Conditions de fonctionnement et proprietes d'optimalite d'un atelier flexible

J. Barre, H. Hillion, Jean-Marie Proth

INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél : (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 247

CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT ET PROPRIÉTÉS D'OPTIMALITÉ D'UN ATELIER FLEXIBLE

Jérome BARRE
Hervé HILLION
Jean-Marie PROTH

Octobre 1983

CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT ET PROPRIETES D'OPTIMALITE D'UN ATELIER FLEXIBLE

JÉRÔME BARRE*
HERVÉ HILLION*
JEAN-MARIE PROTH**

* Ecole Polytechnique
** INRIA

CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT ET PROPRIETES D'OPTIMALITE D'UN ATELIER FLEXIBLE

JÉRÔME BARRE*
HERVÉ HILLION*
JEAN-MARIE PROTH**

RESUME

Ce papier s'intéresse aux conditions qui permettent à un atelier flexible d'atteindre son régime permanent. On y étudie également les conditions qui permettent d'atteindre la productivité maximale.

ABSTRACT

The aim of this paper is to give somme properties of a Flexible Manufacturing System steady state. We also study the conditions which lead to the higher productivity.

* Ecole Polytechnique
** INRIA

INTRODUCTION

Nous nous intéressons à un système de M machines capable d'élaborer P produits différents. Les pièces sont transportées par des chariots. Dans ce papier, nous admetions que les temps de transport sont nuls. En fait, l'approche que nous proposons pourra s'étendre pour prendre en charge ce type d'informations.

L'ordre de chargement des pièces sur les chariots, ainsi que l'ordre de passage des pièces sur les différentes machines, déterminent le fonctionnement du système lorsque le nombre de chariots est connu.

Nous avons dégagé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système puisse atteindre son régime permanent, dont nous montrons l'existence. Lorsque ces conditions sont réalisées, nous montrons que la productivité maximale est obtenue pour un nombre de chariots supérieur ou égal à un entier que nous savons calculer dans le cas linéaire. On note au passage que, quel que soient les ordres d'entrée dans les machines et l'ordre de chargement des chariots, la même productivité maximale peut être atteinte dans le cas du "flow shop". Mais le nombre de chariots nécessaires pour atteindre cet optimum est fonction des ordres (de passage et d'entrées) choisis.

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Nous considérons un système de fabrication composé de M machines et capable d'élaborer P produits différents. Chaque produit est caractérisé par sa gamme de fabrication que nous définissons comme la succession des machines sur lesquelles il aura à passer pour aboutir à l'état de produit fini avec, pour chaque machine, le temps de passage.

Lorsque la suite des machines à visiter est la même pour tous les produits, nous dirons que la fabrication est linéaire ("flow-shop"). Dans le cas contraire, la fabrication sera dite non linéaire ("job-shop"). Les produits sont transportés dans le système à l'aide de chariots. Nous supposons que tous les chariots sont de même type et que chaque chariot transporte un seul produit. Soit n leur nombre.

Pour chaque machine, nous fixons un ordre de passage des différents produits. Pour $i = 1,2,\ldots,M$, l'ordre de passage des produits dans la machine i est donné par la séquence :

$$S^i_{l_i} = (p^i_1, p^i_2, \ldots, p^i_{l_i}) \tag{1}$$

où l_i est le nombre de termes (ou longueur) de la séquence.

Nous donnons également un ordre de chargement des produits sur les chariots en fournissant la séquence :

$$S^o_{l_o} = (p^o_1, p^o_2, \ldots, p^o_{l_o}) \tag{2}$$

Bien entendu, plusieurs termes d'une même séquence peuvent être identiques c'est à dire représenter un même produit.

Dès qu'un chariot est libéré, c'est à dire dès que la gamme du produit qu'il porte est entièrement exécutée, il est immédiatement réutilisé pour prendre en charge le produit suivant dans l'ordre de chargement. Nous supposons que le chariot peut être réutilisé immédiatement.

La donnée des séquences $S^i_{1_i}$, $i = 0,\dots,M$, définit entièrement le fonctionnement du système.

Nous désignerons par :

$$q^k_i, k=1,\dots,P \; ; \; i=0,\dots,M, \tag{3}$$

la proportion de produit k dans la suite $S^i_{1_i}$

Enfin nous généraliserons les notations (1) et (2) en désignant par :

$$S^i_j, i=0,\dots,M \; ; \; 0 \le j \tag{4}$$

les j premiers termes d'une suite rangée suivant $S^i_{1_i}$

Nous étudions d'abord le cas d'une fabrication linéaire.

II. FABRICATION LINEAIRE

Nous cherchons d'abord une condition nécessaire et suffisante de non-blocage du système.

II.1. Condition nécessaire et suffisante de non-blocage

RESULTAT I

Pour que le système ne se bloque pas au bout d'un temps fini il faut que, pour tout produit $k = 1,2,\dots,P$:

$$q^k_o = q^k_1 = \dots = q^k_M \tag{5}$$

Démonstration.

Supposons que, pour $k \in \{1,2,\dots,P\}$, il existe $i \in \{1,\dots,M\}$ tel que :

$$q^k_{i-1} \neq q^k_i$$

Comme :
$$\sum_{j=1}^{p} q_{i-1}^{j} = \sum_{j=1}^{p} q_{i}^{j} = 1$$
il est possible de choisir un produit k tel que :

$$q_{i-1}^{k} > q_{i}^{k} \tag{6}$$

Soit r_i le p.p.c.m. de l_{i-1} et l_i et K un entier strictement positif.

Considérons une suite de Kr_i produits au niveau i-1 rangés suivant la séquence $S_{l_{i-1}}^{i-1}$. Ces produits sont en attente d'entrée dans le système si i = 1 ou en attente devant la machine i-1 si i > 1. Cette suite comporte $Kr_i q_{i-1}^{k}$ produits k. Après lancement (si i = 1) ou passage sur la machine i-1 (si i > 1), cette suite se retrouve devant la machine i. Or le passage sur i se fait suivant la séquence $S_{l_i}^{i}$, donc lorsque i traite Kr_i produits, elle traite $Kr_i q_i^k$ produits de type k. De plus, lorsqu'on injecte Kr_i produits au niveau i-1, la machine i traite au plus Kr_i produits.

En tenant compte de (6), nous pouvons donc affirmer que chaque fois que l'on injecte une suite de Kr_i produits rangés suivant $S_{l_{i-1}}^{i-1}$ au niveau i-1, on constate l'accumulation d'au moins

$$Kr_i(q_{i-1}^{k} - q_i^{k})$$
produits devant i.

Si n est le nombre de chariots utilisés (rappelons que chaque chariot transporte un produit), le système se bloquera au plus tard lorsqu'on aura lancé Kr_i produits, où K vérifie :

$$K \geq \frac{n}{r_i(q_{i-1}^{k} - q_i^{k})}$$

et que chaque machine aura terminé la transformation de ceux de ces produits qui ne sont pas bloqués avant de lui parvenir.

En choisissant pour K le plus petit entier vérifiant (7), et compte tenu du fait que les temps opératoires sont finis, cet évènement se produira au bout d'un temps fini. Ceci achève la démonstration.

RESULTAT II.

La condition (5) est une condition suffisante de non blocage du système si le nombre de chariots est supérieur à un nombre minimal qui reste à fixer. Ce minimum est majoré par le p.p.c.m. des $l_i, i=0,1,\ldots,M$.

Démonstration.

Soit r le p.p.c.m. des $l_i (i=0,1,\ldots,M)$ et supposons que nous disposions de r chariots. Un ensemble de r produits chargés sur les r chariots suivant l_o peut être entièrement réordonné devant chaque machine i suivant l'ordre indiqué par $S^i_{l_i}$ $(i = 1,2,\ldots,M)$ car :

1. r est le p.p.c.m des $l_i (i=0,1,\ldots,M)$

2. $q^k_o = q^k_1 = \ldots = q^k_M$ pour $k=1,2,\ldots,P$.

Une séquence de longueur r passe donc entièrement sur le système .

En imaginant le fonctionnement du système comme la fabrication de lots successifs de longueur r sous la condition que la fabrication d'un lot ne débute que lorsque celle du précédent est terminé, on voit qu'il suffit qu'une séquence de longueur r puisse être entièrement fabriquée pour que le système ne bloque jamais.

Illustrons les résultats précédents par un exemple simple. Soit un système composé d'une seule machine et capable de fabriquer deux produits, que nous désignons par 1 et 2.

1. si
   $l_o = 1,2$ et $l_1 = 1,2$
   il suffit d'un chariot pour que le système ne bloque pas

2. si

   $l_o = 1,2$ et $l_1 = 2,1$

   deux chariots sont nécessaires pour que le système ne bloque pas

3. si

   $l_o = 1,2$ et $l_1 = 2,1,1$

   le système bloquera quel que soit le nombre (fini) de chariots dont on dispose. Il y aura accumulation de chariots portant la pièce 2 devant la machine.

Le résultat que nous présentons maintenant permet de calculer le nombre minimum de chariots qui assure le non-blocage lorsque les $l_i (i = 0,1,\ldots,M)$ sont connus.

<u>RESULTAT III</u>

La condition (5) est supposé réalisée.

Quel que soit j entier positif, nous considérons la suite finie :

$$n_M^j,\ n_{M-1}^j, \ldots\ldots, n_1^j,\ n_o^j$$

définie de la manière suivante :

1. $n_M^j = j$

2. Pour $i = M, M-1, \ldots, 1$, $\quad n_{i-1}^j$ est le plus petit des entiers k vérifiant :

$$S^i_{n_i^j} \subset S^{i-1}_k \tag{8}$$

Si r est le p.p.c.m. des $l_i (i = 0,1,\ldots,M)$, alors le nombre minimal de chariots indispensables pour que le système ne se bloque pas est donné par :

$$n^o = \max_{j=1,2,\ldots,r} (n_o^j - j) + 1 \tag{9}$$

Démonstration.

n_o^j est le nombre minimum de produits qu'il faut lancer dans l'ordre donné par $S_{1_o}^o$ pour obtenir j produits finis. Bien entendu, $n_o^j \geq j$.

En se souvenant qu'un chariot libéré en fin de fabrication est immédiatement réutilisé pour recharger la pièce suivante, nous pouvons faire le raisonnement suivant :

- on cherche d'abord à obtenir j-1 produits en sortie, ce qui nous oblige à utiliser n_o^{j-1} chariots

- la fabrication des j-1 produits étant terminée, j-1 chariots sont libérés et immédiatement réutilisés

- finalement, pour obtenir j produits en sortie, il suffit d'utiliser n_o^j -(j - 1) chariots différents. (10)

En reprenant la dernière partie de la démonstration du résultat II, et en considérant (10), le résultat (9) est démontré

Remarque.

Lorsque toutes les séquences 1_i(i = 0,1,...,M) sont identiques, ou que leur concaténation avec elles mêmes jusqu'à obtenir des séquences de longueur r (p.p.c.m. des 1_i) sont identiques, il est facile de voir que n_o^j = j quel que soit j = 1,2,.... En appliquant (9), nous voyons alors que n = 1 : le système peut fonctionner avec un seul chariot.

Nous ne nous sommes préoccupés jusqu'à présent que des conditions qui permettent au système de fonctionner, sans essayer d'obtenir au taux de production maximal. Nous nous attachons à cet aspect dans le paragraphe suivant.

II.2. Fonctionnement optimal lorsque les temps opératoires sont tous égaux

Nous considérons dans ce paragraphe que les temps de passage de tous les produits sur toutes les machines sont égaux. Observons que lorsque les temps opératoires sont proches les uns des autres, on obtient à l'aide des résultats qui suivent une situation voisine de l'optimum (ordonnancements, nombre de chariots) et une minoration du taux de production en prenant comme temps opératoire unique le temps opératoire maximum.

Dans la suite, nous supposons la condition (5) réalisée.

En outre, nous admettons que $l_o = l_1 = \ldots = l_M$: si cette condition n'est pas réalisée, il est facile de s'y ramener par concaténation des différentes séquences d'entrée avec elles-mêmes jusqu'à obtenir des séquences de longueur r, r étant le p.p.c.m. des $l_i (i = 0,1,\ldots,M)$

Enfin, nous considérons que le temps opératoire unique est égal à 1 : ce faisant, nous ne restreignons en rien la généralité.

Nous considérons l_o produits rangés à l'entrée du système suivant la séquence $S^o_{l_o}$. Nous dirons qu'il s'agit d'une séquence à fabriquer. Nous noterons t(i) le temps de fabrication de la $i^{ème}$ séquence, c'est à dire le temps qui sépare la sortie du système du dernier produit de la $(i-1)^{me}$ séquence de la sortie du dernier produit de la i^{me} séquence

RESULTAT IV

Quelle que soient les séquences d'entrée répondant à la condition (5), et en supposant que le nombre de chariots est suffisant pour éviter le blocage, le système admet un régime permanent périodique. En d'autres termes, il existe un entier $N \geq 0$ et un entier $T > 0$ tels que, quel que soit $k \geq N$, l'état du système à l'instant k est identique à l'état du système à l'instant k + T (T est l'entier minimal)

En particulier :

$$t(k + T) = t(k) \tag{11}$$

Démonstration

L'égalité des temps opératoires entraîne que si $i (i \leq M)$ machines sont occupées à un instant donné, elles seront libérées au même instant. Le nombre d'états du système est donc fini. En conséquence, et au moins à partir d'un instant fini N, tout état du système se retrouve ultérieurement. Si l'on observe en outre que l'état du système à un instant quelconque définit entièrement la séquence des états suivants, le théorème est démontré

Le temps de passage moyen d'une séquence à fabriquer s'écrira alors :

$$t_m = \left(\sum_{i=1}^{T} t(N + i)\right)/T \tag{12}$$

Remarque :

Les paramètres N, T et t_m que nous venons d'introduire dépendent évidemment du nombre n de chariots disponibles. Nous les noterons N(n), T(n) et $t_m(n)$.

RESULTAT V.

La condition (5) est supposée réalisée et n^o, donné par (9), est le nombre minimum de chariots qui assure le non-blocage du système.

Alors $t_m(n)$ est définie pour $n \geq n^o$. C'est une fonction décroissante de n. Enfin, il existe $n^* \geq n^o$ tel que :

$t_m(n) = t_m(n^*)$ quel que soit $n \geq n^*$, et $t_m(n^*) = r = l_o = \ldots = l_M$.
(en effet, les temps opératoires sont tous égaux à 1)

Démonstration

a. Le régime permanent n'est évidemment atteint que si le système ne se bloque pas, et cela est réalisé pour un nombre de chariots supérieurs ou égal à n^o. t_m est donc définie sur $[\ n^o, +\infty\ ]$

b. La décroissance de la fonction est évidente : le temps moyen de fabrication d'une séquence ne peut pas augmenter lorsqu'on dispose d'un chariot supplémentaire (les conflits sont exclus).

c. Reste à montrer l'existence de n^*. Pour cela, nous allons établir que $t_m(n)$ est minorée par $r = l_o = l_1 = \ldots = l_M$ et que cette valeur est atteinte pour rM chariots.

En régime permanent, il est facile de voir (résultat III) que $n^o \leq r\,M$, et que au plus r chariots sont présents devant chaque machine. Si bien que l'utilisation de r M chariots assure le fonctionnement continu de toutes les machines en régime permanent. D'où le résultat

Remarques :

1. n^o et n^* sont respectivement le nombre minimal de chariots qui assure le non blocage du système et le nombre minimal de chariots qui assure le rendement maximum pour les séquences d'entrée données. Il se peut que, dans certains cas de figure, $n^o = n^*$. Cela se produit en particulier lorsque le système est composé d'une seule machine. En général, $n^o \leq n^*$.

2. La productivité maximale du système est obtenue par un nombre de chariots égal au moins à n^*. n^* dépend de l'ensemble des séquences d'entrée. Cependant, la productivité maximale est indépendante des ces séquences. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les machines fonctionnent en permanence lorsque $n = n^*$. Nous y reviendrons dans le résultat VI.

3. $n^* \leq r\,M$, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration précédente.

Nous allons montrer comment obtenir n^* pour des séquences d'entrée données.

Considérons que chaque machine $i \in \{1,2,\ldots,M\}$ de notre système est un sous-système E_i admettant $S^i_{l_i}$ comme séquence d'entrée dans la machine et $S^{i-1}_{l_{i-1}}$ comme séquence d'entrée dans le système.

Pour un système composé d'une machine unique, et connaissant les séquences d'entrée dans le système et dans la machine, le nombre minimal de chariots nécessaires au fonctionnement sans blocage est égal au nombre minimal de chariots qui maximise la productivité. En effet, dès que le système fonctionne, la machine est occupée en permanence. Soit n (i) ce nombre pour le sous-système E_i, $i = 1,2,\ldots,M$.

Nous notons $n^{**} = \sum_{i=1}^{M} n^*(i)$ (13)

Pour un ensemble de séquences $S^i_{1_i}$ $(i = 0,1,\ldots,M)$ donné, nous dirons que le système fonctionne de manière optimale s'il utilise n^* chariots.

RESULTAT VI

Les séquences d'entrée $S^i_{1_i}$ $(i = 0,1,\ldots,M)$ étant connues, nous allons montrer que :

$n^* = n^{**}$, où n^{**} est donné par (13)

Démonstration

Supposons que le système complet fonctionne de manière optimale en régime permanent. Il est facile de voir qu'en régime permanent, les opérations commencent et se terminent en même temps sur toutes les machines. Donc, à chaque instant, et pour chaque machine, le nombre de chariots en attente devant la machine plus le chariot dont la pièce est éventuellement en cours de transformation sur la machine est une constante. Le système étudié est donc équivalent à la concaténation des systèmes E_i, d'où le résultat

Remarque

Bien entendu, un chariot sortant de la machine i n'est par renvoyé à l'entrée de cette machine, comme ce serait le cas si l'on observait le fonctionnement de E_i. Mais comme M chariots sont libérés simultanément, et que n'importe quel chariot est en mesure de prendre en charge n'importe quelle pièce, il y a équivalence à une permutation circulaire près sur les "noms" des chariots.

RESULTAT VII

1. Quelles que soient les séquences $S^{o}_{1_o}$, $S^{1}_{1_1}$, ..., $S^{M}_{1_M}$ choisies, la productivité maximale est la même.

2. n^* est minimal si $S^{o}_{1_o} = S^{1}_{1_1} = \ldots = S^{M}_{1_M}$, et alors $n^* = M$

Démonstration

1. Quelles que soient les séquences choisies, lorsque le nombre de chariots est égal à n^*, une machine n'est jamais inoccupée durant un intervalle de temps de mesure non nulle. Si bien que le système produit toujours une pièce par unité de temps

2. Si $S^{o}_{1_o} = S^{1}_{1_1} = \ldots = S^{M}_{1_M}$, il est facile de voir que $n^*(i) = 1$ quel qui soit $i = 1,2,\ldots,M$. Si bien que $n^*(i)$ est minimal dans ce cas. Donc $n^* = n^{**} = \sum_{i=1}^{M} n^*(i) = M$ est minimal

En conclusion, lorsque les séquences sont toutes identiques, l'optimum est atteint pour M chariots et il n'y a pas d'autre ensemble de séquences qui permette d'atteindre la productivité maximale avec un nombre aussi faible de chariots.

Nous abordons maintenant le cas plus général où les temps opératoires sont rationnels.

II.3. *Sur le fonctionnement optimal lorsque les temps opératoires sont rationnels.*

Le fait d'admettre que les temps opératoires sont rationnels ne diminue évidemment en rien la généralité sur le plan pratique. On peut alors, en utilisant éventuellement un coefficient multiplicatif, considérer que les temps opératoires sont entiers. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Nous supposons toujours que les temps de transfert, les temps de retour de chariot et les temps de chargement sont nuls. Les séquences $S^i_{l_i}$, $i = 0,1,\ldots,M$, sont supposées être de même longueur. On peut toujours se ramener à ce cas par concaténation des séquences avec elles mêmes jusqu'à obtenir une séquence de longueur r, où r est le p.p.c.m. des $l_i (i = 0,1,\ldots,M)$.

Nous conservons les notations précédentes.

n^* est le nombre minimal de chariots qui assurerai la productivité maximale si les temps opératoires étaient égaux. Nous utiliserons également les notations suivantes :

$Z(i), i = 1,\ldots,M$, est le temps de passage minimum d'une des séquences sur la machine i : $Z(i)$ est la somme des temps de passage des produits constituant l'une des séquences sur la machine i. Compte tenu des hypothèses précédentes, $Z(i)$ ne dépend pas de la séquence choisie.

Nous considérons également :

$$Z = \max_{i=1,\ldots,M} Z(i) \tag{14}$$

$t(i), i = 1,2,\ldots$, est le temps de passage de la i^{me} séquence dans le système, tel qu'il a été défini en II.2.

A tout instant $t \in |N|$, nous pouvons photographier le système. Les temps de fabrication étant différents de 1, il est possible qu'un produit soit en cours de transformation sur une machine au temps t. Convenons alors que ce produit est en attente devant la machine et que le temps qu'il lui reste à attendre est égal au temps qu'il lui reste à passer sur la machine. A tout instant $t \in |N|$, le système se caractérise donc par une file d'attente devant chaque machine avec, pour chaque élément de la file, un temps d'attente. Nous parlerons de configuration du système à l'instant t. Une configuration définit complètement l'état du système aux instants suivants. En outre, comme les temps d'attente sont entiers et majorés par Z et que le nombre de chariots est fini, le nombre d'états du système est lui même fini. <u>Le résultat IV reste donc vrai dans notre cas</u>.

Nous allons montrer le résultat suivant :

RESULTAT VIII.

$t_m(n)$, temps de passage moyen d'une séquence en régime permanent lorsqu'on dispose de n chariots, est une fonction décroissante de n, minorée par Z, et définie pour $n \geq n^o$.

Il existe un entier $n_1^* \geq n^o$ tel que :

$$\forall n \geq n_1^*,\ t_m(n) = t_m(n_1^*) = Z$$

et :

$$n^o \leq n_1^* \leq r\,M$$

Démonstration.

a. Décroissance : l'adjonction d'un chariot ne peut diminuer la productivité du système, donc $t_m(n)$ ne peut croître strictement.

b. Si $t_m(n) = Z$, la machine i_1, où :

$$Z(i_1) = Z \tag{15}$$

fonctionne en permanence. Donc Z minore $t_m(n)$

c. Lorsque $n < n^o$, le système se bloque au bout d'un temps fini. Donc $t_m(n)$ est définie pour $n \geq n^o$

d. Considérons le fonctionnement avec $n_1 = r\,M$ chariots et raisonnons par lots de r produits (r est la longueur commune à toutes les séquences)

Lançons le premier lot et laissons arriver tous ses composants devant la M^{me} machine. Cela est possible car (5) est vérifié. Lançons ensuite le deuxième lot et laissons arriver ses composants devant la $(M-1)^{me}$ machine et ainsi de suite. Finalement, un lot de r produits sera en attente devant chacune des M machines.

Durant un temps Z, faisons fonctionner le système de la manière suivante :

pour chaque machine $i = 1,2,\ldots,M$, faisons passer un lot, puis faisons le attendre durant un temps $Z - Z(i)$.

Ainsi :

- le système produira un lot de r produits durant le temps Z
- la machine i_1 (voir (15)) fonctionnera en permanence
- au bout d'un temps Z, r chariots auront été libérés et auront repris place devant la machine 1. On peut ainsi réitérer et obtenir un régime permanent dans lequel $t_m(n_1) = Z$

La borne inférieure Z est donc atteinte pour un nombre suffisant de chariots. Comme n_1 est fini, n_1^* existe et $n^o \leq n_1^* \leq r\,M$.

Lorsque les temps opératoires sont tous égaux, et que le système se réduit à une machine, nous avons vu que $n^o = n^*$. Le résultat III nous permet donc de calculer $n^*(i)$ pour $i = 1,2,\ldots,M$ et n^* pour le système complet est obtenu à l'aide du résultat VI. En outre, nous savons que le n^* minimal s'obtient pour des séquences d'entrée identiques.

Le cas général est plus difficile à cerner. Pour des séquences d'entrée données, le résultat VIII montre cependant qu'il suffit de procéder par simulation en faisant varier le nombre n de chariots de n^o (calculable grâce au résultat III) à r M. n_1^* sera la première valeur de n rencontrée et telle que $t_m(n) = Z$.

Le domaine de recherche peut être réduit. Si n^* est le nombre optimal de chariots calculé en prenant des temps tous égaux, alors :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } t_m(n^*) = Z,\ n_1^* \leq n^* & (16) \\ \text{si } t_m(n^*) > Z,\ n_1^* > n^* & (17) \end{array}\right\} \text{(c.f. résultat VIII)}$$

Nous venons de suggérer un algorithme qui, dans le cas général et lorsque les $S^i_{1_i}$, $i = 0,1,\ldots,M$ sont données, permet de déterminer n_1^*. Cependant, dans le cas général, nous ne sommes pas en mesure de définir les séquences $S^i_{1_i}$ qui conduisent au n_1^* minimal. Remarquons d'ailleurs que, pratiquement, l'objectif est de déterminer le nombre minimal de chariots qui assure la productivité maximale quel que soient les ratios souhaités en sortie. Le problème reste ouvert.

III. FABRICATION NON LINEAIRE.

III.1. *Condition nécessaire et suffisante de non blocage*

Une hypothèse supplémentaire intervient alors : nous associons à chaque produit sa gamme de fabrication que nous définissons comme la séquence des machines sur lesquelles il aura à passer. Nous supposons qu'une même machine ne se retrouve pas deux fois dans une même séquence.

Nous désignons par :

$$G^k_{v_k} = (m^k_1, m^k_2, \ldots, m^k_{v_k}), k = 1,2,\ldots,P \tag{18}$$

la gamme de produit k.

Les notations utilisées précédemment restent vraies.

En outre, pour $i = 1,2,\ldots,M$, nous désignerons par $S^{o,i}_{s_i}$ la suite obtenue en éliminant de $S^o_{1_o}$ tous les produits qui ne passent pas sur la machine i ($s_i \leq 1_o$). Nous dirons que $S^{o,i}_{s_i}$ est la suite extraite de $S^o_{1_o}$ pour la machine i. Nous allons montrer un résultat analogue au résultat I.

<u>RESULTAT IX</u>

Quel que soient $k = 1,2,\ldots,P$ et $i = 1,2,\ldots,M$ nous désignons par $q^k_{o,i}$ la proportion de produit k dans $S^{o,i}_{s_i}$

Pour que le système ne se bloque pas au bout d'un temps fini il faut que, pour $i = 1,2,\ldots,M$:

$$q^k_{o,i} = q^k_i \text{ quel que soit } k \in S^i_{l_i} \tag{19}$$

Démonstration.

Elle est analogue à celle du résultat I.

Supposons qu'il existe une machine $i \in \{1,2,\ldots,M\}$ et un produit $k \in \{1,2,\ldots,P\}$ tels que $q^k_{o,i} \neq q^k_i$.

Comme $\sum_{k=1}^{P} q^k_{o,i} = \sum_{k=1}^{P} q^k_i = 1$

nous pouvons choisir k et i tels que :

$$q^k_{o,i} > q^k_i \tag{20}$$

Nous supposons que $s_i = l_i$ pour $i = 1,2,\ldots,M$.

Si ce n'est pas le cas, nous nous y ramenons par concaténation des séquences avec elles mêmes jusqu'à obtenir des séquences de longueur r_i où r_i est le p.p.c.m. de s_i et l_i, $i = 1,2,\ldots,M$. La longueur commune à $S^i_{l_i}$ et $S^{o,i}_{s_i}$, est donc r_i.

Supposons que K séquences soient entrées dans le système.

Alors, si $k \in S^{o,i}_{r_i}$:

$K r_i q^k_{o,i}$ produits k ont été lancés

et

$K r_i q^k_i$ produits k ont été pris en charge par la machine i

Compte tenu de (20),

$$Kr(q^k_{o,i} - q^k_i) > 0$$

chariots portant des produits k se sont accumulés devant la machine i

Si l'on dispose de n chariots, le système se bloquera donc au plus tard lorsque

$$K = \left[\frac{n}{r(q^k_{o,i} - q^k_i)}\right] + 1,$$

où $[\ ]$ désigne la partie entière, ce qui achève la démonstration $\boxed{}$

Nous allons mettre en évidence une seconde condition de non blocage qui n'apparaissait pas dans le cas linéaire.

RESULTAT X

Soient $k_1, k_2 \in \{1,2,\ldots,P\}$ et $i_1, i_2 \in \{1,2,\ldots,M\}$ tels que i_1 et i_2 appartiennent à $G^{k_1}_{v_{k_1}}$ et $G^{k_2}_{v_{k_2}}$. Nous notons $S^{i_1}_{k_1,k_2}$ (rep. $S^{i_2}_{k_1,k_2}$) la suite obtenue à partir de $S^{i_1}_{1_{i_1}}$ (resp. $S^{i_2}_{1_{i_2}}$) en supprimant tous les produits autres que que k_1 et k_2.

Si $S^{i_1}_{k_1,k_2}$ et $S^{i_2}_{k_1,k_2}$ ne sont pas de même longueur, nous les caractérisons avec elles mêmes jusqu'à obtenir des suites ayant pour longueur le p.p.c.m. de leur longueur.

Nous dirons que les deux produits k_1 et k_2 sont vérouillés pour les machines i_1 et i_2 si :

1. i_1 et i_2 figurent dans $G^{k_1}_{v_{k_1}}$ et $G^{k_2}_{v_{k_2}}$ dans des ordres différents, i.e. si i_1 précéde i_2 dans $G^{k_1}_{v_{k_1}}$ et i_2 précéde i_1 dans $G^{k_2}_{v_{k_2}}$ ou réciproquement

2. il existe un rang impair g tel que :

2.1. les produits de type k_1 sont en nombres égaux dans $S^{i_1}_{k_1,k_2}$ et $S^{i_2}_{k_1,k_2}$ avant le rang g et il en est de même des produits de type k_2. Cette condition disparait si $g = 1$.

2.2. si i_1 précède i_2 dans $G^{k_1}_{v_{k_1}}$ (et donc i_2 précède i_1 dans $G^{k_2}_{v_{k_2}}$ d'après 1) alors le terme de rang g dans $S^{i_1}_{k_1,k_2}$ est i_2 et le terme de rang g dans $S^{i_2}_{k_1,k_2}$ est i_1, et réciproquement si i_2 précède i_1 dans $G^{k_1}_{v_{k_1}}$.

Pour que le système ne se bloque pas il faut que, quel que soit le couple $k_1,k_2 \in \{1,2,\ldots,P\}$ et quel que soient $i_1,i_2 \in \{1,2,\ldots,M\}$ tels que i_1 et i_2 appartiennent à $G^{k_1}_{v_{k_1}}$ et $G^{k_2}_{v_{k_2}}$, les produits k_1 et k_2 ne soient pas vérouillés pour les machines i_1 et i_2

Démonstration.

Les produits de rang inférieur à g dans $S^{i_1}_{k_1,k_2}$ et $S^{i_2}_{k_1,k_2}$ peuvent passer sur i_1 et i_2 pourvu que le nombre de chariots soit suffisant et que le système ne soit pas bloqué au préalable par un autre couple de produits. Par contre, les produits de rang g sont empêchés de passer sur i_1 et i_2 du fait de la contradiction entre gammes et séquences d'entrée dans i_1 et i_2

Exemple :

Considérons la configuration suivante pour les couples $(k_1,k_2) \in P \times P$ et $(i_1,i_2) \in M \times M$:

$$G^{k_1}_{v_{k_1}} = \{x, x, x, i_1, x, x, i_2, x, x\}$$

$$G_{v_{k_2}}^{k_2} = \{x,\ i_2,\ x,\ x,\ x,\ i_1,\ x\}$$

$$S_{k_1,k_2}^{i_1} = \{k_1,\ k_2,\ k_1,\ k_2,\ k_1,\ \ldots\ldots \quad \}$$

$$S_{k_1,k_2}^{i_2} = \{k_2,\ k_1,\ k_1,\ k_1,\ k_1,\ \ldots\ldots \quad \}$$

Ici, $g = 4$. Supposons que k_1,k_2 et k_1 puissent être traités. (Si le système se réduit aux machines i_1 et i_2 et ne traite que les produits k_1 et k_2, on voit aisément que deux chariots suffisent pour que k_1,k_2 puis k_1 puissent être pris en charge).

Considérons les produits de rang 4 dans $S_{k_1,k_2}^{i_1}$ et $S_{k_1,k_2}^{i_2}$. La machine i_1 s'attend à traiter k_2 alors que i_2 s'attend à traiter k_1. Mais k_2 doit passer sur i_2 avant de passer sur i_1 et k_1 doit passer sur i_1 avant de passer sur i_2. D'où le blocage.

RESULTAT X.

Pour un nombre suffisant de chariots, l'ensemble des conditions suivantes est nécessaire et suffisant pour que le système ne se bloque pas :

1. la condition (19) est réalisée

2. quels que soient $k_1,k_2 \in \{1,2,\ldots,P\}$ et $i_1,i_2 \in \{1,2,\ldots,M\}$ tels que i_1,i_2 appartiennent à $G_{v_{k_1}}^{k_1}$ et $G_{v_{k_2}}^{k_2}$, k_1 et k_2 ne sont pas vérouillés pour i_1 et i_2

Démonstration.

La démonstration est laissée au lecteur. Elle est analogue à celle du résultat II. ▨

Nous n'avons pas mis en évidence, dans le cas général, une méthode de calcul du nombre minimal de chariots assurant le non blocage. Nous pouvons cependant retenir le résultat suivant

RESULTAT 11

Le nombre minimum de chariots nécessaires au fonctionnement du système est égal à 1 si et seulement si les séquences d'entrée dans les machines sont les séquences extraites de la séquence d'entrée dans le système, i-e. pour i = 1,2,...,M :

$$S^{i}_{1_i} = S^{o,i}_{s_i}$$

Démonstration.

Elle est laissée au lecteur. Evidente.

III.2. Fonctionnement optimal.

Considérons d'abord le cas où tous les temps opératoires sont égaux à 1.

Les résultats que nous énumérons sont soit calqués sur ceux du cas linéaire, soit évidents. Nous nous contentons donc de les énumérer :

1. Lorsque le système ne se bloque pas, il atteint un régime permanent
2. Les propriétés de $t_m(n)$ données par le résultat V restant vraies
3. Pour i = 1,2,...,M, désignons par θ_i le temps de passage de la séquence extraite $S^{o,i}_{s_i}$ sur la machine i et soit :

$$\theta = \max_{i=1,\dots,M} \theta_i = \max_{i=1,\dots,M} s_i$$

Alors θ minore le temps minimal de passage d'une séquence d'entrée sur le système.

Remarque :

Il est facile de voir que si, à l'instant initial, une file de produits réalisant $S^{o,i}_{s_i}$ est en attente devant la machine $i(i = 1,2,\ldots,M)$ et si une file de produit $S^{o}_{1_o}$ est en attente devant le système, alors une séquence d'entrée est produite en un temps θ . Cela nécessite bien entendu $1_o + \sum_{i=1}^{M} s_i$ chariots

L'étude du cas général reste ouverte.

CONCLUSION

Les résultats obtenus dans les cas linéaires et non linéaires montrent que les séquences d'entrée dans le système et dans les machines doivent répondre à des conditions précises pour que le système ne se bloque pas ; conditions sur les pourcentages des différentes pièces dans les séquences et, pour le cas général, condition dite de "non vérouillage". Ces conditions étant réalisées, le régime permanent est atteint si le nombre de chariots est supérieur ou égal au nombre n^o, lequel dépend des séquences d'entrée. Nous savons calculer n^o dans le cas d'une fabrication linéaire. La productivité est maximale pour un nombre de chariots supérieur ou égal à n^*, où $n^* \geq n_o$. Nous savons également calculer n^*dans certains cas de figure. Enfin, dans le cas d'un "flow shop", la productivité du système ne dépend pas des séquences d'entrée pour peu que l'on dispose d'un nombre suffisant de chariots.

BIBLIOGRAPHIE

G. COHEN, D. DUBOIS, M. VIOT, "Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes" - A paraître.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique