Sur le semi-groupe non lineaire associe a l'equation de Riccati

Michel Sorine

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 167

SUR
LE SEMI-GROUPE NON LINÉAIRE ASSOCIÉ À L'ÉQUATION DE RICCATI

Michel SORINE

Octobre 1982

SUR LE SEMI GROUPE NON LINEAIRE ASSOCIE A L'EQUATION DE RICCATI

Michel SORINE

INRIA

RESUME

On donne ici une expression du semi-groupe non linéaire associé à l'équation de Riccati intervenant dans le problème de contrôle d'un système parabolique.

Cette formule exprime que ce semi-groupe non linéaire $\mathcal{P}(t)$ est "homographiquement semblable" à un semi-groupe linéaire $\mathcal{L}(t)$, c'est-à-dire que l'on a une identité :

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{L}(t) \circ \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est une homographie.

On déduit de cette relation des résultats de régularité pour la solution de l'équation de Riccati et une nouvelle méthode d'obtention des équations de Chandrasekhar.

* * * *

ABSTRACT

We give here a formula for the nonlinear semigroup associated with the Riccati equation arising in the control problem of a parabolic system.

This formula means that the nonlinear semigroup $\mathcal{P}(t)$ is "homographically similar" to a linear semigroup $\mathcal{L}(t)$. We have the following identity :

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{L}(t) \circ \mathcal{H}$$

where $\mathcal{H}$ is an homographic transformation.

We deduce from this identity some regularity results for the solution of the Riccati equation and a new way to obtain the Chandrasekhar equations.

Ce travail a été effectué au Centre de Recherche de Mathématiques Appliquées de l'Université de Montréal, grâce à la subvention A-8730 du CRSNG (Canada) et à une subvention FCAC du Ministère de l'Education du Québec (cf. Rapport CRMA-1055).

0. INTRODUCTION

Nous donnons ici une application d'un résultat obtenu dans [1] sur la diagonalisation de l'opérateur hamiltonien intervenant dans le problème de contrôle d'un système linéaire associé à un coût quadratique.

Nous montrons que le semigroupe non-linéaire associé à l'équation de Riccati est "homographiquement semblable à un semigroupe linéaire" opérant sur l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus sur l'espace d'état.

Nous tirons deux types de conséquences de ce dernier résultat.

- des propriétés de régularité de la solution de l'équation de Riccati
- une méthode d'obtention des équations de Chandrasekhar et de Riccati.

Le plan de l'exposé est le suivant:

1. Notations et rappels.
2. Une expression du semigroupe non-linéaire de Riccati.
3. Quelques résultats de régularité du semigroupe non-linéaire de Riccati.
4. Obtention des équations de Chandrasekhar et de Riccati.
5. Le problème de l'unicité pour les équations de Chandrasekhar.
6. Une variante des résultats précédents dans un cas non-variationnel.
7. Exemples.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

Soient V,H,E,F des espaces de Hilbert réels séparables tels que (on identifie H à son dual)

$$(1.1)\quad \begin{cases} V \subset H \subset V', \text{ chaque espace étant dense dans le suivant avec} \\ \text{injection continue.} \end{cases}$$

On note $((.,.))$, $\|\cdot\|$ (resp. $(.,.)$, $|\cdot|$) le produit scalaire et la norme dans V (resp. dans H), $(.,.)_X$, $|\cdot|_X$ désigneront les mêmes quantités pour un espace de Hilbert X.

On donne

$$(1.2)\quad \begin{cases} A \in \mathcal{L}(V,V') \text{ tel que } \exists\alpha > 0,\ \lambda \geq 0,\ \forall\varphi \in V,\ (A\varphi,\varphi)+\lambda|\varphi|^2 \geq \alpha\|\varphi\|^2 \\ B \in \mathcal{L}(E,V'),\quad C \in \mathcal{L}(V,F) \\ N \in \mathcal{L}(E,E), \text{ tel que } N=N^* \text{ et } \exists\nu > 0,\ \forall v \in E,\ (Nv,v)_E \geq \nu|v|_E^2\ . \end{cases}$$

Introduisons les problèmes de contrôle suivants:

Problème (P): L'état du système est la solution de l'équation:

$$(1.3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, y(v) + Ay(v) = Bv \\ y(v)|_{t=0} = h,\quad y(v) \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \end{cases}$$

où $v \in U = L^2_{loc}(0,\infty;E)$, $h \in H$, le coût (fini ou infini) est donné par:

$$(1.4)\quad J(v) = \int_0^\infty |Cy(v)|_F^2 dt + \int_0^\infty (Nv,v)_E dt,$$

le problème s'écrit:

$$(P)\quad \begin{cases} \text{trouver } u \in U \text{ tel que:} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in U. \end{cases}$$

Problème $(\tilde{P})$: L'état du système est la solution de l'équation [1]

$$(1.5)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt} z(q) + A^* z(q) = C^*\Lambda_F q \\ z(q)|_{t=0} = k, \quad z(q) \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \end{cases}$$

où $q \in Q = L^2_{loc}(0,\infty;F)$, $k \in H$ le coût (fini ou infini) est donné par:

$$(1.6)\quad \tilde{J}(q) = \int_0^\infty |N^{-1/2}\Lambda_E^{-1}B^*z(q)|_E^2 dt + \int_0^\infty |q|_F^2 dt,$$

le problème s'écrit:

$$(\tilde{P})\quad \begin{cases} \text{trouver } p \in Q, \text{ tel que:} \\ \tilde{J}(p) \le \tilde{J}(q), \quad \forall q \in Q. \end{cases}$$

Pour résoudre (P) (resp. $(\tilde{P})$) les propriétés suivantes sont utilisées:

Définition 1. Nous dirons que la paire (A,B) est C-stabilisable lorsque:

$$\forall h \in H, \ \exists v \in L^2(0,\infty;E), \ Cy(v) \in L^2(0,\infty;F). \qquad \square$$

Définition 2. Nous dirons que la paire (A,C) est B-détectable lorsque la paire $(A^*, C^*\Lambda_F)$ est $\Lambda_E^{-1}B^*$-stabilisable. $\square$

De plus ces problèmes sont associés à des équations de Riccati que nous allons préciser.

Posons

$$D_1 = BN^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*, \qquad D_2 = C^*\Lambda_F C .$$

Notons $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des opérateurs P vérifiant:

---

(1) On note Λ_X l'isomorphisme canonique de l'espace de Hilbert X sur son dual X'.

$$(1.7)\quad \begin{cases} \text{i) } P \in \mathcal{L}(H;H) \cap \mathcal{L}(V,V), \quad P = P^* \geq 0 \text{ au sens des opérateurs} \\ \quad \text{de } \mathcal{L}(H,H) \\ \text{ii) } -(A+D_1P) \text{ a une restriction à } H \text{ qui génère un semigroupe } C^0 \\ \text{iii) } PA+A^*P+PD_1P = D_2, \text{ égalité dans } \mathcal{L}(V,V'). \end{cases}$$

De la même façon notons $\tilde{\mathcal{S}}_+$ l'ensemble des opérateurs Q vérifiant:

$$(1.8)\quad \begin{cases} \text{i) } Q \in \mathcal{L}(H,H) \cap \mathcal{L}(V,V), \quad Q = Q^* \geq 0 \text{ au sens des opérateurs} \\ \quad \text{de } \mathcal{L}(H,H) \\ \text{ii) } -(A^*+D_2Q) \text{ a une restriction à } H \text{ qui génère un semigroupe } C^0 \\ \text{iii) } QA^*+AQ+QD_2Q = D_1, \text{ égalité dans } \mathcal{L}(V,V'). \end{cases}$$

Nous avons alors les résultats suivants (cf. [1]):

<u>Théorème 1.1</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) (A,B) est C-stabilisable

ii) $\forall h \in H$, (P) a une solution

iii) $\mathcal{S}_+ \neq \phi$.

De la même manière les propriétés suivantes sont équivalentes:

j) (A,C) est B-détectable

jj) $\forall k \in H$, $(\tilde{P})$ a une solution

jjj) $\tilde{\mathcal{S}}_+ \neq \phi$.

Associé à un élément P de $\mathcal{S}_+$ nous noterons $A_P = A+D_1P$ et de même, nous noterons pour $Q \in \tilde{\mathcal{S}}_+$, $A_Q = A^*+D_2Q$.

Théorème 1.2. Sous les hypothèses (1.1), (1.2) supposons qu'il existe $P \in \mathcal{S}_+$ et $Q \in \tilde{\mathcal{S}}_+$ alors

(1.9) $\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}$ est un isomorphisme sur $V\times V$, $H\times H$ et $V'\times V'$ et

(1.10) $\begin{pmatrix} A & D_1 \\ D_2 & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & -A_Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}^{-1}$ dans $\mathcal{L}(V\times V; V'\times V')$

(1.11) $A^*+D_2Q = (I+PQ)^{-1}(A+D_1P)^*(I+PQ)$ dans $\mathcal{L}(V,V')$. □

Notons $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & D_1 \\ D_2 & -A^* \end{pmatrix}$. Sous une hypothèse supplémentaire la diagonalisation précédente conduit au résultat d'unicité suivant:

Théorème 1.3. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), lorsque $\forall\theta \in R$, $(\mathcal{A}+\theta i)^{-1} \in \mathcal{L}(H\times H, H\times H)$, on a:

$\tilde{\mathcal{S}}_+ \neq \phi \Rightarrow \mathcal{S}_+$ a au plus un élément

$\mathcal{S}_+ \neq \phi \Rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_+$ a au plus un élément .

En particulier lorsque (A,B) est C-stabilisable et (A,C) B-détectable l'équation de Riccati (1.7) iii) a une solution unique dans $\mathcal{S}_+$. □

2. UNE EXPRESSION DU SEMIGROUPE NON-LINEAIRE DE RICCATI

Les notations étant celles du paragraphe précédent nous étudions ici l'équation de Riccati suivante:

$$(2.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}P(t) + P(t)A + A^*P(t) + P(t)D_1P(t) = D_2 \\ P(0) = \pi \quad \text{avec } \pi \in \mathcal{L}(H,H). \end{cases}$$

Nous donnons pour l'instant à (2.1) le sens suivant: Supposons que le système aux deux bouts qui suit a une solution

$$(2.2) \quad \begin{cases} -y'+Ay+D_1p = 0 & y,p \in L^2(0,T;V) \\ p'+A^*p-D_2y = 0 & \\ p(0) = \pi y(0), \quad y(T) = h \quad \text{avec} \quad h \in H & \end{cases}$$

alors on pose:

$$(2.3) \quad P(T)h = p(T).$$

Un calcul formel classique montre que $P(t)$ défini par (2.3) est solution de (2.1). Nous préciserons en quel sens (2.1) est vérifiée.

Notons $\mathcal{P}(t)$ l'application

$$(2.4) \quad \mathcal{P}(t):\pi \to P(t).$$

$\mathcal{P}(t)$ est ce que nous appelons le semigroupe non-linéaire de Riccati. C'est lui que nous étudions ici.

Introduisons encore les transformations suivantes associées à $P \in \mathcal{S}_+$ et à $Q \in \tilde{\mathcal{S}}_+$:

$$(2.5) \quad \mathcal{H}:\pi \to (I+\pi Q)^{-1}(P-\pi)$$

qui est une application homographique dans $\mathcal{L}(H,H)$ définie par exemple pour les π tels que $\pi = \pi^* \geq 0$ (cela se vérifie simplement, cf. [1]). Nous noterons $\mathcal{C}_+$ le cône de $\mathcal{L}(H,H)$ constitué des opérateurs autoadjoints semidéfinis positifs.

Un calcul simple montre que $\mathcal{H}^{-1}$ est ainsi définie:

$$(2.6) \quad \mathcal{H}^{-1}:\omega \to (P-\omega)(I+Q\omega)^{-1}.$$

Enfin on note $\mathcal{L}(t)$ le semigroupe linéaire sur $\mathcal{L}(H;H)$ defini par:

(2.7) $\mathcal{L}(t):\omega \to e^{-A_q t} \omega e^{-A_p t}$.

Nous pouvons énoncer le résultat principal de ce paragraphe:

Théorème 2.1 Sous les hypothèses suivantes notées (H): **(A,B) est C-stabilisable et (A,C) B-détectable, (1.1) et (1.2) ont lieu; nous avons: $\mathcal{P}(t)$ introduit en (2.4) est pour tout t un semigroupe nonlinéaire séquentiellement continu de $\mathcal{C}_{+s}$ sur lui-même (où on note $\mathcal{C}_{+s}$, $\mathcal{C}_{+}$ muni de la topologie de la convergence forte des opérateurs de $\mathcal{L}(H;H)$), c'est-à-dire que:**

i) $\mathcal{P}(0) = I$

ii) $\mathcal{P}(t+s) = \mathcal{P}(t)\circ\mathcal{P}(s)$, $\forall s,t \geq 0$

iii) $\pi_n \to \pi$ dans $\mathcal{C}_{+s} \Rightarrow \mathcal{P}(t)(\pi_n) \to \mathcal{P}(t)\pi$ dans $\mathcal{C}_{+s}$

iv) $t \to \mathcal{P}(t)(\pi)$ est continue de $[0,\infty[$ dans $\mathcal{C}_{+s}$, $\forall \pi \in \mathcal{C}_{+s}$.

Enfin on a l'expression suivante pour $\mathcal{P}(t)$:

(2.8) $\mathcal{P}(t) = \mathcal{H}^{-1}\circ\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{H}$ sur $\mathcal{C}_{+}$, $\forall t \geq 0$,

ce qui nous a fait dire dans l'introduction que $\mathcal{P}(t)$ est homographiquement semblable à un semigroupe linéaire. □

Nous montrerons ce théorème à l'aide de plusieurs lemmes:

Lemme 2.1. Sous les hypothèses (H), le système (2.2) a $\forall h \in H$, $\forall \pi \in \mathcal{C}_{+}$ une solution unique. La définition de P(t) par (2.3) a un sens et on a $P(t) \in \mathcal{C}_{+}$, $\forall t \geq 0$.

Démonstration. C'est un résultat classique qui se montre en étudiant le problème de contrôle associé à (2.2), cf. par exemple [2]. □

Lemme 2.2. Sous les mêmes hypothèses, la solution du système (2.2) est donnée par la résolution du système suivant:

$$(2.9)\quad \begin{cases} -\varphi'+A_P\varphi = 0 \\ +\psi'+A_Q\psi = 0 \\ P\varphi(0)+\psi(0) = \pi(\varphi(0)-Q\psi(0)), \quad \varphi(T)-Q\psi(T) = h \end{cases}$$

$$(2.10)\quad \begin{cases} y = \varphi - Q\psi \\ p = P\varphi+\psi \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété de diagonalisation (1.10) au système (2.2) qui a une solution d'après le lemme 2.1. □

Lemme 2.3. Si $R \in \mathcal{C}_+$ et $S_n \to S$ dans $\mathcal{C}_{+s}$, alors:

$$(I+RS_n)^{-1} \to (I+RS)^{-1} \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(H;H)^{(1)}$$

$$(I+S_nR)^{-1} \to (I+SR)^{-1} \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(H;H).$$

Démonstration: Notons $T = (I+RS)(I+\mu R)$ et $T_n = (I+RS_n)(I+\mu R)$. On a montré dans [1], lemme 5.1, que pour $\mu \geq \frac{1}{2}|S|^2 \cdot |R|$, on a $(Th,h) \geq \frac{1}{2}|h|^2$, $\forall h \in H$ et pour $\mu \geq \frac{1}{2}|S_n|^2 \cdot |R|$, on a de même $(T_nh,h) \geq \frac{1}{2}|h|^2$, $\forall h \in H$. Comme $S_n \to S$ dans $\mathcal{C}_{+s}$, on a (d'après le théorème de Banach Steinhaus) $|S_n| \leq c$ et donc pour μ assez grand, indépendant de n, T et T_n sont coercifs. Les inverses de l'énoncé existent donc et $|T_n^{-1}| \leq 2$, comme d'autre part: $\forall h \in H$, $T_n^{-1}h-T^{-1}h = T_n^{-1}(T-T_n)T^{-1}h$, on a:

---

(1) $\mathcal{L}(X,Y)$ désignant l'espace des applications linéaires continues d'un Hilbert X dans un autre Y, nous noterons $\mathcal{L}_u(X,Y)$, $\mathcal{L}_s(X,Y)$, $\mathcal{L}_w(X,Y)$, cet espace respectivement muni des topologies de la convergence uniforme, forte, faible des opérateurs.

$$|T_n^{-1}h-T^{-1}h| \leq 2|(T-T_n)T^{-1}h| \to 0, \quad \text{d'où le lemme,}$$

la deuxième propriété se montrant de la même façon. □

Démonstration du théorème 2.1. Montrons d'abord (2.8). D'après le lemme 2.2, on a:

$$\begin{cases} \varphi(T)-Qe^{-A_Q T}\psi(0) = h \\ (P-\pi)e^{-A_P T}\varphi(T)+(I+\pi Q)\psi(0) = 0 \end{cases}$$

comme $\pi \in \mathcal{C}^+$, on tire de là: $\psi(0) = -(I+\pi Q)^{-1}(P-\pi)e^{-A_P T}\varphi(T)$, soit encore $\psi(0) = -\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P T}\varphi(T)$, d'où:

$$(I+Qe^{-A_Q T}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P T})\varphi(T) = h,$$

soit encore avec (2.7):

$$(I+Q(\mathcal{L}(T)\circ\mathcal{N})(\pi))\varphi(T) = h.$$

Comme $\forall h \in H$, $\exists\varphi(T) \in H$ vérifiant cette relation, on a:

$$(I+Q(\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{N})(\pi))^{-1} \in \mathcal{L}(H;H), \quad \forall\pi \in \mathbb{C}_+ .$$

Enfin on a

$$P(T)h = P\varphi(T)+\psi(T) = (P-e^{-A_Q T}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P T})\varphi(T)$$

$$= (P-(\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{N})(\pi))(I+Q(\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{N})(\pi))^{-1}h,$$

d'où, avec (2.6):

$$P(T) = (\mathcal{N}^{-1}\circ\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{N})(\pi),$$

d'où (2.8).

i) et ii) sont des conséquences immediates de (2.8) et du fait que $\mathcal{L}(t)$ est un semigroupe linéaire sur $\mathcal{L}(H;H)$.

iii) résulte du lemme 2.3 appliqué deux fois: $\mathcal{H}(\pi_n) \to \mathcal{H}(\pi)$ dans $\mathcal{L}_s(H;H)$, d'où $(\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{H})(\pi_n)$ converge, d'ou iii).

D'autre part il est clair que $t \to (\mathcal{L}(t)\circ\mathcal{H})(\pi)$ est continue de $[0,\infty[$ dans $\mathcal{L}_s(H;H)$, d'ou iv) en appliquant encore le lemme 2.3. □

3. QUELQUES RESULTATS DE REGULARITE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DE RICCATI

Proposition 3.1. Sous les hypothèses (H):

$$(3.1)\quad \forall\pi \in \mathcal{C}_+,\ \mathcal{P}(\cdot)(\pi) \in C^\circ([0,\infty[;\ \mathcal{L}_s(H,H))\cap C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,H)) \cap C^\circ(]0,\infty[;\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{L}_s(H,D(A_Q^\infty)))).$$

$$(3.2)\quad \forall\pi \in \mathcal{C}_+\cap\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{L}(D(A_P),D(A_Q))),$$

$$\mathcal{P}(\cdot)(\pi) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{L}(D(A_P);D(A_Q))))\cap C^1([0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,H)).$$

Démonstration. On vérifie facilement, grâce à l'analyticité des semi-groupes e^{-A_Pt} et e^{-A_Qt} que $\forall\omega \in \mathcal{L}(H,H)$,

$$\mathcal{L}(\cdot)(\omega) \in C^\circ([0,\infty[,\mathcal{L}_s(H;H))\cap C^\infty(]0,\infty[,\mathcal{L}_s(H,H))\cap C^\circ(]0,\infty[,\mathcal{L}_s(H,D(A_Q^\infty))).$$

De la formule (2.8) et du lemme 2.3 on déduit alors (3.1). (3.2) se montre de façon analogue (cas de la solution forte). □

Corollaire 3.1: Sous les hypothèses (H), lorsque on suppose de plus que (cas de l'observation distribuée):

$$(3.3)\quad C \in \mathcal{L}(H,F),$$

la dernière inclusion dans (3.1) s'écrit plus simplement:

(3.4) $\quad \forall\pi \in \mathcal{C}^+, \ \mathcal{B}(\cdot)(\pi) \in C^\circ(]0,\infty[\,\mathcal{L}_S(H,D(A^{*\infty}))$.

De même, sous ces hypothèses (3.2) se réécrit ainsi:

(3.5) $\quad \forall\pi \in \mathcal{C}^+\cap\mathcal{L}(H,D(A^*)), \ \mathcal{B}(\cdot)(\pi) \in C^\circ[[0,\infty[\,\mathcal{L}_s(H,D(A^*))\cap C^1([0,\infty[\,;\mathcal{L}_s(H,H))$

<u>Démonstration</u>. Remarquons qu'ici, $D(A_Q) = D(A^*+D_2Q) = D(A^*)$, car $D_2Q \in \mathcal{L}(H,H)$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{L}(H,D(A^*)) \subset \mathcal{L}(H,D(A^*))$, soit encore que $\forall\omega \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$ tel que $(I+Q\omega)^{-1}$ existe, $(P-\omega)(I+Q\omega)^{-1} \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$. Comme $\omega(I+Q\omega)^{-1} \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$, il faut et il suffit de montrer que $P(I+Q\omega)^{-1} \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$, soit encore que $P \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$. Nous allons donc montrer que:

(3.6) Sous les hypothèses du corollaire, $P \in \mathcal{L}(H,D(A^*))$.

En effet, considérons le système

$$\begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0, & y(0) = h \\ -p'+A^*p-D_2y = 0, & p(T) = Py(T) \end{cases}$$

alors on sait que $\forall t \geq 0$, $p(t) = Py(t)$ avec $y(t) = e^{-A_pt}h$.

En particulier:

$$Ph = e^{-A^*T}p(T) + \int_0^T e^{-A^*(T-s)}D_2e^{-A_ps}h\,ds$$

et pour $T > 0$, $e^{-A^*T}p(T) \in D(A^*)$ (conséquence de l'analyticité de e^{-A^*t}). Il suffit donc de montrer que $\forall h \in H$,

(3.7) $\quad z = \int_0^T e^{-A^*(T-s)}D_2e^{-A_ps}h\,ds \in D(A^*)$.

Posons $f(s) = D_2e^{-A_ps}h$, comme $D_2 \in \mathcal{L}(H,H)$ et e^{-A_ps} est analytique, on a, $\forall s \in]0,T]$, $\forall h \in H$, $|\frac{1}{s}f'(s)| = \frac{1}{s}|D_2A_pe^{-A_ps}h| \leq C$ d'où $|f(t)-f(s)| \leq c|t-s|$, $\forall t,s \in]0,T]$, alors il est classique que e^{-A^*t} étant analytique, $z = \int_0^T e^{-A^*(T-s)}f(s)ds \in D(A^*)$. D'où (3.6) et le corollaire est démontré. $\square$

Nous allons donner maintenant des propriétés de régularité de $P(t)$ par rapport à l'espace V. Ce sont les analogues de P, $(I+QP)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V)$.

Proposition 3.2: Sous les hypothèses (H) nous avons:

(3.8) $\forall \pi \in \mathcal{C}^+, \quad \mathcal{P}(\cdot)(\pi) \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$

(3.9) $\forall \pi \in \mathcal{C}^+, \quad (I+Q\mathcal{P}(\cdot)(\pi))^{-1} \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_u(V,V))$

(où on note $\mathcal{L}_u(V,V)$, $\mathcal{L}(V,V)$ muni de la topologie de la convergence uniforme des opérateurs).

Démonstration: Commençons par montrer l'identité suivante:

(3.10) $\forall \pi \in \mathcal{C}^+, \quad \forall t \geq 0, \quad (I+Q\mathcal{P}(t)(\pi))^{-1} = (I+Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t})(I+QP)^{-1}$.

Soit $\omega \in \mathcal{C}^+$ et $\mathcal{N}(\omega) = (I+\omega Q)^{-1}(P-\omega)$. On a

$$I+Q\mathcal{N}(\omega) = I+Q(I+\omega Q)^{-1}(P-\omega) = (I+Q\omega)^{-1}(I+QP)$$

d'où:

(3.11) $(I+Q\omega)^{-1} = (I+Q\mathcal{N}(\omega))(I+QP)^{-1}, \qquad \forall \omega \in \mathcal{C}^+$.

(3.10) suit en faisant $\omega = \mathcal{P}(t)(\pi)$ et en utilisant (2.8). Montrons (3.9). D'après (3.10) et le fait que $(I+QP)^{-1}$ et $Q \in \mathcal{L}(V,V)$, il suffit de démontrer que $t \to e^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_p t} \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_u(V,V))$. Cette dernière propriété résulte de l'analyticité de $e^{-A_P t}$ et $e^{-A_Q t}$ et du fait que $D(A_P)$, $D(A_Q) \subset V$.

Montrons (3.8). On a $\forall \omega \in \mathcal{C}^+$, $\omega = (P-\mathcal{N}(\omega))(I+Q\mathcal{N}(\omega))^{-1}$, d'où, avec (3.11):

(3.12) $\forall \omega \in \mathcal{C}^+, \quad \omega(I+Q\omega)^{-1} = (P-\mathcal{N}(\omega))(I+QP)^{-1}.$

Faisant alors $\omega = \mathcal{P}(t)(\pi)$, on déduit de là, comme pour (3.9):

$$\mathcal{P}(t)(\pi)(I+Q\mathcal{P}(\cdot)(\pi))^{-1} \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_u(V,V)).$$

Ainsi (3.8) sera démontré si on prouve que

(3.13) $I+Q\mathcal{P}(\cdot)(\pi) \in C^\infty(]0,\infty[;\ \mathcal{L}_s(V,V)).$

De (3.10) on déduit par un calcul dans $\mathcal{L}(H,H)$:

$$(I+QP)^{-1}(I+Q\mathcal{P}(t)(\pi)) = (I+Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t})^{-1}$$

$$= I-Qe^{-A_Q t}(I+\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t}Qe^{-A_Q t})^{-1}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t}$$

ce qui montre que $\forall t > 0$, $I+Q\mathcal{P}(t)(\pi) \in \mathcal{L}(V,V)$. $(I+Q\mathcal{P}(t)(\pi))^{-1}$ est donc un isomorphisme de V sur V, C^∞ sur $]0,+\infty[$ pour la topologie uniforme des opérateurs de $\mathcal{L}(V,V)$, d'ou (3.8). □

4. OBTENTION DES EQUATIONS DE CHANDRASEKHAR ET DE RICCATI

Notons $P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi)$ pour un élément $\pi \in \mathcal{C}^+$.

Nous allons donner une première équation différentielle vérifiée par P(t).

Proposition 4.1. Sous les hypothèses (H), nous avons:

$$(4.1)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{N}(P(t)) + A_Q\mathcal{N}(P(t)) + \mathcal{N}(P(t))A_P = 0 & \text{dans } \mathcal{L}(H,H),\ \forall t > 0 \\ \mathcal{N}(P(0)) = \mathcal{N}(\pi) \end{cases}$$

Démonstration. De la forme (2.8) du semigroupe non linéaire (cf. Théorème 2.1) on deduit:

$$\forall t \geq 0,\ \mathcal{N}(P(t)) = e^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t} \quad \text{dans } \mathcal{L}(H,H)$$

grâce à l'analyticité des semigroupes, on a donc $\forall t > 0$, $\forall h \in H$:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(P(t))h + A_Q\mathcal{H}(P(t))h + e^{-A_Q t}\mathcal{H}(\pi)A_P e^{-A_P t}h = 0.$$

On peut alors écrire le dernier terme: $\mathcal{H}(P(t))A_P h$ pour $h \in V$, utilisant le fait que $A_P h \in V'$ et $e^{-A_P t} \in \mathcal{L}(V', D(A_P))$ ou bien pour $h \in H$, sachant alors que $A_P \in \mathcal{L}(H, D(A_P^*)')$ et que $e^{-A_P t}$ est un C°-semigroupe sur $(D(A_P^*))'$. La proposition est démontrée. □

Nous allons maintenant transformer (4.1) ce qui donnera les équations cherchées.

Nous commençons par montrer deux lemmes:

<u>Lemme 4.1.</u> Sous les hypothèses (H), soit $\omega \in C^1(I;\mathcal{C}_s^+)$ où I est un intervalle non vide de la droite réelle. Alors:

(4.2) $\quad \forall t \in I, \quad \dfrac{d}{dt}\mathcal{H}(\omega(t)) = -(I+\omega(t)Q)^{-1}\dfrac{d}{dt}\omega(t)(I+Q\omega(t))^{-1}(I+QP)$

<u>Démonstration</u>. Soient $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{C}^+$, alors:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\pi_1)-\mathcal{H}(\pi_2) &= (I+\pi_1 Q)^{-1}(P-\pi_1)-(I+\pi_2 Q)^{-1}(P-\pi_2)\\
&= ((I+\pi_1 Q)^{-1}-(I+\pi_2 Q)^{-1})P+\pi_2(I+Q\pi_2)^{-1}-(I+\pi_1 Q)^{-1}\pi_1\\
&= (I+\pi_1 Q)^{-1}(\pi_2 Q-\pi_1 Q)(I+\pi_2 Q)^{-1}P+(I+\pi_1 Q)^{-1}(\pi_2-\pi_1)(I+Q\pi_2)^{-1}\\
&= (I+\pi_1 Q)^{-1}(\pi_2-\pi_1)(I+Q\pi_2)^{-1}(I+QP)
\end{aligned}$$

d'où le lemme en passant à la limite sur les quotients différentiels $\frac{1}{\theta}(\omega(t+\theta)-\omega(t))$ et en utilisant le lemme 2.3 et le fait que lorsque $u_n \to u$ dans H et $T_n h \to Th$ dans H où $T_n \in \mathcal{L}(H,H)$, alors $T_n u_n \to Tu$ dans H. □

Lemme 4.2. Sous les hypothèses (H), soit $\pi \in \mathcal{C}^+$ tel que π, $(I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V)$, alors on a:

$$(4.3)\quad \begin{cases} A_Q\mathcal{H}(\pi)+\mathcal{H}(\pi)A_P = (I+\pi Q)^{-1}(D_2-\pi A-A^*\pi-\pi D_1\pi)(I+Q\pi)^{-1}(I+QP) \\ \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,V'). \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons de suite que sous les hypothèses sur π: $(I+Q\pi)^{-1} = I-Q(I+\pi Q)^{-1}\pi \in \mathcal{L}(V,V)$ car $Q \in \mathcal{L}(V,V)$. On a donc en particulier $(I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V',V')$ et l'énoncé (4.3) a un sens. D'autre part comme $P \in \mathcal{L}(V,V)$ on a $\mathcal{H}(\pi) \in \mathcal{L}(V,V)$ et le calcul suivant est justifié sur V:

Posons $\Delta = A_Q\mathcal{H}(\pi)+\mathcal{H}(\pi)A_P$ on a

$$\Delta = (A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}(P-\pi)+(I+\pi Q)^{-1}(P-\pi)(A+D_1P)$$

$$= -(A^*+D_2Q)\pi(I+Q\pi)^{-1}-(I+\pi Q)^{-1}\pi(A+D_1P)+(A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}P+(I+\pi Q)^{-1}(D_2-A^*P)$$

d'où

$$\begin{aligned}(I+\pi Q)\Delta &= -((I+\pi Q)(A^*+D_2Q)\pi+\pi(A+D_1P)(I+Q\pi))(I+Q\pi)^{-1}+(I+\pi Q)(A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}P \\ &\quad +D_2-A^*P \\ &= -(A^*\pi+D_2Q\pi+\pi QA^*\pi+\pi QD_2Q\pi+\pi A+\pi D_1P+\pi AQ\pi+\pi D_1PQ\pi)(I+Q\pi)^{-1} \\ &\quad +(I+\pi Q)(A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}P+D_2-A^*P \\ &= -(A^*\pi+\pi A+D_2Q\pi+\pi(QA^*+QD_2Q+AQ)\pi+\pi D_1P(I+Q\pi))(I+Q\pi)^{-1} \\ &\quad +(I+\pi Q)(A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}P+D_2-A^*P \\ &= -(A^*\pi+\pi A+\pi D_1\pi-D_2)(I+Q\pi)^{-1}-(D_2+\pi D_1P)+D_2-A^*P \\ &\quad +(I+\pi Q)(A^*+D_2Q)(I+\pi Q)^{-1}P\,.\end{aligned}$$

Notons $R(\pi) = D_2-A^*\pi-\pi A-\pi D_1\pi$, alors

$$(I+\pi Q)\Delta = R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}+((I+\pi Q)(A^*+D_2Q)-(\pi D_1+A^*)(I+\pi Q))(I+\pi Q)^{-1}P$$
$$= R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}+(D_2Q+\pi QA^*+\pi QD_2Q-\pi D_1-\pi D_1\pi Q-A^*\pi Q)(I+\pi Q)^{-1}P$$
$$= R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}+(D_2Q-A^*\pi Q-\pi D_1\pi Q+\pi(QA^*+QD_2Q-D_1))(I+\pi Q)^{-1}P$$
$$= R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}+(D_2-A^*\pi-\pi A-\pi D_1\pi)(I+Q\pi)^{-1}QP$$
$$= R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}(I+QP),$$

d'où le lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème suivant:

Théorème 4.1: Sous les hypothèses (H) nous avons:

$$(4.4)\quad \begin{cases} \forall\pi \in \mathcal{C}^+,\ \forall t > 0,\quad P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi) \quad \text{vérifie:} \\ \frac{d}{dt}P(t)+P(t)A+A^*P(t)+P(t)D_1P(t) = D_2 \quad \text{dans } \mathcal{L}(V,V') \\ P(0) = \pi\ . \end{cases}$$

De plus, $t \to P(t)$ est la seule solution de cette équation dans la classe

$$(4.5)\quad \begin{cases} P(\cdot) \in C^\circ([0,\infty[;\ \mathcal{L}_s(H,H))\cap C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,H)) \\ \forall t > 0,\ P(t) \in C^+\cap\mathcal{L}(V,V),\quad (I+QP(t))^{-1} \in \mathcal{L}(V,V). \end{cases}$$

Démonstration. D'après les propositions 3.1 et 3.2, $\forall t \in]0,\infty[$, $P(t)$, $(I+QP(t))^{-1} \in \mathcal{L}(V,V)$ et $P(t)$ est continument différentiable en t à valeurs dans H. On peut alors appliquer les lemmes 4.1 et 4.2, il vient:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(P(t)) = (I+P(t)Q)^{-1}\ \frac{d}{dt}P(t)(I+QP(t))^{-1}(I+QP)$$

et

$$A_Q\mathcal{H}(P(t))+\mathcal{H}(P(t))A_P = (I+P(t)Q)^{-1}R(P(t))(I+QP(t))^{-1}(I+QP).$$

Comparant ces expressions à (4.1), on déduit immédiatement (4.4). Montrons l'unicité. Soit donc $\bar{P}(t)$ vérifiant (4.4) et (4.5). Comme $\forall t > 0$, $\bar{P}(t)$ et $(I+\bar{P}(t)Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)$, on peut appliquer les lemmes 4.1 et 4.2 et il vient:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\bar{P}(t))+A_Q\mathcal{H}(\bar{P}(t))+\mathcal{H}(\bar{P}(t))A_p = 0, \quad \mathcal{H}(\bar{P}(0)) = \mathcal{H}(\pi)$$

où

$$\mathcal{H}(\bar{P}(\cdot)) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,H))\cap C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,H)).$$

Cette équation linéaire en $\mathcal{H}(P(t))$ a une solution unique comme on le vérifie facilement. On a donc $\mathcal{H}(\bar{P}(t)) = \mathcal{H}(P(t))$, d'où le théorème. □

<u>Remarque 4.1.</u> Lorsque $D_1 \in \mathcal{L}(H,H)$ on a $Q \in \mathcal{L}(H;D(A))$ (propriété analogue à (3.6) pour Q). On peut alors supprimer de (4.5) la condition $(I+QP(t))^{-1} \in \mathcal{L}(V,V)$. □

Nous allons maintenant chercher à obtenir les équations de Chandrasekhar. La proposition qui suit, conséquence facile des résultats précédents, donne une version généralisée de ces équations. Nous la complèterons par l'examen d'un cas particulier puis par l'étude de l'unicité.

<u>Proposition 4.2</u>. Sous les hypothèses (H), nous avons:

$$\forall \pi \in \mathcal{C}^+\cap\mathcal{L}(V,V) \quad \text{tel que} \quad (I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V),$$

posons:

$$(4.6)\begin{cases} R(\pi) = D_2-\pi A-A^*\pi-\pi D_1\pi \\ P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi), \quad \phi(t)=(I+Q\pi)^{-1}e^{-A_Q^*t}(I+QP(t)) \end{cases}$$

alors $\forall t > 0$, $P(t)$ et $\phi(t)$ vérifient:

$$(4.7)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) = \phi^*(t)R(\pi)\phi(t), & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,V') \\ \frac{d}{dt}\phi(t)+\phi(t)(A+D_1P(t)) = 0, & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,V') \\ P(0) = \pi, \quad \phi(0) = I \end{cases}$$

Démonstration. Avec les hypothèses sur π, on a $\mathcal{H}(\pi) \in \mathcal{L}(V,V)\cap\mathcal{L}(V',V')$.

On peut donc définir pour $t > 0$, $\Delta \in \mathcal{L}(V,V')$ par:

$$\Delta = A_Q\mathcal{H}(P(t))+\mathcal{H}(P(t))A_P = A_Q e^{-A_Q t}\mathcal{H}(\pi)e^{-A_P t}+e^{-A_Q t}\mathcal{H}(\pi)e^{-A_P t}A_P$$

$$= e^{-A_Q t}(A_Q\mathcal{H}(\pi)+\mathcal{H}(\pi)A_P)e^{-A_P t} = \text{(avec le lemme 4.2)}$$

$$= e^{-A_Q t}(I+\pi Q)^{-1}R(\pi)(I+Q\pi)^{-1}(I+QP)e^{-A_P t}.$$

D'autre part, d'après (3.11), on a $e^{-A_P t} = (I+QP)^{-1}e^{-A_Q^* t}(I+QP)$,

d'où:

$$\Delta = (I+P(t)Q)^{-1}\phi^*(t)R(\pi)\phi(t)(I+QP(t))^{-1}(I+QP).$$

En utilisant la proposition 4.1 et le lemme 4.1 on a

$$\Delta = (I+P(t)Q)^{-1}\frac{d}{dt}P(t)(I+QP(t))^{-1}(I+QP)$$

d'où la première équation (4.7). De plus, on a dans $\mathcal{L}(V,V)$:

$$\frac{d}{dt}\phi^*(t) = \frac{d}{dt}P(t)Qe^{-A_Q t}(I+\pi Q)^{-1}-(I+P(t)Q)A_Q e^{-A_Q t}(I+\pi Q)^{-1} = \text{(avec (4.4))}$$

$$= -[(P(t)A+A^*P(t)+P(t)D_1P(t)-D_2)Q+A^*+D_2Q+P(t)Q(A^*+D_2Q)]e^{-A_Q t}(I+\pi Q)^{-1}$$

$$= -[A^*(I+P(t)Q)+P(t)D_1(I+P(t)Q)]e^{-A_Q t}(I+\pi Q)^{-1}$$

$$= -(A^*+P(t)D_1)\phi^*(t),$$

d'où la proposition. □

Les équations (4.7) prennent une forme particulièrement intéressante lorsque $R(\pi)$ (qui est symétrique) se factorise.

Un cas important dans les applications en contrôle est $\pi = 0$ (cf. pour une étude en dimension finie [3], [4] et leurs bibliographies), on a alors $R(\pi) = C^*\Lambda_F C$ et si on pose:

$$K(t) = N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*P(t) \tag{4.8}$$

$$L(t) = Ce^{-A_Q^* t}(I+QP(t)) \tag{4.9}$$

où on reconnait en K le gain optimal pour le problème de contrôle associé à (2.2), on peut obtenir un système différentiel en $P(\cdot)$ et $L(\cdot)$ ou mieux (pour les applications) un système en $K(\cdot)$ et $L(\cdot)$.

Nous avons dans ce sens le

<u>Théorème 4.2</u>. Sous les hypothèses (H), $P(\cdot)$, $K(\cdot)$, $L(\cdot)$ définis en (4.6), (4.8), (4.9) vérifient:

$$K \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,E)), \quad L \in C^\infty(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V',F)) \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) = L^*(t)\Lambda_F L(t), & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V',V),\ \forall t > 0 \\ \frac{d}{dt}L(t)+L(t)(A+D_1P(t)) = 0, & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,F),\ \forall t > 0 \\ P(0) = 0, \quad L(0) = C \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t) = N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*L^*(t)\Lambda_F L(t), & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,E),\ \forall t > 0 \\ \frac{d}{dt}L(t)+L(t)(A+BK(t)) = 0, & \text{égalité dans } \mathcal{L}(V,F),\ \forall t > 0 \\ K(0) = 0, \quad L(0) = C. \end{cases} \tag{4.12}$$

<u>Démonstration</u>. (4.10) est une conséquence directe de la proposition 3.2 et de la définition de K et L. (4.11) et (4.12) sont des conséquences de (4.7). □

5. LE PROBLEME DE L'UNICITE POUR LES EQUATIONS DE CHANDRASEKHAR

Des conditions assurant l'unicité semblent plus difficiles à obtenir pour les équations de Chandrasekhar que pour l'équation de Riccati. La raison est que pour obtenir (4.7) on a dérivé ϕ ce qui traduit que $P(\cdot)$ est C^2. La condition initiale sur ϕ fixe ainsi la valeur de la dérivée première de $P(\cdot)$: $\frac{d}{dt} P(t)|_{t=0} = R(\pi)$, où $R(\pi) \in \mathcal{L}(V,V')$.

Le problème va être de donner un sens à cette dernière égalité, donc d'avoir sur $P(\cdot)$ de nouvelles propriétés de régularité au voisinage de t=0 et exprimées à l'aide de la topologie de V: il s'agit de compléter les résultats de la proposition 3.2. Cela sera fait sous des hypothèses supplémentaires qui ne semblent pas très restrictives.

Pour l'instant nous pouvons énoncer le:

<u>Lemma 5.1</u>. Sous les hypothèses (H), soient

$\pi \in \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{L}(V;V)$

(5.1) $P(\cdot) \in C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_w(V,V'))$, $\phi(\cdot) \in C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$,

vérifiant (4.7). Alors on a:

(5.2) $\frac{d}{dt}P(t) + P(t)A + A^*P(t) + P(t)D_1P(t) - D_2 = S, \quad \forall t > 0$

où $S \in \mathcal{L}(V;V')$ est constant.

Démonstration. De la 1^{ere} relation (4.7) et de (5.1) on déduit que $P(\cdot) \in C^2(]0,\infty[;\mathcal{L}_W(V,V'))$ et différentiant cette relation pour $t > 0$, il vient:

$$\frac{d^2}{dt^2}P(t) = \frac{d}{dt}\phi^*R(\pi)\phi + \phi^*R(\pi)\frac{d}{dt}\phi$$

$$= -(A+D_1P(t))^*\phi^*R(\pi)\phi - \phi^*R(\pi)\phi(A+D_1P(t))$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}P(t) + P(t)A + A^*P(t) + P(t)D_1P(t) - D_2\right) = 0, \quad \forall t > 0,$$

égalité dans $\mathcal{L}(V,V')$, d'où le lemme. □

L'objectif est maintenant de pouvoir passer à la limite quand $t \to 0$ dans (5.2) pour identifier S.

En effet, formellement on a $S = \frac{d}{dt}P(t)|_{t=0} - R(P(0)) = 0$ d'après les conditions initiales de (4.7).

Rappelons les expressions déjà obtenues suivantes (cf. (3.10), (3.12)); où on a posé $P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi)$:

$$(5.3)\quad \begin{cases} (I+QP(t))^{-1} = (I+Qe^{-A_Qt}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_pt})(I+QP)^{-1}, & \forall t \geq 0 \\ P(t)(I+QP(t))^{-1} = (P-e^{-A_Qt}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_Pt})(I+QP), & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$(5.4)\quad P(t) = (P-e^{-A_Qt}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_Pt})(I+Qe^{-A_Qt}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_Pt})^{-1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Il est plus facile de déduire la régularité de P(t) de (5.3) où l'effet régularisant des semigroupes est clair, que directement de (5.4). Mais on voit aussi $\mathcal{N}(\pi)$ étant à priori quelconque dans $\mathcal{L}(V,V))$ qu'il est souhaitable d'avoir des résultats de régularité du type:

(5.5) $\quad e^{-A_P t},\ e^{-A_Q t} \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$.

Même avec $D_1 = D_2 = 0$ (on a alors $A_P = A$, $A_Q = A^*$) (5.5) n'est vrai qu'avec des hypothèses supplémentaires sur A et A*, par exemple de régularité du triplet $\{V,H,\ \varphi,\psi \to (A\varphi,\psi)\}$ (cf. [5]). Nous allons donc faire une hypothèse de ce genre, mais directement sur l'opérateur hamiltonien , et en déduire (5.5).

Nous ferons sur le triplet $\{V\times V,\ H\times H,\ (\mathcal{A}\varphi,\psi)\}$, avec $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & D_1 \\ D_2 & -A^* \end{pmatrix}$, l'hypothèse de régularité suivante:

(R) $\begin{cases} \text{Il existe un espace de Hilbert } D,\ D\subset H \text{ tel que} \\ \text{i) } V \text{ est un sous-espace fermé de } [D,H]_{1/2} \text{ (éventuellement } V=[D,H]_{1/2}) \\ \text{ii) } D(\mathcal{A}) \subset D\times D,\quad D(\mathcal{A}^*) \subset D\times D. \end{cases}$

Nous donnerons des exemples où cette hypothèse est vérifiée.

Montrons maintenant (5.5):

<u>Proposition 5.1</u>. Sous les hypothèses (H) et (R), nous avons:

(5.6) $\quad [D(A_P),H]_{1/2} = [D(A_Q),H]_{1/2} = V$

(5.7) $\quad e^{-A_P t},\ e^{-A_Q t} \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))\cap C^1([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V'))$.

<u>Démonstration</u>. Nous savons que pour λ et μ assez grands $\mathcal{A}_\mu+\lambda$ est $V\times V$ coercif, où $\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix}\mathcal{A}$ et bien sûr, $D(\mathcal{A}_\mu) = D(\mathcal{A})$. On peut donc appliquer le résultat de Lions ([5],thm.6.1) et il vient:

(5.8) $\quad [D(\mathcal{A}),H\times H]_{1/2} = [D(\mathcal{A}^*),H\times H]_{1/2} = V\times V$.

D'autre part on sait que (cf. le théorème 1.2) $T = \begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}$ est tel que:

(5.9) $\quad T \in \mathrm{isom}(V\times V;V\times V)\cap \mathrm{isom}(H\times H;H\times H)\cap \mathrm{isom}(D(A_P)\times D(A_Q);D(\mathcal{A}))$

(la dernière inclusion résulte de la relation (1.10) du thm.1.2. En fait elle est obtenue au cours de la preuve de ce théorème). On déduit alors de (5.9) que:

$$T \in \text{isom}(V\times V;V\times V)\cap\text{isom}([D(A_P),H]_{1/2}\times[D(A_Q),H]_{1/2};[D(\mathcal{A}),H\times H]_{1/2})$$

et en comparant avec (5.8), on obtient (5.6).

$-A_P$ et $-A_Q$ générant des semigroupes analytiques (en fait on a mieux, en renormant l'espace H, ils sont V-H coercifs) on a:

(5.10) $V = D(A_P^{1/2}) = D(A_Q^{1/2})$

e^{-A_Pt} et e^{-A_Qt} étant encore des semigroupes $C°$ sur le domaine des puissances (1/2 ici) de leurs générateurs, (5.7) suit en se souvenant que de plus A_P, $A_Q \in \mathcal{L}(V,V')$. □

Nous pouvons maintenant donner les premiers résultats sur la régularité de P(t) au voisinage de 0 en utilisant la topologie de V. Cela complète partiellement la proposition 3.2.

<u>Proposition 5.2</u>. Sous les hypothèses (H) et (R), nous avons:

$$(5.11)\begin{cases}\forall\pi \in \mathcal{C}^+\cap\mathcal{L}(V,V) \quad \text{tel que} \quad (I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V),\\ (I+Q\mathcal{P}(\cdot)(\pi))^{-1},\ \mathcal{P}(\cdot)(\pi)(I+Q\mathcal{P}(\cdot)(\pi))^{-1} \in C°([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))\\ \cap C^1([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V')).\end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. L'appartenance à $C°([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$ dans (5.11) provient de (5.3) et (5.7) en se souvenant que $I+QP \in \text{isom}(V,V)$, que $P,Q \in \mathcal{L}(V,V)$ et qu'avec les hypothèses sur π, $\mathcal{H}(\pi) \in \mathcal{L}(V,V)$.

L'appartenance au 2^{ieme} espace résulte encore de (5.3), (5.7) et du fait que (par transposition) Q, ${}^t\mathcal{H}(\pi) \in \mathcal{L}(V',V')$. $\square$

Nous n'allons pouvoir conclure sur la régularité de $\mathcal{P}(t)(\pi)$ en $t=0$ que pour des π particuliers qui seront sous solutions ou sur-solutions de l'équation de Riccati stationnaire associée. Plus précisement, posons:

$$(5.12)\quad \underline{\mathcal{S}}_+ = \{\pi \mid \pi \in \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{L}(V,V),\ (I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V),\ \ R(\pi) \geq 0\}$$

$$(5.13)\quad \overline{\mathcal{S}}_+ = \{\pi \mid \pi \in \mathcal{C}^+ \cap \mathcal{L}(V,V),\ (I+\pi Q)^{-1} \in \mathcal{L}(V,V),\ R(\pi) \leq 0\}.$$

Une sous-solution sera un élément de $\underline{\mathcal{S}}_+$, par exemple θP avec $0 \leq \theta < 1$. Une sur-solution sera un élément de $\overline{\mathcal{S}}_+$, par exemple θP avec $\theta \geq 1$.

D'après la première relation (4.7), il est clair que

$$(5.14)\quad \begin{cases} \forall \pi \in \underline{\mathcal{S}}_+, & t \to \mathcal{P}(t)(\pi) \text{ est croissant,} \\ \forall \pi \in \overline{\mathcal{S}}_+, & t \to \mathcal{P}(t)(\pi) \text{ est décroissant.} \end{cases}$$

C'est cette propriété de monotonie que nous allons utiliser (cf. TARTAR [6] pour d'autres applications des propriétés de monotonie à l'étude de solutions faibles de l'équation de Riccati).

Nous commençons par un lemme:

<u>Lemme 5.2</u>. Sous les hypothèses (H) et (R),

$\exists c_1, c_2,\ \forall t \in \,]0,1]$,

i) $\quad \forall \pi \in \underline{\mathcal{S}}_+,\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} |(\mathcal{P}(t)(\pi)-\pi)^{1/2}|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c_1 + c_2 |\pi|^{1/2}_{\mathcal{L}(V,V)}$,

ii) $\quad \forall \pi \in \overline{\mathcal{S}}_+,\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} |(\pi-\mathcal{P}(t)(\pi))^{1/2}|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c_1 + c_2 |\pi|^{1/2}_{\mathcal{L}(V,V)}$.

Démonstration. Soient $\pi \in \mathcal{S}_+$, $h \in V$ et $\{y,p\}$ la solution associée de (2.2). On a, en notant $P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi)$:

$$(P(t)h,h) = \int_0^t \{(D_2 y,y)+(D_1 p,p)\}+(\pi y(0),y(0)),$$

qui est le coût optimal du problème de contrôle associé à (2.2).

On a donc pour ce problème en prenant un feedback à priori construit à l'aide de P:

$$(P(t)h,h) \leq \int_0^t ((D_2+PD_1P)e^{-A_p s}h,e^{-A_p s}h)ds+(\pi e^{-A_p t}h,e^{-A_p t}h)$$

d'où

$$0 \leq \frac{1}{t}((P(t)-\pi)h,h) \leq \frac{1}{t}\int_0^t ((D_2+PD_1P)e^{-A_p s}h,e^{-A_p s}h)ds$$
$$+\frac{1}{t}((e^{-A_p^* t}\pi e^{-A_p t}-\pi)h,h)$$

d'où, avec (5.7) et (5.14):

$$\limsup_{t\to 0} \frac{1}{t}|(P(t)-\pi)^{1/2}h|^2 \leq ((D_2+PD_1P)h,h)-((A_p^*\pi+\pi A_p)h,h)$$
$$\leq (C_1^2+ C_2^2|\pi|_{\mathcal{L}(V,V)})\|h\|^2$$

d'où i). Montrons ii). Montrons d'abord que:

(5.15) $\forall \pi \in \mathcal{S}_+$, $\pi \geq P$.

En effet notons u_T le contrôle optimal pour le problème associé à (2.2). On a avec (5.14); $(\pi h,h) \geq (P(t)h,h) \geq \int_0^T \{(D_2 y(u_T),y(u_T))+(Nu_T,u_T)_E\}dt$ d'où, en notant $\tilde{u}_T$ le prolongement de u_T par 0 au delà de T: $\tilde{u}_T$ est borné dans $L^2(0,\infty;E)$ et donc $\tilde{u}_T \to w$ dans $L^2(0,\infty;E)$ faible.
Mais, pour $T' < T$,

$$(P(T)h,h) \geq \int_0^{T'} \{(D_2 y(u_T),y(u_T))+(Nu_T,u_T)_E\}dt$$

d'où

$$(\pi h,h) \geq \liminf_{T\to\infty} \int_0^{T'} \{(D_2 y(\tilde{u}_T),y(\tilde{u}_T))+(N\tilde{u}_T,\tilde{u}_T)_E\}dt$$

$$\geq \int_0^{T'} \{(D_2 y(w),y(w))+(Nw,w)_E\}dt \text{ ,}$$

avec la faible continuité inférieure de $v \to \int_0^{T'} \{(D_2 y(v),y(v))+(Nv,v)_E\}dt$. On déduit de là en passant à la limite quand $T' \to \infty$ et en comparant w à la solution du problème sur horizon infini que

$$(\pi h,h) \geq \int_0^{\infty}\{(D_2 y(w),y(w))+(Nw,w)_E\}dt \geq (Ph,h),$$

d'où (5.15).

Montrons maintenant que:

(5.16) $\quad \forall\pi \in \mathbb{C}^+, \quad P(T) = P+e^{-A_P^*T}(\pi-P)[I+(\int_0^T e^{-A_P t}D_1 e^{-A_P^* t}dt)(\pi-P)]^{-1}e^{-A_P T}$.

En effet, dans (2.2) posons $\tilde{p} = p-Py$, il vient:

$$\begin{cases} -y'+Ay+D_1Py+D_1\tilde{p} = 0 \\ \tilde{p}'+Py'+A^*\tilde{p}+A^*Py-D_2y = 0 \\ \tilde{p}(0) = (\pi-P)y(0), \quad y(T) = h \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} -y'+A_p y+D_1\tilde{p} = 0 \\ \tilde{p}'+A_p^*\tilde{p} = 0 \qquad \text{et} \quad P(T)h = \tilde{p}(T)+Ph \\ p(0) = (\pi-P)y(0), \quad y(T) = h \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$y(0) = e^{-A_P T}h-\int_0^T e^{-A_P t}D_1 e^{-A_P^* t}(\pi-P)y(0)dt$$

soit encore

$$y(0) = [I+(\int_0^T e^{-A_P t}D_1 e^{-A_P^* t}dt)(\pi-P)]^{-1}e^{-A_P T}h,$$

l'inverse existant (cf. lemme 2.3)). Comme d'autre part:

$$P(T) = Ph+e^{-A_P^* T}(\pi-P)y(0),$$

(5.16) suit.

On a maintenant, en développant l'inverse apparaissant dans (5.16):

$P(T)-\pi = e^{-A_P^*T}(\pi-P)e^{-A_PT} - (\pi-P) - e^{-A_P^*T}(\pi-P)s[I+(\pi-P)s]^{-1}(\pi-P)e^{-A_PT}$

où on a posé $s = \int_0^T e^{-A_Pt}D_1e^{-A_P^*t}dt$. D'autre part $s[I+(\pi-P)s]^{-1} \leq s$ car

$[I+(\pi-P)s]^*s = s+s(\pi-P)s \leq [I+s(\pi-P)]s[I+(\pi-P)s] = s+2s(\pi-P)s+s(\pi-P)s(\pi-P)s$

puisque $\pi-P \geq 0$ et $s \geq 0$, d'où:

$0 \geq P(T)-\pi \geq e^{-A_P^*T}(\pi-P)e^{-A_PT}-(\pi-P)-e^{-A_P^*T}(\pi-P)s(\pi-P)e^{-A_PT}$. On déduit de là avec (5.7) que $\forall h \in V$:

$$\limsup_{t\to 0} \frac{1}{t}|(\pi-P(t))^{1/2}h|^2 \leq ((A_P^*(\pi-P)+(\pi-P)A_p)h,h)+((\pi-P)D_1(\pi-P)h,h)$$
$$= -(R(\pi)h,h).$$

On peut alors conclure comme pour i) et le lemme est démontré. □

Nous pouvons donner le résultat de régularité annoncé:

<u>Proposition 5.3:</u> Sous les hypothèses (H) et (R), $\forall\pi \in \mathcal{S}_+\cup\bar{\mathcal{S}}_+$,

(5.17) $\mathcal{P}(\cdot)(\pi) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))\cap C^1([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V'))$,

(5.18) $\phi(\cdot)(\pi) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$.

<u>Démonstration</u>. Commençons par montrer que (on pose $P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi)$):

(5.19) $|e^{-A_Q^*t}QP(t)|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq c, \quad \forall t \in [0,1]$.

D'après (5.6), pour λ assez grand, $A_Q^{*1/2}+\lambda$ est un isomorphisme de V sur H, il suffit donc de montrer que $|(A_Q^{*1/2}+\lambda)e^{-A_Q^*t}QP(t)|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c$ soit encore que $|A_Q^{*1/2}e^{-A_Q^*t}QP(t)|_{\mathcal{L}(V;H)} \leq c$. D'autre part comme $\pi \in \mathcal{L}(V,V)$, d'après (5.7) on a $|e^{-A_Q^*t}Q\pi|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq c$. Pour prouver

(5.19) il suffit donc de montrer que $|A_Q^{*1/2} e^{-A_Q^* t} Q(P(t)-\pi)|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c$.

Mais $e^{-A_Q^* t}$ est un semigroupe analytique; d'où:

$$|A_Q^{*1/2} e^{-A_Q^* t}|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq \frac{c}{\sqrt{t}}, \quad \forall t \in]0,1]$$

(cf. par exemple [6]). Il suffit donc de montrer que: $\frac{1}{\sqrt{t}}|P(t)-\pi|_{\mathcal{L}(V,H)} \leq c$ ce qui résulte du lemme 5.2, pour $\pi \in \underline{\mathcal{S}}_+ \cup \bar{\mathcal{S}}_+$ (en remarquant que $|(P(t)-\pi)^{1/2}|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq c$ pour $\pi \in \underline{\mathcal{S}}_+$, majoration analogue pour $\pi \in \bar{\mathcal{S}}_+$). (5.19) est montré.

Montrons maintenant que:

(5.20) $|I+P(t)Q|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq c, \quad \forall t \in [0,1]$.

D'après (5.3):

$$\begin{aligned} I+QP(t) &= (I+QP)(I+Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t})^{-1} \\ &= I+QP-(I+QP)(I+Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t})^{-1}Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t} \\ &= I+QP-(I+QP(t))Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t} \\ &= I+QP-Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t}-QP(t)Qe^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t} \end{aligned}$$

d'où: $I+P(t)Q = T_1 - T_2 e^{-A_Q^* t} QP(t)Q$ avec $T_1 = I+PQ-e^{-A_P^* t}\mathcal{N}^*(\pi)e^{-A_Q^* t}$ et $T_2 = e^{-A_P^* t}\mathcal{N}(\pi)$. Comme, grâce à (5.7), $|T_1|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq c$ et $|T_2|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq c$, $\forall t \in [0,1]$, (5.20) suit grâce à (5.19). Remarquons maintenant que (5.11) entraîne que $(I+P(t)Q)^{-1}$ a la même régularité que $(I+QP(t))^{-1}$, en effet $(I+P(t)Q)^{-1} = I-P(t)(I+QP(t))^{-1}Q$. En particulier:

(5.21) $(I+P(t)Q)^{-1} \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$.

De (5.20) et (5.21) on déduit (cf. la démonstration du lemme 2.3 par exemple) que $I+P(t)Q \in C^{\circ}([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$. En particulier, (5.18) est montré. D'autre part, $P(t) = P(t)(I+QP(t))\,(I+QP(t))^{-1} = (I+P(t)Q)P(t)(I+QP(t))^{-1}$, d'où, avec (5.11): $P(t) \in C^{\circ}([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V))$. Il reste à montrer que: $P(t) \in C^{1}([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,V'))$. Mais d'après la démonstration du lemme 4.1:

$$\frac{1}{t}(P(t)-\pi) = (I+\pi Q)\frac{1}{t}(\mathcal{N}(\pi)-e^{-A_Q t}\mathcal{N}(\pi)e^{-A_P t})(I+QP)^{-1}\,(I+QP(t)).$$

D'après les régularités montrées, on a

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(P(t)-\pi) = (I+\pi Q)(A_Q\mathcal{N}(\pi)+\mathcal{N}(\pi)A_P)(I+QP)^{-1}(I+Q\pi) = R(\pi)$$

(avec le lemme 4.2). Comme d'autre part

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}P(t) = \lim_{t\to 0}\phi^*(t)(\pi)R(\pi)\phi(t)(\pi) = R(\pi)$$

(avec (5.18)), la proposition est démontrée. □

Donnons un résultat d'unicité pour le système en P et ϕ:

Théorème 5.1. Sous les hypothèses (H) et (R), $\forall\pi \in \mathcal{J}_+\cup\bar{\mathcal{J}}_+$, le système (4.7) a une solution unique dans la classe des $P(\cdot)$ et $\phi(\cdot)$ tels que:

$$(5.22)\quad \begin{cases} P(\cdot) \in C^{\circ}([0,\infty[,\mathcal{L}_s(H,H)\cap\mathcal{L}_s(V,V))\cap C^{1}([0,\infty[,\mathcal{L}_s(V,V'))\cap C^{1}(]0,\infty[,\mathcal{L}_s(H,H)) \\ \forall t > 0,\quad (I+QP(t))^{-1} \in \mathcal{L}(V,V). \end{cases}$$

$$(5.23)\quad \phi(\cdot) \in C^{\circ}([0,\infty[,\mathcal{L}_s(V,V))\cap C^{1}(]0,\infty[\,\mathcal{L}_s(V,V)).$$

Démonstration. Soient $P(\cdot)$ et $\phi(\cdot)$ vérifiant (4.7), (5.22) et (5.23). On peut utiliser le lemme 5.1: dans (5.2) chacun des termes est dans $C^{\circ}([0,\infty[,\mathcal{L}_w(V,V'))$, d'où pour t=0: $S = \frac{d}{dt}P(t)|_{t=0}-R(\pi)$ et en comparant avec la première relation de (4.7) écrite pour t=0 il vient S=0.

On peut alors utiliser le résultat d'unicité du théorème 4.1: on a bien $P(t) = \mathcal{P}(t)(\pi)$ ($P(t) \in \mathcal{C}^+$ vient de (4.7)).

Soit alors y la solution du système (2.2). On vérifie facilement que $y' = (A+D_1P(t))y$ (en remarquant que $\forall t \in [0,T]$, $p(t) = P(t)y(t)$), où $y \in W(0,T)$ d'où, avec (4.7): $(\frac{d}{dt}\phi)y+\phi\frac{d}{dt}y = 0$, d'où y = cte sur $[0,T]$. En particulier:

(5.24) $\phi(T)h = y(T)$

ce qui caractérise ϕ. Le théorème est démontré. □

Donnons un résultat d'unicité pour le système en $P(\cdot)$ et $L(\cdot)$:

Théorème 5.2: Sous les hypothèses (H) et (R), le système (4.11) a une solution unique dans la classe des $P(\cdot)$ vérifiant (5.22) et des $L(\cdot)$ vérifiant:

(5.25) $L(\cdot) \in C^\circ([0,\infty[,\mathcal{L}_s(V;F)) \cap C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V';F))$.

Démonstration. Un calcul analogue à celui du lemme 5.1, conduit à (5.2) d'où l'on déduit l'unicité de $P(\cdot)$. De la même manière que l'on montre (5.24) on montre ici que:

(5.26) $L(T)h = Cy(T)$,

où y est solution de (2.2), ce qui caractérise $L(\cdot)$. □

Enfin pour le système en $K(\cdot)$ et $L(\cdot)$ on a le

Théorème 5.3: Sous les hypothèses (H) et (R), le système (4.12) a une solution unique dans la classe des $K(\cdot)$ et $L(\cdot)$ vérifiant:

(5.27) $K(\cdot) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,E))\cap C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(V,E))$

$L(\cdot)$ vérifie (5.25) et $t \to \int_0^t L^*(\tau)\Lambda_F L(\tau)d\tau$ vérifie (5.22).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent en posant $P(t) = \int_0^t L^*(\tau)\Lambda_F L(\tau)d\tau + \pi$. □

6. UNE VARIANTE DES RESULTATS PRECEDENTS

Nous donnons ici une variante des résultats précédents qui s'appliquera à l'équation de Riccati associée à un système parabolique dans lequel le contrôle est la valeur, donnée dans un espace L^2, de l'état du système sur la frontière du domaine (cf. aussi [7] où le cas des opérateurs dépendant du temps est abordé).

Nous faisons les hypothèses suivantes:

$$(6.1)\quad \begin{cases} V,H,E,F \text{ sont données comme au paragraphe 1.} \\ A \in \mathcal{L}(V,V'), \quad \exists\alpha > 0, \quad \forall\varphi \in V, \ (A\varphi,\varphi) \geq \alpha\|\varphi\|^2 \\ B \in \mathcal{L}(E;D(A^*)'), \quad C \in \mathcal{L}(H;F), \ N \text{ est comme en (1.2)} \\ D(A^{1/2}) = V \end{cases}$$

Remarquons que l'on a, chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue:

$$D(A) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A^*)' .$$

Si on compare aux hypotheses (1.2) on voit que l'on a pris un opérateur B plus irrégulier (à valeurs dans $D(A^*)'$ au lieu de V') et un opérateur C plus régulier (s'appliquant continûment sur tout H au lieu de V).

Sous l'hypothèse 6.1 on a (cf. [5], [8]):

$$(6.2)\ \begin{cases} D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2}) = V, \\ A^{1/2} \in \mathrm{isom}(D(A);V) \cap \mathrm{isom}(V;H) \cap \mathrm{isom}(H;V') \cap \mathrm{isom}(V',D(A^*)') \\ \text{idem pour } A^{*1/2} \end{cases}$$

Posons alors:

$$(6.3)\quad \tilde{B} = A^{-1/2}B,\quad \tilde{C} = CA^{1/2}.$$

On a maintenant $\tilde{B} \in \mathcal{L}(E;V')$ et $\tilde{C} \in \mathcal{L}(V;F)$. Les hypothèses (H) sont vérifiées (les propriétés de $\tilde{C}$-stabilisabilité et de $\tilde{B}$-détectabilité proviennent de la stabilité exponentielle du semigroupe engendré par $-A$). Nous allons pouvoir écrire les résultats précédents pour le système $(A,\tilde{B},\tilde{C},N)$ puis les traduire en résultats analogues pour le système initial.

Nous utiliserons encore les notations $D_1 = BN^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*$, $D_2 = C^*\Lambda_F C$. On a:

$$(6.4)\quad D_1 \in \mathcal{L}(D(A^*);\ D(A^*)'),\quad D_2 \in \mathcal{L}(H:H).$$

Nous utiliserons aussi la notation (cf. [9]), pour X et Y espaces de Hilbert: $W(a,b;X,Y) = \{\varphi | \varphi \in L^2(a,b;X),\ \frac{d}{dt}\varphi \in L^2(a,b;Y)\}$ avec $a < b \leqslant +\infty$. Commençons par donner les résultats concernant l'horizon infini:

<u>Théorème 6.1</u>: Sous les hypothèses 6.1, nous avons:

i) $\forall h \in V'$, le système suivant a une solution unique $\{y,p\}$ dans $W(0,\infty;\ H,D(A^*)')\times W(0,\infty;D(A^*),H)$:

$$(6.5)\ \begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0, & y \in L^2(0,\infty;H) \\ -p'+A^*p-D_2y = 0, & p \in L^2(0,\infty;D(A^*)) \\ y(0) = h \end{cases}$$

ii) l'application $P:h \to p(0)$, pour p solution de (6.5), vérifie:

$$(6.6)\begin{cases} \text{a) } P \in \mathcal{L}(H;D(A^*)) \cap (\mathcal{L}(D(A^*)';H), \text{ en particulier } P \in \mathcal{L}(V',V) \\ \quad \text{et on a } (P\varphi,\psi) = (\varphi,P\psi),\ (P\varphi,\varphi) \geq 0,\ \forall\varphi,\psi \in V'. \\ \quad \text{Nous dirons que } P \in \mathcal{C}^+(V',V).^{(1)} \\ \text{b) } -(A+D_1P) \text{ a une extension à } V' \text{ qui génère un semigroupe sur } V'. \\ \text{c) } PA+A^*P+PD_1P = D_2, \text{ égalité dans } \mathcal{L}(H,H). \end{cases}$$

iii) P ainsi construit est le seul élément ayant les propriétés (6.6)

iv) $\{y,p\}$ solution de (6.5) est aussi solution de

$$(6.7)\begin{cases} y'+(A+D_1P)y = 0, \quad p = Py \\ y(0) = h. \end{cases}$$

□

Remarque 6.1. Dans l'énoncé de ce théorème, A désigne l'extension à $\mathcal{L}(H;D(A^*)')$ de l'opérateur de même nom introduit en (6.1). En fait, $-A^*$ générant un semigroupe sur $D(A^*)$, $-A$ génère un semigroupe sur $D(A^*)'$ (et donc sur tous les interpolés hilbertiens entre $D(A)$ et $D(A^*)'$). Le système (6.5) peut en fait s'étudier (avec des seconds membres non nuls) en utilisant la méthode de transposition. La transformation que nous allons utiliser (cf. (6.3)) correspond plutôt à un changement d'espace pivot (V' au lieu de H, [10]). □

Démonstration du theoreme 6.1. Posons $\tilde{D}_1 = \tilde{B}N^{-1}\Lambda_E^{-1}\tilde{B}^*$, $\tilde{D}_2 = \tilde{C}^*\Lambda_F\tilde{C}$. Notons T l'application de $W(0,\infty;V,V')\times W(0,\infty;V,V')$ dans $W(0,\infty;H,D(A^*)')\times W(0,\infty;D(A^*),H)$ définie par: $T\{\varphi,\psi\} = \{A^{1/2}\varphi, A^{*-1/2}\psi\}$.

(1) Plus précisement nous notons $\mathcal{C}^+(V',V)$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(V',V)$ vérifiant: $\forall\varphi,\psi \in V'$, $(P\varphi,\psi) = (\varphi,P\psi)$ et $(P\varphi,\varphi) \geq 0$.

On déduit facilement, avec (6,2), que T est un isomorphisme.

Montrons i). Soit le système

$$(6.8)\quad \begin{cases} \tilde{y}'+A\tilde{y}+\tilde{D}_1\tilde{p} = 0, & \tilde{y} \in L^2(0,\infty;V) \\ -\tilde{p}'+A^*\tilde{p}-\tilde{D}_2\tilde{y} = 0, & \tilde{p} \in L^2(0,\infty;V) \\ \tilde{y}(0) = \tilde{h}, & \tilde{h} \in H . \end{cases}$$

Il y a une solution unique dans $W(0,\infty;V,V')\times W(0,\infty;V,V')$ (cf. [2],[1]). Notons $\{y,p\} = T\{\tilde{y},\tilde{p}\}$. Il est clair que $\{y,p\}$ est solution du système (6.5) (la multiplication de la 1ère équation (6.8) par $A^{1/2}$, de la 2ième par $A^{*-1/2}$ est licite). Inversement T^{-1} associe à une solution de (6.5) une solution de (6.8), d'où l'unicité.

Montrons ii). $\tilde{P}$ étant l'application $\tilde{h}\to\tilde{p}(0)$, $\tilde{p}$ solution de (6.8), on vérifie que:

(6.9) $\quad P = A^{*-1/2}\tilde{P}A^{-1/2}$,

ii) est alors la traduction de (1.7) en utilisant le théorème 1.1 et (6.2), (6.9).

Montrons iii). Soit P vérifiant (6.6), alors $\tilde{P} = A^{*1/2}PA^{1/2}$ est un élément de $\mathcal{S}_+$ pour le système $(A,\tilde{B},\tilde{C},N)$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{S}_+$ pour ce système à un seul élément.

Comme $\tilde{\mathcal{S}}_+$ est non vide, il suffit de vérifier que:

(6.10) $\quad (\tilde{\mathcal{A}}+\theta i)^{-1} \in \mathcal{L}(H\times H,H\times H)$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, où $\quad \tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A & \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 & -A^* \end{pmatrix}$.

Soit $T_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix}$. Pour μ assez grand on sait que:

$$\operatorname{Re}(T_\mu\tilde{\mathcal{A}}u,u) \geq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2, \quad \forall u \in V\times V \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(\theta i(T_\mu u,u)) = 0$$

d'où (6.10) et l'unicité est démontrée.

Montrons iv). On a vu que $\forall t \geq 0$, $\tilde{p}(t) = \check{P}y(t)$, d'où $p(t) = Py(t)$ et $y'+(A+D_1P)y = 0$, $y(0) = h$. Cette équation est par ailleurs bien posée avec $h \in V'$ grâce à (6.6), b). □

Donnons le résultat correspondant au fait que $\tilde{\mathcal{J}}_+ \neq \phi$. C'est un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Riccati associée à un problème de contrôle avec contrôle distribué et observation irrégulière: frontière ou éventuellement ponctuelle.

Théorème 6.2. Sous les hypothèses 6.1, il existe un element unique Q tel que:

$$(6.11)\begin{cases} \text{a) } Q \in \mathcal{L}(D(A^*),H)\cap\mathcal{L}(H;D(A^*)')\cap\mathcal{L}(V;V') \\ \quad \text{de plus } Q \in \mathcal{C}^+(V,V') \\ \text{b) } -(A^*+D_2Q) \text{ a une restriction à } V \text{ qui génère} \\ \quad \text{un semigroupe sur } V \\ \text{c) } QA^*+AQ+QD_2Q = D_1, \text{ égalité dans } \mathcal{L}(D(A^*),D(A^*)') \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de poser $Q = A^{1/2}\tilde{Q}A^{*1/2}$ avec $\tilde{Q}$ vérifiant l'analogue de (1.8) pour $A,\tilde{D}_1,\tilde{D}_2$. □

Donnons le résultat correspondant du problème de contrôle sur horizon fini (équation de Riccati différentielle):

Théorème 6.3: Sous les hypothèses (6.1), nous avons:

i) $\forall h \in V'$, $\forall \pi \in \mathcal{C}^+(V',V)$, le système suivant a une solution unique $\{y,p\}$ dans $W(0,T;H,D(A^*)')\times W(0,T;D(A^*),H)$:

$$(6.12)\begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0, & y \in L^2(0,T;H) \\ -p'+A^*p-D_2y = 0, & p \in L^2(0,T;D(A^*)) \\ y(0) = h, \quad p(T) = \pi y(T). \end{cases}$$

ii) L'application $P(T):h \to p(0)$, p solution de (6.12), vérifie:

$$(6.13)\quad P(\cdot) \in C^\circ([0,\infty[;\mathcal{C}_s^+(V',V)) \cap C^1(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(D(A^*)',H)\cap\mathcal{L}_s(H;D(A^*)).$$

$$(6.14)\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t)+P(t)A+A^*P(t)+P(t)D_1P(t) = D_2, \text{ égalité dans } \mathcal{L}(H;H), \\ P(0) = \pi, \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

iii) $P(\cdot)$ construit en ii) est l'unique élément vérifiant (6.14) dans la classe des opérateurs tels que (6.13) a lieu ainsi que la propriété suivante: $\forall t > 0$, $P(t)$, $(I+QP(t))^{-1} \in \mathcal{L}(H;H)$ où Q est l'unique élément vérifiant (6.11).

<u>Démonstration</u>: C'est encore une traduction immédiate, cette fois du lemme 2.1 et du théorème 4.1. En effet, $\{\tilde{y},\tilde{p}\}$ étant la solution du système (2.2) écrit pour A et

$$(6.15)\quad \tilde{D}_1 = A^{-1/2}D_1A^{*-1/2}, \quad \tilde{D}_2 = A^{*1/2}D_2A^{1/2}, \tilde{\pi}=A^{*1/2}\pi A^{1/2}, \tilde{h}=A^{-1/2}h;$$

il est clair que

$$(6.16)\quad y = A^{1/2}\tilde{y}, \quad p = A^{*-1/2}\tilde{p}$$

vérifient (6.12). En particulier, $\tilde{P}(\cdot)$ vérifiant (4.4), (4.5),

$$(6.17)\quad P(\cdot) = A^{*-1/2}\tilde{P}(\cdot)A^{-1/2}$$

vérifie (6.13), (6.14) et iii). □

On peut aussi traduire les résultats concernant les équations de Chandrasekhar (proposition 4.2, théorèmes 4.2, 5.1, 5.2, 5.3). Nous nous limiterons au cas du système en K et L encore définis par (4.8) et (4.9) et à la traduction de (4.10), (4.12).

Théorème 6.4: Sous les hypothèses (6.1), soit $P(\cdot)$ la solution de (6.14) dans la classe définie en iii) du théorème 6.2, $K(\cdot)$ et $L(\cdot)$ alors définis par (4.8) et (4.9) vérifient:

(6.18) $K(\cdot)\in C^{\infty}(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(H,E))$, $L(\cdot)\in C^{\infty}(]0,\infty[;\mathcal{L}_s(D(A^*)',F))$

et $\forall t>0$:

$$(6.19)\begin{cases} \frac{d}{dt}K(t) = N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*L^*(t)\Lambda_F L(t), & \text{égalité dans } \mathcal{L}(H,E) \\ \frac{d}{dt}L(t)+L(t)(A+BK(t)) = 0, & \text{égalité dans } \mathcal{L}(H,F) \\ K(0)=0,\quad L(0)=C \end{cases}$$

□

7. EXEMPLES

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, Γ sa frontière et pour $0<T\le+\infty$:

$$Q_T = \Omega\times]0,T[,$$

$$\Sigma_T = \Gamma\times]0,T[\ .$$

Soient a_{ij} des fonctions sur Ω avec

$$(7.1)\begin{cases} a_{ij}\in C^2(\Omega), \quad i,j=1,\dots,n \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \forall\xi_i\in\mathbb{R},\ \text{p.p.dans } \Omega \text{ où } \alpha>0. \end{cases}$$

Pour $H = L^2(\Omega)$ et $V = H^1(\Omega)$ ou $V = H_0^1(\Omega)$, définissons la forme bilinéaire continue suivante sur V:

$$(7.2) \qquad a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx, \qquad \forall\varphi,\psi \in V.$$

Nous allons considérer les exemples suivants de problèmes de contrôle:

Exemple I. Problème de Neumann

On prend:

$$(7.3) \quad \begin{cases} V = H^1(\Omega) \\ E = F = L^2(\Gamma) \end{cases}$$

L'état du système est la solution dans $L^2_{loc}(0,\infty;H^1(\Omega))$ de

$$(7.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(y(v),\varphi)+a(y(v),\varphi) = (v(t),\varphi|_\Gamma)_{L^2(\Gamma)}, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega), \quad \text{p.p. sur }]0,T[\\ y(v)|_{t=0} = h \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $v \in L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma))$ et $h \in L^2(\Omega)$.

(7.4) s'interprète ainsi pour $T > 0$.

$$(7.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y(v)+Ay(v) = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T \\ \frac{\partial}{\partial \nu_A}y(v) = v \quad \text{dans} \quad \Sigma_T \\ y(v)|_{t=0} = h \end{cases}$$

avec

$$(7.6)\quad \begin{cases} A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu_A} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi.\cos(n,x_i) \end{cases}$$

où $\cos(n,x_i)$ est le i^{ieme} cosinus directeur de la normale n à Γ extérieure à Ω. Le critère à minimiser est:

$$(7.7)\qquad J(v) = \int_0^T |y(v)|_\Gamma|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt + \nu\int_0^T |v|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt \quad \text{où} \qquad \nu > 0.$$

On a ici

$$(7.8)\quad \begin{cases} C\varphi = \varphi|_\Gamma, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega) \\ (Bv,\varphi) = \int_\Gamma v\varphi|_\Gamma d\Gamma, \quad \forall v \in L^2(\Gamma), \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega) \\ N = \nu \text{ (Identité)} \end{cases}$$

On peut montrer que les hypothèses (H) sont verifiées (cf. [1]). Les hypothèses (R) sont aussi vérifiées, en effet si $f,g \in L^2(\Omega)$ et

$$\begin{cases} A\varphi = f, \quad A^*\psi = g \quad \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu_A}\varphi + \psi|_\Gamma = 0, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu_{A^*}} + \varphi|_\Gamma = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

d'où l'on déduit que $\varphi,\psi \in H^2(\Omega)$. On peut alors prendre dans (R), $D = H^2(\Omega)$.

Les hypothèses (H) et (R) étant vérifiées, les résultats des paragraphes 1 à 5 s'appliquent. C'est une généralisation des résultats de [11].

Exemple II. Problème de Dirichlet

$a(\varphi,\psi)$ est donnée comme en (7.1), (7.2) mais on prend ici:

$$
(7.9) \qquad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \\ E = L^2(\Gamma), \qquad F = L^2(\Omega) \end{cases}
$$

L'état du système est la solution dans $L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$ de

$$
(7.10) \qquad \begin{cases} \int_{Q_T} y(v)(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + A^*\varphi)dx\, dt = \int_\Omega h(x)\varphi(x,0)dx - \int_{\Sigma_T} v \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}} d\Sigma \\ \forall T > 0, \quad \forall\varphi \in \Phi_T = \{\varphi | \varphi \in H^{2,1}(Q_T),\ \varphi|_{\Sigma_T} = 0,\ \varphi(x,T) = 0\} \end{cases}
$$

(7.10) définit $y(v)$ de façon unique et s'interprète ainsi formellement (cf. [2],[9]):

$$
(7.11) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(v) + Ay(v) = 0 \quad \text{dans } Q_T \\ y(v)|_{\Sigma_T} = v \quad \text{sur } \Sigma_T \\ y(x,0;v) = h(x) \quad \text{dans } \Omega \end{cases}
$$

Le critère à minimiser est

$$
(7.12) \qquad J(v) = \int_0^T |Cy(v)|^2_{L^2(\Omega)} dt + \nu\int_0^T |v|^2_{L^2(\Gamma)}, \qquad \nu > 0
$$

avec $C \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$. Remarquons que $y(v)$ défini par (7.10) est aussi solution de

$$
(7.13) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt} y(v) + Ay(v) = Bv \\ y(v)_{\ t=0} = h. \end{cases}
$$

où on a noté:

A, l'extension à $D(A^*)'$ de l'opérateur $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ associé à la forme bilineaire $a(\varphi,\psi)$ (cf. Remarque 6.1). $-A$ est générateur d'un semigroupe sur $D(A^*)'$.

B, l'opérateur défini par: $\forall v \in L^2(\Gamma)$, $\forall \varphi \in D(A^*)$, $(Bv,\varphi) = -\int_\Gamma v \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu_{A^*}} d\Gamma$. remarquons que $B \in \mathcal{L}(E, D(A^*)')$.

En particulier $Bv \in L^2_{loc}(0,\infty;D(A^*)')$ et la théorie générale des semigroupes s'applique à l'équation non homogène (7.13): sa solution s'écrit à l'aide de la formule de "variation des constantes" et de là on déduit que (7.10) est vérifié.

Les hypothèses (H) sont donc vérifiées par $A,\tilde{B},\tilde{C}$ definis comme en (6.3): Les théorèmes 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 s'appliquent.

Exemple III. Observation ponctuelle

C'est une situation symétrique de celle de l'exemple II par rapport à celle de l'exemple I. D_1 va être plus "régulier" que $\mathcal{L}(V,V')$ et D_2 moins régulier. Changeant D_1 en D_2 on pourra alors appliquer le théorème 6.2.

$a(\varphi,\psi)$ est donnée comme en (7.1), (7.2) et on prend ici:

$$(7.14) \quad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \quad \text{ou} \quad H^1(\Omega) \\ F = \mathbb{R} \end{cases}$$

L'état du systeme est la solution dans $L^2_{loc}(0,\infty;V)$ de

$$(7.15) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(v) + Ay(v) = Bv \\ y(v)\big|_{t=0} = h \end{cases}$$

avec $h \in L^2(\Omega)$ et $B \in \mathcal{L}(E;L^2(\Omega))$.

E peut être un espace de dimension finie ou non, l'important est qu'on a ici:

(7.16) $\quad D_1 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))$;

On fait l'hypothèse suivante sur la dimension de l'espace:

(7.17) $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \leq 3$.

On considère alors le critère suivant qu'il s'agit de minimiser:

$$(7.18)\quad \begin{cases} J(v) = \int_0^T \left| \sum_{j=1}^{j=P} c_j y(v;x_j,t)\right|^2 dt + \nu \int_0^T |v|_E^2\, dt \\ \text{avec } x_j \in \Omega,\ c_j \in R,\ j=1,\dots,p \text{ et } \nu > 0. \end{cases}$$

Comme, grâce à (7.17), $D(A) \subset H^2(\Omega) \subset C^\circ(\Omega)$, on a $C \in \mathcal{L}(D(A);R)$, d'où:

(7.19) $\quad D_2 \in \mathcal{L}(D(A),D(A)')$.

Les hypothèses (6.1) sont donc vérifiées en remplaçant A par A* et D_1 par D_2. Le théorème 6.2 assure donc que sous les hypothèses faites (7.1), (7.2), (7.14), (7.16), (7.17), (7.18), il existe $P \in \mathcal{L}(D(A),H) \cap \mathcal{L}(H,D(A)') \cap \mathcal{C}^+(V,V')$ unique tel que:

i) $-(A+D_1P)$ génère un semigroupe C° sur V ;

ii) $PA+A^*P+PD_1P = D_2$ égalité dans $\mathcal{L}(D(A),D(A)')$

iii) le feedback optimal du problème associé à (7.15),(7.18):

$$\inf_{v \in L^2(0,\infty;E)} J(v) \quad \text{est} \quad u = -\frac{1}{\nu} B^*Py(u). \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M.SORINE, Un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Riccati stationnaire, Rapport INRIA no.55, 1981.

2. J.L.LIONS, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, 1968.

3. T.KAILATH, Some Chandrasekhar-type algorithms for quadratic regulators. Proc.IEEE Conf.Dec. and Control, New Orleans, Dec. 1972.

4. A.LINDQUIST, Some new non-Riccati algorithms for continuous-time Kalman-Bucy filtering, J.Applied Mathematics and Optimization Vol.3, No.1, 1976.

5. J.L.LIONS, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J.Math.Soc.Japan, 14, No.2, 1962.

6. L.TARTAR, Sur l'étude directe d'équations nonlinéaires intervenant en théorie du controle optimal, J.of Functional Analysis, 6, 1974.

7. M.C.DELFOUR, M.SORINE, The linear-quadratic optimal control problem for parabolic systems with boundary control through a Dirichlet condition, 3rd IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems, Toulouse, July 1982.

8. T. KATO, Fractional powers of dissipative operators I,II, J.Math. Soc.Japan, Vol.14, No.2, 1962.

9. J.L.LIONS, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume I, Dunod, 1968.

10. J.L.LIONS, Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.

11. M.SORINE, Sur les équations de Chandrasekhar associées au problème de contrôle d'un système parabolique: un exemple avec contrôle et observation frontières, C.R.A.S. de Paris, t.285, A-911, 1977.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique