Une méthode d'éléments finis mixtes non conforme en vitesse pour le problème de Stokes tridimentionnel

Vitoriano Ruas

IRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 71

UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS MIXTES NON CONFORMES EN VITESSE POUR LE PROBLÈME DE STOKES TRIDIMENSIONNEL

Vitoriano RUAS

Avril 1981

ERRATA

Rapport de Recherche n° 71

Page 6, 10e ligne : U^G au lieu de U et U_h^G au lieu de U_h .

14e ligne : U_h^G au lieu de V_h .

Page 7, formule (2.7) : $\inf\limits_{q_h \in Q_h} \rfloor p-q_h \lceil$ au lieu de $\inf\limits_{v_h \in U_h} \rfloor p-q_h \lceil$.

Page 12, 13 et 14 : k au lieu de ℓ .

Page 14, 5e et 6e lignes : D'autre part on a forcément

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \subset \partial K} \int_F \left(\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} - \pi_F \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\right) \cdot \pi_F \underset{\sim}{w}_h \, ds \quad \forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h .$$

Page 14, 8e, 10e et 14e lignes : π_F au lieu de r_h et r_F,

et $\pi_{\hat{F}}$ au lieu de $r_{\hat{F}}$.

Page 15, 17e ligne : polyèdre au lieu de polygone .

UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS MIXTES NON CONFORMES EN VITESSE POUR LE PROBLEME DE STOKES TRIDIMENSIONNEL

Vitoriano RUAS

RESUME

On donne une généralisation tridimensionnelle de l'élément triangulaire $P_2 \times P_0$ standard, pour la formulation vitesse-pression du problème de Stokes. Vus sous l'angle de cette généralisation, les résultats de convergence que l'on obtient pour les deux éléments peuvent être considérés comme optimaux.

SUMMARY

A generalization of the standard velocity-pressure $P_2 \times P_0$ triangular element is given for solving the three-dimensional Stokes problem. From the point of view of this generalization the convergence results that are obtained for both elements may be seen as optimal.

1. INTRODUCTION.

Le but de cet article est de présenter une généralisation à la dimension 3, naturelle sur le plan physique, de l'élément bidimensionnel introduit par FORTIN [3] pour la résolution du problème de Stokes en formulation vitesse-pression. On rappelle que l'élément en question consiste à approcher sur chaque triangle, la vitesse par des polynômes de degré 2 complets et la pression par une fonction constante.

La généralisation tridimensionnelle qui peut paraître à première vue la plus simple à envisager est le choix de ces mêmes espaces de fonctions associés à des tétraèdres. On peut supposer que l'élément ainsi défini donnerait des résultats satisfaisants du point de vue numérique. Cependant, pour ce qui est de l'analyse formelle, il semble difficile d'obtenir des résultats de convergence analogues à ceux de l'élément de Fortin à savoir, que l'erreur de la vitesse en norme $[H^1]^2$ plus l'erreur de la pression en norme L^2 sont en O(h), dès que l'on suppose une régularité suffisante de la solution (h étant comme d'habitude le diamètre maximal des éléments d'une triangulation uniformément régulière). La difficulté consiste essentiellement à démontrer la condition de BREZZI [1] avec une constante indépendante de h, puisque les degrés de liberté pour la vitesse autres que les valeurs aux sommets, sont des valeurs sur les arrêtes et non pas sur l'intérieur des faces. Or, c'est bien sur celles-ci que porte le flux en dimension 3.

Dans ce travail on relève cette difficulté en plaçant les degrés de liberté purement et simplement au barycentre des faces moyennant la définition d'un espace de polynômes de degré 2 judicieusement réduit. On introduit par contre, l'inconvénient que l'élément ainsi défini est non conforme pour la vitesse, raison pour laquelle on est obligé de procéder à une étude de la convergence un peu plus élaborée que celle donnée par THOMAS [8] et GIRAULT et RAVIART [4] pour les éléments mixtes conformes.

Dans ce qui suivra nous utiliserons les notations suivantes :

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, n=2 ou 3, de frontière Γ, pour tout ouvert D contenu dans Ω on dénotera par $\|\cdot\|_{m,D}$ et $|\cdot|_{m,D}$ respectivement la norme et la semi-norme habituelle de l'espace de Sobolev $H^m(D)$ avec $H^o(D) = L^2(D)$, et les modifications évidentes lorsqu'il s'agira de $[H^m(D)]^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$\ell > 0$. Lorsque D est le domaine Ω lui-même, on supprimera cet indice et l'on dénotera le produit scalaire $H^m(\Omega)$ par $(\cdot,\cdot)_m$, de même que celui de $[H^m(\Omega)]^\ell$.

Pour tout espace de fonctions V définies sur D, $\underset{\sim}{V}$ désignera l'espace de champs à n fonctions, dont chaque composante appartient à V.

On dénotera par $x \cdot y$ le produit scalaire euclidien de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^\ell$, où en général ℓ sera égal à n dans le cas de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et à n^2 dans le cas de tenseurs de $\mathbb{R}^{n\times n}$. La norme associée à ce produit scalaire sera dénotée par $|\cdot|$.

Enfin pour toute fonction ou champs y défini sur un certain ensemble D, on dénotera par $y_{/S}$ sa restriction à un sous-ensemble S, $S \subset D$.

Pour éviter des difficultés non essentielle pour ce travail, on ne traitera que le cas stationnaire du problème de Stokes, dont la formulation vitesse-pression est la suivante :

On veut trouver un champs de vitesses $\underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{H}{}_0^1(\Omega)$ et une pression $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, qui pour un champs de forces $\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{L}{}^2(\Omega)$ donné, satisfont à :

$$(P) \qquad \begin{cases} (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v})_0 + (\operatorname{div} \underset{\sim}{v}, p)_0 = (\underset{\sim}{f}, \underset{\sim}{v})_0 & \forall \underset{\sim}{v} \in \underset{\sim}{H}{}_0^1(\Omega) \\ (\operatorname{div} \underset{\sim}{u}, q) = 0 & \forall q \in \underset{\sim}{L}{}^2(\Omega)/\mathbb{R} \end{cases}$$

où $\underset{\sim}{\nabla}$ désigne l'opérateur gradient.

Notons que dans cette formulation $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ peut être avantageusement remplacé par $L_0^2(\Omega)$, le sous-espace de $L^2(\Omega)$ de fonctions à intégrale nulle sur Ω. Remarquons aussi que lorsque Γ est suffisamment régulière on a [7], $\underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{H}{}_0^1(\Omega) \cap \underset{\sim}{H}{}^2(\Omega)$ et $p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ et que l'on peut écrire :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{\nabla} p + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0} & \text{p.p. dans } \Omega \\ \operatorname{div} \underset{\sim}{u} = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

2. RESULTATS D'APPROXIMATION POUR LES ELEMENTS FINIS MIXTES NON CONFORMES POUR LA PREMIERE INCONNUE.

Avant d'introduire notre élément tridimensionnel on va donner dans ce paragraphe quelques résultats abstraits d'approximation pour les éléments finis mixtes non conformes en une des inconnues. Pour ce faire on se place dans le cadre suivant :

On se donne deux espaces de Hilbert V et Q avec normes dénotées respectivement par $\|\cdot\|$ et $\rfloor\cdot\lceil$. On représente par $L(v)$ le produit de dualité de $L \in V'$ et $v \in V$, par $G(q)$ celui de $G \in Q'$ et $q \in Q$ et on dénote par $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans V auquel la norme $\|\cdot\|$ est associée.

Soient deux formes bilinéaires a et b avec $a : V \times V \to \mathbb{R}$ et $b : V \times Q \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des constantes strictement positives A, α, B et β telles que :

$$a(u,v) \leq A\,\|u\|\,\|v\| \qquad \forall u,v \in V \tag{2.1}$$

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall v \in V \tag{2.2}$$

$$b(v,q) \leq B\,\|v\|\,\rfloor q\lceil \qquad \forall v \in V\ ,\ \forall q \in Q \tag{2.3}$$

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|} \geq \beta\ \rfloor q\lceil \qquad \forall q \in Q \tag{2.4}$$

cette dernière condition étant connue sous le nom de condition de Brezzi.

On sait [8] que sous ces hypothèses, pour $L \in V'$ et $G \in Q'$ données, le problème de trouver $(u,p) \in V \times Q$ tel que :

$$(P) \quad \begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = L(v) & \forall v \in V \\ b(u,q) = G(q) & \forall q \in Q \end{cases}$$

admet une solution unique.

On va s'intéresser maintenant à l'approximation de (P) moyennant l'introduction de deux familles d'espaces de dimension finie $\{V_h\}_h$ et $(Q_h)_h$, appelées à approcher V et Q avec $Q_h \subset Q$ mais $V_h \not\subset V$ $\forall h$. On suivra essentiellement la démarche de THOMAS [8] pour le cas conforme, soit le cas où $V_h \subset V$ $\forall h$.

Soient donc deux formes bilinéaires a_h et b_h avec $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ et $b_h : V_h \times Q_h \to \mathbb{R}$, les deux formes étant définies aussi sur $V \times V$ et $V \times Q$ respectivement, de telle manière que :

$$a_h(u,v) = a(u,v) \qquad \forall u,v \in V$$

$$b_h(v,q) = b(v,q) \qquad \forall v \in V \text{ et } \forall q \in Q$$

On munit V_h d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_h$ avec norme associée $\|\cdot\|_h$, et on fait l'hypothèse suivante :

$\exists\, A^*, \alpha^*, B^*$ et β^*, constantes strictement positives bornées et indépendantes de h telles que $\forall h$ on ait :

$$(2.1)_h \qquad a_h(u_h,v_h) \le A^* \|u_h\|_h \, \|v_h\|_h \qquad \forall u_h,v_h \in V_h+V$$

$$(2.2)_h \qquad a_h(v_h,v_h) \ge \alpha^* \|v_h\|_h^2 \qquad \forall v_h \in V_h$$

$$(2.3)_h \qquad b_h(v_h,q_h) \le B^* \|v_h\|_h \, \rfloor q_h \lceil \qquad \forall v_h \in V_h \text{ et } \forall q_h \in Q$$

$$(2.4)_h \qquad \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_h(v_h,q_h)}{\|v_h\|_h} \ge \beta^* \rfloor q_h \lceil \qquad \forall q_h \in Q_h$$

cette dernière condition étant connue sous le nom de condition de Brezzi discrète.

Sous ces hypothèses, si L_h est une forme linéaire continue sur V_h qui approche L, comme pour le cas de $(\mathcal{P})$, le problème approché de trouver $(u_h,p_h) \in V_h \times Q_h$ tel que :

$$(\mathcal{P}_h) \quad \begin{cases} a_h(u_h,v_h) + b_h(v_h,p_h) = L_h(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b_h(u_h,q_h) = G(q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

admet une solution et une seule, résultat qui, bien entendu, reste valable si A^*, α^*, B^* et β^* dépendent de h [8].

On supposera que la norme $\|\cdot\|_h$ est définie sur V aussi avec $\|v\|_h = \|v\|$ $\forall v \in V$, et on s'appliquera à trouver des majorations de l'erreur $\|u-u_h\|_h$ + $]p-p_h[$. Pour ce faire, on introduit d'abord les variétés linéaires suivantes :

$$U^G = \{v \in V/ \ \forall q \in Q, \ b(v,q) = G(q)\}$$

$$U_h^G = \{v_h \in V_h/ \ \forall q_h \in Q_h, \ b_h(v_h,q_h) = G(q_h)\}$$

et les espaces

$$U = \{v \in V/ \ \forall q \in Q, \ b(v,q) = 0\}$$

$$U_h = \{v_h \in V_h/ \ \forall q_h \in Q_h \ , \ b_h(v_h,q_h) = 0\}$$

Avec ces définitions, il est clair d'après la formulation de (P) et de (P_h) que $u \in U$, $u_h \in U_h$ et que l'on a :

(2.5) $\qquad a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in U$

$(2.5)_h$ $\qquad a_h(u,v) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in U_h$

On va d'abord chercher une majoration pour $\|u-u_h\|_h$. Soit donc $w_h = u_h-v_h$, où v_h est un élément quelconque de V_h. On a $w_h \in U_h$ et on peut écrire :

$$a_h(w_h,w_h) = a_h(u_h-v_h+u-u,w_h) = a_h(u-v_h,w_h) + a_h(u_h,w_h) - a_h(u,w_h)$$

$$= a_h(u-v_h,w_h) + L_h(w_h)-b_h(w_h,p)-b_h(w_h,p_h)+b_h(w_h,p)-a_h(u,w_h)$$

d'où, d'après $(2.1)_h$ et $(2.2)_h$:

$$\alpha^*\|w_h\|_h^2 \le A^* \|u-w_h\|_h \ \|w_h\|_h + b_h(w_h,p-p_h)+L_h(w_h)-a_h(u,w_h)-b_h(w_h,p)$$

Comme $b_h(w_h,p_h) = b_h(w_h,q_h) = 0 \ \ \forall q_h \in Q_h$ on a :

$$\|w_h\|_h \le \frac{A^*}{\alpha^*}\|u-v_h\|_h + \frac{|b_h(w_h,p-q_h)|}{\alpha^*\|w_h\|_h} + \frac{|L_h(w_h)-a_h(u,w_h)-b_h(w_h,p)|}{\alpha^*\|w_h\|_h}$$

En posant :

$$(2.6) \qquad E_h(u,p,w_h) = L_h(w_h)-a_h(u,w_h)-b_h(w_h,p),$$

en appliquant l'inégalité triangulaire et en majorant $|b_h(w_h,p-q_h)|$ par $(2.3)_h$, on obtient enfin :

$$(2.7) \qquad \|u-u_h\|_h \leq \left(1+\frac{A^*}{\alpha^*}\right) \inf_{v_h\in U_h^G} \|u-v_h\|_h + \frac{B^*}{\alpha^*} \inf_{v_h\in U_h} \rfloor p-q_h \lceil + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|E_h(u,p,w_h)|}{\alpha^* \|w_h\|_h}$$

Cherchons maintenant une majoration semblable pour $\rfloor p-p_h \lceil$.

On a $\forall q_h \in Q_h$ et $\forall v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} b_h(v_h,p_h-q_h) &= L_h(v_h)-a_h(u_h,v_h)-b_h(v_h,q_h) \\ &= L_h(v_h)-a_h(u-u+u_h,v_h)-b_h(v_h,q_h-p+p) \\ &= L_h(v_h)-a_h(u,v_h)-b_h(v_h,p)+a_h(u-u_h,v_h)+b_h(v_h,p-q_h) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{b_h(v_h,p_h-q_h)}{\|v_h\|_h} \leq \frac{E_h(u,p,v_h)}{\|v_h\|_h} + \frac{a_h(u-u_h,v_h)+b_h(v_h,p-q_h)}{\|v_h\|_h}$$

Mais d'après $(2.4)_h$, $(2.1)_h$ et $(2.3)_h$ on a :

$$\beta^* \rfloor p_h-q_h \lceil \leq A^* \|u-u_h\|_h + B^* \rfloor p-q_h \lceil + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|E_h(u,p,w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

d'où on déduit enfin :

$$(2.8) \qquad \rfloor p-p_h \lceil \leq \frac{A^*}{\beta^*} \|u-u_h\|_h + \left(1+\frac{B^*}{\beta^*}\right) \inf_{q_h\in Q_h} \rfloor p-q_h \lceil + \frac{1}{\beta^*} \sup_{w_h\in V_h} \frac{|E_h(u,p,w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

Maintenant en faisant des modifications évidentes dans un Lemme dû à THOMAS [8], afin de tenir en compte l'indexation par h des formes a et b et de la norme, on peut s'affranchir de la restriction de l'appartenance de v_h à U_h^G dans la majoration (2.7), avec le résultat suivant :

Lemme 2.1 : Si $(2.3)_h$ et $(2.4)_h$ sont vérifiées, on a la majoration :

$$\inf_{v_h \in U_h^G} \|u-v_h\|_h \leq \left(1+\frac{B^*}{\beta^*}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_h$$

Ce Lemme et les majorations (2.7) et (2.8) nous permettent de déduire aisément le résultat suivant :

Théorème 2.1 : Sous les hypothèses $(2.1)_h \sim (2.4)_h$, il existe une constante C indépendante de h telle que(*) :

$$(2.9) \qquad \|u-u_h\|_h + \rfloor p-p_h \lceil \leq C\Big[\inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_h + \inf_{q_h \in Q_h} \rfloor p-q_h \lceil + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|E_h(u,p,w_h)|}{\|w_h\|_h} \Big]$$

où $E_h(u,p,w_h)$ est donné par (2.6).

Remarquons que E_h s'annulle identiquement lorsque $V_h \subset V$ et $L = L_h$, et que dans ce cas, (2.9) devient la majoration classique pour les méthodes finis mixtes conformes [8].

Maintenant on va appliquer ces résultats au problème (P).

Ici V est l'espace de champs de vitesse $\underset{\sim}{H}^1_0(\Omega)$ et la norme $\|\cdot\|$ devient $|\cdot|_1$. De même on a $Q = L^2_0(\Omega)$ et $\rfloor\cdot\lceil$ devient la norme $|\cdot|_0$.

Le problème $(\mathcal{P})$ est donc (P) lorsqu'on pose G=0 et :

$$(2.10) \qquad a(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{\nabla v},\underset{\sim}{\nabla v})_0$$

$$(2.11) \qquad b(\underset{\sim}{v},q) = (\operatorname{div} \underset{\sim}{v},q)_0$$

$$(2.12) \qquad L(\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{v})_0$$

Soit maintenant $\mathcal{C}_h$ une partition de Ω en éléments finis de diamètre maximal égal à h. Les espaces V_h et Q_h seront ainsi $\underset{\sim}{V}_h$ et Q_h, espaces de

(*) Ici comme partout ailleurs dans ce travail la lettre C indexée ou non sera utilisée pour désigner les diverses constantes indépendantes du paramètre de discrétisation h.

champs et de fonctions régulières sur chaque élément K de $\mathcal{C}_h$, où $Q_h \in L^2_o(\Omega)$. Maintenant si $\underset{\sim}{v}_{h/K} \in \underset{\sim}{H}^1(K)$ $\forall \underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h$ et $\forall K \in \mathcal{C}_h$ on définit :

$$(2.10)_h \qquad a_h(\underset{\sim}{u}_h,\underset{\sim}{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \underset{\sim\sim}{\nabla u}_h \cdot \underset{\sim\sim}{\nabla v}_h \, d\underset{\sim}{x} \qquad \forall \underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{v}_h \in V_h$$

$$(2.11)_h \qquad b_h(\underset{\sim}{v}_h,q_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K q_h \operatorname{div} \underset{\sim}{v}_h \, d\underset{\sim}{x} \quad \forall \underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h \text{ et } \forall q_h \in Q_h.$$

On supposera d'autre part que l'on définit bien un produit scalaire sur $\underset{\sim}{V}_h$ par :

$$(\underset{\sim}{u}_h,\underset{\sim}{v}_h)_h = a_h(\underset{\sim}{u}_h,\underset{\sim}{v}_h)$$

Dans ce cas, la norme $\|\cdot\|_h$ de $\underset{\sim}{V}_h$ sera donnée par l'expression ci-dessus, qu'en général ne définit qu'une semi-norme :

$$(2.13) \qquad \|\underset{\sim}{v}_h\|_h = \left[\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K |\underset{\sim\sim}{\nabla v}_h|^2 \, d\underset{\sim}{x}\right]^{1/2}$$

Notons maintenant que même si $\underset{\sim}{V}_h \not\subset \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$, L est définie sur $\underset{\sim}{V}_h$. On peut donc se passer de forme linéaire approchée L_h et en tenant compte des définitions $(2.10)_h$, $(2.11)_h$ et (2.12) de a_h, b_h et L, le problème approché (P_h) du problèm (P) consiste à trouver un couple $(\underset{\sim}{u}_h,p_h)$ appartenant à $\underset{\sim}{V}_h \times Q_h$ tel que

$$(P_h) \quad \begin{cases} a_h(\underset{\sim}{u}_h,\underset{\sim}{v}_h) + b_h(\underset{\sim}{v}_h,p_h) = L(\underset{\sim}{v}_h) & \forall \underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h \\ b_h(\underset{\sim}{u}_h,q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

Notons tout de suite que, d'après les définitions $(2.10)_h$ et $(2.11)_h$, et pourvu que $\|\cdot\|_h$ donné par (2.13) soit effectivement une norme sur $\underset{\sim}{V}_h$, $(2.1)_h$, $(2.2)_h$ et $(2.3)_h$ sont trivialement satisfaites pour tout $\underset{\sim}{V}_h$ et Q_h. Il restera à vérifier $(2.4)_h$ pour chaque choix de $\underset{\sim}{V}_h$ et Q_h, afin de pouvoir appliquer l'estimation de l'erreur $\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_h + |p-p_h|_o$ donnée par (2.9). Pour ce qui est de cette dernière relation, par ailleurs, les deux premiers termes de son second membre se majorent de façon classique en théorie de l'approximation, alors que, s'il y a lieu, il restera à trouver des majorations convenables pour le dernier terme dit de non-conformité (avec L_h=L), de façon à s'assurer de la convergence lorsque h tend vers zéro.

3. - DEFINITION ET PROPRIETES DE L'ELEMENT.

On supposera désormais que Ω est un domaine polyédrique convexe dont on se donne une partition $\mathcal{C}_h$ en n-simplexes, n=2 ou 3. On supposera également que $\mathcal{C}_h$ appartient à une suite $\{\mathcal{C}_h\}_h$ de partitions régulières de Ω au sens habituel, c'est-à-dire :

Si h_K est le diamètre de la sphère circonscrite à l'élément K et on pose

$$h = \max_{K \in \mathcal{C}_h} h_K$$

et si ρ est le plus petit diamètre des sphères inscrites dans les éléments de $\mathcal{C}_h$, il existe $c > 0$ telle que $\rho h^{-1} \geq c$ pour toutes les partitions de la suite. Pour raison de simplicité cependant, on appelera une partition appartenant à une telle suite, une partition régulière.

K étant un n-simplexe, on dénotera par S_i ses sommets et λ_i désignera la coordonnée barycentrique de K associée à S_i, $i=1,2,\ldots,n+1$. On appelera enfin B_i le barycentre de la face du simplexe opposée à S_i.

Dans ce qui suit Q_h sera l'espace de fonctions constantes sur chaque simplexe de la partition $\mathcal{C}_h$ définies par sa valeur au barycentre B de K, avec intégrale nulle sur Ω.

Soit maintenant P l'espace de fonctions définies sur K, engendrées par les 2(n+1) fonctions linéairement indépendantes λ_i, λ_i^2, $i=1,2,\ldots,n+1$, $n \geq 2$. Notons tout de suite que l'on a l'inclusion $P_1 \subset P \subseteq P_2$ où P_k désigne l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à k définis sur K(*).

Il est facile de vérifier que pour toute fonction $g \in P$ l'ensemble de degrés de liberté $\{(g)_i\}_{i=1}^{2(n+1)}$ où :

$(g)_i$ est la valeur de g au sommet S_i, $i=1,2,\ldots,n+1$

$(g)_{i+n+1}$ est la valeur de g au point B_i, $i=1,2,\ldots,n+1$

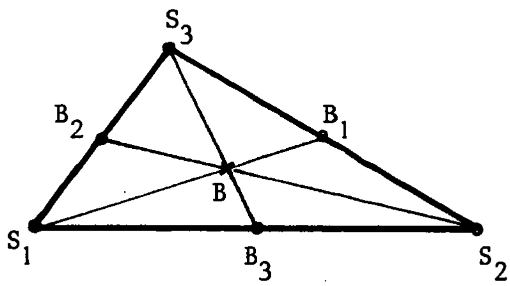
(*) Si on veut définir P pour n=1 aussi, on est obligé de tenir compte que $\lambda_1^2-\lambda_1 = \lambda_2^2-\lambda_2$. Par conséquent la dimension de P serait 3 au lieu de 4 et dans ce cas on aurait $P=P_2$, tout comme dans le cas n=2.

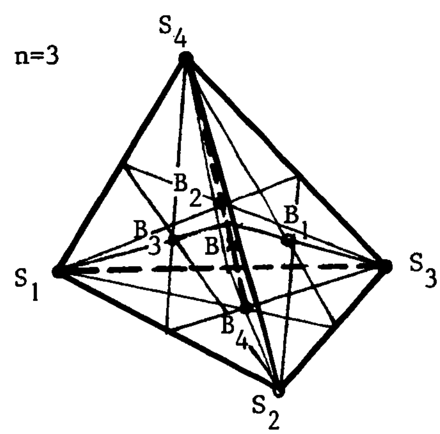
est P-unisolvent, et que les fonctions de base associées sont données par :

$$(3.1)\quad \begin{cases} p_i = \dfrac{1}{n-1}\,(n\lambda_i^2-\lambda_i)\ , \\[2mm] p_{i+n+1} = \dfrac{n^2}{n-1}\,(\lambda_i^2-\lambda_i) + \dfrac{n}{n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(\lambda_j-\lambda_j^2),\ i=1,2,\ldots,n+1 \end{cases}$$

On définit V_h comme l'espace de fonctions continues aux sommets et aux barycentres des simplexes $K \in \mathcal{C}_h$, dont la restriction à chaque K est une fonction de P, et dont les degrés de liberté situés sur Γ s'annullent.

Sur la Figure 3.1 ci-dessous on donne une illustration de l'élément pour chaque cas de dimension :





o degrés de liberté vitesse

× degré de liberté pression

Illustration des éléments en dimension 2 et 3

<u>Figure 3.1</u>

Notons que, comme on avait déjà souligné au début de ce travail, dans le cas n=2 l'élément en question n'est rien d'autre que l'élément $P_2{\times}P_o$ (déjà largement abordé par d'autres auteurs, voir par exemple [3] et [4]) et qu'on a $V_h \subset H_o^1(\Omega)$. Cependant, dans le cas n=3 cette inclusion n'est pas vérifiée :

Etant donnés une fonction $v_h \in V_h$ et deux tétraèdres K et K' ayant une face commune F, les restrictions $v_{h/\bar{K}/F}$ et $v_{h/\bar{K}'/F}$ ne coïncident pas nécessairement, puisqu'elles ne dépendent pas seulement des degrés de liberté associés à F.

On peut néanmoins démontrer la propriété suivante :

Lemme 3.1 : Si g est une fonction définie sur un tétraèdre K avec $g \in P$, son intégrale sur toute face F de la frontière ∂K de K, ne dépend que des degrés de liberté de g associés à F et de la mesure de celle-ci.

Démonstration : Sans perte de la généralité supposons que F est la face opposée à S_4.

D'après (3.1), la partie de la trace de g sur F dépendant de degrés de liberté autres que ceux associés à F, est donnée par $\sum_{1 \leq j \leq 3} (g)_{j+4} \, d_j$, où

$$d_j = \frac{9}{2} (\lambda_j^2 - \lambda_j) + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k - \lambda_k^2) \quad j=1,2,3$$

Mais d'après des résultats bien connus, on a pour d_1 par exemple :

$$\int_F d_1 ds = \frac{\text{aire}(F)}{3} \sum_{i=1}^{3} d_1(M_i)$$

où M_1 est le milieu du côté de F opposé à S_1 et M_2 et M_3 sont les milieux des autres côtés de F.

Comme $d_1(M_1) = 3/4$, $d_1(M_2) = d_1(M_3) = -3/8$, on a $\int_F d_1 ds = 0$.
Par symétrie il en va de même pour d_2 et d_3, d'où le Lemme.

c.q.f.d.

On remarque ensuite que, grâce à la continuité des champs de V_h aux sommets des éléments de $\mathcal{T}_h$ et à la nullité des degrés de liberté sur Γ, la semi-norme (2.13) est bien une norme sur V_h.

Maintenant on rappelle un Lemme dû à CIARLET [2], pour les formes bilinéaires :

Soit $A : Y \times Y \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire avec $Y = H^{k+1}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, et :

$$||A|| = \sup_{(y,w) \in Y \times Y} \frac{A(y,w)}{||y||_{k+1,D} \; ||w||_{k+1,D}}$$

Alors si pour un espace P de fonctions définies sur D tel que $P_k \subset P \subset H^{k+1}(D)$, A satisfait pour $\ell \in \mathbb{N}$:

$$A(y,w) = 0 \qquad \forall y \in Y \quad \text{et} \quad \forall w \in P_\ell$$

$$A(y,w) = 0 \qquad \forall y \in P_k \quad \text{et} \quad \forall w \in P$$

il existe une constante qui ne dépend que de D, telle que :

$$|A(y,w)| \leq C \|A\| \; |w|_{\ell+1,D} \; |y|_{k+1,D} \qquad \forall (y,w) \in Y \times Y$$

Maintenant, soit F une face d'un tétraèdre K et $P_o(F)$ l'espace de fonctions constantes définies sur F. On introduit l'opérateur "moyenne"

$$\pi_F : H^{1/2}(\partial K) \to P_o(F) \text{ par}$$

(3.2) $$\pi_F g = \frac{\int_F g ds}{\text{mes}(F)} \qquad \forall g \in H^{1/2}(\partial K)$$

avec une généralisation évidente pour le cas vectoriel.

On considère maintenant l'espace $\underset{\sim}{W}_h = \underset{\sim}{V}_h \oplus \underset{\sim}{\mathcal{B}}(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_h$. On définit également l'opérateur d'interpolation linéaire $r_h : \underset{\sim}{W}_h \to \underset{\sim}{R}_h$ où $\underset{\sim}{R}_h$ est le sous-espace de $\underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$ des champs de fonctions continues $\underset{\sim}{v}_h$ dont chaque composante v_{h_i} est telle que $v_{h_i/K} \in P_1$, avec $r_h \underset{\sim}{v}_h(S) = \underset{\sim}{v}_h(S)$ pour tout sommet S de $\mathcal{C}_h$. Il est clair qu'on peut définir r_h aussi bien sur $\underset{\sim}{C}^o(\overline{\Omega})$.

<u>Lemme 3.2</u> : Soit $\mathcal{C}_h$ une partition régulière de Ω et $\underset{\sim}{z}$ un champs de fonctions de $\underset{\sim}{H}^2(\Omega) \cap \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$. Alors si $\frac{\partial g}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieure à ∂K d'une fonction g, $K \in \mathcal{C}_h$, on a :

(3.3) $$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_K \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} \cdot \underset{\sim}{w}_h \, ds \leq Ch |\underset{\sim}{z}|_2 \, \|\underset{\sim}{w}_h\|_h \qquad \forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h$$

<u>Démonstration</u> : On a d'abord :

$$\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} \cdot \underset{\sim}{w}_h ds = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \; \sum_{F \subset \partial K} \int_F \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} \cdot \underset{\sim}{w}_h ds$$

Le Lemme 3.1 implique la nullité de l'intégrale de $\underset{\sim}{w}_h$ sur les faces situées sur Γ.

Pour la même raison, l'intégrale de $\underset{\sim}{w}_{h/\partial K}-\underset{\sim}{w}_{h/\partial K'}$ sur la face commune à deux tétraèdres adjacents K et K' est nulle. Le fait que $\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} \in \underset{\sim}{H}^{1/2}(\partial K)$ $\forall K$ permet ainsi d'écrire

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot \underset{\sim}{w}_h dx = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\subset\partial K} \int_F \left(\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} - \pi_F \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\right)\cdot \underset{\sim}{w}_h\, ds \qquad \forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h$$

D'autre part comme $r_h\underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{C}^0(\overline{\Omega})$ $\forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h$, on a forcément

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} - \pi_F \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\right)\cdot r_h\underset{\sim}{w}_h ds = 0 \quad \forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h$$

d'où on conclut que :

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot \underset{\sim}{w}_h ds = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\subset\partial K} \int_F \left(\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n} - \pi_F \frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\right)\cdot (\underset{\sim}{w}_h - r_h\underset{\sim}{w}_h) ds \quad \forall \underset{\sim}{w}_h \in \underset{\sim}{W}_h$$

On définit maintenant $\sigma : H^1(K)\times H^1(K) \to \mathbb{R}$ par :

(3.4) $$\sigma(y,w) = \int_F (y-\pi_F y)(w-r_F w)dx$$

où r_F est la restriction de r_h à $F\subset\partial K$, $K\in\mathcal{T}_h$.

Comme d'habitude, soit $\hat{K}$ l'élément de référence et $\hat{\sigma} : H^1(\hat{K})\times H^1(\hat{K}) \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\hat{\sigma}(\hat{y},\hat{w}) = \int_{\hat{F}} (\hat{y}-\pi_{\hat{F}}\hat{y})(\hat{w}-r_{\hat{F}}w)ds \qquad \forall \hat{F}\in\partial\hat{K}$$

D'après des résultats classiques on a :

$$|\sigma(y,w)| \le Ch_K^2\; |\hat{\sigma}(\hat{y},\hat{w})|$$

D'autre part, il est aisé de vérifier que pour k=0 et ℓ=0 ou 1 on a :

$$\hat{\sigma}(\hat{y},\hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{y}\in H^{k+1}(\hat{K}) \quad \text{et} \quad \forall \hat{w}\in P_\ell$$

$$\hat{\sigma}(\hat{y},\hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{y}\in P_k \quad \text{et} \quad \forall \hat{w}\in P$$

Comme $P_o \subset P \subset H^1(K)$ on a :

$$|\hat{\sigma}(\hat{y},\hat{w})| \leq \hat{C}\,\|\hat{\sigma}\|\,|\hat{w}|_{1,\hat{K}}\,|\hat{y}|_{1,\hat{K}}$$

ce qui, moyennant des tranformations tout à fait standards donne :

$$|\sigma(y,w)| \leq Ch_K|y|_{1,K}|w|_{1,K}\ .$$

Maintenant, si on fait successivement pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, chaque $F \subset \partial K$, y égal à la dérivée de z_i sur K suivant la direction de $\underset{\sim}{n}_{/F}$, et $w = w_{h_i}$, $i=1,2,3$, on obtient la majoration (3.3) par sommation sur i, F et K et l'inégalité de Schwartz.

c.q.f.d.

On introduit maintenant un autre opérateur linéaire $s_h : \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega) \to \underset{\sim}{V}_h$, à savoir, l'opérateur de projection orthogonale selon le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_h$.

<u>Lemme 3.3</u> : Soit $\mathcal{T}_h$ une partition régulière de Ω et $\underset{\sim}{e}_h$ l'erreur de la projection $\underset{\sim}{e}_h = \underset{\sim}{v} - s_h\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{v} \in \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$. Alors on a l'estimation suivante :

$$|\underset{\sim}{e}_h|_o \leq Ch\,\|\underset{\sim}{e}_h\|_h$$

<u>Démonstration</u> : On a

$$|\underset{\sim}{e}_h|_o = \sup_{\underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{L}^2(\Omega)} \frac{(\underset{\sim}{f},\underset{\sim}{e}_h)_o}{|\underset{\sim}{f}|_o}$$

D'après [4], lorsque Ω est un polygone convexe, $\forall \underset{\sim}{f} \in \underset{\sim}{L}^2(\Omega)$ il existe un champs $\underset{\sim}{z} \in \underset{\sim}{M}$ unique, avec $\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{H}^2(\Omega) \cap \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$, tel que $-\Delta\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{f}$. En outre on a :

$$|\underset{\sim}{z}|_2 \leq C|\Delta\underset{\sim}{z}|_o \qquad \forall \underset{\sim}{z} \in \underset{\sim}{M}$$

On peut donc écrire :

$$|\underset{\sim}{e}_h|_o = \sup_{\underset{\sim}{z}\in\underset{\sim}{M}} \frac{-(\Delta\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{e}_h)_o}{|\Delta\underset{\sim}{z}|_o} \leq C \sup_{\underset{\sim}{z}\in\underset{\sim}{M}} \frac{|(\Delta\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{e}_h)|}{|\underset{\sim}{z}|_2}$$

Cependant, d'après la formule de Green on a :

(3.5) $$|(\Delta \underset{\sim}{z},\underset{\sim}{e}_h)_o| \leq |(\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{e}_h)_h| + |\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot\underset{\sim}{e}_h\, ds|$$

Soit maintenant une suite $\{\underset{\sim}{v}^\ell\}_\ell \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\underset{\sim}{v}^\ell \to \underset{\sim}{v}$ dans $\underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$, et posons $\underset{\sim}{e}^\ell_h = \underset{\sim}{v}^\ell - s_h\underset{\sim}{v}$. L'appartenance de $\underset{\sim}{v}$ et de $\underset{\sim}{v}^\ell$ à $\underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$ implique :

$$\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot\underset{\sim}{e}_h ds = \sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot\underset{\sim}{e}^\ell_h ds \qquad \forall \ell\in\mathbb{N}$$

Mais d'après le Lemme 3.2 on a :

$$\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot\underset{\sim}{e}_h ds \leq Ch|\underset{\sim}{z}|_2\ \|\underset{\sim}{e}^\ell_h\|_h \qquad \forall\ell$$

Comme clairement $\|\underset{\sim}{e}^\ell_h\|_h \to \|\underset{\sim}{e}_h\|_h$ on a :

(3.6) $$\sum_{K\in\mathcal{C}_h}\int_{\partial K}\frac{\partial \underset{\sim}{z}}{\partial n}\cdot\underset{\sim}{e}_h ds \leq Ch|\underset{\sim}{z}|_2\,\|\underset{\sim}{e}_h\|_h$$

D'autre part, comme $\underset{\sim}{z}\in\underset{\sim}{H}^2(\Omega)$, d'après le Théorème de l'inclusion de Sobolev on a $\underset{\sim}{z}\in\underset{\sim}{C}^o(\overline{\Omega})$. Par conséquent $r_h\underset{\sim}{z}$ a bien un sens et comme forcément $r_h\underset{\sim}{z}\in\underset{\sim}{V}_h$ on a :

$$(\underset{\sim}{z},\underset{\sim}{e}_h)_h = (\underset{\sim}{z}-r_h\underset{\sim}{z}_h,\underset{\sim}{e}_h)_h \leq \|\underset{\sim}{z}-r_h\underset{\sim}{z}\|_h\ \|\underset{\sim}{e}_h\|_h$$

Or, d'après des résultats bien connus de la théorie de l'approximation on a :

$$\|\underset{\sim}{z}-r_h\underset{\sim}{z}\|_h \leq Ch|\underset{\sim}{z}|_2$$

ce qui avec (3.5) et (3.6) donne le lemme.

c.q.f.d.

<u>Remarque</u> : En utilisant le Lemme 3.2 on pourrait déduire sans difficulté que :

$$\|\underset{\sim}{e}_h\|_h \leq Ch|\underset{\sim}{v}|_2 \qquad \forall\underset{\sim}{v}\in\underset{\sim}{H}^2(\Omega)\cap\underset{\sim}{H}^1_o(\Omega),$$

ce qui donne immédiatement une estimation de l'erreur pour le problème de Dirichlet pour l'opérateur $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^3$, résolu avec cet élément quadratique réduit.

4. - RESULTATS DE CONVERGENCE.

Comme nous avons déjà souligné au Paragraphe 2, pour démontrer l'existence et la convergence des solutions approchées non conformes en vitesse, il faut vérifier la validité de la condition de Brezzi $(2.4)_h$. Pour ce faire on donne d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.1 : Pour toute partition régulière $\mathcal{C}_h$ et pour tout champs $\underset{\sim}{v} \in \underset{\sim}{H}_o^1(\Omega)$ il existe un champs $\underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h$ tel que :

$$(4.1) \qquad \int_K \operatorname{div} \underset{\sim}{v}_h \, d\underset{\sim}{x} = \int_K \operatorname{div} \underset{\sim}{v} \, d\underset{\sim}{x} \qquad \forall K \in \mathcal{C}_h$$

$$(4.2) \qquad \|\underset{\sim}{v}_h\|_h \leq C_1 |\underset{\sim}{v}|_1$$

Démonstration : Remarquons d'abord que, d'après le Lemme 3.1 et quelques calculs simples on a :

$$(4.3) \qquad \int_{F_k} g ds = [\frac{1}{12} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{4} (g)_j + \frac{3}{4} (g)_{k+4}] \operatorname{mes}(F_k) \qquad \forall g \in P,$$

où F_k est la face de K opposée à S_k, $1 \leq k \leq 4$.

(4.3) permet d'affirmer que l'on peut définir de façon unique un champs $\underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h$, dont chaque composante v_{h_i}, i=1,2,3, satisfait à :

$$(v_{h_i})_j = ((s_h v)_i)_j \qquad j=1,2,3,4$$

$$(4.4) \qquad \int_{F_k} v_{h_i} ds = \int_{F_k} v_i ds \qquad k=1,2,3,4$$

En effet, avec (4.3) on peut définir les degrés de liberté $(v_{h_i})_{k+4}$, k=1,2,3,4 par :

$$(v_{h_i})_{k+4} = \frac{3}{4}[\frac{1}{\operatorname{mes}(F_k)} \int_{F_k} v_i ds - \frac{1}{12} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{4} ((s_h v)_i)_j]$$

Maintenant soit $\underset{\sim}{n} = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal extérieur à ∂K.
Si on multiplie chaque membre de (4.4) par n_i et on somme sur i puis sur k, on obtient :

$$\int_{\partial K} \underset{\sim}{v}_h \cdot \underset{\sim}{n}\, ds = \int_{\partial K} \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds$$

L'application de la formule de Stokes donne ainsi (4.1).

D'autre part, compte tenu du Lemme 3.3, on peut utiliser les mêmes arguments de [4, Lemme 2.5] d'où on déduit (4.2).

c.q.f.d.

<u>Théorème 4.1</u> : La condition $(2.4)_h$ est vérifiée si les espaces $\underset{\sim}{V}_h$ et Q_h sont ceux définis au Paragraphe 3.

<u>Démonstration</u> : Soit $q_h \in Q_h$. D'après [4, Lemme 3.2] il existe un champs $\underset{\sim}{v} \in \underset{\sim}{H}^1_o(\Omega)$ tel que :

$$(4.5) \qquad b(\underset{\sim}{v}, q_h) = |q_h|_o^2$$

$$\text{et} \qquad |\underset{\sim}{v}|_1 \leq C_o |q_h|_o$$

On construit maintenant un champs $\underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h$ associé à $\underset{\sim}{v}$ dans les conditions spécifiées au Lemme 4.1.

Comme q_h est constant sur chaque K, de (4.1) on déduit par sommation sur $K \in \mathcal{T}_h$ que :

$$(4.6) \qquad b_h(\underset{\sim}{v}_h, q_h) = b(\underset{\sim}{v}, q_h)$$

D'après (4.2) on a d'autre part

$$(4.7) \qquad \|\underset{\sim}{v}_h\|_h \leq C |q_h|_o \quad \text{avec } C = C_1 C_o$$

(4.5), (4.6) et (4.7) donnent enfin la condition $(2.4)_h$ avec $\beta^* = C^{-1}$.

c.q.f.d.

Pour obtenir une estimation de l'erreur à partir de (2.9), il ne reste maintenant qu'à trouver une majoration convenable pour le terme $E_h(\underset{\sim}{u}, p, \underset{\sim}{w}_h)$ donné par (2.6), $(\underset{\sim}{u}, p)$ étant la solution de (P).

<u>Théorème 4.2</u> : Si $\underset{\sim}{u} \in \underset{\sim}{H}^2(\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$ on a :

$$(4.8) \qquad E_h(\underset{\sim}{u},p,\underset{\sim}{w}_h) \leq Ch[|\underset{\sim}{u}|_2 + |p|_1] \; \|\underset{\sim}{w}_h\|_h$$

<u>Démonstration</u> : On rappelle d'abord $(2.10)_h$, $(2.11)_h$ et (2.12).
Par application de la formule de Green on obtient :

$$a_h(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{w}_h) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n} \cdot \underset{\sim}{w}_h ds - \int_\Omega \nabla \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{w}_h d\underset{\sim}{x}$$

et

$$b_h(\underset{\sim}{w}_h,p) = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\partial K} \underset{\sim}{w}_h \cdot \underset{\sim}{n}p \; ds - \int_\Omega \nabla p \cdot \underset{\sim}{w}_h dx$$

D'après (1.1) on a $\underset{\sim}{f}+\nabla \underset{\sim}{p}+\Delta \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}$ p.p. dans Ω d'où :

$$E(\underset{\sim}{u},p,\underset{\sim}{w}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\Omega K} (\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n} + p\underset{\sim}{n}) \cdot \underset{\sim}{w}_h \; ds$$

Avec les hypothèses de régularité qu'on a faites pour $\underset{\sim}{u}$ et p on peut utiliser les mêmes arguments du Lemme 3.2 d'où :

$$E_h(\underset{\sim}{u},p,\underset{\sim}{w}_h) = - \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \; \sum_{F \subset \partial K} \int_F [(\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n} + p) - \pi_F(\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial n} + p)] \cdot (\underset{\sim}{w}_h - r_h \underset{\sim}{w}_h) ds$$

Maintenant si on pose dans (3.4) y successivement égal à $\frac{\partial \underset{\sim}{u}_i}{\partial n}$, pn_i et $w = w_{h_i}$, i=1,2,3 et en procédant toujours comme dans le Lemme 3.2 on déduit (4.8).

c.q.f.d.

En supposant maintenant la même régularité pour $\underset{\sim}{u}$ et p que dans le Théorème 4.2, comme $P_1 \subset P \subset P_2$, d'après des résultats tout à fait classiques on a la majoration :

$$\inf_{\underset{\sim}{v}_h \in \underset{\sim}{V}_h} \|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{v}_h\|_h + \inf_{q_h \in Q_h} |p-q_h|_o \leq Ch[|\underset{\sim}{u}|_2 + |p|_1]$$

ce qui donne immédiatement lieu au théorème de convergence suivant :

<u>Théorème 4.3</u> : Si le problème (P) est approché par (P_h), $\underset{\sim}{V}_h$ et Q_h sont les espaces définis au Paragraphe 3 associés à une suite $\{\mathcal{C}_h\}_h$ de partitions régulières de Ω supposé polyédrique et convexe, alors on a :

(4.9) $$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_h + |p-p_h|_o \leq Ch[|\underset{\sim}{u}|_2 + |p|_1]$$

5. - REMARQUES COMPLEMENTAIRES.

(i) Notons que l'élément introduit dans cet article apporte des généralisations non-conformes de l'élément de Lagrange triangulaire P_2 standard, au cas des n-simplexes, $n > 2$, pour lesquels les fonctions-test deviennent des polynômes de degré 2 incomplets définis uniquement à l'aide des sommets et des faces du simplexe. Vus sous cet angle là, les résultats de convergence (4.9) valables aussi pour l'élément $P_2 \times P_o$ bidimensionnel [4], apparaissent comme optimaux en ce sens, que si le polynôme de degré 2 est complet pour n=2, il s'agit là d'un cas exceptionnel vis à vis de cette famille d'éléments. Par ailleurs, cette dernière est asymptotiquement plus proche des éléments P_1, étant donné qu'en dimension n, le nombre de degrés de liberté de P est 2(n+1) alors que pour les polynômes quadratiques complets on en a (n+2)(n+1)/2.

(ii) L'élément tridimensionnel en question est également apparenté à un élément bidimensionnel quadratique réduit à 4 degrés de liberté, à savoir, les valeurs aux sommets et au barycentre du triangle. Par ailleurs, ce triangle, lui aussi non conforme, et proposé dans [6] pour la résolution de problèmes d'ordre 2, donne pour ces derniers des résultats de convergence tout à fait équivalents à ceux qu'on obtiendrait avec notre élément tridimensionnel.

(iii) Remarquons enfin que, comme pour l'élément de Fortin et l'élément P_1 non conforme à divergence nulle dans $\mathbb{R}^n$, n=2,3 [7], il est possible d'expliciter une base locale de l'espace $\mathcal{U}_h = U_h$ (voir Paragraphe 2). Ceci permet d'effectuer plus aisément les calculs numériques provenant de la résolution du problème (P_h). Un travail à ce sujet dû à HECHT [5] est en cours de préparation.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Prof. R. GLOWINSKI de l'INRIA pour le soutien accordé pendant la mise au point de ce travail ainsi qu'à Mme. F. Weber pour le soin apporté à sa réalisation matérielle.

Ce travail a été financé par le Conseil pour la Recherche Scientifique Brésilien (CNPq).

REFERENCES

[1] BREZZI F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. RAIRO Numerical Analysis 8-R2, pp. 129-151, 1974.

[2] CIARLET Ph., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[3] FORTIN M., Calcul Numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis, Thèse, Université de Paris VI, 1972.

[4] GIRAULT V. et RAVIART P.A., Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[5] HECHT F., à paraître.

[6] RUAS V., Sur l'application de quelques méthodes d'éléments finis à la résolution d'un problème d'élasticité incompressible non linéaire, Rapport de Recherche de l'INRIA N° 24, Rocquencourt, France, Juillet 1980.

[7] TEMAM R., Navier-Stokes equations, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[8] THOMAS J.M., Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes, Thèse, Université de Paris VI, 1977.