Quelques remarques sur les problèmes d'existence en élasticité non linéaire

P.G. Ciarlet

INRIA
CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:954 90 20

Rapports de Recherche

N° 121

QUELQUES REMARQUES SUR LES PROBLÈMES D'EXISTENCE EN ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE

Philippe CIARLET

Février 1982

QUELQUES REMARQUES SUR LES PROBLEMES D'EXISTENCE EN ELASTICITE NON LINEAIRE

Philippe CIARLET

Université Pierre et Marie Curie

et

Ecole Normale Supérieure

RESUME

Après un bref rappel de la modélisation du problème général de l'élasticité tridimensionnelle non linéaire, on passe en revue et on discute diverses approches pour obtenir des résultats d'existence.

ABSTRACT

After a brief review of the derivation of the general, three-dimensional, nonlinear elasticity problem, we review and discuss various approaches for obtaining existence results.

1. <u>POSITION DU PROBLEME</u>. - Un problème central en élasticité non linéaire tri-dimensionnelle consiste à trouver une position d'équilibre d'un milieu continu élastique soumis à des forces de volume et à des forces de surface sur une portion de sa frontière, le déplacement étant imposé sur la portion restante de la frontière. Ce problème admet, comme modèles mathématiques, soit un problème aux limites, posé sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, soit un problème de minimisation de fonctionnelle ("l'énergie" du système), comme nous allons brièvement le rappeler, en précisant en même temps les notations (que nous avons choisies parmi les plus couramment employées). Pour des compléments sur l'établissement de ces modèles, on consultera notamment GREEN & ZERNA [1968], GURTIN [1981], MARSDEN & HUGHES [1978, 1982], TRUESDELL & NOLL [1965], WANG & TRUESDELL [1973], WASHIZU [1975].

De façon plus précise, dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée (e_i) donnée une fois pour toutes (les indices <u>latins</u> : i,j,... parcourent <u>toujours</u> l'ensemble $\{1,2,3\}$), on se donne un ouvert connexe borné Ω, dont la frontière Γ sera supposée suffisamment régulière pour tout ce qui suit, notamment pour que l'on puisse lui associer une mesure superficielle $da(y)$, $y \in \Gamma_1$, et pour que le vecteur normal extérieur unitaire $\nu = (\nu_i)$ existe da-presque partout le long de Γ. On considère alors un corps qui occupe l'ensemble $\overline{\Omega}$ à l'état "de repos", c'est-à-dire en l'absence de forces (de volume ou de surface) imposées. C'est pourquoi l'ensemble $\overline{\Omega}$ sera appelé la <u>configuration de référence</u>. Sous l'influence des forces, le corps "se déplace" et il s'agit de déterminer le champ des déplacements $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ correspondant ou, ce qui revient au même, le champ des <u>déformations</u> $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ définies par (Fig. 1)

$$\phi(x) = x+u(x) \text{ pour } x \in \overline{\Omega} \iff \phi = Id+u. \tag{1.1}$$

On suppose que le déplacement est imposé sur une partie (da-mesurable) Γ_o de Γ ; pour simplifier, on supposera qu'il est <u>nul</u> sur Γ_o.

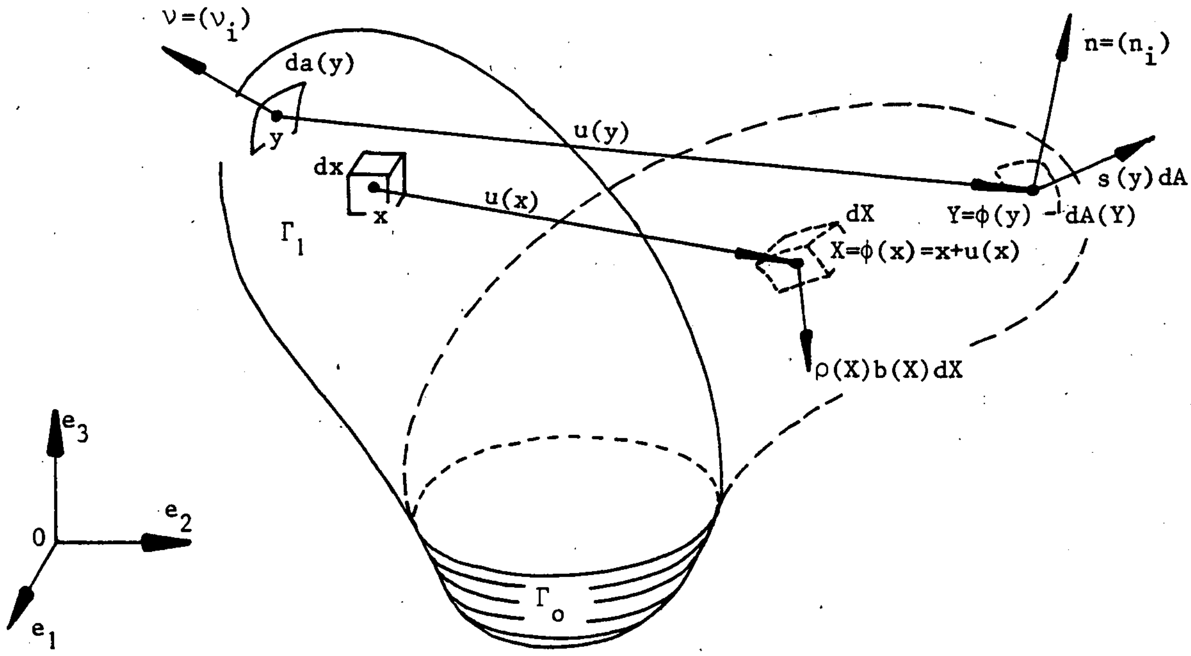


Fig. 1

On suppose par ailleurs que, sur la partie $\phi(\Gamma_1)$, où $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_o$, de la frontière $\phi(\Gamma)$ de $\phi(\Omega)$ (en supposant que la frontière est l'image de la frontière...), des forces de surface sont imposées, et qu'elles sont représentées par une densité $s = (s_i))$ par unité de surface déformée : autrement dit, si $dA(Y)$ est l'élément de surface en un point $Y = \phi(y) \in \phi(\Gamma_1)$, cet élément de surface est soumis à la force "élémentaire" $s(Y)dA(Y)$ (Fig. 1).

Enfin, on suppose que le corps est soumis à des forces de volume, représentées par une densité $b = (b_i)$ par une unité de masse : autrement dit, si dX est l'élément de volume en un point $X = \phi(x) \in \phi(\Omega)$, si $\rho(X)$ est la densité de masse par unité de volume en ce point, l'élément de volume dX est soumis à la force "élémentaire" $\rho(X)b(X)dX$.

Introduisant alors le champ des tenseurs des contraintes de Cauchy $T = (T_{ij})$: $\phi(\overline{\Omega}) \to \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre 3, l'application de la foi fondamentale de la statique montre que les relations suivantes, appelées les équations d'équilibre dans la configuration déformée $\phi(\overline{\Omega})$, doivent être satisfaites :

(1.2) $\forall X \in \phi(\Omega)$, $\mathrm{DIV}\, T(X) + \rho(X)b(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial X_j} T_{ij}(X) + \rho(X)b_i(X) = 0$, $1 \le i \le 3$,

(1.3) $\forall X \in \phi(\Omega)$, $T(X) = T^T(X) \Leftrightarrow T_{ij}(X) = T_{ji}(X)$, $1 \le i < j \le 3$,

(1.4) $\forall X \in \phi(\Gamma_1)$, $T(Y)n(Y) = s(Y) \Leftrightarrow T_{ij}(Y)n_j(Y) = s_i(Y)$, $1 \le i \le 3$,

en désignant par $n(Y) = (n_i(Y))$ le vecteur normal extérieur unitaire au point $Y \in \phi(\Gamma)$, et en utilisant la convention de la sommation des indices.

Les équations (1.2)-(1.4) sont évidemment peu utilisables puisque la "variable" X qui y apparaît est précisément l'inconnue ! Pour passer à la variable $x \in \Omega$ tout en préservant autant que possible la forme "de divergence" des équations, on introduit la transformée de Piola du champ de tenseurs T : c'est le champ de tenseurs $t = (t_{ij}) : \bar{\Omega} \to \mathfrak{M}$ définie par la relation (en supposant la déformation $\phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ injective et dérivable) :

(1.5) $$t(x) = \mathrm{dét}(\nabla\phi(x))T(X)[\nabla\phi(x)^{-1}]^T, \quad x = \phi^{-1}(X),$$

où

(1.6) $$\nabla\phi(x) = (\partial_j\phi_i(x)), \text{ avec } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

désigne la matrice gradient de la déformation au point x. Notant

(1.7) $$\rho_o(x) = \mathrm{dét}\, \nabla\phi(x)\rho(X)$$

la densité de masse par unité de volume au point $x = \phi^{-1}(X)$, on montre que le tenseur t, appelé en élasticité le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, vérifie les relations suivantes, appelées les équations d'équilibre dans la configuration de référence $\bar{\Omega}$:

(1.8) $\forall x \in \Omega$, $\mathrm{div}\, t(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow \partial_j t_{ij}(x) + f_i(x) = 0$, $1 \le i \le 3$,

(1.9) $\forall x \in \Omega$, $t(x)\nabla\phi(x)^T = \nabla\phi(x)t(x)^T \Leftrightarrow t_{ik}(x)\partial_k\phi_j(x) = t_{jk}(x)\partial_k\phi_i(x)$,
$1 \le i < j \le 3$,

(1.10) $\forall y \in \Gamma_1$, $t(y)\nu(y) = g(y) \Leftrightarrow t_{ij}(y)\nu_j(y) = g_i(y)$, $1 \le i \le 3$,

où les champs $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ sont respectivement définis par les relations :

$$(1.11)\quad f(x)dx = \rho_o(x)b(\phi(x))dx = \rho(X)b(X)dX,\ g(y)da(y) = s(Y)dA(Y).$$

Pour éviter les complications dues à la dépendance des fonctions f et g sur l'inconnue ϕ (la prise en compte de cette dépendance ne constitue d'ailleurs pas la difficulté essentielle), on fera désormais l'hypothèse que les forces appliquées sont "mortes", dans le sens que les champs f et g définis en (1.11) sont indépendants de la déformation ϕ (exemple : la gravité pour une force de volume).
Un inconvénient du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est son absence de symétrie alors que le tenseur de Cauchy est symétrique (cf. (1.3) et (1.9)). On peut "récupérer" cette symétrie en introduisant le champ de tenseurs $\sigma = (\sigma_{ij}) : \bar{\Omega} \to \mathcal{M}$, définis par la relation

$$(1.12)\quad \sigma(x) = \nabla\phi(x)^{-1}t(x) = \text{dét}(\nabla\phi(x))\nabla\phi(x)^{-1}T(\phi(x))[\nabla\phi(x)^{-1}]^T,\ x\in\Omega.$$

Le tenseur σ, appelé en élasticité le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, est évidemment symétrique, mais les équations correspondant à (1.8) et (1.10) ne sont plus aussi simples ; on déduit en effet immédiatement de (1.8)-(1.10) les équations suivantes, qui représentent l'autre forme des équations d'équilibre dans la configuration de référence $\bar{\Omega}$:

$$(1.13)\quad \text{div}(\nabla\phi\ \sigma) + f = 0 \iff -\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i) = f_i \text{ dans } \Omega,$$

$$(1.14)\quad \sigma = \sigma^T \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ dans } \Omega,$$

$$(1.15)\quad \nabla\phi\ \sigma\nu = g \iff (\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)\nu_j = g_i \text{ sur } \Gamma_1,$$

en utilisant les relations $\partial_j\phi_i = \delta_{ij} + \partial_j u_i$.

Les (12-6) = 6 équations manquantes (il y a en effet 12 inconnues : u_i, σ_{ij} et les équations (1.13)-(1.14) sont au nombre de 6) vont être fournies par des hypothèses concernant le matériau considéré (on remarquera à cet égard que les équations d'équilibre ci-dessus sont indépendantes de la nature du matériau). Nous allons désormais nous restreindre au cas des matériaux élastiques et homogènes, dont la définition est la suivante : Il existe une application, appelée loi de comportement,

$$\hat{\sigma} : \mathcal{M}^+ \to \mathcal{S},$$

où $\mathcal{M}^+ = \{F \in \mathcal{M};\ \text{dét}\ F > 0\}$ et $\mathcal{S} = \{F \in \mathcal{M};\ F = F^T\}$, telle qu'en tout point $x \in \Omega$, on ait

(1.16) $\sigma(x) = \hat{\sigma}(\nabla\phi(x)) \Longleftrightarrow \sigma_{ij}(x) = \hat{\sigma}_{ij}(\partial_1\phi_1(x), \partial_1\phi_2(x), \ldots, \partial_3\phi_3(x))$.

Prenant en compte le <u>principe de l'indifférence matérielle</u> (les propriétés "intrinsèques" traduites par la loi de comportement sont indépendantes du repère dans lequel on les exprime ; principe difficilement contestable...) et l'hypothèse d'<u>isotropie</u> (les propriétés du matériau "sont les mêmes dans toutes les directions"; il s'agit donc d'une caractétistique d'un matériau donné, mais visiblement "raisonnable" pour certains matériaux), on démontre (<u>théorème de Rivlin-Ericksen</u>) que la loi de comportement est d'une forme remarquablement simple : d'une part, la fonction $\hat{\sigma}$ n'est en fait fonction que de la matrice symétrique définie positive

(1.17) $C = (C_{ij}) = \nabla\phi^T\nabla\phi,$

où $C_{ij} = \partial_i\phi_k\partial_j\phi_k = \delta_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k$, c'est-à-dire qu'il existe une application

$$\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^* \to \mathbb{S} ,$$

où $\mathbb{S}^* = \{C \in \mathbb{S} \ ; \ sp(C) \subset]0,+\infty[\}$ telle que

(1.18) $\sigma = \hat{\sigma}(\nabla\phi) = \tilde{\sigma}(\nabla\phi^T\nabla\phi)$;

d'autre part, l'application $\tilde{\sigma}$ est de la forme

(1.19) $\tilde{\sigma}(C) = \gamma_o(C)I + \gamma_1(C)C + \gamma_2(C)C^2,$

les fonctions $\gamma_o, \gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{S}^* \to \mathbb{R}$ ne dépendant que des trois invariants principaux de la matrice C :

(1.20) $\gamma_\alpha(C) = \gamma_\alpha(I_1(C), I_2(C), I_3(C))$

avec

$$(1.21) \quad \begin{cases} I_1(C) = C_{ii} = \operatorname{tr} C = |\nabla\phi|^2, \\ I_2(C) = \frac{1}{2}(C_{ii}C_{jj} - C_{ij}C_{ji}) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj} C) = |\operatorname{adj} \nabla\phi|^2, \\ I_3(C) = \text{dét}\, C, \end{cases}$$

où la notation adj A désigne la transposée de la matrice des cofacteurs d'une matrice $A = (A_{ij})$, et $|A| = \sqrt{|A_{ij}A_{ij}|}$.

Si l'on suppose de plus que la configuration de référence $\overline{\Omega}$ est un <u>état naturel</u>, c'est-à-dire que

(1.22) $\phi = Id \Longrightarrow \sigma = 0$, i.e., $\hat{\sigma}(I) = \tilde{\sigma}(I) = 0$,

un développement limité "autour de l'identité" montre que

(1.23) $\tilde{\sigma}(I+2E) = \lambda(\mathrm{tr}\ E)I + 2\mu E + O(|E|)$,

en posant

(1.24) $C = I+2E$, avec $E = (E_{ij}), 2E_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k$,

où les constantes λ et μ, appelées les <u>constantes de Lamé</u> du matériau, vérifient les inégalités (que nous supposerons vérifiées dorénavant) :

(1.25) $\lambda > 0,\ \mu > 0$,

pour la plupart des matériaux élastiques "courants".
Un exemple "canonique" et couramment employé dans les applications, de matériau est celui du matériau de <u>St Venant-Kirchhoff</u>, pour lequel on néglige les termes en $O(|E|)$ dans (1.23). Autrement dit, ce matériau a pour loi de comportement :

(1.26) $\sigma = \lambda(\mathrm{tr}\ E)I + 2\mu E$,

ce que l'on peut encore écrire

(1.27) $\sigma_{ij} = a_{ijk\ell}E_{k\ell}$, avec $a_{ijk\ell} = \lambda\delta_{ij}\delta_{k\ell} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{j\ell}$.

Revenant au cas général d'un matériau élastique, homogène, et isotrope, le problème se trouve donc posé sous la forme d'un <u>problème aux limites</u> : Trouver des fonctions $u_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, et $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq 3$, vérifiant

(1.28) $-\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}\partial_k u_i) = f_i$ dans Ω,

(1.29) $\sigma_{ij} = \gamma_o(C)\delta_{ij} + \gamma_1(C)C_{ij} + \gamma_2(C)C_{ik}C_{kj}$ dans Ω,

(1.30) $(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)\nu_j = g_i$ sur Γ_1,

(1.31) $u_i = 0$ sur Γ_o,

les fonctions $\gamma_\alpha(C)$ étant de la forme (1.20) et la matrice C étant définie comme en (1.17).

Si l'on remplace les fonctions σ_{ij} par leurs expressions (1.29) en fonction des composantes u_i du déplacement, le problème ci-dessus devient un système de trois équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre vis-à-vis des fonctions u_1, u_2, u_3. Alors, si certaines conditions de compatibilité sont satisfaites (qui permettent de trouver une fonction vérifiant les équations (1.38) ci-dessous), il se peut que ce système soit, au moins formellement, équivalent à l'équation d'Euler

$$(1.32) \qquad J'(u) = 0,$$

associée à une certaine fonctionnelle J représentant l'énergie du système, définie sur un espace V (à préciser) de fonctions v nulles sur Γ_o. Si tel est le cas, on dit que le matériau est hyperélastique. Par exemple, le matériau de St-Venant-Kirchhoff est hyperélastique. On vérifie en effet qu'on peut lui associer la fonctionnelle

$$(1.33) \qquad J(v) = \int_\Omega [\frac{\lambda}{2} (\mathrm{tr}\ E)^2 + \mu\ \mathrm{tr}(E^2)]dx - [\int_\Omega f^T v\ dx + \int_{\Gamma_1} g^T v\ da] ,$$

qui est bien définie sur l'espace

$$(1.34) \qquad V = \{v \in W^{1,4}(\Omega)\ ;\ v=0 \text{ sur } \Gamma_o\}.$$

Un autre exemple important est celui des matériaux d'Ogden, que nous décrivons au Par. 3.

Une approche fréquemment adoptée consiste à faire directement l'hypothèse d'hyperélasticité, c'est-à-dire à postuler l'existence d'une densité d'énergie

$$\mathbb{W} : F \in \mathcal{M}_+ \to \mathbb{W}(F) \in \mathbf{R} ,$$

telle que les déplacements cherchés soient obtenus en résolvant l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle

$$(1.35) \qquad J(v) = \int_\Omega \mathbb{W}(I+\nabla v)dx - [\int_\Omega f^T v\ dx + \int_{\Gamma_1} g^T v\ da] .$$

Cette équation d'Euler étant (formellement) équivalente aux équations

(1.36) $$-\partial_j [\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial F_{ij}} (\nabla\phi)] = f_i \text{ dans } \Omega,\ \nabla\phi = I+\nabla u,$$

(1.37) $$(\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial F_{ij}} (\nabla\phi))\nu_j = g_i \text{ sur } \Gamma_1,$$

on voit (cf. (1.28)-(1.30)) que tout se passe comme si la loi de comportement se trouvait être

(1.38) $$t_{ij} = \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial F_{ij}} (\nabla\phi).$$

Notons au passage que le développement limité (1.23) a pour analogue, en terme de densité d'énergie :

(1.39) $$\mathbb{W}(F) = \frac{1}{2} (\text{tr } E)^2 + \mu \text{ tr}(E^2)+0(|E|^2), \text{ où } I+2E = F^TF.$$

L'hypothèse d'hyperélasticité permet d'espérer (car on ne dispose pas en général de résultats suffisants de régularité pour conclure) obtenir certaines solutions du problème aux limites (1.28)-(1.31) en résolvant un problème de minimisation : Trouver u tel que

$$u \in V \text{ et } J(u) = \inf_{v\in V} J(v).$$

C'est notamment l'approche de John Ball (voir Par. 3), alors que la première approche, que nous décrivons ci-dessus, consiste à trouver directement une solution du problème aux limites.

2. - RESULTATS D'EXISTENCE EN ELASTICITE TRIDIMENSIONNELLE ; I : APPLICATION DU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'un matériau de St-Venant-Kirchhoff (ce qui n'est pas une restriction, comme nous l'indiquons plus loin) et d'un problème de Dirichlet "pur", pour lequel $\Gamma = \Gamma_o$ (ce qui est par contre une restriction essentielle de cette approche ; voir plus loin). D'après le Par. 1 (cf. (1.13)-(1.15) et (1.27)) le problème aux limites associé s'écrit :

(2.1) $$-\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i) = f_i \text{ dans } \Omega,$$

(2.2) $$\sigma_{ij} = a_{ijk\ell}E_{k\ell}(u) \text{ dans } \Omega,$$

(2.3) $$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Reportant les relations (2.2) dans (2.1), le problème s'écrit sous la forme :

Trouver $u = (u_i)$ tel que

(2.4) $$\mathcal{B}(u) = f,$$

où

(2.5) $$\begin{cases} (\mathcal{B}(u))_i = -\partial_j(a_{ijk\ell}\partial_k u_\ell + a_{ijk\ell}\partial_k u_p \partial_\ell u_i + \frac{1}{2} a_{ijk\ell}\partial_k u_m \partial_\ell u_m + \\ \frac{1}{2} a_{\ell jkp}\partial_k u_m \partial_p u_m \partial_\ell u_i). \end{cases}$$

Comme en dimension 3, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est une <u>algèbre</u> pour $p > 3$, l'opérateur

$$\mathcal{B}: V \overset{\text{def}}{=} \{v \in W^{2,p}(\Omega) \ ; \ v = 0 \text{ sur } \Gamma\} \to L^p(\Omega)$$

est bien défini, et dérivable, pour $p > 3$. Cette observation suggère l'utilisation du <u>théorème des fonctions implicites</u> au voisinage de $u=0$, $f=0$. Pour cela, il faut vérifier que la dérivée de l'opérateur $\mathcal{B}$ à l'origine est un isomorphisme de V sur $L^p(\Omega)$. Comme

(2.6) $$\mathcal{B}'(0)\tilde{u} = f \iff \begin{cases} -\partial_j(a_{ijk\ell}\partial_k \tilde{u}_\ell) = f_i \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u}_i = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases}$$

on est ramené à démontrer l'implication

$$\mathcal{B}'(0)\tilde{u} = f \in L^p(\Omega) \implies \tilde{u} \in W^{2,p}(\Omega),$$

c'est-à-dire à démontrer un <u>résultat de "régularité</u> $W^{2,p}(\Omega)$" pour l'opérateur $\mathcal{B}'(0)$, qui n'est autre que l'<u>opérateur de l'élasticité linéaire</u>. On sait de toute façon, d'après la théorie variationnelle des problèmes elliptiques linéaires, que la solution u de l'équation $\mathcal{B}'(0)u = f$ existe "au moins" dans l'espace $H^1_0(\Omega)$. La "régularité $H^2(\Omega)$" est démontrée dans NEČAS [1967], et la "régularité $W^{2,p}(\Omega)$" est démontrée (à partir de la précédente) par GEYMONAT [1965]. On obtient ainsi le résultat suivant, démontré indépendamment par CIARLET & DESTUYNDER [1979], MARSDEN & HUGHES [1978], VALENT [1979], et dont l'idée remonte à STOPPELLI [1954], VAN BUREN [1968].

<u>THEOREME 1</u>. - <u>Pour tout</u> $p > 3$, <u>il existe un voisinage</u> $\mathcal{F}$ <u>de</u> 0 <u>dans</u> $L^p(\Omega)$ <u>et un voisinage</u> $\mathcal{U}$ <u>de</u> 0 <u>dans</u> V <u>tels que</u>, <u>pour tout</u> $f \in \mathcal{F}$, <u>il existe une et une seule solu-</u>

<u>tion</u> u <u>de</u> (2.1)-(2.3) <u>dans</u> $\mathcal{U}$.

Faisons quelques commentaires sur ce résultat :

(i) On déduit facilement l'<u>injectivité</u> de l'application ϕ = Id+u en réduisant éventuellement le voisinage $\mathfrak{F}$: Il s'agit là d'une propriété évidemment souhaitable de la solution.

(ii) On déduit aussi de ce résultat que

$$\|u-\tilde{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)} = O(|f|^2_{L^p(\Omega)}), \tag{2.7}$$

ce qui constitue une justification du remplacement du problème non linéaire par le système de l'élasticité <u>linéaire</u> pour des forces suffisamment "petites".

(iii) L'extension à des lois de comportement plus générales que (2.2) est possible, comme l'a montré VALENT [1979].

(iv) C'est la nécessité d'avoir la "régularité $W^{2,p}(\Omega)$", $p>3$, pour les solutions du système de l'élasticité linéaire correspondant qui limite <u>considérablement</u> la portée de cette approche, par exemple à des problèmes de Dirichlet "purs" (comme nous l'avons fait ici), où à des problèmes de Neumann "purs" ; dans ce deuxième cas, l'analyse est de surcroît compliquée par la prise en compte des conditions de compatibilité pour les forces appliquées ; voir à ce sujet CHILLINGWORTH, MARSDEN & WAN [1981].

(v) pour résoudre l'équation $\mathcal{B}(u) = f$ (équivalente au système (2.1)-(2.3)), considérons la famille de problèmes

$$\mathcal{B}(u(\lambda)) = \lambda f, \quad 0 \le \lambda \le 1, \tag{2.8}$$

qui ont tous une et une seule solution $u(\lambda)$ dans le voisinage $\mathcal{U}$ si les conditions d'application du Théorème 1 sont satisfaites. Utilisant à nouveau de façon essentielle le fait que l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est une algèbre pour $p>3$, on établit alors que la fonction $u : \lambda \in [0,1] \to u(\lambda) \in V$ ainsi définie est aussi solution de l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\lambda}(\lambda) = \mathcal{B}'(u(\lambda))^{-1} f, \quad 0 \le \lambda \le 1, \quad u(0) = 0. \tag{2.9}$$

Cette remarque suggère l'emploi de la méthode d'Euler (ou de toute autre méthode d'approximation d'équation différentielle) pour approcher la solution de (2.9) : Etant donné un nombre N, on définit la suite $u_0, u_1, \ldots, u_N$ par

(2.10) $$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{N}\,(\mathcal{B}'(u_n))^{-1}f,\ 0 \le n \le N,\ u_o = 0.$$

Alors on démontre (cf. BERNADOU, CIARLET & HU [1982]) :

THEOREME 2. - La méthode (2.10), qui n'est autre qu'une méthode incrémentale de résolution du problème (2.1)-(2.3), est bien définie d'une part et convergente d'autre part, en ce sens que

(2.11) $$\lim_{N \to \infty} u^N = u \text{ dans } V.$$

Pour la description des méthodes incrémentales en élasticité non linéaire, voir par exemple ODEN [1972], WASHIZU [1975].

3. - RESULTATS D'EXISTENCE EN ELASTICITE TRIDIMENSIONNELLE ; II : RESULTATS DE J. BALL.

Dans un article célèbre (BALL [1977]), J. Ball présente une théorie d'existence en élasticité non linéaire de portée très générale. Puisqu'il n'est évidemment pas question d'en écrire toute la richesse et toute la variété en quelques pages, nous allons nous contenter d'en faire ressortir les idées essentielles sur un exemple : Considérons à cet effet un matériau d'Ogden (cf. OGDEN [1972]) pour lequel la densité d'énergie est de la forme suivante (se reporter au Par. 1 pour les notations), les entiers M et N étant ≥1 :

$$\mathbb{W}(F) = \sum_{i=1}^{M} a_i \operatorname{tr}(C^{\frac{\alpha_i}{2}}) + \sum_{j=1}^{N} b_j \operatorname{tr}([\operatorname{adj} C]^{\frac{\beta_j}{2}}) + \Gamma(\text{dét } F).$$

Alors on a le résultat d'existence suivant (BALL [1977]).

THEOREME 3. - On fait les hypothèses suivantes :

(3.2) $$0 < a_i,\quad 1 \le i \le M\ ;\quad 1 \le \alpha_M < \ldots < \alpha_1\ ;\ 2 \le \alpha_1\ ;$$

(3.3) $$0 < b_j,\quad 1 \le i \le N,\quad 1 \le \beta_N < \ldots < \beta_1\ ;\ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \le 1\ ;$$

(3.4) la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est convexe ;

(3.5) $$\lim_{\delta \to 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty\ ;$$

(3.6) il existe $x > 0$ et $r > 1$ tels que $\Gamma(\delta) \ge c\delta^r$ pour tout $\delta > 0$.

Alors le problème : Trouver u tel que

(3.7) $(\mathrm{Id}+u) \in U = \{\psi \in W^{1,\alpha_1}(\Omega)$; $\mathrm{adj}\, \nabla\psi \in L^{\beta_1}(\Omega)$, $\mathrm{d\acute{e}t}\, \nabla\psi \in L^r(\Omega)$;

$\mathrm{d\acute{e}t}\, \nabla\psi > 0$ p.p. dans Ω ; $\psi = \mathrm{Id}$ sur $\Gamma_0\}$,

(3.8) $$J(u) = \inf_{(\mathrm{Id}+u)\in U} J(v), \text{ où } J(v) = \int_\Omega \mathfrak{W}(I+\nabla v)\,dx - [\int_\Omega f^T v\,dx + \int_{\Gamma_1} g^T v\,da],$$

<u>admet au moins une solution</u>.

Faisons divers commentaires sur ce résultat :

(i) Les conditions (3.2)-(3.4) entraînent en particulier la <u>polyconvexité</u> de la fonction $\mathfrak{W}$, c'est-à-dire la <u>convexité</u> de la fonction

$$\mathcal{G} : (F, \mathrm{adj}\, F, \mathrm{d\acute{e}t}\, F) \in \mathcal{M}_+ \times \mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathcal{G}(F, \mathrm{adj}\, F, \mathrm{d\acute{e}t}\, F) = \mathfrak{W}(F),$$

alors que la fonction $\mathfrak{W}(F)$ <u>n'est pas</u> convexe : c'est là une observation essentielle de J. Ball. Cette convexité est une des propriétés utilisées pour établir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle J sur l'espace $\mathcal{M}_+ \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie de $W^{1,\alpha_1}(\Omega) \times L^{\beta_1}(\Omega) \times L^r(\Omega)$.

(ii) Les conditions $2 \le \alpha_1$, $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \le 1$, et (3.6) ne sont autres que des hypothèses de <u>coercivité</u>, permettant les raisonnements habituels avec des <u>suites minimisantes</u> dans l'espace produit ci-dessus.

(iii) La condition (3.5), qui permet de définir l'énergie sur l'espace produit tout entier (en posant $J(v) = +\infty$ si $(\mathrm{Id}+v) \notin U$) tout en préservant la <u>continuité de l'intégrande</u> (autre condition utilisée pour établir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle J), a par ailleurs une interprétation mécanique remarquable : "on ne peut pas réduire à zéro les volumes sans dépenser une énergie infinie".

(iv) Une autre contribution essentielle de J. Ball est d'avoir établi que des ensembles tels que l'ensemble U de (3.7) sont <u>faiblement fermés</u>, bien que <u>non convexes</u>. C'est l'idée de la <u>compacité par compensation</u>, développée par ailleurs par MURAT [1978, 1979], TARTAR [1979].

(v) Une difficulté de l'approche de J. Ball est qu'on ne sait pas démontrer que les solutions des problèmes de minimisation ainsi obtenues vérifient, dans un sens même "faible", les équations d'équilibre. Voir à ce sujet les résultats de LE TALLEC [1981], LE TALLEC & ODEN [1981] dans le cas des matériaux incompressibles.

Bien entendu, on ne rencontre pas cette difficulté lorsqu'on utilise le théorème des fonctions implicites, puisqu'on résout alors directement le problème aux limites, mais les conditions d'applications sont bien plus restrictives ; cf. Par. 2.

(vi) Le résultat de J. Ball <u>ne s'applique pas</u> au matériau de St-Venant-Kirchhoff, pour lequel la densité d'énergie est de la forme

$$(3.9)\qquad \mathbb{W}(F) = -\frac{(3\lambda+2\mu)}{4}\,\mathrm{tr}\,C + \frac{\lambda+2\mu}{2}\,\mathrm{tr}\,C^2 + \frac{\lambda}{4}\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{adj}\,C).$$

<u>La présence du coefficient</u> <0 <u>devant</u> tr C <u>empêche en effet que la fonction</u> $\mathbb{W}$ <u>soit polyconvexe</u> (autrement, l'absence du terme Γ(dét F) ne constituerait pas une difficulté essentielle) : le problème de l'existence d'une solution est <u>ouvert</u>. Voir aussi à ce sujet l'approche de ATTEIA & DEDIEU [1981].

(vii) Contrairement au cas où l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites, on ne sait pas dire si, pour des forces appliquées suffisamment petites, la solution trouvée est proche de la solution du système de l'élasticité linéaire correspondant.

(viii) Etant donné un matériau élastique, de constantes de Lamé $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ données, on peut se poser la question de construire un modèle pour lequel la théorie de J. Ball s'applique d'une part, et correspondant au développement limité (1.39) d'autre part. CIARLET & GEYMONAT [1982] ont montré qu'un matériau d'Ogden d'un type particulièrement simple répond à la question. De façon plus précise, on a le résultat suivant :

<u>THEOREME 4</u>. - <u>Soit</u> $\lambda > 0$ <u>et</u> $\mu > 0$ <u>deux constantes données</u>. <u>On peut trouver une densité d'énergie de la forme</u>

$$(3.10)\qquad W(F) = a\,\mathrm{tr}\,C + b\,\mathrm{tr}\,C^2 + c\,\mathrm{tr}\,\mathrm{adj}\,C + \Gamma(\text{dét}\,F)$$

<u>pour laquelle</u>

$$(3.11)\qquad a \geq 0,\ b > 0,\ c > 0,$$

$$(3.12)\qquad W(F) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\,E)^2 + \mu\,\mathrm{tr}(E^2) + O(|E|^2),$$

<u>la fonction</u> $\Gamma :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ <u>vérifiant les conditions</u> (3.4)-(3.6), <u>avec</u> (<u>par exemple</u>) r=2.

Un calcul montre en effet que l'on doit satisfaire les inégalités

$$-(\frac{3\lambda+2\mu}{4}) - \frac{1}{4}\Gamma'(1) + \frac{3}{4}\Gamma''(1) \geq 0,$$

$$(\frac{\lambda+2\mu}{8}) + \frac{1}{8}(\Gamma'(1) - \Gamma''(1)) > 0,$$

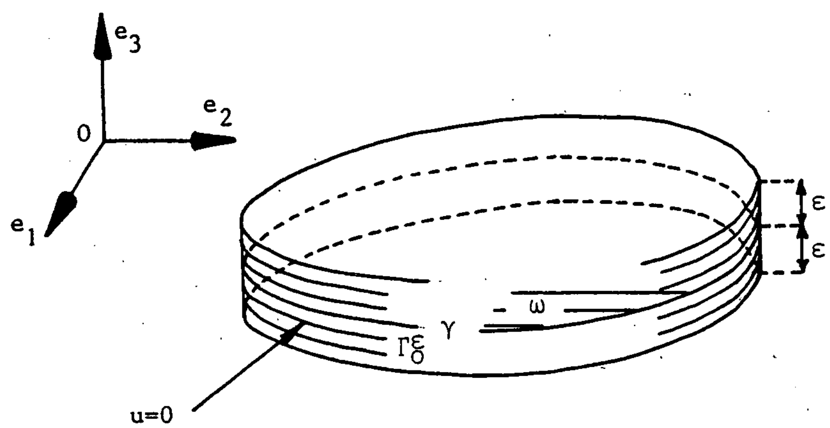
$$\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{4}(\Gamma'(1) + \Gamma''(1)) > 0,$$

qui ont toujours une infinité de solutions ($\Gamma'(1),\Gamma''(1)$). Pour un tel matériau, le Théorème 3 s'applique, et l'on obtient une solution dans l'ensemble ($\psi \in W^{1,4}(\Omega)$ $\Longrightarrow$ adj $\nabla\psi \in L^2(\Omega)$) :

(3.13) $\quad \mathcal{V} = \{\psi \in W^{1,4}(\Omega)$; dét $\nabla\psi \in L^2(\Omega)$; dét $\nabla\psi > 0$ p.p. dans Ω, $\psi = \mathrm{Id}$ sur $\Gamma_o\}$.

4. - <u>CAS DES PLAQUES "MINCES"</u>.

Une plaque "mince" est un solide pour lequel la configuration de référence est de la forme $\overline{\Omega}^\varepsilon = \bar{\omega} \times [-\varepsilon,\varepsilon]$, où ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ, et ε est "petit" (Fig. 2).



<u>Fig. 2</u>

Autant pour simplifier que pour fixer les idées, nous allons supposer que les données sont les suivantes (les notations sont celles du Par. 1) :

(4.1) $\quad f = (0,0,f_3)$ dans Ω^ε, $g = 0$ sur $\Gamma_\pm^\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \omega \times \{\pm\varepsilon\}$,

(4.2) $\quad u = 0$ sur $\Gamma_o^\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \gamma \times [-\varepsilon,\varepsilon]$.

La condition aux limites (4.2) est appelée condition d'<u>encastrement</u>.

Alors il est classique (cf. e.g. GREEN & ZERNA [1968], LANDAU & LIFCHITZ [1967], NOVOZHILOV [1953], STOKER [1968], TIMOSHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER [1959], WASHIZU [1975]) qu'un modèle approché, compte tenu de l'épaisseur "petite", est le suivant : On commence par résoudre un problème <u>bidimensionnel</u> (c'est-à-dire posé sur la surface moyenne ω de la plaque) : Trouver $\zeta = (\zeta_i) : \omega \to \mathbb{R}^3$ tels que

(4.3) $$\frac{2E\varepsilon^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2\zeta_3 = n_{\alpha\beta}(\zeta)\partial_{\alpha\beta}\zeta_3 + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 dx_3 \text{ dans } \omega,$$

(4.4) $\quad \partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta) = 0$ dans ω, où

(4.5) $$n_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{E}{(1-\nu^2)}\{(1-\nu)e_{\alpha\beta}(\zeta) + \nu e_{\mu\mu}(\zeta)\delta_{\alpha\beta}\} + \frac{E}{2(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\partial_\alpha\zeta_3\partial_\beta\zeta_3 + \nu\partial_\mu\zeta_3\partial_\mu\zeta_3\delta_{\alpha\beta}\} ,$$

(4.6) $$e_{\alpha\beta}(\zeta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\zeta_\beta + \partial_\beta\zeta_\alpha),$$

(4.7) $$\zeta_3 = \partial_\nu\zeta_3 = 0 \text{ sur } \gamma, \ \zeta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma,$$

les indices <u>grecs</u> : $\alpha,\beta,\ldots$ variant dans l'ensemble $\{1,2\}$. Les constantes $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ et $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ sont respectivement le <u>module de Young</u> et le <u>coefficient de Poisson</u> du matériau constituant la plaque. Ensuite, on "relève" cette solution bidimensionnelle dans Ω^ε, à l'aide des formules suivantes (qui montrent que les fonctions ζ_i et $n_{\alpha\beta}$ introduites ci-dessus ne sont autres que les fonctions $u_i(\cdot,\cdot,0)$ et $2\varepsilon\sigma_{\alpha\beta}(\cdot,\cdot,0)$ respectivement) :

(4.8) $$u_\alpha = \zeta_\alpha - \partial_\alpha\zeta_3,$$

(4.9) $$u_3 = \zeta_3,$$

(4.10) $$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{n_{\alpha\beta}}{2\varepsilon} - \frac{Ex_3}{(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\partial_{\alpha\beta}\zeta_3 + \nu\Delta\zeta_3\delta_{\alpha\beta}\},$$

(4.11) $$\sigma_{3\beta} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\{(\varepsilon^2-x_3^2)\partial_\beta\Delta\zeta_3 ,$$

(4.12) $$\sigma_{33} = \frac{3}{4}\left(\frac{x_3}{\varepsilon} - \frac{x_3^3}{3\varepsilon^3}\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 dx_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{x_3}{\varepsilon} - \frac{x_3^3}{\varepsilon^3}\right)n_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\zeta_3 .$$

On peut donc se poser la question de savoir si l'on peut <u>justifier</u> le modèle ci-dessus, qui est essentiellement <u>bidimensionnel</u>, à partir du modèle <u>tridimensionnel</u> décrit au Par. 1. En d'autres termes, il s'agit de justifier le modèle (4.3)-(4.12) à partir du modèle suivant :

(4.13) $$-\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\,\partial_k u_i) = f_i\delta_{i3} \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

(4.14) $$\sigma_{ij} = a_{ijk\ell}E_{k\ell}(u) \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

(4.15) $$(\sigma_{i3}+\sigma_{k3}u_i) = 0 \text{ sur } \Gamma_\pm^\varepsilon,$$

(4.16) $$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon,$$

qui n'est autre qu'un cas particulier, correspondant à une loi de comportement

(4.14) linéaire, du modèle général (1.28)-(1.31) (les raisons de ce choix sont données plus loin).

Une telle justification est effectivement possible, comme l'ont montré CIARLET & DESTUYNDER [1979] dans le cas ci-dessus d'une plaque encastrée, CIARLET [1980] dans le cas des équations de von Kármán (voir aussi BLANCHARD & CIARLET [1981], CIARLET & PAUMIER [1982] pour les équations de Marguerre-von Kármán) : l'idée consiste à appliquer la méthode des développements asymptotiques au problème tridimensionnel, après avoir écrit ce dernier sous forme variationnelle et après l'avoir posé sur un ouvert $\Omega = \omega \times]-1,1[$ indépendant de ε. Ce passage de Ω^ε à Ω repose sur des transformations des fonctions inconnues $u_i, \sigma_i : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}$, (la forme de ces transformations, cruciale pour le succès de la méthode, varie selon que les indices i,j sont égaux soit à 1 ou 2, soit à 3), qui deviennent ainsi des fonctions $u_i^\varepsilon, \sigma_{ij}^\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. On pose alors formellement :

$$(4.17) \qquad u_i^\varepsilon = u_i^o + \varepsilon u_i^1 + \ldots, \quad \sigma_{ij}^\varepsilon = \sigma_{ij}^o + \varepsilon \sigma_{ij}^1 + \ldots$$

Suivant alors la technique de LIONS [1973], on reporte ces expressions dans le problème tridimensionnel et, en rassemblant les termes correspondant à la plus petite puissance de ε, on trouve les équations satisfaites par les fonctions $u_i^o, \sigma_{ij}^o :$ $\Omega \to \mathbb{R}$; on peut alors démontrer le résultat suivant :

THEOREME 5- Les fonctions définies sur Ω^ε correspondant aux fonctions $u_i^o, \sigma_{ij}^o :$ $\Omega \to \mathbb{R}$ coïncident avec les fonctions (4.8)-(4.12), les fonctions ζ_i étant obtenues par la résolution du problème bidimensionnel (4.3)-(4.7).

Faisons un certain nombre de remarques sur la portée de ce résultat.

(i) Le choix d'une loi de comportement tridimensionnelle linéaire (4.14) est avant tout guidé par la linéarité de la "loi de comportement bidimensionnelle" implicitement contenue dans les équations (4.3)-(4.6). En effet, ces dernières peuvent s'écrire, comme on le fait parfois, sous la forme "d'équations d'équilibre" (comparer avec (4.13)) :

$$(4.18) \qquad -\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} - \partial_\beta(n_{\alpha\beta}\partial_\alpha\zeta_3) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 dx_3 \text{ dans } \omega,$$

$$(4.19) \qquad \partial_\alpha n_{\alpha\beta} = 0,$$

accompagnées de la "loi de comportement" (comparer avec (4.14)) :

$$(4.20) \qquad n_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta}[e_{\alpha\beta}(\zeta) + \frac{1}{2}\partial_\alpha\zeta_3\partial_\beta\zeta_3],$$

(4.21) $$m_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \partial_{\gamma\delta}\, \zeta_3,$$

qui est visiblement linéaire (par rapport au tenseur de déformation "incomplet" $(e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\alpha\zeta_3\partial_\beta\zeta_3)$ et au tenseur "de courbure" $(\partial_{\alpha\beta}\zeta_3)$), les fonctions $n_{\alpha\beta}$ et $m_{\alpha\beta}$ représentant les contraintes de tension dans le plan de la plaque et les contraintes de flexion (les "moments fléchissants"), respectivement :

$$n_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta}dx_3 = 2\varepsilon\sigma_{\alpha\beta}(\cdot,\cdot,0),\ m_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3\sigma_{\alpha\beta}dx_3.$$

(ii) Une justification complémentaire de ce choix a été donnée par CIARLET [1982] : la prise en compte d'une loi de comportement plus générale que (4.14) (par exemple polynômiale, ou correspondant au matériau d'Ogden décrit par la densité d'énergie (3.10)) conduit en effet (par l'application de la méthode des développements asymptotiques) à un modèle de plaque différent !

(iii) On pourrait songer à mettre en question le bien-fondé de l'application de la méthode des développements asymptotiques elle-même. Mais son application a conduit à une justification complète des modèles bidimensionnels de plaques dans le cas de l'élasticité linéaire, c'est-à-dire lorsque (toujours dans le cas d'une plaque encastrée ; mais la considération d'autres conditions aux limites est possible) le système (4.13)-(4.16) est "remplacé par sa partie linéaire" :

(4.22) $$-\partial_j\sigma_{ij} = f_i\delta_{i3} \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

(4.23) $$\sigma_{ij} = a_{ijk\ell}e_{k\ell}(u) \text{ dans } \Omega^\varepsilon,$$

(4.24) $$\sigma_{i3} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon,$$

(4.25) $$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_o^\varepsilon.$$

Alors on peut justifier complètement le développement asymptotique (4.17) et démontrer la convergence (dans des espaces ad'hoc) du procédé ; voir à ce sujet DESTYUNDER [1980,1981], CIARLET & KESAVAN [1981] dans le cas d'un problème de valeurs propres, et CAILLERIE [1980] pour une approche voisine.

(iv) Une loi de comportement linéaire présente néanmoins de sérieux inconvénients du point de vue théorique, puisqu'on ne dispose pour l'instant d'aucun théorème d'existence pour le problème tridimensionnel correspondant : d'une part comme on l'a vu au Par. 2, il n'est pas possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites car l'opérateur de l'élasticité linéaire correspondant à l'ouvert Ω^ε (cf.

(4.22)-(4.23)) et aux conditions aux limites "mêlées" (4.24)-(4.25) n'a sûrement pas la régularité voulue. D'autre part, comme on l'a vu au Par. 3, la densité d'énergie correspondante (3.9) n'est pas polyconvexe, et la théorie de J. Ball ne s'applique pas.

(v) Par contre, il existe une théorie d'existence très satisfaisante pour des problème bi-dimensionnels non linéaires tels que celui de (4.3)-(4.7) (voir par exemple CIARLET & RABIER [1980]). La raison essentielle de cette différence par rapport au modèle tridimensionnel correspondant (4.13)-(4.16) est que la non linéarité est passée des termes d'ordre supérieur (cas tridimensionnel) à des termes d'ordre inférieur (cas bidimensionnel), circonstance qui permet dans ce dernier cas l'utilisation d'arguments de compacité.

(vi) On pourrait songer à essayer de construire une solution tri-dimensionnelle, pour ε suffisamment petit, dans un voisinage du relèvement tridimensionnel (4.8)-(4.12) d'une solution du problème bi-dimensionnel, suivant en cela la méthode utilisée avec succès par CAFLISCH [1979] et CAFLISCH & PAPANICOLAOU [1979] pour résoudre un problème formellement analogue ; mais les difficultés techniques de cette approche semblent pour l'instant sérieuses...

(vii) Une autre possibilité est la remise en question de la définition d'un matériau élastique : Alors que tout le monde s'accorde sur la validité des équations d'équilibre, le caractère ponctuel de la loi de comportement et sa dépendance sur les seules dérivées partielles du premier ordre de la déformation (cf. (1.16)) sont peut-être à revoir ; cf. à ce sujet BELL [1973].

REFERENCES

ATTÉIA, M. ; DEDIEU, J.P. [1981] : Minimisation of energy in nonlinear elasticity, in Nonlinear Problems of Analysis in Geometry and Mechanics [M. ATTÉIA, D. BANCEL, I. GUMOWSKI, Editors], pp. 73-79, Pitman, Boston.

BALL, J.M. [1977] : Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 63, 337-403.

BELL, J.F. [1973] : The experimental foundations of solid mechanics, Handbuch der Physik, Vol. VI a/1, [C. TRUESDELL, Editor], Springer-Verlag, Berlin.

BERNADOU, M. ; CIARLET, P.G. ; HU, J. [1982] : à paraître.

BLANCHARD, D. ; CIARLET, P.G. [1982] : A remark on the von Kármán equations, à paraître.

CAFLISCH, R.E. [1979] : Navier-Stokes and Boltzmann shock profiles for a model of gas dynamics, Comm. Pure Applied Math. XXXII, 521-554.

CAFLISCH, R.E.; PAPANICOLAOU, G.C. [1979] : The fluid-dynamical limit of a nonlinear model Boltzmann equation, Comm. Pure Applied Math. XXXII, 589-616.

CAILLERIE, D. [1980] : The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body, Math. Meths. Appl. Sci., 2, 251-270.

CHILLINGWORTH, D.R.J. ; MARSDEN, J.E. ; WAN, Y.H. [1981] : Symmetry and bifurcation in three dimensional elasticity, Part I, à paraître.

CIARLET, P.G. [1980] : A justification of the von Kármán equations, Arch. Rational Mech. Anal. 73, 349-389.

CIARLET, P.G. [1982] : Two-dimensional approximations of three-dimensional models in nonlinear plate theory, à paraître.

CIARLET, P.G. ; DESTUYNDER, P. [1979] : A justification of a nonlinear model in plate theory, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 17/18, 227-258.

CIARLET, P.G. ; GEYMONAT, G. [1982] : A paraître.

CIARLET, P.G. ; KESAVAN, S. [1981] : Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 26, 145-172.

CIARLET, P.G. ; PAUMIER, J.C. [1982] : A justification of the Marguerre-von Kármán equations, à paraître.

CIARLET, P.G. ; RABIER, P. [1980] : Les Equations de von Kármán, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 826, Springer-Verlag, Berlin.

DESTUYNDER, P. [1980] : Sur une Justification Mathématique des Théorie de Plaques et de Coques en Elasticité Linéaire, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

DESTUYNDER, P. [1981] : Comparaison entre les modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité, RAIRO-Analyse Numérique, 15, 331-369.

GEYMONAT, G. [1965] : Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellitici, Ann. Mat. Pura Appl. 69, 207-284.

GREEN, A.E. ; ZERNA, W. [1968] : Theoretical Elasticity, University Press, Oxford.

GURTIN, M.E. [1981] : Topics in Finite Elasticity, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.

LANDAU, L. ; LIFCHITZ, E. [1967] : Théorie de l'Elasticité, Mir, Moscou.

LE TALLEC, P. [1981] : Existence and approximation results for nonlinear mixed problems : Application to incompressible finite elasticity, à paraître.

LE TALLEC P. ; ODEN, J.T. [1981] : Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies, J. Elasticity 11.

LIONS, J.L. [1973] : Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer-Verlag, Berlin.

MARSDEN, J.E. ; HUGHES, T.J.R. [1978] : Topics in the mathematical foundations of elasticity, in Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. 2, pp. 30-285, Pitman, Londres.

MARSDEN, J.E. ; HUGHES, T.J.R. [1982] : Mathematical Foundations of Elasticity, à paraître.

MURAT, F. [1978] : Compacité par compensation, Annali Scu. Norm. Sup. Pisa Ser. N, 5, 489-507.

MURAT, F. [1979] : Compacité par compensation II, Proceedings International Conference on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome, 1978, Pitagora, Bologna.

NEČAS, J. [1967] : Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris.

NOVOZHILOV, V.V. [1953] : Foundation of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock, 1953.

ODEN, J.T. [1972] : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New-York.

OGDEN, R.W. [1972] : Large deformation isotropic elasticity : on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids, Proc. Roy. Soc. London A328, 567-583.

STOKER, J.J. [1968] : Nonlinear Elasticity, Gordon and Breach, New York.

STOPPELLI, F. [1954] : Un teorema di esistenza e di unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite, Ricerche di Matematica 3, 247-267.

TARTAR, L. [1979] : Compensated compactness and partial differential equations, in Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium, Vol. IV [R.J. KNOPS, Editor], Pitman.

TIMOSHENKO, S. ; WOINOWSKY-KRIEGER, W. [1959] : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill.

TRUESDELL, C. ; NOLL, W. [1965] : The Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Vol. III/3, Springer, Berlin.

VALENT, T. [1979] : Teoremi di esistenza e unicità in elastostatica finita, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 60, 165-181.

VAN BUREN, M. [1968] : On the existence and Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems in Finite Elasticity, Thèse, Carnegie-Mellon University.

WANG, C.-C. ; TRUESDELL, C. [1973] : Introduction to Rational Elasticity, Noordhoff, Groningen.

WASHIZU, K. [1975] : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Second Edition, Pergamon, Oxford.