$(1.58) \quad u = \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0$$

$$(1.59) \quad (\nabla \times \psi, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot v) = (u, \nabla \times v) \quad \forall v \in V; \quad \psi - \psi^0 \in V$$

où

$$(1.60) \quad \psi^0 = \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_2} s^1 - \frac{\partial q}{\partial \sigma_1} s^2 \right) \text{ sur } \Gamma$$

et où q est la solution du problème de Beltrami

$$(1.61) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_2^2} = -u \cdot n \text{ sur } \Gamma$$

DEMONSTRATION

On suit la démonstration du théorème 1. En prenant $v = \nabla \phi$ dans (1.59) on montre que $\nabla \cdot \psi$ est nulle. Le reste de (1.59) implique

$$(1.62) \quad \nabla \times (\nabla \times \psi - u) = 0 \text{ donc } \nabla \times \psi - u = \nabla \phi \text{ et } \Delta \phi = 0$$

enfin en se servant de (1.60), (1.53) et (1.61)

$$(1.63) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \times \psi \cdot n - u \cdot n = \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_2} s^1 - \frac{\partial q}{\partial \sigma_1} s^2 \right) \cdot s^2 - \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \left(\frac{\partial q}{\partial \sigma_2} s^1 - \frac{\partial q}{\partial \sigma_1} s^2 \right) \cdot s^1 - u \cdot n = 0$$

Donc $\nabla \phi$ est nul. □

Remarque 5

Seul $\psi^0|_{\Gamma}$ intervient dans (1.59). La détermination de ψ^0 à l'intérieur de Ω n'a pas d'importance.

Enonçons maintenant ce résultat sous forme variationnelle.

THEOREME 3

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^n de frontière C^2 par morceaux. Soit $u \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla \cdot u = 0$ dans Ω , $\int_{\Gamma_i} u \cdot n \, d\gamma = 0 \quad \forall \Gamma_i$ composante connexe de Γ .

Soit q une solution du problème variationnel sur Γ :

$$(1.64) \quad \int_{\Gamma} (\nabla q \cdot \nabla w - \frac{\partial q}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial n}) \, d\gamma = \int_{\Gamma} u \cdot n \, w \, d\gamma \quad \forall w \in H^{3/2}(\Omega) ; q \in H^{3/2}(\Omega)$$

soit ψ la solution de

$$(1.65) \quad (\nabla \times \psi, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot v) = (u, \nabla \times v) \quad \forall v \in V ; \quad \psi + n \times \nabla q \in V$$

alors

$$u = \nabla \times \psi ; \quad \nabla \cdot \psi = 0.$$

DEMONSTRATION

On démontre comme dans la proposition 2 que

$$(1.66) \quad \nabla \cdot \psi = 0, \quad u = \nabla \times \psi + \nabla \phi, \quad \Delta \phi = 0.$$

D'après le lemme 6 et les équations ci-dessus :

$$(1.67) \quad \int_{\Gamma} \psi \times n \cdot \nabla w \, d\gamma = \int_{\Gamma} w \nabla \times \psi \cdot n \, d\gamma = \int_{\Gamma} w(u \cdot n - \nabla \phi \cdot n) \, d\gamma$$

mais d'après (1.64) et le fait que $\psi \times n$ égale $-(n \times \nabla q) \times n$ sur Γ , on a

$$(1.68) \quad \int_{\Gamma} w(u \cdot n - \nabla \phi \cdot n) \, d\gamma = \int_{\Gamma} (\nabla q - \nabla q \cdot n \cdot n) \cdot \nabla w \, d\gamma = \int_{\Gamma} \nabla q \cdot \nabla w - \frac{\partial q}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial n} \, d\gamma \\ = \int_{\Gamma} u \cdot n \, w \, d\gamma, \quad \forall w \in H^{3/2}(\Omega)$$

Donc $\partial \phi / \partial n$ est nul et ϕ est constant.

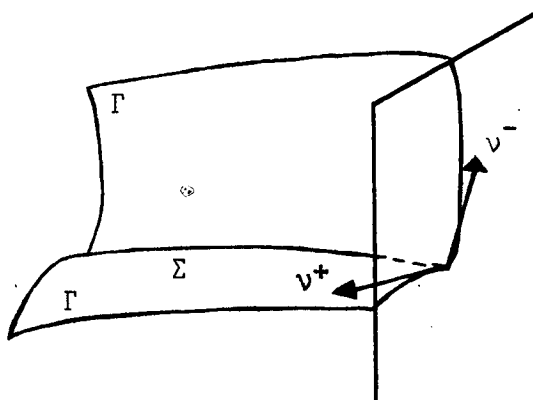
Remarque 6

Sur les parties régulières de Γ , (1.64) redonne (1.61) mais aux passages de ligne Σ de discontinuité de n on a aussi (on suppose $u \cdot n$ régulier)

$$(1.69) \quad \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial q}{\partial \nu^+} - \frac{\partial q}{\partial \nu^-} \right] w \, d\gamma = \int_{\Gamma - \Sigma} \left[(\nabla q \nabla w - \frac{\partial q}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial n}) + \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_2^2} \right) w \right] d\gamma$$

$$= 0, \quad \forall w \text{ régulier.}$$

Ici ν^+ et ν^- désignent les normales à Σ dans Γ . Donc q et $\frac{\partial q}{\partial \nu}$ sont continus sur Σ . On vérifie aisément que $n \times \nabla q$ est alors continu sur Σ .



- Figure 1 -

Remarque 7

Si $u = (1,0,0) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ alors $\psi = -x_3 e^2$ est solution de (1.65) mais q n'est pas identifiable analytiquement sauf cas particulier, par exemple si Γ est une sphère on a

$$q = u \cdot n \, r^2$$

THEOREME 4 (deuxième décomposition)

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe à frontière C^2 par morceaux.

Soit $u \in H(\nabla \cdot, \Omega)$ tel que

$$(1.70) \quad \int_{\Gamma_i} u \cdot n \, d\gamma = 0 \quad \forall \Gamma_i, \text{ composante connexe de } \Gamma.$$

La décomposition

$$(1.71) \quad u = \nabla \times \psi + \nabla p$$

est unique si on prescrit

$$(1.72) \quad u \cdot n = \nabla \times \psi \cdot n \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \cdot \psi = 0, \quad \int_{\Gamma_i} \psi \cdot n \, d\gamma = 0,$$

et ψ et p sont solutions, respectivement de (1.64), (1.65) et de

$$(1.73) \quad (\nabla p, \nabla w) = (\nabla \cdot u, w) \quad \forall w \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}; \quad p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

DEMONSTRATION

Ayant défini p par (1.73) on applique le Théorème 3 à $u - \nabla p$.

Remarque 8

Dans cette décomposition ψ est le vecteur de courant si $\nabla \cdot u$ est nul et p est le correcteur si $\nabla \cdot u$ est petit.

2. - APPLICATIONS : ECOULEMENT IRROTATIONNELS

Donc si les conditions aux bords sur $\psi \times n$ sont non homogènes, il faudra résoudre un problème auxiliaire du type Laplace-Beltrami sur Γ . Cependant, nous allons examiner en détail deux cas d'écoulement incompressible irrotationnel où le calcul de q n'est pas nécessaire.

2.1. - ECOULEMENT PARFAIT IRROTATIONNEL DANS UNE TUYERE

Soit Ω un domaine en forme de tuyère avec une bosse comme sur la figure 2. Les sections d'entrée Γ_e , de sortie Γ_s et les deux murs verticaux Γ_v sont plans, le mur horizontal supérieur Γ_h est incurvé, le mur horizontal inférieur Γ_b a une bosse.

On cherche u, ψ tels que

$$(2.1) \quad \nabla \times u = 0 \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u = \nabla \times \psi \text{ dans } \Omega$$

u uniforme à l'infini amont et aval et $u \cdot n$ nul sur les 4 murs latéraux.

On va donc appliquer le théorème 3 mais sans calculer q et en prenant $n \times \nabla q = \psi^0$ compatible avec les conditions à l'infini (c'est-à-dire sur les sections d'entrées et de sorties) :

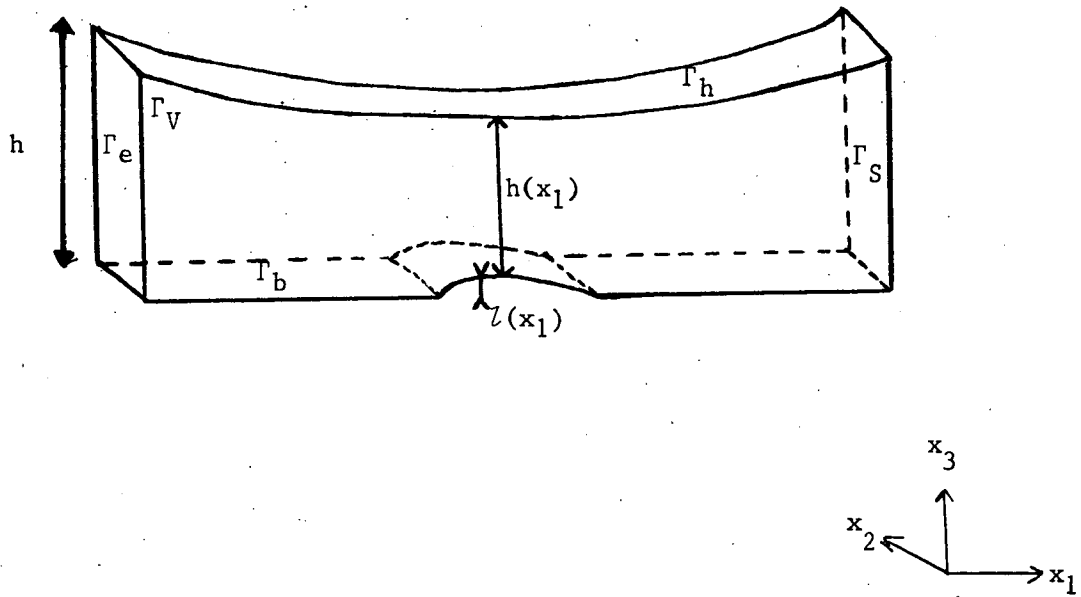
$$(2.2) \quad \psi^0|_{\Gamma_e \cup \Gamma_s} = (0, -u_1^\infty x_3, 0)$$

$$(2.3) \quad \psi^0|_{\Gamma_b} = (0, 0, 0), \quad \psi^0|_{\Gamma_h} = \vec{u} \cdot \vec{h} n_{\Gamma_h} e^2, \quad \psi^0|_{\Gamma_v} = (0, -u_1^\infty h \frac{x_3 - 1(x_1)}{h(x_1)}, 0)$$

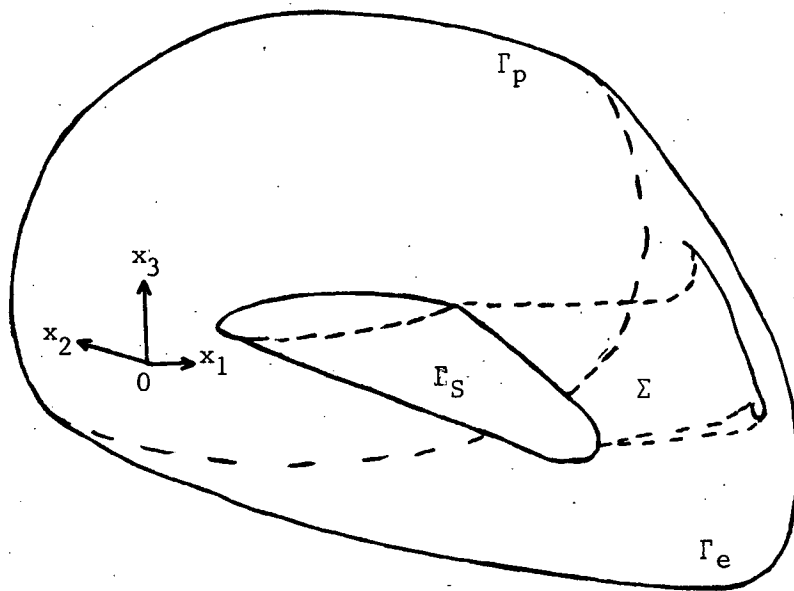
car les conditions (1.53), (1.54) sont vérifiées localement sur Γ et ψ^0 est continu tant que l'entrée et la sortie de la tuyère sont à angle droit avec les murs. Pour une tuyère générale, il semble qu'il faille calculer q .

2.2. - ECOULEMENT PARFAIT AUTOUR D'UNE AILE

Considérons une aile Γ_s dans un écoulement limité à l'extérieur par une enveloppe Γ_e ; soit Γ_p un plan de symétrie de l'aile et de l'écoulement éventuellement, (figure 3). Soit $(0, x_1, x_2, x_3)$ un repère tel que $(0, x_1, x_3)$ soit dans le plan de symétrie Γ_p .



- Figure 2 -



- Figure 3 -

Pour avoir un écoulement symétrique par rapport à Γ_p il faut que ψ soit une fonction impaire de x_2 ce qui impose

$$(2.4) \quad \psi_2^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_p$$

Les conditions aux limites sur ψ sont donc

$$(2.5) \quad (\psi - \psi^0) \times n = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \psi^0 = (-u_3 x_2, 0, -u_1 x_3) \text{ sur } \Gamma_e \cup \Gamma_p, \quad \psi^0|_{\Gamma_s} = 0$$

La dernière condition vient du théorème 3. S'il n'y a pas de plan de symétrie il suffit de travailler sur le domaine complet et de retirer les conditions sur Γ_p .

Dans les cas portants $\nabla \times u$ est non nul sur une surface Σ rattaché au bord de fuite ; sur Σ on a les conditions suivantes (figure 4) :

$$(2.6) \quad \nabla \cdot u = 0 \implies u \cdot n_{\Sigma} \text{ continu}$$

$$(2.7) \quad \text{pression continue} \implies |u| |_{\Sigma} \text{ continu}$$

$$(2.8) \quad \nabla \times u \text{ constant sur les lignes de courant ;}$$

Ceci implique que $\nabla \times u$ sur Σ est un vecteur de Dirac et par application du lemme 3 sur une petite boule de centre x on trouve

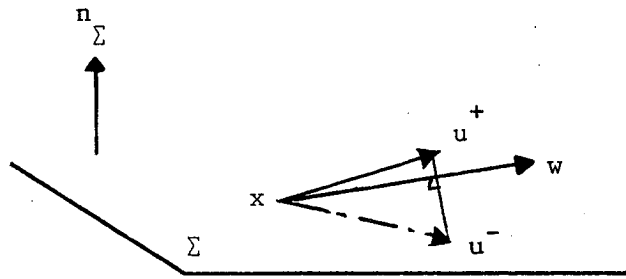
$$(2.9) \quad \nabla \times u|_{\Sigma} = (u^+ - u^-) \times n_{\Sigma} \delta_{\Sigma}$$

La surface Σ contient donc u^+ et u^- en tous points où u est discontinu.

D'après le théorème 3 le problème à résoudre est

$$(2.10) \quad (\nabla \times \psi, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot v) = - \int_{\Sigma} w \cdot v \, d\gamma \quad \forall v \in V ; \quad \psi - \psi_0 \in V$$

où ψ_0 est donné par (2.5) et où w est un champ de vecteur connu sur Σ .



- Figure 4 -

La condition de Joukowsky (2.7) est ajustée par w : on suppose les lignes de courant (parallèle à $\frac{u^+ + u^-}{2}$) connues sur Σ et on prend w parallèle à ces lignes, de module constant sur chaque ligne ajustée pour satisfaire (2.7). Il faut ensuite itérer sur Σ et ses lignes de courant par la solution de (2.10).

3. - EQUATIONS TRANSSONIQUES STATIONNAIRES

3.1. - EQUATIONS DE BASE

$$(3.1) \quad \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

$$(3.2) \quad \nabla \cdot (\rho u u) + \nabla p = 0$$

$$(3.3) \quad \nabla \cdot \left[\rho u \left(\frac{p}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{|u|^2}{2} \right) \right] = 0$$

$$(3.4) \quad p = C \rho^\gamma e^{s/C_\gamma}$$

Notations

\vec{u} : vitesse

p : pression

ρ : densité

$\gamma = 1.4$, C_γ : chaleur vol. spec.

s : entropie spécifique

C : constante numérique.

Définitions

$$(3.5) \quad w = \nabla \times u \quad \text{Vorticité}$$

$$(3.6) \quad H = \frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad \text{Enthalpie}$$

$$(3.7) \quad S = \exp (s/C_\gamma) \quad \text{Entropie modifiée}$$

3.2. - EQUATIONS SUR w EN DEHORS DES CHOCS

On remplace p par (3.4) dans (3.2) et on utilise la formule

$$(3.8) \quad \nabla \cdot (\rho u \otimes u) = \rho u \nabla u = - \rho u \times \nabla \times u + \rho \nabla \frac{u^2}{2}$$

(la première égalité est due à (3.1)).

On obtient

$$(3.9) \quad - \rho u \times w + \rho \nabla \frac{|u|^2}{2} + \nabla (\rho \gamma S) = 0$$

D'après (3.6) :

$$(3.10) \quad \nabla \frac{|u|^2}{2} = \nabla H - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \nabla H - \frac{\gamma}{\gamma-1} \nabla (\rho^{\gamma-1} S)$$

mais d'après (3.3) si l'enthalpie est constante à l'infini, elle est constante partout donc

$$(3.11) \quad + \rho \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \nabla S = 0$$

Il reste à multiplier vectoriellement par \mathbf{u} et à utiliser la formule

$$(3.12) \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$$

pour obtenir qu'il existe λ tel que

$$(3.13) \quad \mathbf{w} = \lambda \cdot \rho \mathbf{u} + \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \times \nabla S$$

le vecteur λ est déterminé par le fait que (3.5) implique

$$(3.14) \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda + \frac{1}{\gamma-1} \nabla \cdot \left(\rho^{\gamma-1} \frac{\mathbf{u} \times \nabla S}{|\mathbf{u}|^2} \right) = 0$$

on remarque que (3.11) implique

$$(3.15) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0$$

Les données à l'infini amont et les conditions de Rankine Hugoniot aux chocs

(3.14) (3.15) permettent donc de calculer S et λ .

3.3. - EQUATION SUR ρ EN DEHORS DES CHOCS

Reportons (3.15) dans (3.9) multipliée scalairement par \mathbf{u} :

$$(3.16) \quad \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left| \frac{\mathbf{u}}{2} \right|^2 + \gamma S \rho^{\gamma-1} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

c'est-à-dire encore

$$(3.17) \quad u \nabla \left(\left| \frac{u}{2} \right|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} s_p \gamma^{-1} \right) = 0$$

qui s'intègre en

$$(3.18) \quad \rho = \left(K - \frac{|u|^2}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma s} \right) \frac{1}{\gamma-1}$$

3.4. - EQUATIONS POTENTIELLES AVEC CORRECTION

On pose, conformément au théorème 2

$$(3.19) \quad u = \nabla \phi + \nabla \times \psi$$

(3.1) et (3.5) deviennent

$$(3.20) \quad \nabla \times \nabla \times \psi = w$$

qu'on résoud par

$$(3.21) \quad \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = - \nabla \rho \cdot \nabla \times \psi$$

3.5. - RELATION DE DISCONTINUITÉ AU PASSAGE DES CHOCS

Les équations (3.20), (3.21) sont valables au sens des distributions sur les lignes de chocs droits (discontinuité de u_n seulement) car $u_{\times n}$ est continu et donc $\nabla \times u$ est défini d'une part, d'autre part ρu_n n'est pas discontinu.

Les équations (3.13) et (3.18) sont locales ; elles sont valables à droite et à gauche des chocs.

L'équation (3.15) n'est pas valable sur la ligne de choc ; on l'a remplacé par la condition de Rankine-Hugoniot

$$(3.22) \quad s_+ = s_- \left(\frac{1}{\gamma+1} \right)^{\gamma+1} (2\gamma m_-^2 - \gamma + 1) \left(\frac{2}{m_-} + \gamma - 1 \right)^{\gamma}$$

avec, n_+ étant la normale avale au choc :

$$(3.23) \quad m_-^2 = \frac{|u_- \cdot n_+|^2}{a_-^2} \quad a_-^2 = \gamma \frac{p_-}{\rho_-}$$

L'équation (3.14) est conservé sur le choc au sens des distributions puisque w doit être à divergence nulle.

3.7. - CONDITIONS AUX LIMITES

Sur le corps Γ_1 la condition de glissement $u \cdot n = 0$ peut s'écrire sur ϕ dans (3.19), ce qui impose à $\psi \times n$ sur Γ_1 :

$$(3.24) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi \times n \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

A l'infini amont $\Gamma_{\infty u}$ on doit avoir :

$$(3.25) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{\infty u}} = u_\infty \cdot n, \quad \psi \times n \Big|_{\Gamma_{\infty u}} = 0,$$

$$(3.26) \quad S \Big|_{\Gamma_\infty} \text{ donné, } \omega \cdot n \Big|_{\Gamma_{\infty u}} \text{ donné (pour calculer } \lambda), \rho \Big|_{\Gamma_{\infty u}} \text{ (pour calculer } K)$$

A l'infini aval $\Gamma_{\infty a}$ on ne prend que (3.25).

ALGORITHME ITERATIF 1

$$0. \quad \psi^0 = 0, \quad S^0 = S_\infty, \quad \nabla \cdot \rho \nabla \phi^0 = 0, \quad \rho^0 = (K - \frac{|\nabla \phi^0|^2}{2})^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{\gamma S^0}, \quad u^0 = \nabla \phi^0$$

Pour $m = 0..M$ faire

$$1. \quad u^m \cdot \nabla S^{m+1} = 0 + (3.22)$$

$$2. \quad u^m \cdot \nabla \lambda^{m+1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{\rho^m} \nabla \cdot [(\rho^m)^{\gamma-1} \frac{u^m \cdot \nabla S^{m+1}}{2}]$$

$$3. \quad w^{m+1} = \lambda^{m+1} \rho^m u^m - \frac{(\rho^m)^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{u^m}{|u^m|^2} \times \nabla S^{m+1}$$

$$4. \quad \nabla \times \nabla \times \psi^{m+1} = w^{m+1} \quad (\text{par la méthode décrite au Théorème 1})$$

$$5. \quad \nabla \cdot \rho (|\nabla \phi + \nabla \times \psi^{m+1}|) \nabla \phi = -\nabla(\rho^m) \cdot \nabla \times \psi^{m+1} \quad \text{avec } \rho(|u|) = \left(K - \frac{|u|^2}{2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma S^{m+1}}} \frac{1}{\gamma-1}$$

$$6. \quad \rho^{m+1} = \left(K - \frac{|u^{m+1}|^2}{2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma S^{m+1}}} \frac{1}{\gamma-1} \quad \text{avec } u^{m+1} = \nabla \phi^{m+1} + \nabla \times \psi^{m+1}$$

Remarque 9

Les cas envisagés par Lacor-Sokhey correspondent à $\lambda \neq 0$

4. - APPROXIMATION ET IMPLEMENTATION

4.1. - DISCRETISATION

On va résoudre numériquement, avec une méthode d'éléments finis conforme, le problème (4.1) avec une condition au limite non homogène.

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{\psi} \in (H^1(\Omega))^3 \text{ vérifiant} \\ (\nabla \times \psi, \nabla \times v) + (\nabla \cdot \psi, \nabla \cdot v) = (\nabla \times u, v) \quad \forall v \in H_{x0}^1(\Omega) \\ \psi \times n|_{\Gamma} = g \end{array} \right.$$

Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ avec NT tétraèdres, et NS sommets q^j (NI sommets internes + NF sommets frontières). Soit n_h^j une approximation de la normale à Γ au sommet q^j , de norme 1. Soit

$$(4.2) \quad V_h = \{v \in (C^0(\Omega))^3 ; v|_{K \in \mathcal{T}_h} \in (\mathbb{P}^1(K))^3 ; v(q^j) \times n_h^j = 0 \\ \forall q^j \text{ sommet de } \Gamma ; \int_{\Gamma_i} v \cdot n \, d\gamma = 0\}$$

Soit $w^i(x)$ une fonction continue, \mathbb{P}^1 par morceaux, telle que

$$(4.3) \quad w^i(q^j) = \delta_{ij}.$$

On définit la base de V_h comme suit :

$$(4.4) \quad v^i(x) = \begin{cases} w^i(x) \vec{e}_\ell & \text{si } i \text{ est interne ou } \vec{e}_\ell \text{ est un vecteur de base} \\ & \text{canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ et } \ell = 1, 2, 3 \\ \tilde{w}^i(x) \vec{n}_h^i & \text{si } i \text{ est frontière avec} \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \tilde{w}^i(x) = w^i(x) - \int_{\Gamma_{j(i)}} w^i(x) \, d\gamma / \int_{\Gamma_{j(i)}} d\gamma$$

$$(4.6) \quad j(i) = \text{indice tel que } q^i \in \Gamma_{j(i)}$$

Le problème (4.5) discrétisé devient

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \psi_h \text{ vérifiant} \\ (\nabla \times \psi_h, \nabla \times v_h) + (\nabla \cdot \psi_h, \nabla \cdot v_h) = (\nabla \times u, v_h) \\ \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

où

$$(4.8) \quad \psi_h(x) = \sum_{i \text{ interne}} \psi_h^i w^i(x) \vec{e}_\ell + \sum_{i \text{ frontière}} (\lambda \tilde{w}^i(x) \vec{n}_h^i - \tilde{w}^i(x) g(q^i) \times \vec{n}_h^i)$$

THEOREME 4.1 : Le problème (4.7)-(4.8) admet une solution unique.

DEMONSTRATION

Comme pour le Proposition 1 du chapitre 1, mais maintenant on n'a plus besoin de l'hypothèse Ω convexe, puisque $\psi_h \in V_h \Rightarrow \psi_h \in L^2(\Omega)$.

Remarque 10

Dans le cas où Γ a une seule composante connexe, il n'est pas indispensable d'utiliser \tilde{w}^i , on peut utiliser w^i . En effet v_h est modifié d'une constante et cela ne change pas (4.7).

4.2. - ESTIMATION D'ERREUR

THEOREME 4.2

Soit ψ_h la solution du problème (4.7) et ψ la solution du problème (4.1), alors pour une constante C indépendante de h on a, si $|n-n_h|_{0,\Gamma} \leq O(h^{3/2})$ et si $|\nabla \times \psi|_{\infty,\Gamma}$ est borné :

$$(4.9) \quad |\nabla \times (\psi - \psi_h)|_{0,\Omega}^2 + |\nabla \cdot (\psi - \psi_h)|_{0,\Omega}^2 \leq Ch^2 \|\psi\|_{2,\Omega}^2.$$

DEMONSTRATION

La solution du problème continu vérifiant

$$(4.10) \quad -\Delta \psi = \nabla \chi u,$$

on a :

$$(4.11) \quad \int_{\Omega} -\Delta \psi w \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \times \psi \nabla \times w + \nabla \cdot \psi \nabla \cdot w) dx + \int_{\Gamma} (\nabla \times \psi \cdot w \times n - \nabla \cdot \psi w \cdot n) d\gamma$$

Posons

$$(4.12) \quad a(\psi, w) = \int_{\Omega} (\nabla \times \psi \nabla \times w + \nabla \cdot \psi \nabla \cdot w) dx$$

Alors, comme $\nabla \cdot \psi = 0$, on a

$$(4.13) \quad a(\psi, w) = (\nabla \times u, w) - \int_{\Gamma} \nabla \times \psi \cdot n \times w \, d\gamma \quad \forall w \in H^1(\Omega)^3$$

tandis que, par définition de ψ_h

$$(4.14) \quad a(\psi_h, w_h) = (\nabla \times u, w_h) \quad \forall w_h \in V_h.$$

On fait, maintenant, le calcul suivant :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} a(\psi - \chi_h, \psi - \chi_h) &= a(\psi - \chi_h, \psi - \chi_h) + 2a(\psi - \chi_h, \chi_h - \psi_h) - a(\psi_h - \chi_h, \psi_h - \chi_h) \\ &= a(\psi - \chi_h, \psi - \chi_h) + \int_{\Gamma} 2n \times (\chi_h - \psi_h) \cdot \nabla \times \psi \, d\gamma - a(\psi_h - \chi_h, \psi_h - \chi_h) \end{aligned}$$

$$\forall \chi_h \in V_h$$

Prenons pour χ_h l'interpolé de ψ au sens suivant

$$(4.16) \quad n_h(x) = \sum n_h^i \tilde{w}^i(x)$$

$$(4.17) \quad \chi_h = g \times n_h + \lambda n_h \quad \text{aux sommets } q^i \text{ de } \Gamma$$

où λ est défini par

$$(4.18) \quad \psi = g \times n + \lambda n$$

Comme

$$(4.19) \quad (\psi - \chi_h)|_{q_i} = [g \times (n - n_h) + \lambda(n - n_h)]|_{q_i} \quad \forall q^i \text{ sommet } \Gamma$$

$$(4.20) \quad (\psi - \chi_h)|_{q_j} = 0 \quad \forall q^j \text{ sommet interne}$$

si $\pi_h \psi$ désigne l'interpolé de ψ , et comme, par hypothèse, $\|n - n_h\|_{0, \Gamma}$ est $O(h^{3/2})$, on a

$$(4.21) \quad \begin{aligned} a(\psi - \chi_h, \psi - \chi_h)^{1/2} &\leq \|\psi - \pi_h \psi\|_{1, \Omega} + \frac{c}{\sqrt{h}} \|g \times (n - n_h) + \lambda(n - n_h)\|_{0, \Gamma} \\ &\leq C h \|\psi\|_{2, \Omega} \end{aligned}$$

Enfin, majorons le dernier terme dans (4.15) :

$$(4.22) \quad \left| \int_{\Gamma} n \times (\chi_h - \psi_h) \cdot \nabla \times \psi \, d\gamma \right| \leq \|n \times n_h\|_{0, \Gamma} \|\chi_h - \psi_h\|_{0, \Gamma} \|\nabla \times \psi\|_{\infty, \Gamma}$$

et comme $\chi_h - \psi_h$ est de moyenne nulle sur Γ .

$$(4.23) \quad |\chi_h - \psi_h|_{0,\Gamma} \leq C |\nabla(\chi_h - \psi_h)|_{0,\Omega}.$$

Il reste à montrer que cette quantité est bornée ce qui nous oblige à démontrer que a est coercive sur V_h . Pour cela on fait le calcul suivant :

$$(4.24) \quad \begin{aligned} |\nabla \xi_h|^2 - a(\xi_h, \xi_h) &= \int_{\Gamma} (\nabla \times \xi_h) \cdot \xi_h \times n \, d\gamma \\ &\leq |\nabla \times \xi_h|_{0,\Gamma} |\xi_h|_{0,\Gamma} \leq \frac{C}{h} |\nabla \times \xi_h|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{C}{h} a(\xi_h, \xi_h) \end{aligned}$$

Donc

$$(4.25) \quad |\nabla(\chi_h - \psi_h)|_{0,\Omega}^2 \leq \left(\frac{C'}{h} + 1\right) a(\chi_h - \psi_h, \chi_h - \psi_h)$$

Finalement avec (4.21) et (4.22), (4.15) devient

$$(4.26) \quad a(\psi - \psi_h, \psi - \psi_h) \leq Ch^2 \|\psi\|_{2,\Omega}^2 - (1 - |\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h|_{0,\Gamma} |\nabla \times \psi|_{\infty,\Gamma} C(\frac{C'}{h} + 1)) a(\chi_h - \psi_h, \chi_h - \psi_h)$$

Comme $a(\chi_h - \psi_h, \chi_h - \psi_h) \geq 0$, il suffit que $|\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h|_{0,\Gamma}/h$ tende vers 0 pour avoir le résultat. Or

$$(4.27) \quad \|\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h\| = \|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \mathbf{n}_h)\| \leq \|\mathbf{n} - \mathbf{n}_h\|$$

d'où le résultat.

Remarque 11

Le choix de \mathbf{n}_h est guidé par (4.9). Toutefois il est important de remarquer que si on prend

$$(4.28) \quad \mathbf{n}_h^i = \sum_{T_k \supset \{q^i\}} n_{T_k} \frac{\text{aire}(T_k)}{\sum_{T_k \supset \{q^i\}} \text{aire}(T_k)}$$

alors $\psi_h = \{0, -x_3, 0\}$ est une solution exacte du problème discret (4.7)-(4.8) avec $g(q^i) = \{0, -x_3(q^i), 0\} \times \mathbf{n}_h^i$ et $\nabla \times u = 0$.

En effet

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{aligned} (\nabla \times \psi_h, \nabla \times v_h) + (\nabla \cdot \psi_h, \nabla \cdot v_h) &= \int_{\Gamma} (e^l \times n) \cdot v_h \\ &= \sum_{q_i \in \Gamma} v_h^i \sum_{T_k \ni \{q_i\}} e^l \times n_{T_k} \frac{\text{aire}(T_k)}{3} \\ &= \sum_{q_i \in \Gamma} v_h^i (e^l \times n_h^i) = 0 \end{aligned} \right.$$

car v_h^i est parallèle à n_h^i .

Cette remarque est déterminante pour les problèmes extérieurs à écoulements uniformes à l'infini car les tétraèdres ne sont jamais petits à l'infini.

5. - MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE

On préfère faire une translation et poser $\xi_h = \psi_h - \psi_h^0$ où ψ_h^0 est le troisième terme dans (4.8).

A partir de (4.6), (4.7) et (4.8), on va construire la matrice gouvernant le système linéaire à résoudre, soit M cette matrice et ξ le vecteur inconnu :

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \xi_3^i \\ \lambda^i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow \text{ NI} \\ \updownarrow \text{ NI} \\ \updownarrow \text{ NI} \\ \updownarrow \text{ NF} \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{NI} \\ \text{NI} \\ \text{NI} \\ \text{NF} \end{matrix} \updownarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & M_{ii} & M_{if} \\ \hline M_{fi} & & M_{ff} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{ NI} \\ \leftarrow \text{ NI} \\ \leftarrow \text{ NI} \\ \leftarrow \text{ NF} \end{matrix}$$

On aura à résoudre dans $\mathbb{R}^{(3 \times NI + NF)}$ le problème d'optimisation suivant :

$$(5.1) \quad \text{Min } \left\{ \frac{1}{2} \xi^t M \xi - B \xi \right\} \text{ où } B \text{ sera donné par le second membre.}$$

Etudions en détail la forme de M . Pour ceci, reprenons (4.7) en prenant $v_h(x) = v^i(x)$ défini par (4.6). On suppose que Γ a une seule composante connexe.

Forme de M_{ii}, M_{if} et M_{fi} :

Si i est interne, (4.7) va nous donner la ligne de M correspondante au ième sommet interne :

$$(\nabla \times \xi, \nabla \times v^i) + (\nabla \cdot \xi, \nabla \cdot v^i)$$

mais $v^i(x) \times n_h^i|_{\Gamma} = 0$ et en appliquant le lemme I.4, on trouve

$$\begin{aligned} (\nabla \times \xi, \nabla \times v^i) + (\nabla \cdot \xi, \nabla \cdot v^i) &= (\nabla \xi, \nabla v^i) \quad \forall v^i \in V_h, \quad i \text{ interne.} \\ &= \sum_{j \text{ interne}} \xi_{\rho}^j (\nabla w^i, \nabla w^j) + \sum_{j \text{ frontière}} \lambda^j n_{\rho}^j (\nabla w^i, \nabla w^j) \end{aligned}$$

(cf. (4.8))

et ceci est vrai pour $\rho = 1, 2, 3$ (i.e. 3 composantes de M_{ii}, M_{if}, M_{fi})

Forme de M_{ff} :

au ième sommet frontière : $v^i(x) = w_n^{i+1}$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \xi, \nabla \times v^i) + (\nabla \cdot \xi, \nabla \cdot v^i) &= \\ &\sum_{j \text{ interne}} [(\nabla \times (\xi_{\rho}^j w_n^{j+1}), \nabla \times (w_n^{i+1})) + (\nabla \cdot (\xi_{\rho}^j w_n^{j+1}), \nabla \cdot (w_n^{i+1}))] \\ + \sum_{j \text{ frontière}} [(\nabla \times (\lambda^j w_n^{j+1}), \nabla \times (w_n^{i+1})) + (\nabla \cdot (\lambda^j w_n^{j+1}), \nabla \cdot (w_n^{i+1}))] \end{aligned}$$

Les éléments de M_{ff} sont donc dans la deuxième sommation ; on peut les réécrire :

$$\begin{aligned}
 & (n_k^i n_k^j) (\nabla w^i, \nabla w^j) + n_2^i n_1^j [(\partial_2 w^i, \partial_1 w^j) - (\partial_1 w^i, \partial_2 w^j)] \\
 & + n_3^i n_1^j [(\partial_3 w^i, \partial_1 w^j) - (\partial_1 w^i, \partial_3 w^j)] \\
 & + n_1^i n_2^j [(\partial_1 w^i, \partial_2 w^j) - (\partial_2 w^i, \partial_1 w^j)] \\
 & + n_3^i n_2^j [(\partial_3 w^i, \partial_2 w^j) - (\partial_2 w^i, \partial_3 w^j)] \\
 & + n_1^i n_3^j [(\partial_1 w^i, \partial_3 w^j) - (\partial_3 w^i, \partial_1 w^j)] \\
 & + n_2^i n_3^j [(\partial_2 w^i, \partial_3 w^j) - (\partial_3 w^i, \partial_2 w^j)]
 \end{aligned}$$

Par souci d'alléger l'écriture, on pose : $a_{ij} = (\nabla w^i, \nabla w^j)$

$$b_{ij} = (\partial_2 w^i, \partial_1 w^j) - (\partial_1 w^i, \partial_2 w^j)$$

$$c_{ij} = (\partial_3 w^i, \partial_1 w^j) - (\partial_1 w^i, \partial_3 w^j)$$

$$d_{ij} = (\partial_3 w^i, \partial_2 w^j) - (\partial_2 w^i, \partial_3 w^j)$$

on note que $b_{ij} = -b_{ji}$

$$c_{ij} = -c_{ji}$$

$$d_{ij} = -d_{ji}$$

$$b_{ii} = c_{ii} = d_{ii} = 0.$$

La forme de M est résumée sur la figure 5.

Le second membre Bξ se calcule à partir des formules classiques sans difficulté.

5.1. - ALGORITHME UTILISE

On veut résoudre (5.1) par une méthode de Gradient Conjugué préconditionné par la diagonale..

Soit

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Z) = \frac{1}{2} Z^t M Z - BZ \\ G(Z) = MZ - B \\ E(Z + \rho H) = \frac{1}{2} (Z + \rho H)^t - M(Z + \rho H) \end{array} \right.$$

où h est la direction de descente.

On préconditionne G(Z) par la diagonale de M i.e.

$$G_j(Z) \rightarrow G_j(Z)/M_{jj}$$

et ρ est le "pas" que l'on calculera à chaque itération ; pour avoir une descente optimale, on résoud :

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} E(Z+\rho H) = 0$$

on trouve

$$(5.4) \quad \rho = - \frac{H^t MZ + BH}{H^t MH}$$

En remplaçant (5.4) dans (5.2) on obtient :

$$(5.5) \quad E_{\min} = E(Z) - \frac{(H^t MZ + BH)^2}{2 H^t MH}$$

ALGORITHME

- 0.0 Initialisation de $Z^0, E(Z^0), H^0, |G^0| = 1, \rho^0 = 0, \rho^{\min}$
- 0.1 N iter = nombre d'itérations
- 1.0 $n = 0$
- 1.1 $n = n+1$; si $n > N$ iter aller 2.0
- 1.2 calcul de G^n et $|G^n|$
- 1.3 calcul de $\gamma^n = \frac{|G^n|^2}{|G^{n-1}|^2}$
- 1.4 si ($n = 1$ ou $\rho^{n-1} \leq \rho^{\min}$) alors $\gamma^n = 0$
- 1.5 $H^n = -G^n + \gamma^n * H^{n-1}$
- 1.6 $\rho^n = \underset{\rho}{\text{Arg}(\text{Min } E(Z^{n-1} + \rho H^n))}$
- 1.7 $Z^n = Z^{n-1} + \rho^n * H^n$
- 1.8 aller à 1.1
- 2.0 sortie

| | | | | | |
|----|----------------|----------------|----------------|--|-----------|
| | ← NI → | ← NI → | ← NI → | ← NF → | |
| NI | a_{ij} | 0 | 0 | $n_1^j a_{ij}$ | ← j ligne |
| NI | 0 | a_{ij} | 0 | $n_2^j a_{ij}$ | ← j ligne |
| NI | 0 | 0 | a_{ij} | $n_3^j a_{ij}$ | ← j ligne |
| NF | $n_1^j a_{ij}$ | $n_2^j a_{ij}$ | $n_3^j a_{ij}$ | $(n_1^i n_1^j + n_2^i n_2^j + n_3^i n_3^j) a_{ij}$ $+ (n_2^i n_1^j - n_1^i n_2^j) b_{ij}$ $+ (n_3^i n_1^j - n_1^i n_3^j) c_{ij}$ $+ (n_3^i n_2^j - n_2^i n_3^j) d_{ij}$ | |

- Figure 5 -

6. - ESSAIS NUMERIQUES

Le programme correspondant à l'algorithme de la section 4.4 a été écrit en FORTRAN 77 pour une géométrie quelconque, c'est-à-dire un domaine découpé en tétraèdres.

Le programme utilise un fichier pour la géométrie qui comprend

- . un tableau des coordonnées des sommets
- . un tableau des numéros des sommets pour chaque tétraèdre
- . un tableau logique permettant de reconnaître à quelle frontière un sommet appartient

Les normales aux sommets ont été calculées par moyenné des normales aux faces frontières (cf. 4.28)). Dans tous les cas $u_\infty = \{1,0,0\}$.

Dans toutes les figures on a visualisé les lignes de courant. Celles-ci ont été calculées en résolvant :

$$(6.1) \quad \frac{dx}{d\tau}(\tau) = u_h(x(\tau)) = \nabla \times \psi_h(x(\tau)).$$

6.1. Ailes.

Deux géométries type "tranche d'aile de profil NACA 0012" ont été testées :

- . une géométrie mince proche du bidimensionnel
- . une tranche de voilure non cylindrique (effet de flèche).

Dans tous les cas on a

$$(6.2) \quad \psi_d = \{0, -x_3, 0\} \text{ sur } \Gamma_\infty \text{ et sur les parois verticales, } 0 \text{ sur l'aile.}$$

468 sommets dont 337 aux frontières
1548 éléments.

Le système a donc 730 inconnues.

Typiquement 30 itérations réduisent le gradient de 10^8 fois sa valeur initiale.

On a tracé dans tous les cas des lignes de courants partant de l'infini et passant assez près de la voilure.

La figure 1 donne une idée de la triangulation du fichier et les lignes de courant calculées.

La figure 2 donne un résultat de lignes de courants bidimensionnelles sur le plan de symétrie mais le calcul est 3-D.

La figure 3 montre des lignes de courant calculé par ψ et est à comparer avec la figure 4 qui montre les mêmes lignes de courant obtenues à partir d'un calcul en potentiel vecteur :

$$\Delta\phi = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = u_{\infty} \cdot n$$

Les figures 3 et 4 correspondent à un vrai calcul tridimensionnel avec effet de flèche.

6.2. Sphère.

Dans un second temps afin de tester l'équation de Beltrami, un fichier type "sphérique" a été utilisé. La géométrie comprend une frontière infinie sphérique et une frontière "obstacle" sphérique concentriques à la première. On a : 552 sommets dont 184 aux frontières
2300 éléments.

Le système linéaire a 1288 inconnues.

Avec les mêmes conditions aux limites que (5.1), 20 itérations réduisent le gradient de 10^8 fois sa valeur initiale. De même, en utilisant le problème de Beltrami (1.64), discrétisé en éléments finis P^1 conformes, pour déterminer la condition aux limites ψ_{dh} , 18 itérations suffisent pour réduire le gradient de 10^8 fois sa valeur initiale. Pour le calcul de q dans (1.64), 7 itérations suffisent pour réduire le gradient de 10^8 sa valeur initiale. On a tracé des lignes de courant partant de l'infini et passant assez près de l'obstacle.

Les trois figures (5a), (5b) et (5c) sont des projections dans le plan (XOY) des lignes de courant.

La figure (5a) montre des lignes de courant calculées par ψ avec comme conditions aux limites (5.1).

La figure (5b) montre des lignes de courant calculées par ϕ solution du problème (5.3).

La figure (5c) montre des lignes de courant calculées par ψ avec comme conditions aux limites $\psi_d = n \times \nabla q$ sur Γ_∞ .

$$\psi_d = \vec{0} \text{ sur l'obstacle,}$$

et q solution de (1.64).

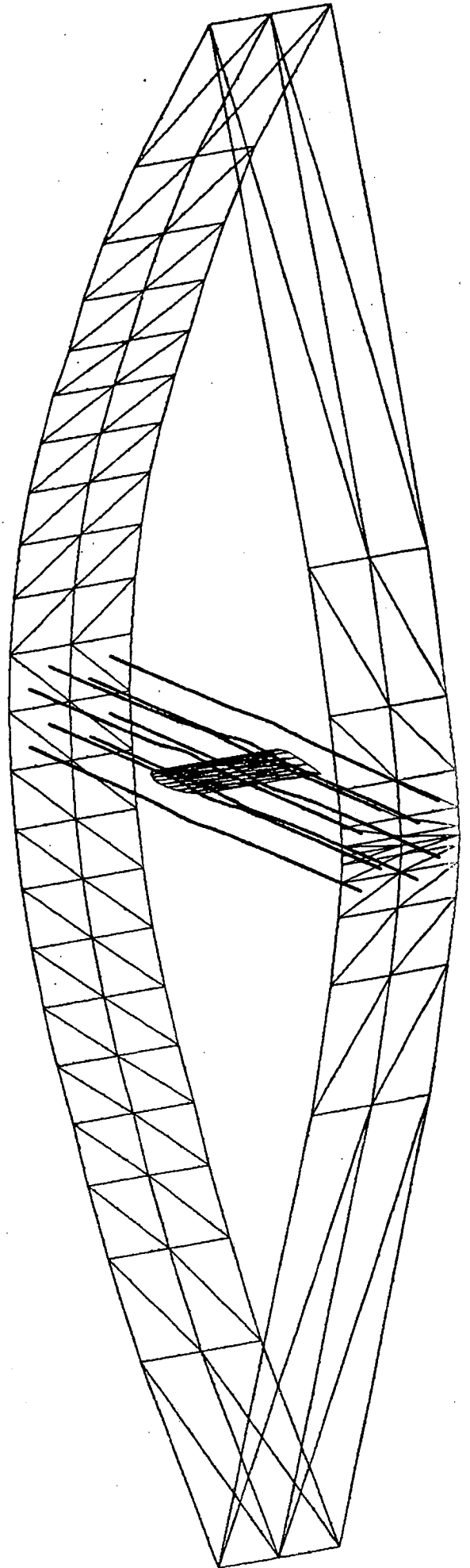
La figure 6 montre le même cas que (5c) en vue (3-D) dans toute la géométrie.

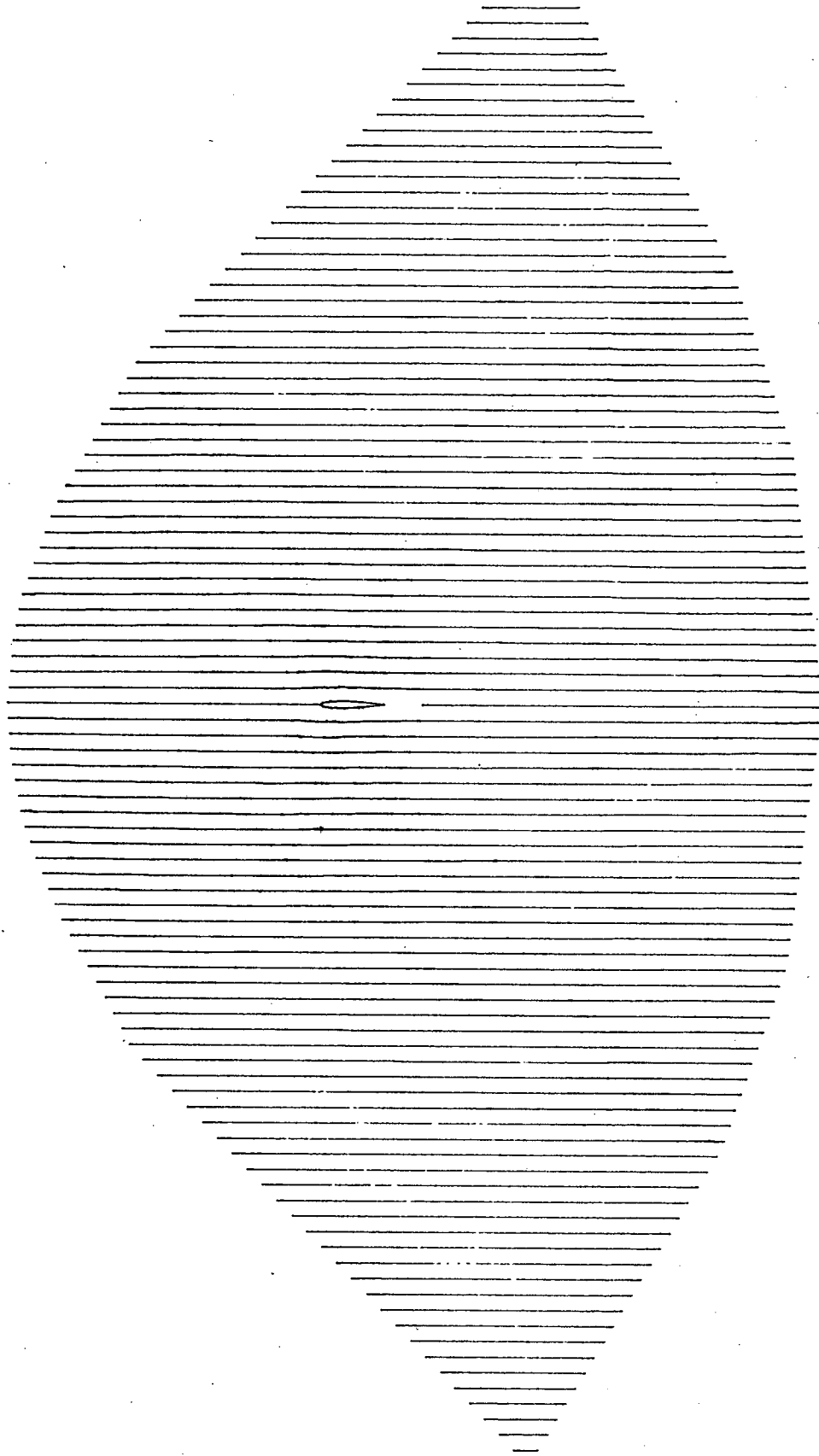
La figure 7 correspond à $\psi_d = n \times \nabla q$ sur Γ_∞ et sur l'obstacle avec q solution de (1.64) et donc $\psi = -x_3 e^2$; toutefois on obtient seulement une approximation de cette solution car le q analytique correspondant n'est pas dans l'espace d'approximation de q_h . La figure montre cependant que les résultats sont très proches de la solution analytique.

CONCLUSION

Les deux méthodes (en ψ et en ϕ) donnent des résultats très semblables (par exemple sur l'élément 1227 près du profil d'aile $\nabla \times \psi = (1.152, -0.014, -0.050)$, $\nabla \phi = (1.109, +0.0008, -0.001)$). Les systèmes linéaires sont bien conditionnés puisque la méthode du Gradient Conjugué converge vite. Cette étude démontre donc que le calcul du vecteur de courant dans R^3 est possible et numériquement d'un coût raisonnable (48" en ψ contre 28" en ϕ sur IBM 3081). Les applications aux écoulements transsoniques décrites au paragraphe 3 sont donc implémentables.

- Figure 1 -





- Figure 2 -

Figure 3

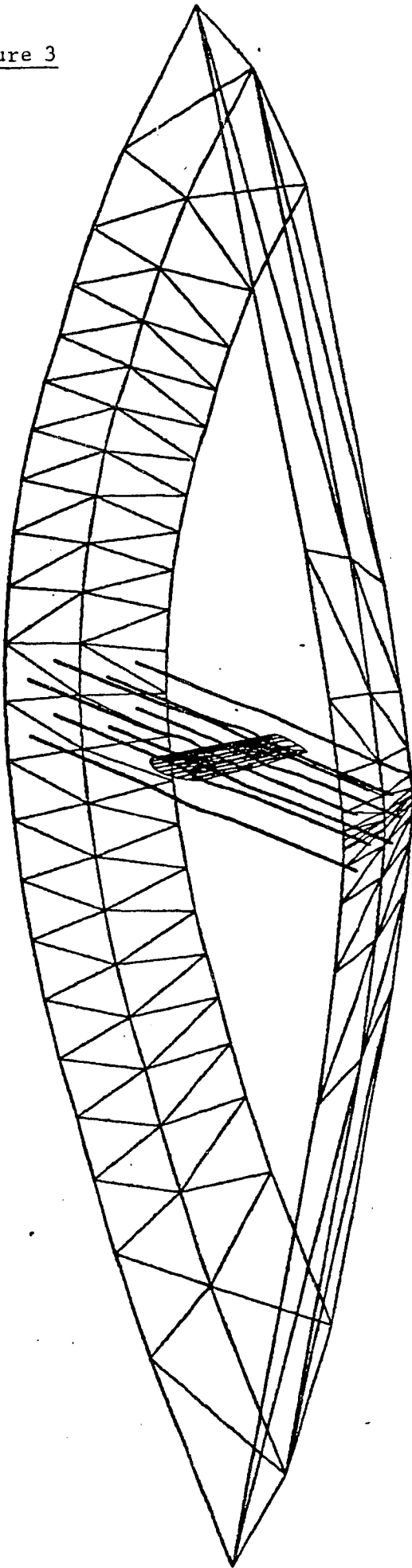


Figure 4

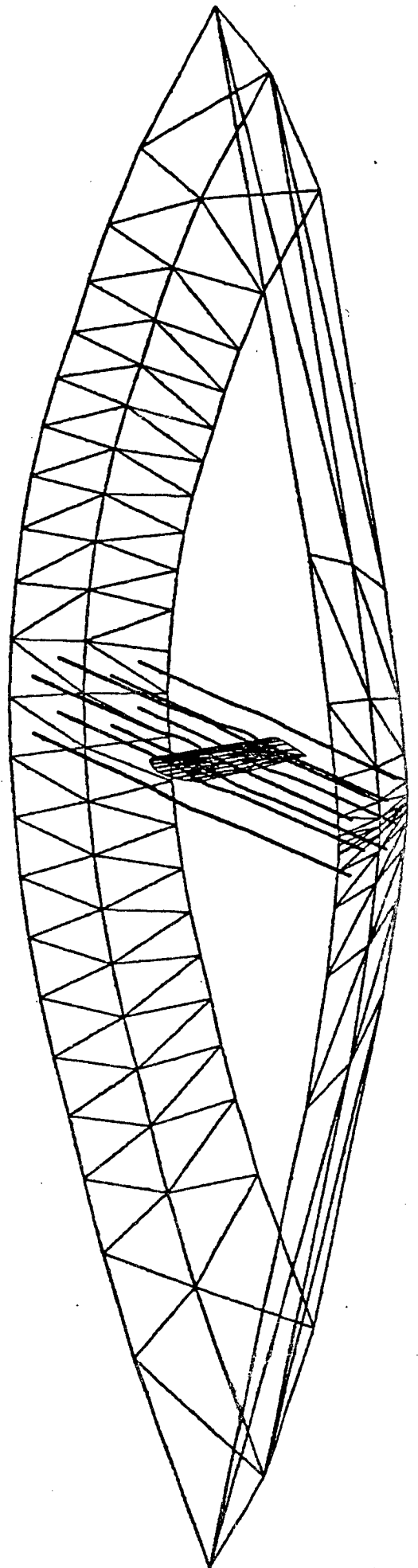


Figure 5a

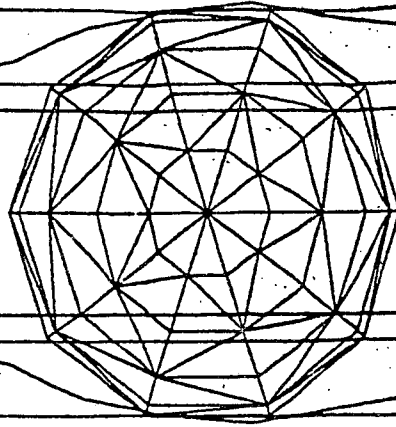


Figure 5b

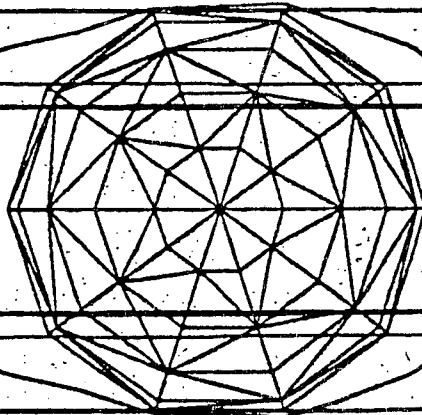


Figure 5c

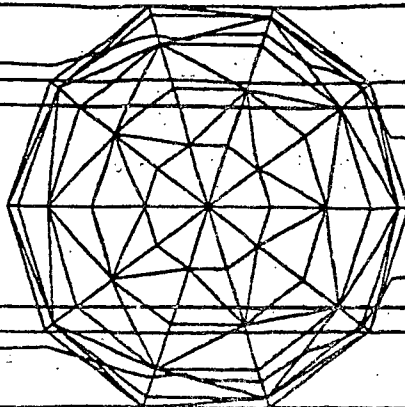


Figure 6

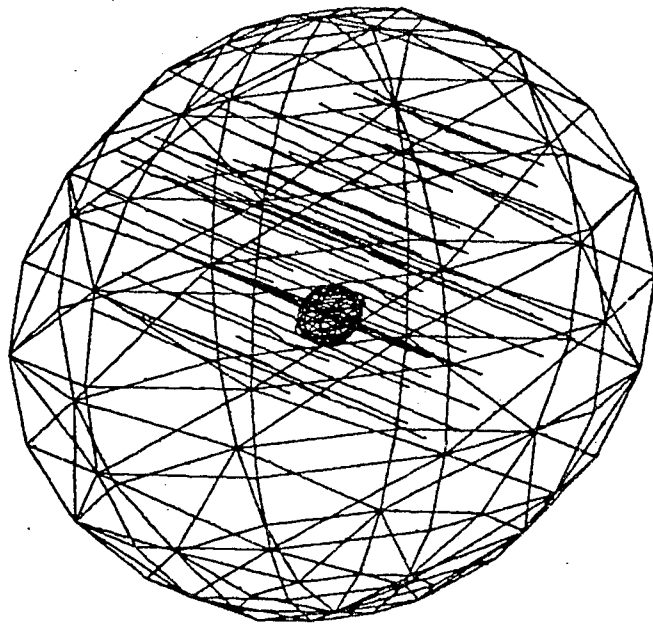
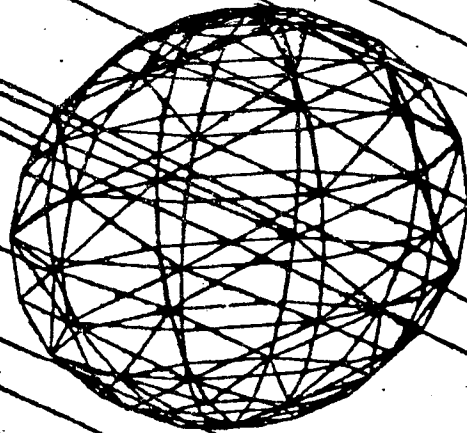


Figure 7



REFERENCES

- [1] C. LACOR, Ch. HIRSCH
"Rotational flow calculations in three dimensional blade passage "
ASME report 82-GT-316
- [2] J.S. SOKHEY
"Transonic flow around axisymmetric in lets including rotational flow effects".
AIAA 18 th meeting Pasadena (1980).
- [3] N. PAPAILLOU
- à paraître -
- [4] BERNARDI
Thèse de 3ème cycle
Université Paris VI - 1979 -
- [5] A. BENDALI, J.M. DOMINGUEZ, S. GALLIC
"A Variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three dimensional problems"
Rapport interne N° 95 Ecole Polytechnique - CMA (1983)
- [6] J.C. NEDELEC
"Mixed finite elements in R^3 "
Numer. Math. (35) (1980)
- [7] M. AMARA
"Analyse de méthode d'éléments finis pour des écoulements transsoniques"
Thèse d'Etat -- Université Paris VI - Analyse numérique (1983).
- [8] DE RHAME Georges
Variétés différentiables, Ed. Hermann, Paris (1960).

Remerciements

A C. BERNARDI pour ses remarques sur $H(\nabla \cdot, \Omega) \cap H(\nabla x, \Omega)$,
à G. POIRIER pour sa coopération pour les essais numériques,
à P. PERRIER et J. PERIAUX pour l'intérêt témoigné à la méthode et la mise
à notre disposition du potentiel informatique.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

