Un problème de thermoélasticité dans un milieu avec attaches élastiques

J.M. Viano Rey

IRIA

[CE]NTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 90

UN PROBLÈME DE THERMOÉLASTICITÉ DANS UN MILIEU AVEC ATTACHES ÉLASTIQUES

Juan Manuel VIÃNO REY

Septembre 1981

UN PROBLEME DE THERMOELASTICITE
DANS UN MILIEU AVEC ATTACHES ELASTIQUES

Juan Manuel VIÃNO REY

RESUME :

Dans cet article on présente un problème modèle de thermoelasticité linéaire dans un milieu avec attaches elastiques et force d'inertie négligeable.

L'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales sont montrées en utilisant la méthode de Galerkin.

ABSTRACT :

In this study we consider a model problem in linear thermoelasticity for a medium in contact with an elastic body and taking no care of inertial force.

We present a variational formulation of the initial value problem and the existence and unicity of the solution is showed by using Galerkin's method.

(*) Departamento Ecuaciones Funcionales. Universidad de Santiago de Compostela. ESPAGNE.

– Ce travail a été réalisé alors que l'auteur était stagiaire à l'INRIA 78153 - Rocquencourt, FRANCE.

INTRODUCTION :

Dans ce travail nous envisageons un corps élastique conducteur de chaleur qui occupe une région Ω de l'espace $\mathbb{R}^3$ avec attaches sur un autre corps de comportement élastique dans une partie de sa frontière. Ce corps est soumis à des efforts externes et à un champ de température, les forces d'inertie étant négligeables.

Dans la Section 1, ci-dessous on reprend le cadre physique de DUVAUT-LIONS [2] pour la mise en équations du problème aux limites envisagé. Ce problème se formalise par le système d'équations couplées en déplacements u et en température ξ :

$$(1)\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(u,\xi) = f_i \ , \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \rho_o\, c_\varepsilon \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\dfrac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) + \nu_o\, m_{ij}\, \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = Q \\ \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \qquad (T > 0) \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$(2) \qquad \xi(0) = \xi_o \ , \quad u(0) = u_o \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et la loi de comportement thermoélastique

$$(3) \qquad \sigma_{ij}(u,\xi) = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}(\xi - \nu_o)$$

Les conditions aux limites choisies correspondent à la température et à des déplacements fixés sur des parties disjointes de la frontière, à la condition d'équilibre et à la loi de Fourier. De plus sur la partie de la frontière en contact avec le corps élastique, la condition d'attache (cf. DUVAUT-LIONS [1]) s'écrit :

$$(4) \qquad \sigma_N = -\eta\, u_N \ , \qquad \sigma_T = 0.$$

La Section 2 est consacrée à la formulation variationnelle qui conduit à un problème de la forme :

$$(5)\begin{cases} a(u(t),v) - m(\theta(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle \quad \forall v\in V_1 \quad \text{sur} \quad]0,T[\\ (\theta'(t),\phi) + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,u'(t)) = \langle L_2(t),\phi\rangle \;\forall\phi \in V_2 \quad \text{sur} \quad]0,T[\\ \theta(0) = \theta_o \quad , \quad u(0) = u_o \qquad (\theta = \xi - \nu_o) \end{cases}$$

dans des espaces convenables $V_1 \subset [H^1(\Omega)]^3$, $V_2 \subset H^1(\Omega)$.

Ensuite on démontre dans la section 3 un théorème d'existence et d'unicité de solutions fortes de (5) par la méthode de Galerkin.

1. PROBLEME PHYSIQUE

1.1. Position du problème :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné "suffisament régulier" de frontière Γ
On note $n = \{n_i\}$ la normale unitaire à Γ extérieur à Ω.

Dans Ω on considère un matériau soumis à une force volumique $f = \{f_i\}$ et une source de chaleur interne Q.

Nous reprenons les équations de la thermoélasticité linéaire liant les déplacements $u = \{u_i\}$ et la température absolue ξ dans Ω :

$$(1.1) \quad \rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u,\xi) + f_i \qquad 1 \le i \le 3$$

$$(1.2) \quad \rho_o\, c\, \frac{\partial \xi}{\partial t} + m_{ij}\, \nu_o \frac{\partial \varepsilon_{ij}(u)}{\partial t} = Q + \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_j})$$

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \qquad 1 \le i,j \le 3$$

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}(u,\xi) = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}(\xi - \nu_o)$$

Les considérations physiques qui fournissent les équations précédentes sont abordées dans DUVAUT-LIONS [2] et CARLSON [1] . Elles restent valides pour un matériau de comportement isentropique ou isotherme élastique avec des :

- petites déformations
- petites variations de la température autour d'une température moyenne uniforme $\nu_o > 0$
- contraintes initiales nulles

et en supposant que les divers coefficients sont indépendants de la température et des déformations.

Les équations (1.1)-(1.4) sont relatives à un matériau non homogène et non isotrope, c'est-à-dire que les tenseurs a_{ijkh}, m_{ij}, k_{ij} peuvent dépendre du point x (et aussi de ν_o). Par contre les scalaires ρ_o (densité du matériau) et c (chaleur spécifique à déformation constante) sont supposés constants et peuvent être pris égaux à 1 par changement d'échelle sur le temps et la température.

Rappelons que les tenseurs de conductivité thermique k_{ij} et le tenseur d'élasticité a_{ijkh} vérifient les conditions de coercivité :

(1.5) $k_{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j \ \geq \alpha_1\ \xi_i\ \xi_i \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3 \quad (\alpha_1 > 0)$

(1.6) $a_{ijkh}(x)\ \xi_{ij}\ \xi_{kh} \geq \alpha_2\ \xi_{ij}\ \xi_{ij} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall\ \xi_{ij} \in \mathbb{R} \quad (\alpha_2 > 0)$

et de symétrie :

(1.7) $k_{ij} = k_{ji}\ ,\ 1 \leq i \leq 3$

(1.8) $a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij} \quad , \quad 1 \leq i,j \leq 3$

Nous avons aussi

(1.9) $m_{ij} = m_{ji}$

mais il n'y a rien à supposer sur $m_{ij}\ \xi_i\ \xi_j$.
Si le matériau considéré est isotrope alors les tenseurs sont invariants par rotation, i.e. :

(1.10) $m_{ij} = m\ \delta_{ij} \quad k_{ij} = k\ \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,j \leq 3$

(1.11) $a_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\ \ \delta_{kh} + \mu\ (\delta_{ij}\ \delta_{jh} + \delta_{ih}\ \delta_{jk})$

en général on observe que le coefficient m est positif mais cela n'a pas des conséquences dans la suite.

Dans ce point nous supposons que les déformations ont lieu à vitesse uniforme et par conséquence les composantes de la force d'inertie $\tilde{f}_i = \rho_o\ \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, $1 \leq i \leq 3$, peuvent être négligées de façon à ce que le système d'équation à étudier devienne :

$$(1.12)\quad -\frac{\partial}{\partial x_j}[a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u)] + \frac{\partial}{\partial x_j}[m_{ij}(\xi-\nu_o)] = f_i \qquad 1 \le i \le 3$$

$$(1.13)\quad \rho_o\, c\,\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ij}\,\frac{\partial \xi}{\partial x_j}) + \nu_o\; m_{ij}\;\varepsilon_{ij}(\frac{\partial u}{\partial t}) = Q\ .$$

□

1.2. Problème aux limites envisagé

Notre objectif est l'étude du système (1.12)-(1.13) avec des conditions initiales sur u et ξ ; nous posons

$$(1.14)\quad u(x,o) = u_o(x),\qquad \xi(x,o) = \xi_o(x) \text{ dans } \Omega$$

On considère dans Γ les parties Γ_i, $0 \le i \le 4$, vérifiant :

$$(1.15)\quad \Gamma = \Gamma_o \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$(1.16)\quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset,\quad 0 \le i,j \le 2,\qquad \Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$$

et on suppose que Γ_1 est la partie de Ω en contact avec un autre milieu de réponse élastique. Les conditions imposées ci-dessous prennent en compte cette situation, la condition d'équilibre et la loi de Fourier de transfert de chaleur :

$$(1.17)\quad u_i = \hat{u}_i \text{ sur } \Gamma_o \times (0,T)\ ,\quad 1 \le i \le 3.$$

$$(1.18)\quad \xi = \hat{\xi} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0,T).$$

avec $\hat{u} = \{\hat{u}_i\}$ et $\hat{\xi}$ donnés.

Si $F = \{F_i\}$ est le vecteur des efforts surfaciques sur Γ_2 et G le flux de chaleur à travers Γ_4 alors :

$$(1.19)\quad \sigma_{ij}\, n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_2 \times (0,T),\quad 1 \le i \le 3$$

$$(1.20)\quad q_i n_i = G \quad \text{sur } \Gamma_4 \times (0,T).$$

où σ_{ij} est donné par (1.4) et $q_i = -\,k_{ij}\,\frac{\partial \xi}{\partial x_j}$ $(1 \le i \le 3)$.

Pour les conditions sur Γ_1 on utilise la notation classique suivante (cf. DUVAUT-LIONS [1]) :

$$(1.21)\begin{cases} Z = \{Z_i\} \quad , \quad n = \{n_i\} \quad Z_N = Z_i n_i \quad Z_T = Z - nZ_N \\ \sigma_N = \sigma_{ij}\, n_i n_j \qquad \sigma_T = \{\sigma_{iT}\} \text{ avec } \sigma_{iT} = \sigma_{ij}\, n_j - \sigma_N n_i \end{cases}$$

Alors les conditions d'attache sur Γ_1 sont :

$$(1.22) \qquad \sigma_T = 0, \quad \sigma_N = -\eta u_N \qquad (\eta > 0) \qquad \text{dans} \quad \Gamma_1 \times (0,T) .$$

□

Remarque 1.1 :

Puisque la condition d'équilibre est valable aussi dans Γ_1 le vecteur $\{\psi_i\}$ des efforts dans Γ_1 est $\psi_i = \sigma_{ij}\; n_j$. On suppose que les déplacements tangentiels des points de Γ_1 sont libres, tandis que les forces normales sont des forces de rappel élastique dont la valeur absolue est proportionnelle au déplacement normal . Si $t = \{t_i\}$ est le vecteur tangent à Γ_1 on a

$$\psi = \psi^n \vec{n} + \psi^t \vec{t}$$

et ces conditions d'expriment par

$$(1.23) \qquad \psi^t = 0 \qquad \psi^n = -\eta\, u_N$$

Mais, (1.23) et (1.22) sont équivalents. □

Dans la suite il serait bien préférable de travailler avec le champ de différences de température

$$(1.24) \qquad \theta = \xi - \nu_o$$

où on suppose que la température constante de référence ν_o a été fixée une fois pour toutes. Il est important d'observer que θ peut prendre éventuellement des valeurs négatives.

En termes de θ la relation des contraintes avec les déplacements et la température devient :

(1.25) $\sigma_{ij}(u,\theta) = a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}\,\theta$

De plus l'équation de conduction de chaleur (1.13) vérifiée en remplaçant ξ par θ. Ainsi, le vecteur flux de chaleur s'écrit :

(1.26) $q_i = -\,k_{ij}\,\frac{\partial \xi}{\partial x_j} = -k_{ij}\,\frac{\partial \theta}{\partial x_j}$

et (1.20) est inchangé.

Si on pose

(1.27) $\hat{\theta} = \hat{\xi} - \nu_o$ sur $\Gamma_1 \times (0,T)$, $\theta_o = \xi_o - \nu_o$ dans Ω

les conditions (1.14), (1.18) deviennent

(1.28) $\theta(x,o) = \theta_o(x)$ dans Ω $\theta = \hat{\theta}$ sur $\Gamma_1 \times (0,T)$. $\square$

1.3. Récapitulation

Le problème à étudier est modélisé par les équations aux dérivées partielles suivantes :

Trouver $u_i(x,t)$, $1 \leq i \leq 3$, et $\theta(x,t)$ définies dans $\Omega \times (0,T)$ solution de

$$(1.29)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}[a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u)] + \dfrac{\partial}{\partial x_j}[m_{ij}\theta] = f_i \qquad 1 \leq i \leq 3 \\[2ex] \dfrac{\rho o c}{\nu_o}\,\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{k_{ij}}{\nu_o}\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}\right) + m_{ij}\,\varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = q = \left(\dfrac{Q}{\nu_o}\right) \end{cases}$$

dans $\Omega \times (0,T)$, avec les conditions initiales

(1.30) $u(x,o) = u_o(x)$, $\theta(x,o) = \theta_o(x)$ dans Ω

et les conditions aux limites

$$(1.31)\quad \begin{cases} u = \hat{u} \quad \text{dans} \quad \Sigma_o = \Gamma_o \times (0,T) \\ \theta = \hat{\theta} \quad \text{dans} \quad \Sigma_3 = \Gamma_3 \times (0,T) \\ \sigma_{ij}\, n_j = F_i \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{sur} \quad \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0,T) \\ - k_{ij} \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = G \quad \text{sur} \quad \Sigma_4 = \Gamma_4 \times (0,T) \\ \sigma_T = 0, \quad \sigma_N + \eta u_N = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T). \end{cases}$$

(Γ_i vérifiant (1.15)-(1.16)) et

$$(1.32)\quad \begin{cases} \sigma_{ij}(u,\theta) = a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u) - m_{ij}\, \theta \\ \varepsilon_{ij}(u) = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad 1 \leq i,j \leq 3. \qquad \square \end{cases}$$

<u>Remarque 1.2.</u>

Eventuellement, les situations suivantes sont envisageables :

$$(1.33)\quad \begin{cases} \Gamma_0 = \emptyset \quad \text{alors} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_1 = \Gamma, \quad \Gamma_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset \\ \Gamma_1 = \emptyset \quad \text{alors} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset \\ \Gamma_2 = \emptyset \quad \text{alors} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset \end{cases}$$

et/ou

$$(1.34)\quad \begin{cases} \Gamma_3 = \emptyset \quad \text{alors} \quad \Gamma_4 = \Gamma \\ \Gamma_4 = \emptyset \quad \text{alors} \quad \Gamma_3 = \Gamma . \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que le cas $\Gamma_0 = \emptyset$ présente une différence essentielle par rapport aux autres, et nous le traiterons explicitement quand cela sera nécessaire.

D'ailleurs, pour simplifier l'exposé, nous avons choisi le cas particulier suivant (physiquement envisageable) :

(1.35) $\quad \Gamma_3 = \Gamma_1 , \quad \Gamma_4 = \Gamma_2 \cup \Gamma_0$, le flux dans Γ_0 est nul.

Les modifications techniques à faire pour un cas différent restent transparentes.

Tenant compte de (1.35) on considera donc

(1.36) $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \qquad \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq 0 \qquad 0 \leq i \leq j$

et les conditions aux limites (tirées de (1.31)) :

$$(1.37) \begin{cases} u = \hat{u} \ , \quad - k_{ij} \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_0 \\ \theta = \hat{\theta} \ , \quad \sigma_T = 0, \quad \sigma_N + \eta\, u_N = 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma_1 \\ \sigma_{ij} n_j = F_i \quad (1 \leq i \leq 3), \ - k_{ij} \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j} n_i = G \quad \text{dans} \quad \Sigma_2 \ . \end{cases}$$

Le problème étudié dans la suite est modélisé par le système défini en (1.29),(1.30),(1.37). □

2. FORMULATION VARIATIONNELLE

On utilisera la notation :

$$u(t) : x \in \Omega \to u(x,t)$$
$$u'(t) : x \in \Omega \to \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

Si les données sont assez régulières, (u,θ) est une solution régulière du problème (1.29), (1.30), (1.37), les intégrations par parties sont alors légitimes, et l'on a :

$\forall t \in (0,T) \quad \forall v \in [\mathcal{D}(\bar{\Omega})]^3 \forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \; v = \hat{u}(t)$ sur Γ_0, $\phi = \hat{\theta}(t)$ sur Γ_1 :

$$\int_\Omega a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u)\, \varepsilon_{ij}(v-u(t))dx - \int_\Omega m_{ij}\, \theta(t)\, \varepsilon_{ij}(v-u(t))\, dx =$$

$$= \int_\Omega f_i(t)(v_i-u_i(t))dx + \int_{\Gamma_2} F_i(t)(v_i-u_i(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}n_j(v_i-u_i(t))d\Gamma$$

$$\int_\Omega \frac{\rho_o c_\theta}{\nu_o}\theta'(t)(\phi-\theta(t))dx + \int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_o}\frac{\partial\theta(t)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi-\theta(t))dx + \int_\Omega m_{ij}\varepsilon_{ij}(u'(t))(\phi-\theta(t))dx =$$

$$= \int_\Omega q(t)(\phi-\theta(t))dx - \int_{\Gamma_2}\frac{G(t)}{\nu_o}(\phi-\theta(t))\, d\Gamma$$

D'après la notation (1.21) on a :

$$\int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}n_j(v_i-u_i(t))d\Gamma = \int_{\Gamma_1}(\sigma_{iT}+\sigma_N n_i)(v_i-u_i(t))d\Gamma = \int_{\Gamma_1}\sigma_N(v-u(t))_N d\Gamma =$$

$$= -\eta\int_{\Gamma_1} u_N(t)(v-u(t))_N d\Gamma$$

de sorte que (u,θ) est solution de

$$(2.1)\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(u)\varepsilon_{ij}(v-u(t))dx + \eta\int_{\Gamma_1} u_N(t)(v-u(t))_N\, d\Gamma \; - \\ \displaystyle - \int m_{ij}\, \theta(t)\, \varepsilon_{ij}(v-u(t))\, dx = \\ \displaystyle = \int_\Omega f_i(t)(v_i-u_i(t))dx + \int_{\Gamma_2} F_i(t)(v_i-u_i(t))d\Gamma\;, \\ \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3, \quad v=\hat{u}(t) \text{ sur } \Gamma_0, \quad 0 < t < T \end{cases}$$

$$\int_\Omega \frac{\rho_o c}{\nu_o} \theta'(t)(\phi-\theta(t))dx + \int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_o} \frac{\partial\theta(t)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi-\theta(t))dx +$$

$$(2.2) \quad \int_\Omega m_{ij}\, \varepsilon_{ij}(u'(t))(\phi-\theta(t))\, dx = \int_\Omega q(t)(\phi-\theta(t))\, dx - \int_{\Gamma_2} g(t)(\phi-\theta(t))d\Gamma$$

$$\forall\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ \phi = \hat{\theta}(t) \text{ dans } \Gamma_1 \quad 0 < t < T \quad (^1)$$

$$(2.3) \qquad u(0) = u_o \ , \ \theta(0) = \theta_o \ .$$

Réciproquement, si $u = u(t)$, $\theta = \theta(t)$ sont des fonctions régulière satisfaisant $u = \hat{u}(t)$ sur Γ_0, $\theta = \hat{\theta}(t)$ sur Γ_1, $0 < t < T$, et (2.1), (2.3) alors (u,θ) est solution de (1.29), (1.30), (1.37), il suffit de remontrer les calculs. □

Dans la suite, nous allons résoudre (2.1), (2.3) dans un sens convenable. On introduit un problème plus général dont on montrera l'existence et l'unicité de la solution.

On suppose que pour $t \in [0,T]$:

$$(2.4) \begin{cases} \cdot\ \hat{u}(t) \text{ est restriction a } \Gamma_0 \text{ de } U(t) \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3 \\ \cdot\ \hat{\theta}(t) \text{ est restriction a } \Gamma_1 \text{ de } \tau \in H^{1/2}(\Gamma) \\ \cdot\ f_i(t) \in L^2(\Omega),\ F_i(t) \in L^2(\Gamma_2) \quad 1 \le i \le 3 \\ \cdot\ q(t) \in L^2(\Omega),\ g(t) \in L^2(\Gamma_2) \end{cases}$$

$$(2.5) \begin{cases} \rho_o > 0,\ c > 0,\ \nu_o > 0. \\ a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), \text{ vérifiant (1.6), (1.8)} \\ k_{ij} \in L^\infty(\Omega) \ , \text{ avec (1.5), (1.7)} \\ m_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et (1.9).} \end{cases}$$

On introduit les espaces de fonctions suivants :

---

[1] On pose $g = G/\nu_o$.

$$(2.6)\qquad V_1 = \{v/v\in[H^1(\Omega)]^3 : v_i|_{\Gamma_0} = 0 \quad 1 \le i \le 3\}$$

muni de la norme hilbertienne produit : $\|v\|_1 = [\sum_{i=1}^{3} \|v_i\|^2_{1,\Omega}]^{1/2} \quad \forall v\in V_1$

$$(2.7)\qquad H_1 = [L^2(\Omega)]^3 \qquad |v|_1 = [\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |v_i|^2\, dx]^{1/2}$$

$$(2.8)\qquad V_2 = \{\phi|\phi\in H^1(\Omega) : \phi|_{\Gamma_1} = 0\} \quad ; \quad \|\phi\|_2 = \|\phi\|_{1,\Omega} \quad \forall\phi \in V_2$$

$H_2 = L^2(\Omega)$ avec le produit scalaire équivalent à l'usuel

$$(2.9)\qquad (\phi,\psi)_2 = \int_\Omega \frac{\rho_o c}{\nu_o}\, \phi\psi \quad dx$$

La propriété $V_i \subset H_i \subset V'_i$ $(1 \le i \le 2)$ avec injection continue et dense sera utilisée.

Soit

$$(2.10)\quad a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}(u)\ \varepsilon_{ij}(v)\ dx + \eta\int_{\Gamma_1} u_N v_N d\Gamma \qquad \forall u,v\in [H^1(\Omega)]^3$$

$a(.,.)$ définit une forme bilinéaire continue sur $[H^1(\Omega)]^3\times [H^1(\Omega)]^3$

On pose :

$$a_1(u,v) = \int_\Omega a_{ijkh}\ \varepsilon_{kh}(u)\ \varepsilon_{ij}(v)\ dx,\ u,v\in[H^1(\Omega)]^3 .$$

de sorte que $\qquad a(u,v) = a_1(u,v) + \eta\int_{\Gamma_1} u_N v_N\, d\Gamma$

On a (cf. DUVAUT-LIONS [1], Chap. 3) :

(i) si Γ_0 est de mesure superficielle positive, il existe $\alpha_1 > 0$ telle que

$$(2.11)\qquad a_1(v,v) \ \ge\ \alpha_1 \|v\|_1^2 \qquad \forall v\in V_1$$

et donc, a fortiori

$$(2.12)\qquad a(v,v) \ \ge\ \alpha_1\ \|v\|_1^2 , \qquad \forall v \in V_1 .$$

(ii) si Γ_1 n'est pas contenue dans un plan (cf. DUVAUT-LIONS op. cit. pag. 133), alors

(2.13) $a(v,v) \geq \alpha_1 \quad \|v\|_1^2 \qquad \forall v \in [H^1(\Omega)]^3$

Par conséquent sauf pour le cas

(iii) $\text{mes}(\Gamma_0) = 0$, Γ_1 contenue dans un plan, la forme $a(.,.)$ est V_1-elliptique. La cas particulier de (iii) avec $\Gamma_0 = 0$, est traité dans le § 2 Sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on définit la forme bilinéaire continue et symétrique

(2.14) $k(\phi,\psi) = \displaystyle\int_\Omega \frac{k_{ij}}{\nu_o} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx$

D'après (1.5) on déduit que

$\forall \quad C > 0$, il existe $\lambda > 0$ telle que

(2.15) $k(\phi,\phi)+C\, |\phi|_2^2 \geq \lambda \|\phi\|_{1,\Omega}^2 \ ; \quad \forall\phi \in H^1(\Omega)$.

Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ alors sur V_2 la seminorme $|\phi|_{1,\Omega} = [\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|^2 dx]^{1/2}$

est une norme équivalente à $\| \ \|_{1,\Omega}$ donc

(2.16) si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que $k(\phi,\phi) \geq \alpha_2 \|\phi\|_2^2 \quad \forall\phi \in V_2$

Pour le théorème d'existence la seule propriété qui intervient est (2.15).

Une troisième forme bilinéaire continue est définie sur $H_2 \times [H^1(\Omega)]^3$ par :

(2.17) $m(\phi,v) = \displaystyle\int_\Omega m_{ij}\phi\varepsilon_{ij}(v)\, dx = \int_\Omega m_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \phi\, dx$, $\phi \in H_2$, $v \in [H^1(\Omega)]^3$.

Avec les notations introduites ci-dessus, toute solution suffisament régulière du problème posé ci-après est solution de (2.1), (2.3).

$$u : t \in [0,T] \to u(t) \in [H^1(\Omega)]^3 , u(t) = \hat{u}(t) \text{ sur } \Gamma_0 \quad 0 \leq t \leq T$$
$$\theta : t \in [0,T] \to \theta(t) \in [H^1(\Omega)], \theta(t) = \hat{\theta}(t) \text{ sur } \Gamma_1 \quad 0 \leq t \leq T$$

solution, dans $]0,T[$ de :

$$(2.18) \quad \begin{cases} a(u(t),v) - m(\theta(t),v) = \int_\Omega f(t).\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v\, d\Gamma \quad \forall v \in V_1 \\ (\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,u'(t)) = \int_\Omega q(t)\, \phi dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi d\Gamma \\ \qquad\qquad \forall \phi \in V_2. \\ u(0) = u_o, \quad \theta(0) = \theta_o \end{cases}$$

2.1. Remarque sur le cas $\Gamma_0 = \emptyset$, Γ_1 contenu dans un plan.

La condition de coercivité (2.12) de la forme bilinéaire $a(.,.)$ intervient de façon fundamentale dans le théorème d'existence pour (2.18). Si $\Gamma_0 = \emptyset$, on a $V_1 = [H^1(\Omega)]^3$ et d'après DUVAUT-LIONS [1] , page 133, (2.12) reste vraie si Γ_1 n'est pas plane. Si ce n'est pas le cas on peut trouver $v \in [H^1(\Omega)]^3$, $v \neq 0$, tel que $a(v,v) = 0$, de sorte que (2.12) n'a pas lieu.

Soit

$$(2.19) \quad R = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 \mid v(x) = a + b \wedge x \quad ; a,b \in \mathbb{R}^3\}$$ (1)

On montre (cf. DUVAUT-LIONS [1]) que

$$(2.20) \quad a_1(v,v) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad v \in R.$$

Puisque $a(v,v) = 0$ si et seulement si $a_1(v,v) = 0$ et $\int_{\Gamma_1} v_N^2\, d\Gamma = 0$, on déduit que

$$(2.21) \quad a(v,v) = 0 \quad \text{équivaut à} \quad v \in R,\ v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

(1) Ensemble des déplacements rigides.

Autrement dit, si n est le vecteur normal au plan soutenant Γ_1

$$(2.22) \quad a(v,v) = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} v(x) = a+b\wedge x & x \in \Omega \ , \ a,b \in \mathbb{R}^3. \\ a+b \wedge x \text{ orthogonal à } n, & x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

On introduit le sous-espace fermé

$$(2.23) \quad S = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v(x) = a+b \wedge x,\ v_N = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ a,b \in \mathbb{R}^3\}$$

et l'espace quotient

$$(2.24) \quad \dot{V}_1 = V_1/S = [H^1(\Omega)]^3/S$$

avec

$$(2.25) \quad \dot{u} = \{u+\xi : \xi \in S\} \ , \ \|\dot{u}\|_1 = \inf_{\xi \in S} \|u+\xi\|_1 \ , \quad u \in [H^1(\Omega)]^3.$$

Pour $\dot{u}$, $\dot{v} \in \dot{V}_1$, on définit

$$(2.26) \quad \dot{a}(\dot{u},\dot{v}) = a(u,v) \ , \quad u \in \dot{u},\ v \in \dot{v} \ .$$

$\dot{a}(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $\dot{V}_1$, bien définie d'après (2.21).

<u>Proposition 2.1.</u>

Si Ω est borné de frontière régulière, alors :

$$(2.27) \quad \dot{a}(\dot{v},\dot{v}) \geq \alpha \quad \|\dot{v}\|_1^2 \ , \qquad \forall \dot{v} \in \dot{V}_1 \quad , \qquad \alpha > 0$$

<u>Démonstration</u> :

Le cas $\Gamma_1 = \emptyset$ (i.e. $S = R$, $a(.,.) = a_1(.,.)$) est étudié dans DUVAUT-LIONS [1] page 117. Nous suivons la même technique. L'inégalité de Korn est vraie dans Ω :

$$(2.28) \quad \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)dx + \int_\Omega v_i v_i dx \geq c(\Omega)\, \|v\|_1^2 \qquad \forall v \in V_1$$

De (1.6) on obtient :

$$a(v,v) = a_1(v,v) + \eta \int_{\Gamma_1} v_N^2 d\Gamma \geq \alpha_2 \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(v)dx + \eta \int_{\Gamma_1} v_N^2\, d\Gamma$$

Puisque l'inégalité inverse de (2.28) est évidente, on a :

$$(2.29) \quad \|\dot{v}\|_1 = \inf_{\xi\in S} \|v+\xi\|_1 \leq \beta \inf_{\xi\in S} [|v+\xi|_1^2 + \varepsilon(v)] \;,$$

où $\varepsilon(v) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\ \varepsilon_{ij}(v)\, dx$ (1) , $\forall v \in [H^1(\Omega)]^3$.

On voit, donc, qu'il suffit de montrer que

$$(2.30) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2\, d\Gamma \geq \omega. \inf_{\xi\in S} [|v+\xi|_1^2 + \varepsilon(v)]$$

Soit

$$P : [L^2(\Omega)]^3 \to S$$

l'opérateur de projection orthogonal sur S dans H_1. Alors,

$$\inf_{\xi\in S} |v+\xi|_1^2 = |v - Pv|_1^2 \;,$$

de sorte que (2.35) revient à montrer que

$$\varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2\, d\Gamma \geq c\, |v-Pv|_1^2 \;, \quad \forall v \in V_1 \;.$$

En remplaçant v par v $|v-Pv|_1^{-1}$ on conduit à ce qu'il faut montrer :

$$(2.31) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_1} v_N^2\, d\Gamma \geq C > 0 \qquad \forall v \in V_1,\ |v-Pv|_1 = 1.$$

---

(1) $\varepsilon(v+\xi) = \varepsilon(v)$, pour $\xi \in S$.

On raisonne par l'absurde. Si (2.31) est inexact, il existe une suite (v_α) telle que

(2.32) $$v_\alpha \in V_1 \ , \quad |v_\alpha - Pv_\alpha|_1 = 1, \quad \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha_N}^2 \, d\Gamma \quad \to \quad 0$$

Mais alors, si l'on pose

(2.33) $$\omega_\alpha = v_\alpha - Pv_\alpha \quad ,$$

puisque $Pv_\alpha \in S$ on a

(2.34) $$\varepsilon\,(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha_N}^2 \, d\Gamma = \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_1} v_{\alpha_N}^2 \, d\Gamma \ .$$

Par conséquence, la suite (ω_α) vérifie :

(2.35) $$\omega_\alpha \in V_1 \ , \qquad |\omega_\alpha|_1 = 1 \ , \qquad \varepsilon(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha_N}^2 \, d\Gamma \quad \to \quad 0$$

D'après l'inégalité de Korn, on a $\|\omega_\alpha\|_1 \leq C$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée ω_α , telle que

(2.36) $$\omega_\alpha \quad \to \quad \omega \quad \text{dans } V_1\text{-faible}$$

et l'injection $V_1 \to [L^2(\Omega)]^3$ étant compacte,

(2.37) $$\omega_\alpha \to \omega \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3\text{-fort.}$$

Mais, $\liminf [\varepsilon(\omega_\alpha) + \int_{\Gamma_1} \omega_{\alpha_N}^2 \, d\Gamma] = 0 \quad \geq \quad \varepsilon(\omega) + \int_{\Gamma_1} \omega_N^2 \, d\Gamma$

d'où :

$$\varepsilon(\omega) = 0 \ , \quad \int_{\Gamma_1} \omega_N^2 \, d\Gamma = 0 \ , \quad \text{i.e.} \quad \omega \in S.$$

D'autre part $\omega_\alpha \in S^\perp$ sous-espace de V_1 orthogonal à S avec le produit scalaire de $[L^2(\Omega)]^3$, d'après (2.37), $\omega \in S^\perp$. Finalement, $\omega = 0$.

Mais alors $\omega_\alpha \to 0$ dans $[L^2(\Omega)]^3$-fort ce qui est absurde car $|\omega_\alpha|_1 = 1$. $\square$

Dans le cas présent, puisque $\Gamma_0 = \emptyset$, le problème (2.18) s'écrit :

$$
(2.38)\left\{\begin{array}{l}
u : t \in [0,T] \to u(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \\
\theta : t \in [0,T] \to \theta(t) \in [H^1(\Omega)] \quad \Theta(t) = \hat{\Theta}(t) \text{ sur } \Gamma_1 \text{ , } 0 \leq t \leq T \text{ ,} \\
\text{solution dans }]0,T[\text{ de :} \\
a(u(t),v) - m(\theta(t),v) = \int_\Omega f(t).v dx + \int_{\Gamma_2} F(t).v \, d\Gamma \quad \forall v \in V_1 . \\
(\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,u'(t)) = \int_\Omega q(t)\phi dx - \int_{\Gamma_2} g(t)\phi d\Gamma \quad \forall \phi \in V_2 .
\end{array}\right.
$$

Comme on a déjà signalé, si $v \in S$, $a(u,v) = 0$, $\forall u \in V_1$.
De plus, d'après la définition de m -cf. (2.17)- il est évident que

$$(2.39) \quad \forall v \in R \text{ , } \quad m(\phi,v) = 0 \quad \forall \phi \in H_2 .$$

On déduit, donc, que (2.38) n'est possible que si

$$(2.40) \quad \forall v \in S : \int_\Omega f(t).\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} F(t).\, v \, d\Gamma = 0 \quad (^1)$$

ce qui permet de définir la forme linéaire continue sur $\dot{V}_1$

$$(2.41) \quad <\dot{b}_1(t),\dot{v}> = \int_\Omega f(t).vdx + \int_{\Gamma_2} F(t).v \, d\Gamma \text{ , } \quad v \in \dot{v}, \quad \dot{v} \in V_1 .$$

Dès que (2.34) est vérifié on peut définir la forme bilinéaire continue sur $H_2 \times \dot{V}_1$

$$(2.42) \quad \dot{m}(\phi,\dot{v}) = m(\phi,v) \qquad v \in \dot{v}, \quad \dot{v} \in V_1, \ \phi \in H_2 .$$

et finalement, si (2.40) a lieu, (2.38) équivaut à

(^{1}) Voir DUVAUT-LIONS [1] pour interprétation mécanique.

$$(2.43)\quad \begin{aligned} &\dot{a}(\dot{u}(t),\dot{v}) - \dot{m}(\theta(t),\dot{v}) = \langle \dot{b}_1(t),\dot{v}\rangle \quad \forall\dot{v} \in \dot{V}_1 \\ &(\theta'(t),\phi)_2 + k(\theta(t),\phi) + m(\phi,\dot{u}'(t)) = \int_\Omega q(t)\phi\, dx - \\ &- \int_{\Gamma_2} g(t)\phi\, d\Gamma \qquad \forall\phi \in V_2. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1, $\dot{a}(.,.)$ est $\dot{V}_1$-elliptique et ce problème est dans les mêmes hypothèses que (2.18) pour le théorème d'existence et unicité. L'unicité de $\dot{u}$ signifie que la solution u est définie à un déplacement rigide ξ , tel que $\xi_N = 0$, quelconque près. □

3. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE.

Nous allons dans la suite résoudre le problème (2.18) au sens des distributions sur $]0,T[$. Les propriétés (2.5) des coefficients et certaine régularité des données (2.4) interviennent pour l'obtention d'un théorème d'existence de solutions fortes. Ci-après nous enonçons le théorème général. La démonstration serait faite en plusieurs étapes :

Théorème 3.1. En supposant :

(3.1) $f, f', f'' \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$; $F, F', F'' \in L^2(0,T;[L^2(\Gamma_2)]^3)$.

(3.2) $q, q' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$; $g, g' \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_2))$.

(3.3) $\hat{u}$ est restriction à $\Gamma_0 x(0,T)$ de U, avec
$U, U', U'' \in L^2(0,T; [H^{1/2}(\Gamma)]^3)$.

(3.4) $\hat{\theta}$ est restriction à $\Gamma_1 x(0,T)$ de Θ, avec
Θ , Θ' , $\Theta'' \in L^2(0,T ; H^{1/2}(\Gamma))$.

(3.5) $u_o \in [H^1(\Omega)]^3$, $u_o = \hat{u}(0)$ sur Γ_0 ; $\theta_o \in H^1(\Omega)$, $\theta_o = \hat{\theta}(0)$ sur Γ_1

(3.6) $a(u_o,v) - m(\theta_o,v) = \int_\Omega f(0).v\, dx + \int_{\Gamma_2} F(0).v\, d\Gamma$, $\forall v \in V_1$.

alors, il existe un et un seul couple (u,θ) solution de (2.18), vérifiant :

(3.7) $u \in L^\infty(0,T ; [H^1(\Omega)]^3)$, $u' \in L^2(0,T ; [H^1(\Omega)]^3)$.

(3.8) $\theta \in L^\infty(0,T ; H^1(\Omega))$, $\theta' \in L^2(0,T ; L^2(\Omega))$. □

Remarque 3.1. : Les hypothèses prises ci-dessus peuvent être affaiblies (cf Remarque 3.2). Si on suppose $a_{ijkh} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u_o \in [H^2(\Omega)]^3$, $m_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\theta_o \in H^2(\Omega)$, alors (3.5) et (3.6) peuvent être interprétées formellement par la vérification au sens des distributions de :

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(u_o)] + \frac{\partial}{\partial x_j} [m_{ij}\theta_o] = f_i(0) \qquad 1 \le i \le 3$$

$$\sigma_{iT}(u_o,\theta_o) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad 1 \le i \le 3.$$

$$\sigma_N (u_o,\theta_o) + \eta\, u_{oN} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\sigma_{ij}(u_o,\theta_o)\, n_j = F_i(0) \text{ sur } \Gamma_2 \quad 1 \le i \le 3. \quad \square$$

Tout ce qui reste de la Section est consacrée à la démonstration du théorème 3.1.

3.1. Transformation du problème :

Les hypothèses (3.3) et (3.4) entraînent l'existence de Φ,Λ vérifiant : (cf. DUVAUT-LIONS [1], LIONS-MAGENES [1], vol. 2)

(3.9) $\phi,\ \phi',\phi'' \in L^2(0,T\ ;\ [H^1(\Omega)]^3)\ ;\quad \phi = \hat{u}$ sur $\Gamma_0 x(0,T)$.

(3.10) $\Lambda,\ \Lambda',\Lambda'' \in L^2(0,T\ ;\ H^1(\Omega))\ ;\qquad \Lambda = \hat{\theta}$ sur $\Gamma_1 x(0,T)$.

On pose :

(3.11) $\tilde{u} = u-\phi,\quad \tilde{u}_o = u_o - \phi(0),\ \tilde{\theta} = \theta - \Lambda,\ \tilde{\theta}_o = \theta_o - \Lambda(0)$ (1)

Si (u,θ) est la seule solution de (2.18) vérifiant (3.7) (3.8) alors $(\tilde{u},\tilde{\theta})$ est la seule solution du problème suivant :

$$(3.12)\begin{cases}\tilde{u} : t \in [0,T] \to \tilde{u}(t) \in V_1,\quad \tilde{\theta} : t \in [0,T] \to \tilde{\theta}(t) \in V_2\\ a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle \quad \forall v \in V_1.\\ (\tilde{\theta}'(t),z)_2 + k(\tilde{\theta}(t),z) + m(z,\tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t),z\rangle \quad \forall z \in V_2,\\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_o,\ \tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_o.\end{cases}$$

vérifiant :

$$(3.13)\begin{cases}\tilde{u} \in L^\infty(0,T\ ;\ V_1),\ \tilde{u}' \in L^2(0,T\ ;\ V_1).\\ \tilde{\theta} \in L^\infty(0,T\ ;\ V_2)\quad \tilde{\theta}' \in L^2(0,T\ ;\ L^2(\Omega))^{(2)}\end{cases}$$

où $L_1(t) \in V_1'$ -dual de V_1-, $L_2(t) \in V_2'$ définis par :

(3.14) $\langle L_1(t),v\rangle = \int_\Omega f(t).v\,dx + \int_{\Gamma_2} F(t).\ v\,d\Gamma - a(\phi(t),v) + m(\Lambda(t),v)$, v

(3.15) $\langle L_2(t),z\rangle = \int_\Omega q(t)\quad z\,dx - \int_{\Gamma_2} g(t)z\,d\Gamma - (\Lambda'(t),z)_2 - k(\Lambda(t),z) - m(z,\phi'($

$z \in V_2$. □

Tout revient, alors, à montrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.12) vérifiant (3.13). Nous ferons cette démonstration dans le cadre abstrait où n'interviennent que les formes a, m, k, L_1, L_2 et les espaces V_i, H_i $(1\leq i\leq 2)$. □

---

(1) La régularité de Φ,Λ dans (3.9) (3.10) entraîne $\phi \in C^1([0,T];[H^1(\Omega)]^3$ $\Lambda \in C^1([0,T];\ H^1(\Omega))$.

(2) Les hypothèses (3.9) (3.10) entraînent $\phi,\phi' \in L^\infty(0,T\ ;[H^1(\Omega)]^3)$, $\Lambda,\ \Lambda' \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, donc $\Lambda' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

<u>Théorème 3.2</u>. Si on suppose que :

(3.16) $L_1, L_1', L_1'' \in L^2(0,T);V_1')$; $L_2, L_2' \in L^2(0,T\ ;\ V_2')$

(3.17) $\tilde{u}_o \in V_1$, $\tilde{\theta}_o \in V_2$ vérifiant : $a(\tilde{u}_o,v) - m(\tilde{\theta}_o,v) = \langle L_1(0),v\rangle \ \forall v\in V_1$

alors (3.12) admet une et une seule solution (u,θ) vérifiant (3.13). □

<u>Remarque 3.2.</u> :

Puisque dans notre problème L_1, L_2 sont donnés par (3.14) - (3.15) on déduit que dès que (3.1) et (3.2) sont vérifiés pour (3.16) il suffit d'avoir :

$\phi,\ \phi',\ \phi'' \in L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)$; $\Lambda, \Lambda' \in L^2(0,T\ ;\ H^1(\Omega))$, $\Lambda'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
plus faible que (3.10).

D'autre part (3.5) et (3.6) entrainent bien (3.17). On constate, donc, que la prise des conditions initiales prises arbitrairement peuvent amener à un problème sans solution.

3.2. <u>Démonstration du théorème 3.1.</u>

Puisque les espaces V_1, V_2 sont séparables on peut choisir des "bases" dénombrables $\{w_1^i, w_2^i, \ldots, w_m^i\}\ldots$, $(1\le i\le 2)$, telles que $\{w_1^i \ldots w_m^i\}$ $\forall m\ge 1$ sont linéairement indépendants et les combinaisons linéaires finies des w_j^i sont denses dans V_i $(1\le i\le 2)$. On supposera (ce qui est loisible) :

(3.18) $(w_k^2, w_j^2)_2 = \delta_{kj} \qquad kj \ge 1.$

(3.19) $\tilde{u}_o = w_1^1$, $\theta_o = |\tilde{\theta}_o|_2\, w_1^2$

soit $[w_1^i,\ldots,w_m^i]$ le sous-espace généré par $w_1^i \ldots w_m^i$. On définit $u_m(t), \theta_m(t)$, solution approchée d'ordre m, de (3.12) par :

$$\tilde{u}_m(t) \in V_{1m} = [w_1^1,\ldots,w_m^1],\ \tilde{\theta}_m(t) \in V_{2m} = [w_1^2,\ldots,w_m^2], \quad 0\le t\le T,$$

$$a(\tilde{u}_m(t),v) - m(\tilde{\theta}_m(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle, \quad \forall v \in V_{1m}.$$

$$(\tilde{\theta}_m'(t), z)_2 + k(\tilde{\theta}_m(t), z) + m(z,\tilde{u}_m'(t)) = \langle L_2(t), z\rangle \ \forall z\in V_{2m}$$

$$\tilde{u}_m(0) = \tilde{u}_o,\ \tilde{\theta}_m(0) = \tilde{\theta}_o$$

En posant :

$$\tilde{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_{im}(t)\, w_i^1, \quad \tilde{\theta}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{h}_{im}\, w_i^2$$

$$\tilde{u}_o = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}\, w_i^1 \;, \quad \tilde{\theta}_o = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}\, w_i^2$$

le problème (3.20) équivaut à la résolution d'un système différentiel de la forme :

$$(3.21)\quad \begin{cases} [A_m]\,\{\tilde{g}_m(t)\} - {}^t[M_m]\;\{\tilde{h}_m(t)\} = \{L_{1m}(t)\} \\ \{\tilde{h}'_m(t)\} + [K_m]\;\{\tilde{h}_m(t)\} + [M_m]\,\{\tilde{g}'_m(t)\} = \{L_{2m}(t)\}. \\ \{\tilde{h}_m(0)\} = \{\beta_m\}, \quad \{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}. \end{cases}$$

avec les matrices symétriques d'ordre m x m

$$[A_m]_{ij} = a(w_i^1, w_j^1), \quad [K_m]_{ij} = k(w_i^2, w_j^2) \qquad 1 \le i,j \le m.$$

et :

$$[M_m]_{ij} = m(w_i^2, w_j^1), \quad \{\xi_m\} = {}^t(\xi_{1m}, \ldots, \xi_{mm}), \quad {}^t\{\beta_m\} = {}^t(\beta_{1m}, \ldots, \beta_{mm}).$$

$$\{L_{im}(t)\} = {}^t(\langle\langle L_i(t), w_1^i\rangle, \ldots, \langle\langle L_i(t), w_m^i\rangle), \quad (1 \le i \le 2\,).$$

$$\{\tilde{g}_m(t)\} = {}^t(\tilde{g}_{1m}(t), \ldots, \tilde{g}_{mm}(t)), \quad \{\tilde{h}_m(t)\} = {}^t(\tilde{h}_{1m}(t), \ldots, \tilde{h}_{mm}(t)).$$

La matrice $[A_m]$ est symétrique et définie positive comme conséquence directe de la coercivité (2.12) de a(.,.). Donc $[A_m]^{-1}$ est aussi symétrique et définie positive :

$$(3.22)\qquad ([A_m]^{-1}\, x, x) \ge \gamma\; |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad (\gamma > 0).$$

De (3.16) on tire que $L_{1m} \in C^1([0,T]\;;\mathbb{R}^m)$, $L_{2m} \in C([0,T]\;;\mathbb{R}^m)$ de sorte que la solution de (3.21) vérifie :

$$(3.23)\quad \begin{cases} \tilde{g}_m,\ \tilde{h}_m \in C^1([0,T];\mathbb{R}^m) \\ [I_m + [M_m][A_m]^{-1}\; {}^t[M_m]]\;\{\tilde{h}'_m(t)\} + [K_m]\;\{\tilde{h}_m(t)\} = \{L_m(t)\}^{(1)}, \quad \{\tilde{h}_m(0)\} = \{\beta_m\}. \\ \{\tilde{g}_m(t)\} = [A_m]^{-1}[\;\{L_{1m}(t)\} + {}^t[M_m]\;\{\tilde{h}_m(t)\}]\;, \quad \{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}. \end{cases}$$

Réciproquement toute solution de (3.23) est solution de (3.21).

---

(1) $\{L_m(t)\} = \{L_{2m}(t)\} - [M_m]\;[A_m]^{-1}\;\{L'_{1m}(t)\}.$

Mais (3.23) a une solution unique parce que $L_m \in C([0,T]; \mathbb{R}^m)$ et la matrice $S_m = I_m + [M_m]\,[A_m]^{-1}\,{}^t[M_m]$ est inversible parce que (-1) n'est pas valeur propre de $[M_m]\,[A_m]^{-1}\,{}^t[M_m]$. En effet, en supposant l'existence de $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, $|x| = 1$ tel que :

$$[M_m]\,[A_m]^{-1}\,{}^t[M_m]x = -x$$

on aura la relation suivante :

$$-1 = (-x,x) = (M_m[A_m]^{-1}\,[M_m]x,x) = ([A_m]^{-1}\,{}^t[M_m]x,{}^t[M_m]x) \geq \gamma|{}^t[M_m]x|^2 \geq 0.$$

qui est absurde.

Ainsi, l'existence de $\tilde{h}_m$ est assurée. De plus, si $\{\tilde{g}_m\}$ est définie par (3.23), alors $\{\tilde{g}_m(0)\} = \{\xi_m\}$, d'après l'hypothèse (3.17).

On a montré, donc, que (3.20) admet une solution unique pour vérifiant :

(3.24) $\quad \tilde{u}_m \in C^1([0,T]; V_1)$, $\tilde{\theta}_m \in C^1([0,T]; V_2)$. $\square$

3.2.1. <u>Estimations à priori (I)</u> :

En prenant dans (3.20), $v = \tilde{u}_m'(t)$, $z = \tilde{\theta}_m(t)$ et en additionnant, on obtient pour t quelconque :

$$a(\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m'(t)) + (\tilde{\theta}_m'(t),\tilde{\theta}_m(t))_2 + k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t)) = \langle L_1(t),\tilde{u}_m'(t)\rangle + \langle L_2(t),\tilde{\theta}_m(t)\rangle$$

ou bien :

$$(3.25)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}[a(\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m(t))] + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|\theta_m(t)|_2^2 + k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t)) = \\ = \dfrac{d}{dt}[\langle L_1(t),u_m(t)\rangle] - \langle L_1'(t),\tilde{u}_m(t)\rangle + \langle L_2(t),\tilde{\theta}_m(t)\rangle. \end{cases}$$

Par intégration en $(0,t)$ on a :

$$(3.26)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}a(\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m(t)) + \dfrac{1}{2}|\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \displaystyle\int_0^t k(\tilde{\theta}_m(s),\tilde{\theta}_m(s))\,ds = \\ = \dfrac{1}{2}a(\tilde{u}_o,\tilde{u}_o) + \dfrac{1}{2}|\tilde{\theta}_o|_2^2 + \langle L_1(t),\tilde{u}_m(t)\rangle - \langle L_1(0),\tilde{u}_o\rangle - \\ - \displaystyle\int_0^t [\langle L_1'(s),\tilde{u}_m(s)\rangle - \langle L_2(s),\tilde{\theta}_m(s)\rangle]\,ds. \end{cases}$$

Soit $|| \ ||_{i*}$ la norme dans V_i' $(1\leq i\leq 2)$. Alors, car tous les termes à gauche de (3.26) sont positifs, en utilisant la continuité de $a(.,.)$, $L_i(t)$ et $L_1'(t)$ $(1\leq i\leq 2)$ on aura (1) :

$$(3.27)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\, a(\tilde{u}_m(t),\, \tilde{u}_m(t)) + \frac{1}{2}\, |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \int_0^t k(\tilde{\theta}_m(s),\tilde{\theta}_m(s))\, ds \leq \\ \leq c_1\, [\, ||\tilde{u}_o||_1^2 + |\tilde{\theta}_o|_2^2 + ||L_1(0)||_{1*}^2] + c_2\, ||L_1(t)||_{1*}\, ||\tilde{u}_m(t)||_1 \\ + c_3 \int_0^t ||L_1'(s)||_{1*}||\tilde{u}_m(s)||_1\, ds + c_4 \int_0^t ||L_2(s)||_{2*}||\tilde{\theta}_m(s)||_2\, ds. \end{cases}$$

Soit $\lambda > 0$ quelconque. Alors, (2.12) et (2.15) entraînent l'existence de $\alpha_1,\alpha_2 > 0$ telles que

$$a(\tilde{u}_m(t),\, \tilde{u}_m(t)) \geq \alpha_1||\tilde{u}_m(t)||_1^2$$

$$k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t)) \geq \alpha_2||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 - \lambda|\tilde{\theta}_m(t)|_2^2.$$

de sorte que de (3.27) s'obtient :

$$\frac{1}{2}\,\alpha_1||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + \frac{1}{2}\,|\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \alpha_2 \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds$$

$$\leq c_1[||\tilde{u}_o||_1^2 + |\tilde{\theta}_o|_2^2 + ||L_1(0)||_{1*}^2] + c_2||L_1(t)||_{1*}^2 + \frac{\alpha_1}{4}||\tilde{u}_m(t)||_1^2$$

$$+ c_3 \int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds + c_4 \int_0^t ||L_1'(s)||_{1*}^2 ds + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds$$

$$+ c_5 \int_0^t ||L_2(s)||_{2*}^2\, ds + \lambda \int_0^t |\tilde{\theta}_m(s)|_2^2\, ds.$$

D'après l'égalité $L_1(t) = L_1(0) + \int_0^t L_1'(s)\, ds$ on a :

$$||L_1(t)||_{1*}^2 \leq 2||L_1(0)||_{1*}^2 + c \int_0^t ||L_1'(s)||_{1*}^2\, ds$$

de sorte que l'inégalité précédente donne :

$$(3.28)\quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{4}\, ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + \frac{1}{2}\, |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds \\ \leq c_1[\, ||\tilde{u}_o||_1^2 + |\tilde{\theta}_o|_2^2 + ||L_1(0)||_{1*}^2 + \int_0^t ||L_1'(s)||_{1*}^2\, ds + \int_0^t ||L_2(s)|| \\ + \lambda \int_0^t |\tilde{\theta}_m(s)|_2^2\, ds + c_2 \int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds. \end{cases}$$

(1) Dans la suite C_i désigne les constantes différentes. De plus, on utilis souvent que $2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}ab \leq \alpha a^2+\beta b^2$, $\alpha,\beta > 0$.

Posons :

$$|||L|||^2 = \int_0^T [||L_1'(s)||_{1*}^2 + ||L_2(s)||_{2*}^2]\, ds,$$

et

$$\Phi_m(t) = ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2, \quad 0\le t\le T.$$

Alors (3.28) entraîne :

$$\Phi_m(t) + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds \le c_1[||u_o||_1^2 + |\tilde{\theta}_o|_2^2 + ||L_1(0)||_{1*}^2 + |||L|||^2]$$

$$+ c_2 \int_0^t \Phi_m(s)\, ds$$

d'où

$$\Phi_m(t) \le c_1 + c_2 \int_0^t \Phi_m(s)\, ds, \quad 0\le t\le T.$$

D'après l'inégalité de Gronwall :

$$\Phi_m(t) \le c_1\, e^{c_2 t}, \quad 0\le t\le T.$$

Alors, on trouve $M_1 > 0$, indépendante de m, telle que

$$||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 \le M_1, \quad 0\le t\le T.$$

En reprenant (3.29) on déduit l'existence de $M > 0$, indépendante de m, telle que ;

(3.30) $$||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds \le M, \quad 0\le t\le T,$$

d'où la conclusion

(3.31)
- $\tilde{u}_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;V_1)$
- $\tilde{\theta}_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;H_2) \cap L^2(0,T;V_2)$

lorsque $m \to +\infty$. □

3.2.2. Estimations à priori (II)

Dérivant dans (3.20) ce qui est loisible dès que $L_1 \in C^1([0,T];V_1')$ s'obtient :

$$a(\tilde{u}_m'(t),v) - m(\tilde{\theta}_m'(t),v) = \langle L_1'(t),v\rangle \quad \forall v \in V_{1m}$$

$$(\tilde{\theta}_m'(t),z)_2 + k(\tilde{\theta}_m(t),z) + m(z,\tilde{u}_m'(t)) = \langle L_2(t),z\rangle \quad \forall z\in V_{2m}$$

En prenant $v = \tilde{u}'_m(t)$, $z = \tilde{\theta}'_m(t)$ et additionnant :

$$a(\tilde{u}'_m(t),\tilde{u}'_m(t)) + (\tilde{\theta}'_m(t),\tilde{\theta}'_m(t))_2 + k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}'_m(t)) = \langle L'_1(t),\tilde{u}'_m(t)\rangle + \langle L_2(t),\tilde{\theta}'_m(t)\rangle$$

qui donne pour $0 \leq t \leq T$:

$$a(\tilde{u}'_m(t),\tilde{u}'_m(t)) + |\tilde{\theta}'_m(t)|_2^2 + \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\,[k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t))] =$$

$$= \frac{d}{dt}\,[\langle L'_1(t),\tilde{u}_m(t)\rangle] - \langle L''_1(t),\tilde{u}_m(t)\rangle + \frac{d}{dt}[\langle L_2(t),\tilde{\theta}_m(t)\rangle] - \langle L'_2(t),\tilde{\theta}_m(t)\rangle$$

Encore, par intégration dans $(0,t)$:

$$\int_0^t a(\tilde{u}'_m(s),\tilde{u}'_m(s))\,ds + \int_0^t |\tilde{\theta}'_m(s)|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\,k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\,k(\tilde{\theta}_m(0),\tilde{\theta}_m(0)) + \langle L'_1(t),\tilde{u}_m(t)\rangle - \langle L'_1(0),\tilde{u}_m(0)\rangle - \int_0^t \langle L''_1(s),\tilde{u}_m(s)\rangle\,ds$$

$$+ \langle L_2(t),\tilde{\theta}_m(t)\rangle - \langle L_2(0),\tilde{\theta}_m(0)\rangle - \int_0^t \langle L'_2(s),\tilde{\theta}_m(s)\rangle\,ds.$$

Les trois termes à gauche étant positifs on a :

$$\int_0^t a(\tilde{u}'_m(s),\tilde{u}'_m(s))ds + \int_0^t |\tilde{\theta}'_m(s)|_2^2\,ds + \frac{1}{2}\,k(\tilde{\theta}_m(t),\tilde{\theta}_m(t)) \leq$$

$$\leq c_1||\theta_o||_2^2 + c_2||L'_1(t)||_{1*}||\tilde{u}_m(t)||_1 + c_3||L'_1(0)||_{1*}||\tilde{u}_o||_1 +$$

$$+ c_4\int_0^t ||L''_1(s)||_{1*}||\tilde{u}_m(s)||_1 ds + c_5||L_2(t)||_{2*}||\tilde{\theta}_m(t)||_2 + c_6||L_2(0)||_{2*}$$

$$+ c_7\int_0^t ||L'_2(s)||_{2*}||\tilde{\theta}_m(s)||_2\,ds \leq$$

$$\leq c_1[||\tilde{\theta}_o||_2^2 + ||u_o||_1^2 + ||L'_1(0)||_{1*}^2 + ||L_2(0)||_{2*}^2 + c_2||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + c_3||L'_1(t)||_{1*}^2$$

$$+ c_4||L_2(t)||_{2*}||\tilde{\theta}_m(t)||_2 + c_5\int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\,ds + c_6\int_0^t ||L''_1(s)||_{1*}^2\,ds +$$

$$+ c_7\int_0^t ||L'_2(s)||_{2*}^2\,ds + c_8\int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\,ds.$$

Utilisant encore une fois (2.12) et (2.15) on peut l'écrire :

$$(3.32)\quad \alpha_1 \int_0^t ||\tilde{u}_m'(s)||_1^2\, ds + \int_0^t |\tilde{\theta}_m'(s)|_2^2\, ds + \frac{1}{2}\alpha_2 ||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 \le$$

$$\le c_1[||\tilde{\theta}_o||_2^2 + ||\tilde{u}_o||_1^2 + ||L_1'(0)||_{1*}^2 + ||L_2(0)||_{2*}^2] + c_2||L_1'(t)||_{1*}^2 + c_3\int_0^t ||L_2'(s)||_{2*}^2 ds$$

$$+ c_4 \int_0^t ||L_1''(s)||_{1*}^2 ds + c_5||L_2(t)||_{2*}^2 + \frac{\alpha_2}{4}||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 + \frac{1}{2}\ |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 +$$

$$+ c_6[\int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds + ||\tilde{u}_m(t)||_1^2].$$

De $L_1'(t) = L_1'(0) + \int_0^t L_1''(s)\, ds$, $L_2(t) = L_2(0) + \int_0^t L_2'(s)\, ds$, s'obtient

$$||L_1'(t)||_{1*}^2 \le 2||L_1'(0)||_{1*}^2 + c\int_0^t ||L_1''(s)||_{1*}^2\, ds$$

$$||L_2(t)||_{2*}^2 \le 2||L_2(0)||_{2*}^2 + c\int_0^t ||L_2'(s)||_{2*}^2\, ds$$

et (3.32) devient :

$$\int_0^t ||\tilde{u}_m'(s)||_1^2\, ds + \int_0^t |\tilde{\theta}_m'(s)|_2^2\, ds + ||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 \le$$

$$\le c_1[||\tilde{\theta}_o||_2^2 + ||\tilde{u}_o||_1^2 + ||L_1'(0)||_{1*}^2 + ||L_2(0)||_{2*}^2] + c_2(\int_0^t [||L_1''(s)||_{1*}^2 + ||L_2'(s)||_{2*}^2]ds)$$

$$+ c_3\ [\int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds + ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2\ ]$$

Soit $|||L'|||^2 = \int_0^T [||L_1''(s)||_{1*}^2 + ||L_2'(s)||_{2*}^2]\, ds$

de façon que :

$$\int_0^t ||\tilde{u}_m'(s)||_1^2\, ds + \int_0^t |\tilde{\theta}_m'(s)|_2^2\, ds + ||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 \le$$

$$\le c_1\ [\ ||\tilde{\theta}_o||_2^2 + ||\tilde{u}_o||_1^2 + ||L_1'(0)||_{1*}^2 + ||L_2(0)||_{2*}^2 + |||\ L'|||^2\ ] +$$

$$+ c_2\ [\ \int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds + \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds + ||\tilde{u}_m(t)||_1^2 + |\tilde{\theta}_m(t)|_2^2\ ].$$

D'après (3.31), il existe une constante C, indépendante de m telle que

$$||\tilde{u}_m(t)||_1^2 \leq C \qquad \text{et} \qquad \int_0^t ||\tilde{u}_m(s)||_1^2\, ds \leq C, \qquad 0\leq t\leq T.$$

$$|\tilde{\theta}_m(t)|_2^2 \leq C \qquad \text{et} \qquad \int_0^t ||\tilde{\theta}_m(s)||_2^2\, ds \leq C, \qquad 0\leq t\leq T.$$

Donc, finalement, on trouve une constante M, indépendante de m, telle que :

$$(3.34) \qquad \int_0^t ||\tilde{u}'_m(s)||_1^2\, ds + \int_0^t |\tilde{\theta}'_m(s)|_2^2\, ds + ||\tilde{\theta}_m(t)||_2^2 \leq M, \qquad 0\leq t\leq T$$

d'où la conclusion

(3.35)
- $\tilde{u}'_m$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;\ V_1)$
- $\tilde{\theta}'_m$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;\ H_2)$
- $\tilde{\theta}_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;\ V_2)$.

lorsque $m \to +\infty$ □

Unifiant (3.31) et (3.35) on obtient :

(3.36)
- $\tilde{u}_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;\ V_1)$
- $\tilde{u}'_m$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;\ V_1)$
- $\tilde{\theta}_m$ demeure dans un borné de $L^\infty(0,T\ ;\ V_2)$
- $\tilde{\theta}'_m$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;\ H_2)$

lorsque $m \to +\infty$. □

3.2.3. - $\tilde{u}$ et $\tilde{\theta}$ comme limite de $\tilde{\theta}_m$, $\tilde{u}_m$.

On déduit de (3.36) l'existence des sous-suites $\{\tilde{u}_\nu\}$, $\{\tilde{\theta}_\nu\}$ telles que :

$$(3.37) \qquad \begin{array}{lll} \tilde{u}_\nu \to \tilde{u} & \text{dans } L^\infty(0,T;\ V_1) & \text{faible-étoile}^{(1)} \\ \tilde{u}'_\nu \to \tilde{u}' & \text{dans } L^2(0,T;\ V_1) & \text{faible} \\ \tilde{\theta}_\nu \to \tilde{\theta} & \text{dans } L^\infty(0,T;\ V_2) & \text{faible-étoile} \\ \tilde{\theta}'_\nu \to \tilde{\theta}' & \text{dans } L^2(0,T;\ H_2) & \text{faible} \end{array}$$

lorsque $\nu \to +\infty$.

(1) $\int_0^T <\tilde{u}_\nu(t), z(t)> dt \to \int_0^T <\tilde{u}(t), z(t)> dt$, pour tout $z \in L^1(0,T;V'_1)$

Alors, $\tilde{u}$ et $\tilde{\theta}$ vérifient bien (3.13) et il reste à vérifier qu'ils sont solution de (3.12).

Soit j fixé et $\nu > j$. Alors (3.20) est valable avec $m = \nu$ et

(3.38) $\quad z = z_j(t) = z(t)\, w_j^2 \quad , \quad z \in C^1([0,T]),\ z(T) = 0.$

(3.39) $\quad v = v_j(t) = \psi(t)\, w_j^1 \quad , \quad \psi \in C^1([0,T]),\ \psi(T) = 0.$

qui vient :

$$(3.40)\quad \begin{cases} a(\tilde{u}_\nu(t),v_j(t)) - m(\tilde{\theta}_\nu(t),v_j(t)) - \langle L_1(t),\ v_j(t)\rangle = 0 \\ (\tilde{\theta}'_\nu(t),\ z_j(t))_2 + k(\tilde{\theta}_\nu(t),z_j(t)) + m(z_j(t),\tilde{u}'_\nu(t)) - \langle L_2(t),z_j(t)\rangle = 0 \\ \forall\ z_j,\ v_j \text{ donnés par (3.38) - (3.39).} \end{cases}$$

Puisque

$$(\tilde{\theta}'_\nu(t),z_j(t))_2 = \frac{d}{dt}\,[(\tilde{\theta}_\nu(t),z_j(t))_2] - (\tilde{\theta}_\nu(t),z'_j(t))_2$$

intégrant (3.40) sur (0,T) on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T [a(\tilde{u}_\nu(t),v_j(t)) - m(\tilde{\theta}_\nu(t),v_j(t)) - \langle L_1(t),v_j(t)\rangle]\ dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^T [-(\tilde{\theta}_\nu(t),z'_j(t))_2 + k(\tilde{\theta}_\nu(t),z_j(t)) + m(z_j(t),\tilde{u}'_\nu(t)) - \langle L_2(t),z_j(t)\rangle]\ dt = \\ = (\tilde{\theta}_o,z_j(0)) \quad \forall\ z_j,v_j \text{ donnés par (3.38)-(3.39).} \end{cases}$$

Grâce à (3.37) on peut passer à la limite dans ν et :

$$(3.41)\begin{cases} \displaystyle\int_0^T [a(\tilde{u}(t),w_j^1) - m(\tilde{\theta}(t),w_j^1) - \langle L_1(t),w_j^1\rangle]\ \psi(t)\ dt = 0, \\ \displaystyle\int_0^T -(\tilde{\theta}(t),w_j^2)\, z'(t)\,dt + \int_0^T [k(\tilde{\theta}(t),w_j^2) + m(w_j^2,\tilde{u}'(t)) - \langle L_2(t),w_j^2\rangle] z(t)\ dt = \\ = (\tilde{\theta}_o,w_j^2)\ z(0) \quad \forall z,\psi \in C^1([0,T]),\ z(T) = \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Puisque (3.41) est valable pour $z,\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ on a au sens des distributions sur (0,T)

$$\begin{cases} a(\tilde{u}(t),w_j^1) - m(\tilde{\theta}(t),w_j^1) = \langle L_1(t),w_j^1\rangle \\ \dfrac{d}{dt}\,[(\tilde{\theta}(t),w_j^1)_2] + k(\tilde{\theta}(t),w_j^2) + m(w_j^2,\ \tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t),w_j^2\rangle \end{cases}$$

Les combinaisons linéaires finies des w_j^i sont denses dans V_i, donc au sens des distributions sur $(0,T)$

$$(3.42)\begin{cases} a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle, & \forall v \in V_1 \\ \frac{d}{dt}\,[(\tilde{\theta}(t),z)_2] + k(\tilde{\theta}(t),z) + m(z,\tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t),z\rangle, & \forall z \in V_2 \end{cases}$$

Mais comme $\tilde{\theta}' \in L^2(0,T;\ H_2)$, (3.42) équivaut à

$$(3.43)\quad\begin{cases} a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v) = \langle L_1(t),v\rangle, \ \forall v \in V_1. \\ (\tilde{\theta}'(t),z)_2 + k(\tilde{\theta}(t),z) + m(z,\tilde{u}'(t)) = \langle L_2(t),z\rangle \quad \forall z \in V_2 \end{cases}$$

de sorte que $\tilde{u},\tilde{\theta}$ vérifient (3.12), les conditions initiales étant vérifiée comme on le voit ci-dessous. □

Soit $z \in C^1([0,T])$, $z(T) = 0$. D'après (3.43), pour $j > 0$

$$\int_0^T [(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^2)_2 + k(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^2) + m(z(t)w_j^2,\tilde{u}'(t))]\, dt =$$
$$= \int_0^T \langle L_2(t), z(t)w_j^2\rangle\, dt$$

et encore, car

$$(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^2)_2 = \frac{d}{dt}\,[(\tilde{\theta}(t),z(t)w_j^2)_2] - (\tilde{\theta}(t),z_j'(t)w_j^2)_2,$$

$$(3.44)\begin{cases} \int_0^T [-(\tilde{\theta}(t),z_j'(t)w_j^2)_2 + k(\tilde{\theta}(t),z(t)w_j^2) + m(z(t)w_j^2,\tilde{u}'(t)) - \langle L_2(t),z_j(t)w_j^2\rangle]\, dt = \\ = (\tilde{\theta}(0),z(0)w_j^2)_2 \qquad \forall z \in C^1([0,T]),\quad z(T) = 0. \end{cases}$$

Comparant (3.44) et (3.41) on voit que :

$$(\tilde{\theta}(0),w_j^2)_2 z(0) = (\tilde{\theta}_0,w_j^2)_2 z(0) \quad \forall z \in C^1([0,T]), z(T)=0, \quad \forall j > 0.$$

ce qui donne bien $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$.

Dérivant dans (3.43)-$L_1 \in C^1([0,T];V_1')$- on a :

$$(3.45)\qquad \frac{d}{dt}\,[a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v)] = \langle L_1'(t),v\rangle \qquad \forall v \in V_1$$

Puisque $\tilde{u}' \in L^2(0,T;V_1)$ et $\tilde{\theta}' \in L^2(0,T;H_2)$, (3.45) équivaut à :

$$a(\tilde{u}'(t),v) - m(\tilde{\theta}'(t),v) = \langle L_1'(t),v\rangle, \ \forall v \in V_1.$$

Soit $z \in C^1([0,T])$, $z(T) = 0$ et $j > 0$. On aura :

(3.46) $$\int_0^T a(\tilde{u}'(t), z(t)w_j^1) - m(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^1) - \langle L_1'(t), z(t)w_j^1 \rangle \, dt = 0$$

et car

$$a(\tilde{u}'(t), z(t)w_j^1) = \frac{d}{dt}[a(\tilde{u}(t), z(t)w_j^1)] - a(\tilde{u}(t), z'(t)w_j^1).$$

$$m(\tilde{\theta}'(t), z(t)w_j^1) = \frac{d}{dt}[m(\tilde{\theta}(t), z(t)w_j^1)] - m(\tilde{\theta}(t), z'(t)w_j^1).$$

$$\langle L_1'(t), z(t)w_j^1 \rangle = \frac{d}{dt}[\langle L_1(t), z(t)w_j^1 \rangle] - \langle L_1(t), z'(t)w_j^1 \rangle$$

$$\int_0^T [-a(\tilde{u}(t), z'(t)w_j^1) + m(\tilde{\theta}(t), z'(t), w_j^1) + \langle L_1(t), z'(t)w_j^1 \rangle] \, dt =$$
$$= a(\tilde{u}(0), z(0)w_j^1) - m(\tilde{\theta}(0), z(0)w_j^1) - \langle L_1(0), z(0)w_j^1 \rangle$$

Grâce à la première équation de (3.43), le membre à gauche de (3.47) est nul, donc, puisque $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_o$:

$$a(\tilde{u}(0), w_j^1)\, z(0) = [m(\tilde{\theta}_o, w_j^1) + \langle L_1(0), w_j^1 \rangle]\, z(0), \quad \forall j > 0,$$
$$\forall z \in C^1([0,T]), \ z(T) = 0.$$

D'après l'hypothèse (3.17), le second membre de (3.48) est $a(\tilde{u}_o, w_j^1)z(0)$, et alors

$$a(\tilde{u}(0), w_j^1)z(0) = a(\tilde{u}_o, w_j^1)z(0), \ \forall j > 0, \ \forall z \in C^1([0,T]), z(T) = 0.$$

Finalement, on obtient $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_o$, car $|||u||| = a(u,u)^{1/2}$ est une norme dans V_1 équivalente à $\|\ \|_1$. □

3.2.4. Démonstration de l'unicité :

Il suffit de démontrer que si $L_1 \equiv 0$, $L_2 \equiv 0$, $\tilde{u}_o = 0$, $\tilde{\theta}_o = 0$, alors la seule solution de (3.12) vérifiant (3.13) est $\tilde{\theta} = 0$, $\tilde{u} = 0$. Soit, donc, $\tilde{u}$ et $\tilde{\theta}$ satisfaisant (3.13) et

(3.49)
$$(a(\tilde{u}(t),v) - m(\tilde{\theta}(t),v) = 0, \quad \forall v \in V_1$$
$$(\tilde{\theta}'(t),z)_2 + k(\tilde{\theta}(t),z) + m(z,\tilde{u}'(t)) = 0, \quad \forall z \in V_2$$
$$\tilde{\theta}(0) = 0, \ \tilde{u}(0) = 0.$$

Alors, il est loisible de prendre $v = \tilde{u}'(t), z\tilde{\theta}(t)$, donc :

$$a(\tilde{u}(t),\tilde{u}'(t)) - m(\tilde{\theta}(t),\tilde{u}'(t)) = 0$$

$$(\tilde{\theta}'(t),\tilde{\theta}(t))_2 + k(\tilde{\theta}(t),\tilde{\theta}(t)) + m(\tilde{\theta}(t),\tilde{u}'(t)) = 0$$

et en additionnant :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[a(\tilde{u}(t),\tilde{u}(t))] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{\theta}(t)|_2^2 + k(\tilde{\theta}(t),\tilde{\theta}(t)) = 0, \quad 0\leq t\leq T$$

Par intégration dans $(0,T)$ on trouve :

$$\frac{1}{2}\,a(\tilde{u}(t),\tilde{u}(t)) + \frac{1}{2}|\tilde{\theta}(t)|_2^2 + \int_0^t k(\tilde{\theta}(s),\tilde{\theta}(s))\,ds = 0, \qquad 0\leq t\leq T.$$

Tous les termes à gauche étant positifs, à fortiori

$$a(\tilde{u}(t),u(t)) = 0, \quad |\tilde{\theta}(t)| = 0, \qquad 0\leq t\leq T$$

et $\quad \tilde{u} = 0,\ \tilde{\theta} = 0.$ □

REFERENCES

ADAMS, R.A.

[1] Sobolev Spaces. Academic Press New York, 1975.

CARLSON, DONALD E.

[1] Linear thermoelasticity. Enciclopedia of physics, Vol VI/a2. Springer Verlag, 1972.

CIARLET, P.G.

[1] The finite element method for elliptic problems. North-Holland, 1978.

DAFERMOS, C.M.

[1] On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol 29, 1967.

DUVAUT, G.

[1] Free boundary problem connected with thermoelasticity and unilateral contact (A paraître).

DUVAUT, G - LIONS, J.L.

[1] Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris 1972.

[2] Inéquations en thermoélasticité et magnetohydrodinamique. Arch. Rat. Mech. Anal. vol 46, n°4, 1972.

LANDAU, L. - LIPSHITZ, E.

[1] Théorie d'élasticité. Miv. Moscou 1967.

LIONS, J.L.

[1] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites Springer Verlag. Collection Jaume t. III. 1961.

[2] Control optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris 1968.

LIONS, J.L. - MAGENES, E.

[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1,2. Dunod Paris 1968.

MANDEL, G.

[1] Cours de mécanique des milieux continus. Tome 2 Mécanique des solides Gauthier-Villars, 1966.