



Quelques méthodes numériques en élastoplasticité

A. Bermudez, J.M. Viano Rey

► **To cite this version:**

A. Bermudez, J.M. Viano Rey. Quelques méthodes numériques en élastoplasticité. RR-0076, INRIA. 1981. inria-00076485

HAL Id: inria-00076485

<https://hal.inria.fr/inria-00076485>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

Rapports de Recherche

N° 76

**QUELQUES
MÉTHODES NUMÉRIQUES
EN ÉLASTOPLASTICITÉ**

Alfredo BERMUDEZ
Juan Manuel VIAÑO

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tel 954 90 20

Mai 1981

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLACITE

Alfredo BERMUDEZ et Juan Manuel VIAÑO

Résumé :

On étudie dans cet article quelques méthodes pour la résolution numérique des équations qui donnent les déformations dans un milieu élastoplastique soumis à la loi de Hencky.

On fait une description des algorithmes itératifs et on montre qu'ils convergent vers le champ des contraintes.

Ensuite, on présente leurs performances dans le cas typique du problème de la flèche avec le critère de Von-Mises. Les essais numériques sont faits pour un schéma d'éléments finis P_1 -Lagrange, les solveurs de la bibliothèque MODULEF en élasticité linéaire étant utilisés.

Abstract :

In this paper we study some methods for numerical resolution of deformation equation in elasto-plastic medium subject to the Hencky's law.

We describe the iteratif algorithms whose the convergence to stress field is showed.

Then, their performances are given in a typical example with Von-Mises plasticity convex. P_1 -Lagrange Finite Element scheme is implemented by using MODULEF's library for numerical computation.

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

A. BERMUDEZ (*) et J.M. VIAÑO (**)(*)

1.- Introduction

Nous présentons quelques méthodes pour la résolution numérique des équations qui donnent les déformations d'un corps, ayant un comportement élastoplastique régi par la loi de Hencky.

Nous reprenons le cadre de DUVAUT-LIONS [4] et MERCIER [8]:

On considère un milieu continu situé initialement dans un ouvert Ω de frontière Γ "régulière", et sans contrainte. Supposons qu'il est fixé sur une partie $\Gamma_U \subset \Gamma$ et qu'il est soumis à des forces distribuées $f(x)$ dans Ω , et surfaciques $F(x)$ sur la partie de la frontière $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_U$.

Si σ désigne le champ de contraintes, on a les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i &= 0 & \text{dans } \Omega, & \quad i=1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j &= F_i & \text{sur } \Gamma_F & \quad i=1, \dots, N \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_U & \end{aligned} \quad (1.1)$$

Soit $\epsilon(u)$ le tenseur des déformations linéarisé, c'est à dire:

(*) Departamento de Ecuaciones Funcionales. Univ. Stantiago-ESPAGNE.
 (**) Travail effectué alors que l'auteur était stagiaire à l'INRIA
 MODULEF, 78153 ROCQUENCOURT. FRANCE.

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (1.2)$$

En élasticité parfaite la loi de comportement (linéarisé) est de la forme (loi de Hooke généralisée):

$$\Lambda \sigma(x) = \epsilon(u(x)) \quad (1.3)$$

où Λ est un automorphisme symétrique de \mathbb{R}^{N^2} . Or, si le comportement est elastoplastique, (1.3) n'est plus valable car, dans ce cas, σ doit appartenir à un certain sous-ensemble de \mathbb{R}^{N^2} .

Plus précisément, soit B un ensemble convexe, fermé dans \mathbb{R}^{N^2} . Désignons par P_B la projection sur B dans \mathbb{R}^{N^2} pour la norme:

$$|\tau| = |\Lambda \tau \cdot \tau|^{1/2} \quad (1.4)$$

alors la loi de Hencky, donnant le comportement elastoplastique parfait, s'écrit

$$\sigma(x) = P_B \Lambda^{-1} \epsilon(u(x)) \quad (1.5)$$

On a donc à résoudre les deux équations (1.1) et (1.5) et à ce but nous allons définir un cadre fonctionnel approprié.

Soient H l'espace vectoriel

$$H = \{ \tau = \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad 1 \leq i, j \leq N \} \quad (1.6)$$

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

et K le sous-ensemble convexe:

$$K = \{\tau \in H : \tau(x) \in B \text{ p.p. dans } \Omega\} \quad (1.7)$$

On va considérer par la suite la norme en H définie par le produit scalaire:

$$(\sigma, \tau) = \langle \Lambda \sigma, \tau \rangle \quad (1.8)$$

où

$$\langle e, \tau \rangle = \int_{\Omega} e(x) : \tau(x) dx \quad (1.9)$$

Soit V (espace des déplacements cinématiquement admissibles) défini par:

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^N : v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\} \quad (1.10)$$

avec la topologie hilbertienne usuelle dans $(H^1(\Omega))^N$.

De cette façon ϵ est un opérateur linéaire continu de V dans H . Nous désignons par ϵ^* l'opérateur de H dans V' qui vérifie

$$\langle \sigma, \epsilon(v) \rangle = \langle \epsilon^*(\sigma), v \rangle_{V', V} \quad (1.11)$$

$$\forall v \in V, \quad \forall \sigma \in H$$

Finalement, pour $f \in (L^2(\Omega))^N$ et $F \in (L^2(\Gamma_F))^N$ on considère la forme linéaire, continue sur V :

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_F} F \cdot v d\Gamma \quad (1.12)$$

On peut démontrer maintenant (théorème des "travaux virtuels") que l'ensemble des contraintes statiquement admissibles, c'est à dire, l'ensemble des solutions de (1.1) est $E(L)$ donné par:

$$E(L) = \{\tau \in H : \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle = L(v) \quad \forall v \in V\} \quad (1.13)$$

et ensuite que si σ vérifie (1.1) et (1.5), alors elle est aussi la solution du "problème aux contraintes"

$$\inf_{\tau \in K \cap E(L)} \frac{1}{2} \|\tau\|^2 \quad (1.14)$$

(voir MERCIER [8]).

La résolution numérique a été abordé dans MERCIER [8]. Il utilise un problème dual, ("problème aux déplacements"), pour lequel il propose différents algorithmes (gradient conjugué non linéaire, gradient avec opérateur auxiliaire, pénalisation-dualité).

Le plan de cet article est le suivant: premièrement, après quelques notions d'opérateurs maximaux monotones, nous rappelons -bien que présenté d'une façon différente- la méthode de pénalisation-dualité utilisée par MERCIER. Ensuite nous donnons deux autres algorithmes dont on démontre des théorèmes de convergence forte "en contraintes". Finalement nous présentons quelques résultats numériques per

mettant de comparer leurs performances.

2.- Rappels d'opérateurs maximaux monotones. (voir BREZIS [3], PAZY [9] pour une exposée générale).

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert W . On désigne par A^ω l'opérateur "perturbé" $A - \omega I$, ω étant un réel; si $\lambda < 0$ et $\lambda\omega < 1$, on peut définir l'approximation Yosida de A^ω par:

$$A_\lambda^\omega = \frac{I - J_\lambda^\omega}{\lambda} \quad (2.1)$$

où I désigne l'opérateur identité dans W et J_λ^ω est la résolvante de A^ω , c'est à dire:

$$J_\lambda^\omega = (I + \lambda A^\omega)^{-1} \quad (2.2)$$

Si $\omega = 0$ nous écrirons simplement A_λ . On peut démontrer l'égalité:

$$A_\lambda^\omega(x) = \frac{1}{1 - \lambda\omega} A \frac{\lambda}{1 - \lambda\omega} \left(\frac{1}{1 - \lambda\omega} x \right) - \frac{\omega}{1 - \lambda\omega} x \quad (2.3)$$

D'autre part, on a l'équivalence (voir BERMUDEZ-MORENO [1]):

$$y \in A^\omega(x) \text{ si et seulement si } y \in A_\lambda^\omega(x + \lambda y) \quad (2.4)$$

avec $\lambda > 0$ et $\lambda\omega < 1$

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

Exemple 2.1. - Soit $\phi: W \rightarrow (-\infty, \infty]$ une fonctionnelle convexe, semi-continue inférieurement et propre. Il est bien connu que sa sous-différentielle est un opérateur maximal monotone. Par ailleurs, la fonctionnelle

$$\phi_\lambda(x) = \inf_{y \in W} \left\{ \phi(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x-y\|_W^2 \right\} \quad (2.5)$$

est différentiable et on peut démontrer que

$$(\partial\phi)_\lambda(x) = \phi'_\lambda(x) \quad \forall x \in W \quad (2.6)$$

En particulier, si C désigne un convexe, fermé dans W , l'opérateur face de C , défini par (ZARANTONELLO - |10|):

$$F_C(x) = \{y \in C: (x,y)_W = \sup_{z \in C} (x,z)_W\} \quad (2.7)$$

est la sous-différentielle de la fonction d'appui de C (convexe, s.c.i., propre):

$$j_C(x) = \sup_{z \in C} \{(x,z)_W\} \quad (2.8)$$

On peut démontrer que son approximation Yosida, $(F_C)_\lambda$ est donnée par:

$$(F_C)_\lambda(x) = P_C\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (2.9)$$

et, par conséquent, (2.6) entraîne:

$$(j_C)_1'(x) = P_C(x) \quad (2.10)$$

Finalement, de la définition de $(j_C)_1(x)$ on déduit l'expression:

$$(j_C)_1(x) = (x, P_C(x))_W - \frac{1}{2} |P_C(x)|_W^2 \quad (2.11)$$

3.- Les algorithmes

Notons tout d'abord que les deux conditions (1.5) et $\sigma \in E(L)$ sont équivalentes à la seule equation:

$$\varepsilon^* P_K \Lambda^{-1} \varepsilon(u) = L \quad (3.1)$$

Or, en tenant compte de (2.10), on voit bien que (3.1) exprime la condition pour que u minimise la fonctionnelle dans V :

$$\psi(v) = (j_K)_1(\Lambda^{-1} \varepsilon(v)) - L(v) \quad (3.2)$$

Ce problème de minimisation est le problème dual considéré par MERCIER auquel nous renvoyons pour l'étude des questions d'existence et unicité.

Du point de vue numérique, le fait qu'il y apparait l'operateur ε , qui est mal conditionné, avec la fonctionnelle $(j_K)_1$, qui n'est pas quadratique, rend lente la convergence des methodes iteratives classiques du type gradient. Ce phenomène, apparaissant dans d'autres problèmes variationnels, a améné à des différents auteurs (voir GLOWINSKI-MARROCCO [6], GABAY-MERCIER [5], MERCIER [8],

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

MARROCCO [7], BERMUDEZ-MORENO [2]) à considérer d'autres algorithmes qui découplent la nonlinéarité et l'opérateur mal conditionné. À l'origine de ces méthodes il se trouve l'algorithme de pénalisation-dualité ou d'Uzawa pour le "Lagrangien augmenté" que nous allons introduire tout de suite pour notre problème d'élastoplasticité.

En utilisant l'équivalence (2.4), l'égalité

$$\sigma = P_K \Lambda^{-1} \varepsilon(u) \quad (3.3)$$

peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$\sigma = (F_K)_{1+\lambda} (\Lambda^{-1} \varepsilon(u) + \lambda \sigma) \quad (3.4)$$

parce que, si A est maximal monotone, on a le résultat:

$$(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu} \quad (3.5)$$

De cette façon, l'égalité (3.1) équivaut aux deux équations couplées:

$$\varepsilon * P_K \left(\frac{1}{1+\lambda} \Lambda^{-1} \varepsilon(u) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sigma \right) = L \quad (3.6)$$

$$\sigma = P_K \left(\frac{1}{1+\lambda} \Lambda^{-1} \varepsilon(u) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sigma \right) \quad (3.7)$$

Cette formulation donne immédiatement l'algorithme de pénalisation-dualité:

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

$$\varepsilon^* P_K \left(\frac{1}{1+\lambda_n} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \sigma^n \right) = L \quad (3.8)$$

$$\sigma^{n+1} = P_K \left(\frac{1}{1+\lambda_n} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \sigma^n \right) \quad (3.9)$$

Sous réserve des questions d'existence, il ne serait pas difficile à montrer la convergence forte de la suite $\{\sigma^n\}$ vers la solution du "problème aux contraintes", qui est même superlinéaire si $\lambda_n \rightarrow \infty$. Mais, malheureusement, on doit résoudre un problème non linéaire à chaque pas, qui est du même type que le problème de départ.

À fin de surmonter cette difficulté, MERCIER [8] propose une variante qui peut être écrite de la forme suivante, mettant en évidence son rapport avec l'algorithme de pénalisation-dualité: σ^0 et u^1 donnés

$$\sigma^n = P_K \left(\frac{1}{1+\lambda} \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sigma^{n-1} \right) \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^* \Lambda^{-1} \varepsilon(u^{n+1}) = \varepsilon^* \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \lambda (L - \varepsilon^* (2\sigma^n - \sigma^{n-1})) \quad (3.11)$$

Remarquons qu'à présent le problème (3.11) est bien linéaire; il s'agit d'un problème d'élasticité.

Nous donnons ensuite un autre algorithme "linéaire", qui a été étudié d'une façon générale dans BERMUDEZ-MORENO [2], bien que la convergence y était démontré sous des hypothèses qui ne sont pas vérifiées dans le cas présent.

Soit u une solution du "problème aux déplacements", supposant qu'elle existe; mettons

$$q = P_K(\Lambda^{-1}\epsilon(u)) - \omega\Lambda^{-1}\epsilon(u) \quad (3.12)$$

ω étant un réel. De (3.1) on déduit:

$$\omega\epsilon*\Lambda^{-1}(u) + \epsilon*q = L \quad (3.13)$$

D'autre part, en appliquant (2.4) à (3.12) on tire l'égalité:

$$q = (P_K)_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\epsilon(u) + \lambda q) \quad (3.14)$$

valable pour tout λ positif et tel que $\lambda\omega < 1$.

Encore (2.3) nous permet d'écrire (3.14) sous la forme:

$$q = \frac{1}{1-\lambda\omega} P_K \left(\frac{1}{1-\lambda\omega+\lambda} \Lambda^{-1}\epsilon(u) + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega+\lambda} q \right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega} (\Lambda^{-1}\epsilon(u) + \lambda q) \quad (3.15)$$

On est donc amené à considérer l'algorithme:

$q^0 \in H$ quelconque,

$$\omega\epsilon*\Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \epsilon*q^n = L \quad (3.16)$$

$$q^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-\lambda\omega} P_K \left(\frac{1}{1-\lambda\omega+\lambda} \Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \frac{1}{1-\lambda\omega+\lambda} q^n \right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega} (\Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \lambda q^n) \right] + (1-\rho_n)q^n \quad (3.17)$$

$$q^{n+1} = \rho_n q^{n+1/2} + (1-\rho_n)q^n$$

Proposition 3.1.- Supposons qu'il existe au moins une solution du problème aux déplacements. Alors pour

$\lambda = \frac{1}{2\omega}$, $\omega > 0$ quelconque et $\rho_n \in [\delta, 1]$ ($\delta > 0$ quelconque)

on a:

i] $\{q^n\}$ est une suite bornée

ii] La suite $\{\sigma^n\}$ définie par :

$$\sigma^{n+1} = P_K \left[\frac{1}{1-\lambda\omega+\lambda} (\lambda E^{-1} \varepsilon(u^n) + \lambda q^n) \right] \quad (3.18)$$

Converge fortement dans H vers la solution σ du problème aux contraintes.

Démonstration.- Nous allons utiliser le résultat suivant:

Lemme 3.1.- Soit A un opérateur maximal monotone fermément non-expansif, c'est à dire, vérifiant:

$$\text{si } y_i \in Ax_i, \quad i=1,2 \quad \text{alors } (y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq \|y_1 - y_2\|^2 \quad (3.19)$$

alors on a

$$\frac{1-2\lambda\omega}{\lambda^2} \|J_\lambda^\omega x - J_\lambda^\omega y\|^2 + \frac{2}{\lambda} \|A_\lambda^\omega x + \omega J_\lambda^\omega x - A_\lambda^\omega y - \omega J_\lambda^\omega y\|^2 + \|A_\lambda^\omega x - A_\lambda^\omega y\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \|x - y\|^2 \quad (3.20)$$

Demonstration. - Tout d'abord, de la définition de A_λ^ω on obtient:

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \lambda^2 \|A_\lambda^\omega x - A_\lambda^\omega y\|^2 + 2\lambda (A_\lambda^\omega x + \omega J_\lambda^\omega x - A_\lambda^\omega y - \omega J_\lambda^\omega y, J_\lambda^\omega x - J_\lambda^\omega y) + \\ &+ (1 - 2\lambda\omega) \|J_\lambda^\omega x - J_\lambda^\omega y\|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

D'autre part on a (voir PAZY [9]):

$$\begin{aligned} A_\lambda^\omega x + \omega J_\lambda^\omega x &\in A(J_\lambda^\omega x) \\ A_\lambda^\omega y + \omega J_\lambda^\omega y &\in A(J_\lambda^\omega y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ceci et la monotonie ferme donnent l'inégalité (3.20) à partir de (3.21).

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. On applique le lemme avec:

$$A = P_K, \quad x = \Lambda^{-1} \varepsilon(u) + \lambda q \quad \text{et} \quad y = \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \lambda q^n$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \|q + \omega J_\lambda^\omega (\Lambda^{-1} \varepsilon(u) + \lambda q) - q^{n+\frac{1}{2}} - \omega J_\lambda^\omega (\Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + \lambda q^n)\|^2 + \\ \|q - q^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq \|q - q^n\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|\Lambda^{-1} \varepsilon(u) - \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n)\|^2 + \\ + \frac{2}{\lambda} (\Lambda^{-1} \varepsilon(u) - \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n), q - q^n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

D'autre part, des égalités (3.13) et (3.16) on obtient facilement:

$$(\Lambda^{-1}(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n), q - q^n) = -\omega \|\Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n)\|^2$$

Avec ceci, (3.23) entraîne, pour $\lambda = \frac{1}{2\omega}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \left\| q + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + \lambda q) - q^{n+\frac{1}{2}} - \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + \lambda q^n) \right\|^2 \\ + \left\| q - q^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \left\| q - q^n \right\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left\| q - q^{n+1} \right\|^2 &= \rho_n^2 \left\| q - q^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + 2\rho_n(1-\rho_n) \\ & (q - q^{n+\frac{1}{2}}, q - q^n) + (1-\rho_n)^2 \left\| q - q^n \right\|^2 \\ & \leq \rho_n \left\| q - q^{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 + (1-\rho_n) \left\| q - q^n \right\|^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

En multipliant (3.24) par ρ_n et en utilisant (3.25) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_n}{\lambda} \left\| q + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + \lambda q) - q^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + \lambda q^n) \right\|^2 + \left\| q - q^{n+1} \right\|^2 \leq \left\| q - q^n \right\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $\{||q-q^n||\}$ est convergente ce qui avec (3.25) demontre

$$\{q^{n+1} + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \lambda q^n)\} \longrightarrow q + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\epsilon(u) + \lambda q)$$

dans H fort.

La proposition est maintenant conséquence du fait que l'on a:

$$q + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\epsilon(u) + \lambda q) = q + \omega \Lambda^{-1}\epsilon(u)$$

et

$$\begin{aligned} q^{n+1} + \omega J_{\lambda}^{\omega}(\Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \lambda q^n) &= \\ &= P_K \left(\frac{1}{1 - \lambda\omega + \lambda} \Lambda^{-1}\epsilon(u^n) + \lambda q^n \right). \end{aligned}$$

A fin d'introduire le dernier algorithme de cet article nous rappelons que la déformation plastique est défini comme:

$$p = \epsilon(u) - \Lambda P_K \Lambda^{-1} \epsilon(u) \tag{3.26}$$

QUELQUES METHODES NUMERIQUES EN ELASTOPLASTICITE

Mettons $q = \Lambda^{-1}p$, on a

$$\varepsilon^* \Lambda^{-1} \varepsilon(u) = L + \varepsilon^* q \quad (3.27)$$

$$\Lambda^{-1} \varepsilon(u) - q = P_K(\Lambda^{-1} \varepsilon(u)) \quad (3.28)$$

Nous allons utiliser deux fois l'équivalence (2.4) pour transformer l'égalité (3.28). La première fois avec $A = F_K$, $\omega = 0$ et $\lambda = 1$; on obtient:

$$\Lambda^{-1} \varepsilon(u) - q \in F_K(q) \quad (3.29)$$

Ensuite avec $A = (F_K)^{-1}$, $\omega = 0$ et $\lambda > 0$ quelconque, ce qui donne:

$$q = \frac{I - P_K}{\lambda} (\Lambda^{-1} \varepsilon(u) + (\lambda - 1)q) \quad (3.30)$$

La formulation (3.27) (3.30) suggère immédiatement l'algorithme:

$q^0 \in H$ donné, quelconque

$$\varepsilon^* \Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) = L + \varepsilon^* q^n \quad (3.31)$$

$$q^{n+1} = \frac{I - P_K}{\lambda} (\Lambda^{-1} \varepsilon(u^n) + (\lambda - 1)q^n) \quad (3.32)$$

Proposition 3.2.- Supposons que le problème aux déplacements a au moins une solution. Alors pour $\lambda = 0,5$ on a:

i) $\{q^n\}$ est une suite bornée

ii) La suite $\{\sigma^n\}$ définie par :

$$\sigma^n = P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + (\lambda-1)q^n) \quad (3.33)$$

converge vers la solution σ du problème aux contraintes dans H fort.

Démonstration. - On utilise l'inégalité classique:

$$\frac{1}{\lambda^2} \|J_\lambda x - J_\lambda y\|^2 + \|A_\lambda x - A_\lambda y\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \|x - y\|^2 \quad (3.34)$$

que l'on applique à $A = (F_K)^{-1}$ avec

$$x = \Lambda^{-1}\varepsilon(u) + (\lambda-1)q \quad \text{et} \quad y = \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + (\lambda-1)q^n$$

Rappelons que dans ce cas $J_\lambda = P_K$ (indépendant de λ), par conséquent on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \|P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + (\lambda-1)q) - P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + (\lambda-1)q^n)\|^2 \\ & + \|q - q^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \|\Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n)\|^2 + \\ & + \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} (\Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n), q - q^n) + \\ & + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 \|q - q^n\|^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

D'autre part des équations (3.27) et (3.31) on déduit

$$(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n), q - q^n) = \|\Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n)\|^2 \quad (3.36)$$

et utilisant ceci dans (3.35) on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2} \left\| P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + (\lambda-1)q) - P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + (\lambda-1)q^n) \right\|^2 \\ & + \left\| q - q^{n+1} \right\|^2 \leq \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2(\lambda-1)}{\lambda^2} \right) \left\| \Lambda^{-1}\varepsilon(u) - \Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) \right\|^2 \\ & + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} \right)^2 \left\| q - q^n \right\|^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Pour $\lambda = 0,5$ cette inégalité montre que la suite :

$\{ \|q - q^n\| \}$ converge, donc $\{q^n\}$ est bornée.

Ensuite (3.37) entraîne :

$$P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u^n) + (\lambda-1)q^n) \rightarrow P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + (\lambda-1)q)$$

d'où le résultat puisqu'on a :

$$P_K(\Lambda^{-1}\varepsilon(u) + (\lambda-1)q) = \Lambda^{-1}\varepsilon(u) - q = \sigma$$

4. - Résultats numériques

Nous avons repris l'exemple test dans MERCIER [8]. On considère une poutre encastrée à l'une de ses extrémités et chargée de l'autre par une force de densité surfacique F (Fig. 1). On néglige le poids de la poutre et l'on considère qu'il s'agit d'un problème en contraintes planes.

D'une façon plus précise on a pris:

$$\Omega =]0, 20[\times]-2, 2[$$

$$\Gamma_U = \{0\} \times]-2, 2[$$

$$F_F = \{20\} \times]-2, 2[\cup]0, 20[\times \{-2, 2\}$$

$$\vec{f} = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur }]0, 20[\times \{-2, 2\} \\ (-s, 0) & \text{sur } \{20\} \times]-2, 2[\end{cases}$$

La convexe de plasticité choisi est celui de Von Mises, c'est à dire:

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^{N^2} : \|\tau^D\| \leq k\sqrt{2}\}, \quad (k \text{ constante donnée})$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne et τ^D le déviateur de τ :

$$\tau^D = \tau - \frac{1}{N} \text{tr}(\tau) \delta$$

On a

$$P_B(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{si } |\tau^D| \leq k\sqrt{2} \\ \frac{\tau^D}{|\tau^D|} k\sqrt{2} + \frac{1}{N} \text{tr}(\tau) \delta & \text{si } |\tau| > k\sqrt{2} \end{cases}$$

Les constantes physiques sont les suivantes:

Module d'élasticité de Young: $E = 15 \times 10^5$

Coefficient de Poisson: $\nu = 0,33$

$$k = \frac{E}{2(1+\nu)} \sqrt{3} \cdot 10^{-3}$$

Finalement comme valeur du paramètre s apparaissant dans \vec{F} on a pris successivement $s = 150$ et $s = 160$.

Pour la résolution numérique on a utilisé une discretisation par éléments finis de Lagrange P_1 . La résolution du problème d'élasticité de chaque étape des différents algorithmes, ainsi que le calcul des contraintes ont été faits avec la bibliothèque MODULEF.

Le premier maillage choisi τ_h est représenté dans la figure 2. On a 120 éléments, 77 noeuds et 140 degrés de liberté. La numérotation des noeuds représentée dans la même figure, donne une matrice de rigidité dont la demie-largeur de bande est égale à 9.

Les figures 3 et 4 représentent les éléments plastiques pour $s = 160$ et $s = 150$ respectivement. Les tables 1 et 2 (respectivement 3 et 4) donnent le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme (3.16),(3.17) (respectivement (3.10) (3.11)) pour l'exemple choisi ci-dessus, avec le test d'arrêt, suivant ($\epsilon = 1$) :

$$(4.1) \quad \sum_T [|\sigma_{11}^{n+1} - \sigma_{11}^n| + |\sigma_{12}^{n+1} - \sigma_{12}^n| + |\sigma_{22}^{n+1} - \sigma_{22}^n|] < \epsilon$$

Pour un deuxième essai nous avons choisi le maillage de la figure 5 avec 576 éléments, 333 noeuds et 648 degrés de liberté. La numérotation des noeuds donne une matrice dont la demie-largeur de bande est 11. A la figure 6 les éléments plastiques obtenus pour $s = 150$ sont montrés.

Finalement, les tables 5 et 6 donnent le nombre d'itérations pour que les algorithmes (3.16), (3.17) et (3.10), (3.11) vérifient le test d'arrêt (4.1) avec $\epsilon = 10^2$ (les contraintes étant de l'ordre de 10^4).

Dans les tables sont ajoutés les temps de calcul pour une machine MULTICS HB 68 DPS2.

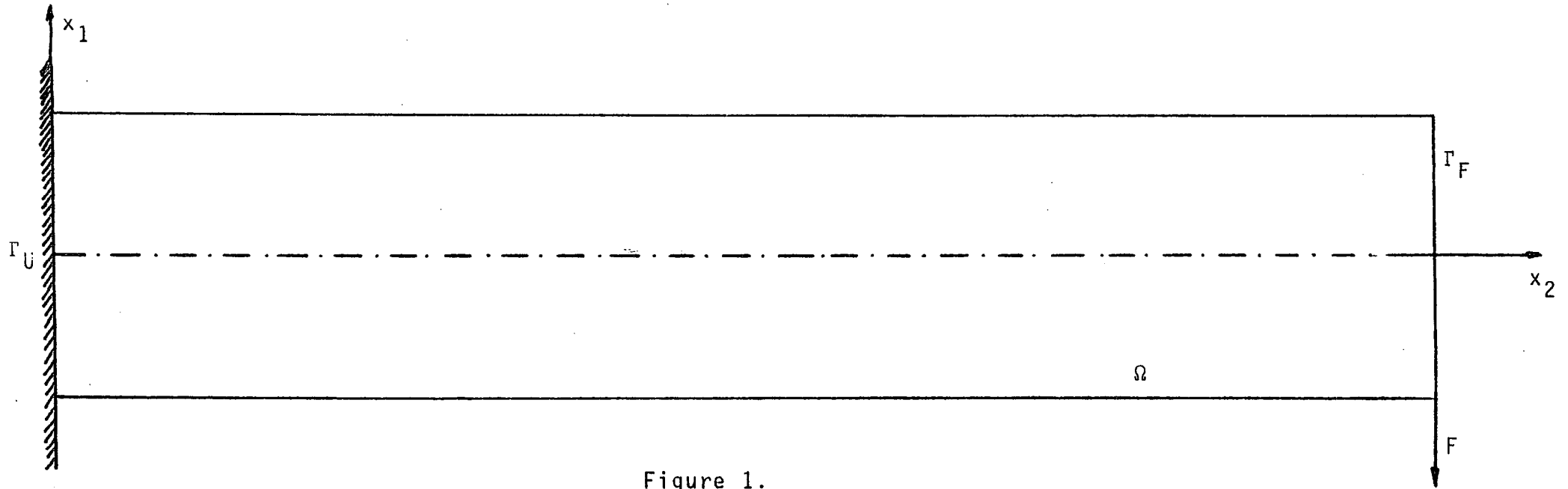


Figure 1.

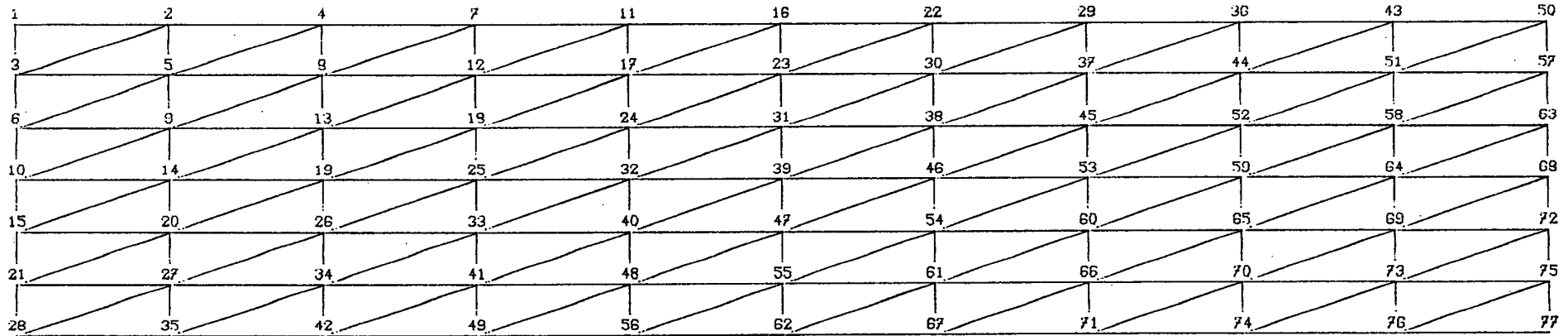


Figure 2. Maillage 1.

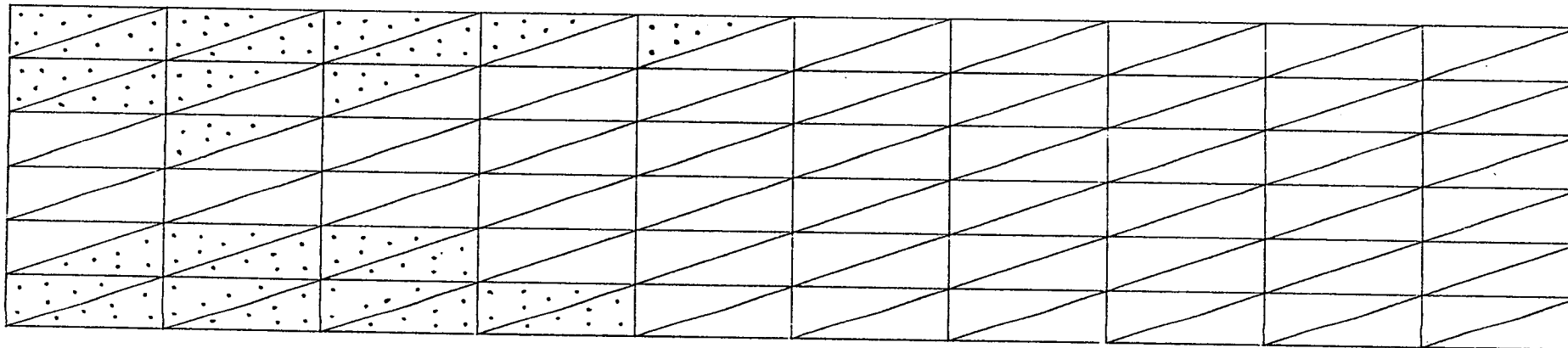


Figure 3 - Eléments plastiques (26) $s = 160$

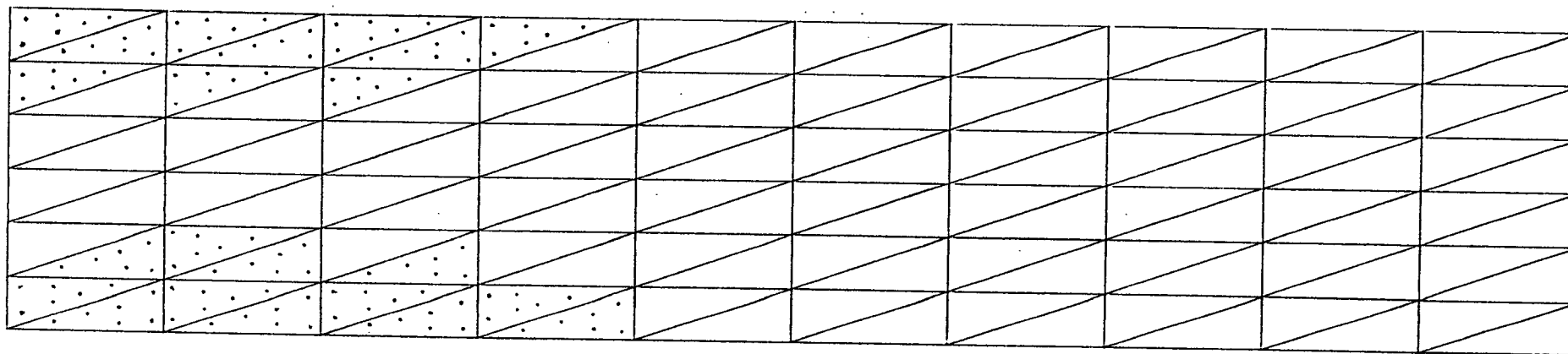


Figure 4 - Eléments plastiques (22) $s = 150$

$\omega \backslash \rho$	1.	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
1.	*	27	25	28	33	39	
0.9	*	29	21	24	27	33	40
0.8	*	29	15	16	18	21	24
0.7	*	30	16	16	20	25	31
0.6	*	31	24	20	24	29	
0.5	*	31	20	24	28	27	
0.4	*	30	24	27			

Table 1.- Nombre d'itérations. Algorithme (3.16) (3.17).

s=150. Maillage 1. Temps de calcul pour 15 itérations :
115 secondes.

$\omega \backslash \rho$	1.	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
1.	*	31	33	38	44		
0.9	*	29	29	33	38		
0.8	*	29	23	27	31	37	
0.7	*	30	18	21	24	28	34
0.6	*	30	20	23	26	26	33
0.5	*	31	24	22	27	33	41
0.4	*		28	27	32		48

Table 2.- Nombre d'itérations. Algorithme (3.16) (3.17).

s=160. Maillage 1.

(*) En 500 itérations l'erreur est encore supérieure à 10^2 , les éléments plastiques obtenus étant déjà les mêmes.

λ	Itérations
1.	42
1.5	28
2.	23
2.5	29
3.	35

Table 3.- Nombre d'itérations. Algorithme (3.10) (3.11).

s=150. Maillage 1. Temps de calcul pour 23 itérations :
209 secondes.

λ	Itérations
1.	55
1.8	30
2.	28
2.5	34
3.	40

Table 4.- Nombre d'itérations. Algorithme (3.10) (3.11).

s=160. Maillage 1.

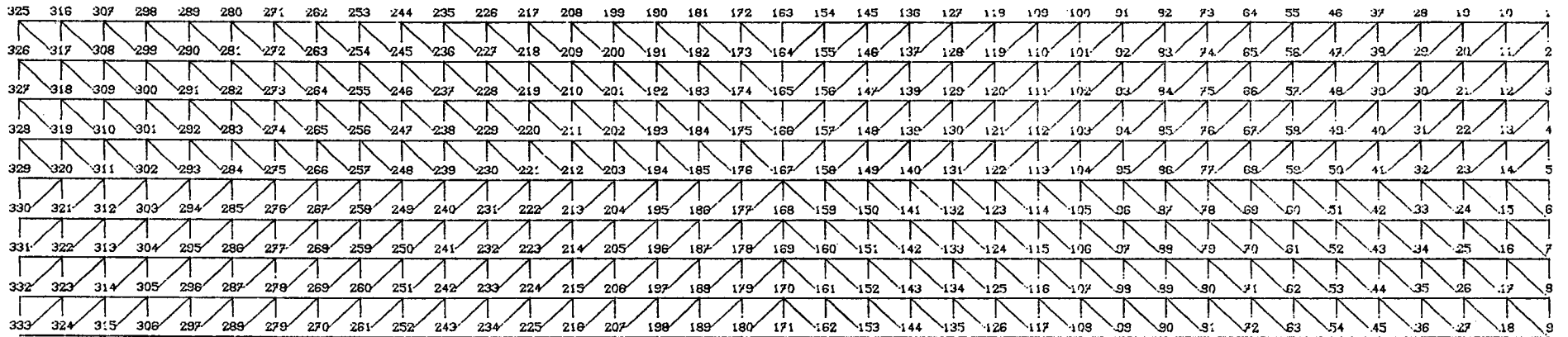


Figure 5. Maillage 2.

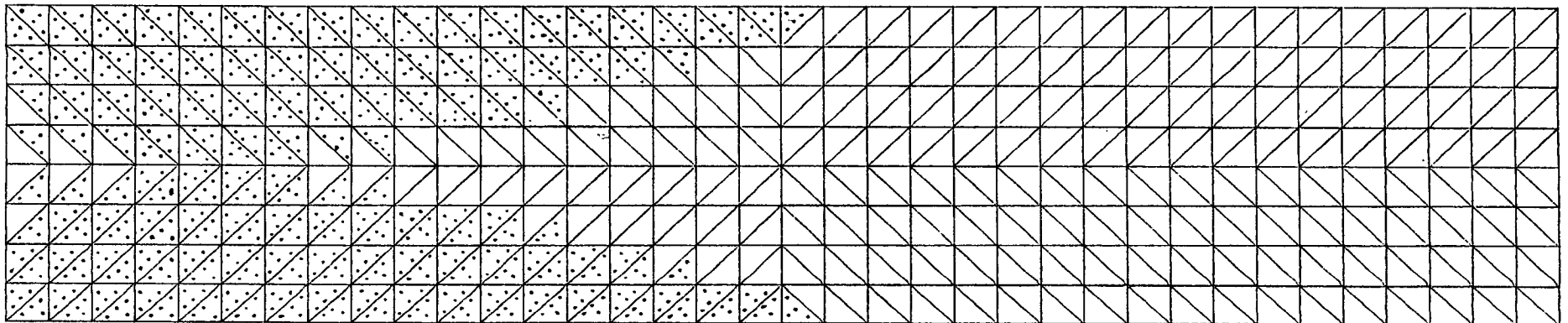


Figure 6. Eléments plastiques (210) $s = 150$

$\omega \backslash \rho$	1.	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
0.8	*	101	112	125	141	163	
0.7	*	90	99	111	125		
0.6	*	78	86	96	109	127	
0.5	*	65	72	81			
0.4	*	51	56				
0.3	*	32	35				
0.2	*	37	41				
0.1	*						

Table 5. Nombre d'itérations. Algorithme (3.16).(3.17).
 $s = 150$. Maillage 2. Temps de calcul pour 32 itérations :
 1064 secondes.

λ	Itérations
1.5	142
2.	110
2.5	88
3.	70
3.5	53
4.	55
4.5	56

Table 6. Nombre d'itérations. Algorithme (3.10).(3.11)
 $s = 150$. Maillage 2. Temps de calcul pour 53 itérations :
 1848 secondes.

(*) En 200 itérations l'erreur est encore supérieure à 10^3 ;
 les éléments plastiques obtenus étant déjà les mêmes.

Bibliographie.-

- |1| A.BERMEDEZ, C.MORENO. "Application of pursuit method to optimal control Problems". *Applied Mathematics and optimization*. (à paraître).
- |2| A.BERMEDEZ, C.MORENO. "Duality methods for solving - variational inequalities". *Computer and Mathematics with applications*, 7, 43-58 (1981).
- |3| H.BREZIS. "Opérateurs maximaux monotones et semi-
groups de contraction dans les espaces de Hil-
bert". North Holland (1973).
- |4| G.DUVAUT-J.L.LIONS. "Les Inéquations en Mécanique et
en Physique". Dunod (1972).
- |5| D.GABAY, B.MERCIER. "A dual algorithm for the solu-
tion of non-linear variational problems via fi-
nite element approximation". *Computers and Ma-
thematics with Applications*, 2, 17-40 (1976).
- |6| R.GLOWINSKI, A.MARROCCO. "Sur l'approximation par -
éléments finis d'ordre 1 et la résolution par
pénalisation dualité d'une classe de problèmes
de Dirichlet non-linéaires". R.A.I.R.O. 41-76
(1975).
- |7| A.MARROCCO. "Expériences numériques sur des problè-
mes non-linéaires résolus par éléments finis -
et Lagrangien Augmenté". *Rapport de Recherche
n°309 IRIA-LABORIA*.
- |8| B.MERCIER. "Sur la théorie et l'analyse numérique de
problèmes de plasticité". Thèse d'Etat. Univer-
sité Paris VI (1977).

- |9| A.PAZY. "Semi-groups of nonlinear contractions in - Hilbert space". *Problems of nonlinear Analysis* C.I.M.E. Ed. Cremonese (1971).
- |10| E.H.ZARANTONNELLO. "Projections on convex sets in - Hilbert space and spectral theory". *Contributions to nonlinear Functional Analysis*. Academic Press (1971).

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

