Un résultat d'existence et d'unicité pour l'equation de Riccati stationnaire

Michel Sorine

IRIA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 55

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ POUR L'ÉQUATION DE RICCATI STATIONNAIRE

Michel SORINE

Février 1981

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

POUR L'ÉQUATION DE RICCATI STATIONNAIRE

Michel SORINE

I.N.R.I.A.

RESUME :

On présente ici des résultats d'existence, de régularité et d'unicité de la solution de l'équation de Riccati stationnaire associée au problème de contrôle d'un système parabolique.

On donne des applications de ces résultats à la justification d'algorithmes de résolution et à l'étude d'un exemple avec contrôle et observation frontières.

ABSTRACT :

We give here existence, regularity and uniqueness properties of the solution of the stationary Riccati equation associated with the control problem of a parabolic system.

We then use these results for justifying some numerical algorithms and studying an example with boundary control and observation.

Ce travail a été effectué en grande partie au Centre de Recherche de Mathématiques Appliquées de l'Université de Montréal, grâce à la subvention A-8730 du Conseil de la Recherche en Sciences Naturelles et en Génie (Canada) et à une subvention FCAC du Ministère de l'Education du Québec (cf. Rapport CRMA-984).

INTRODUCTION

Nous étudions ici l'équation de Riccati stationnaire associée au problème de contrôle d'un système parabolique sur un intervalle de temps infini. Les hypothèses faites permettent d'appliquer les résultats à des problèmes avec contrôles et observations frontières (au moins dans le cas où l'équation d'état admet une formulation variationnelle, cf. [7]). Ces problèmes ne sont pas couverts par les résultats généraux récents sur l'équation de Riccati (cf. [1], [10], [4]).

Après avoir formulé le problème de contrôle (paragraphe 1) nous caractérisons sa solution (paragraphe 2) par un système d'optimalité analogue à ceux sur l'horizon fini mais sous la seule hypothèse de stabilisabilité de l'observation de l'état. Suivant LIONS [6] nous introduisons à ce stade l'opérateur P de découplage. Au paragraphe 3 la régularité de P est étudiée: P transmet la régularité de l'état à l'état adjoint et satisfait une équation de Riccati. Au paragraphe 4 nous étudions les transformations du système d'optimalité associées à l'existence de P et de Q, l'opérateur analogue associé à un problème de contrôle "adjoint". Lorsque P existe on peut triangulariser l'opérateur Hamiltonien, lorsque P et Q existent on peut le diagonaliser. Les éléments diagonaux sont les dynamiques optimales de chacun des problèmes. On déduit de là un résultat d'unicité pour l'équation de Riccati. Au paragraphe 5 on donne quelques algorithmes de calcul de P et Q et enfin le paragraphe 6 est consacré à l'étude d'un exemple.

1. NOTATIONS ET HYPOTHESES

Soient V,H,E,F des espaces de Hilbert réels séparables tels que (on identifie H à son dual):

$$(1.1)\quad \begin{cases} V \subset H \equiv H' \subset V' \\ \text{Chaque espace étant dense dans le suivant avec injection} \\ \text{continue.} \end{cases}$$

On note:

- $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ (resp. $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$) le produit scalaire et la norme dans V
- $(\cdot,\cdot)_X$, $|\cdot|_X$, les mêmes quantités pour un espace de Hilbert X.

On donne:

$$(1.2)\quad \begin{cases} A \in \mathcal{L}(V,V') \quad \text{tel que} \ \exists\alpha>0,\ \exists\lambda\geq 0,\ (A\varphi,\varphi)+\lambda|\varphi|^2 \geq \alpha\|\varphi\|^2,\ \forall\varphi \in V \\ B \in \mathcal{L}(E,V') \\ C \in \mathcal{L}(V,F) \\ N \in \mathcal{L}(E,E) \quad \text{tel que } N=N^* \text{ et } \exists\nu>0,\ (Nv,v)_E \geq \nu|v|_E^2,\ \forall v \in E. \end{cases}$$

On étudie dans la suite le problème de contrôle suivant, où l'état est la solution de:

$$(1.3)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}y(v)+Ay(v) = Bv \\ y(v)\big|_{t=0} = y_0, \quad y(v) \in L^2_{loc}(0,\infty;V), \end{cases}$$

où

$$v \in U = L^2_{loc}(0,\infty;E), \quad y_0 \in H,$$

et où le coût (fini ou infini) est:

(1.4) $J(v) = \int_0^\infty |Cy(v)|_F^2 dt + \int_0^\infty (Nv,v)_E dt.$

On cherche u tel que:

(1.5) $\begin{cases} u \in U \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in U \end{cases}$

et éventuellement la loi de feedback $u = \phi(y(u))$

Remarque 1.1. Sous les hypothèses (1.1),(1.2) on sait que l'équation (1.3) a une solution unique $y \in W_{loc}(0,\infty)$ (pour la signification des notations et la démonstration, cf.[6]). On a alors $Cy \in L^2_{loc}(0,\infty;F)$ et l'expression de J(v) à un sens en convenant que $J(v) = +\infty$ si

$$Cy \notin L^2(0,\infty;F) \quad \text{ou} \quad v \notin L^2(0,\infty;E).$$

Afin d'éliminer le cas trivial $J(v) = +\infty \quad \forall v \in \mathfrak{U}$, il est néecessaire de supposer:

(1.6) $\forall h \in H, \exists v \in L^2(0,\infty;E), \quad Cy(v) \in L^2(0,\infty;F)$,

ce qui, grâce à la coercivité de N est équivalent à:

(1.7) $\forall h \in H, \exists v \in \mathfrak{U}, \quad J(v) < +\infty$.

Définition 1.1. Lorsque (1.6) a lieu, on dit que la paire (A,B) est C-stabilisable et que v C-stabilise h.

Si $v = \phi(y(v))$ où $\phi(\cdot)$ est une loi de feedback (indépendante de h) on dit que (A,B) est C-stabilisable par feedback.

Si (1.6) a lieu pour C = Identité de V, on dit que (A,B) est stabilisable.

2. LE PROBLEME DE CONTROLE SUR L'INTERVALLE DE TEMPS INFINI

Nous allons voir que la propriété (1.6) est aussi suffisante pour que le problème de contrôle ait une solution. Le contrôle optimal s'écrit alors sous forme de feedback.

Nous utiliserons les notations [1]

(2.1) $$D_1 = BN^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*, \quad D_2 = C^*\Lambda_F C$$

et $\forall h \in H$

(2.2) $$\mathcal{U}_{ad}^h(C) = \{v \mid v \in L^2(0,\infty;E),\ Cy(v,h) \in L^2(0,\infty;F)\}.$$

On a le

<u>Théorème 2.1</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.6), le problème de contrôle (1.3), (1.4), (1.5) a une solution unique u caractérisée par le système suivant:

(2.3) $$\begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0, & y \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \\ -p'+A^*p-D_2y = 0, & p \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \\ y(0) = h, & \lim\limits_{T\to+\infty} (p(T),y(T)) = 0 \\ \lim\limits_{T\to+\infty} (p(T),y(v,h;T)) \le 0, & \forall v \in \mathcal{U}_{ad}^h(C) \end{cases}$$

(2.4) $$u = -N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*p \ .$$

De plus, il existe P unique, $P \in \mathcal{L}(H;H)$, $P = P^* \geq 0$, tel que $\forall h \in H$

---

[1] Λ_X désigne l'isomorphisme canonique de l'espace de Hilbert X sur son dual X'.

(2.5) $\quad u(t) = -N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*Py(u,h;t)$ p.p. sur $]0,\infty[$

(2.6) $\quad J(u) = (Ph,h)$.

Démonstration. (1.6) ayant lieu, $\forall h \in H$, $\exists v_h \in U_{ad}^h(C)$, $J(v_h) < +\infty$, d'où $\inf_{v\in U} J(v) < +\infty$. Soit u_n une suite minimisante telle que $J(v_h) \geq J(u_n) \to \inf_{v\in U} J(v)$, quand $n \to +\infty$, d'où $\int_0^\infty |u_n|_E^2 dt \leq \frac{1}{\nu}J(v_h)$ et on peut extraire une sous-suite u_μ telle que

$$\begin{cases} u_\mu \to u \quad \text{dans} \quad L^2(0,\infty;E) \quad \text{faible} \\ \forall T > 0, \quad y(u_\mu) \to y(u) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

Comme $\forall T > 0$, $v \to \int_0^T |Cy(v)|_F^2 + \int_0^T (Nv,v)_E dt$ est faiblement semicontinue inférieurement, il vient:

$$\int_0^T \{|Cy(u)|_F^2 + (Nu,u)_E\}dt \leq \liminf_\mu \int_0^T \{|Cy(u_\mu)|_F^2 + (Nu_\mu,u_\mu)_E\}dt$$

$$\leq \liminf_\mu \int_0^\infty \{|Cy(u_\mu)|_F^2 + (Nu_\mu,u_\mu)_E\}dt$$

$$= \inf_{v\in \mathcal{U}} J(v),$$

d'où $J(u) \leq \operatorname{Inf}_{v\in\mathcal{U}} J(v)$, ainsi:

$$J(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}} J(v) = \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}^h(c)} J(v)$$

et donc u est un contrôle optimal.

D'autre part on vérifie facilement que $\mathcal{U}_{ad}^h(C)$ est convexe, $J(v)$ étant strictement convexe, l'unicité du contrôle suit.

Caractérisons le contrôle optimal.

Considérons le problème de contrôle sur $]0,T[$ associé à (1.3) et au coût

(2.7) $$J_T(v) = \int_0^T\{|Cy(v)|_F^2+(Nv,v)_E\}dt.$$

$\forall T > 0$, $\forall h \in H$, il existe une solution unique u_T, telle que:

$$J_T(u_T) = \inf_{v\in L^2(0,T;\,E)} J_T(v) \qquad \text{(cf. [6])}.$$

Notons y_T, p_T l'état optimal et l'état adjoint correspondant, on a:

(2.8) $$\begin{cases} y_T'+Ay_T+D_1p_T = 0 \\ -p_T'+A^*p_T-D_2y_T = 0 \\ y_T(0)=h,\ p_T(T)=0 \end{cases}$$

et

(2.9) $$p_T(t) = P_T(t)y_T(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

(2.10) $$\begin{cases} u_T = -N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*p_T \\ \inf J_T(v) = (P_T(0)h,h) \end{cases}$$

où P_T est défini de façon unique et vérifie en outre:

(2.11) $$P_T(t) \in \mathcal{L}(H;H),\ P_T(t) = P_T^*(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Montrons

(2.12) $$\begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} P_T(t)h = Ph \quad \text{dans } H,\ \forall t \geq 0, \quad \forall h \in H, \\ \text{où} \quad P \in \mathcal{L}(H;H), \quad P = P^* \geq 0. \end{cases}$$

Les opérateurs définissant le problème de contrôle étant indépendants du temps, on vérifie facilement que:

(2.13) $$\begin{cases} \forall T > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad P_T(t) = P_{T-t}(0) \\ T_2 \geq T_1 > 0 \Rightarrow P_{T_2}(0) \geq P_{T_1}(0). \end{cases}$$

Pour montrer (2.12) il suffit donc de vérifier que

(2.14) $\quad |P_T(0)|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq M, \quad$ M indépendant de T

(on utilise alors le théorème sur la convergence des suites monotones bornées d'opérateurs autoadjoints). Or:

(2.15) $\quad (P_T(0)h,h) = J_T(u_T) \leq \int_0^T \{ |Cy(u)|_F^2 + (Nu,u)_E \} dt \leq J(u),$

d'où, $P_T(0)$ étant symétrique:

$$|(P_T(0)h,\bar{h})| \leq \frac{1}{4}(J(u(h+\bar{h})) + J(u(h-\bar{h}))), \quad \forall h,\bar{h} \in H,$$

en notant u(h) le contrôle optimal sur $]0,\infty[$ associé à la valeur initiale h. (2.14) suit en appliquant deux fois le théorème de Banach-Steinhaus, d'où (2.12).

Soient $\tilde{y}_T$, $\tilde{p}_T$, $\tilde{u}_T$, les prolongements par 0, pour $t \geq T$, de y_T, p_T, u_T. On a, d'après (2.15),

(2.16) $\quad \begin{cases} |\tilde{u}_T|_{L^2(0,\infty;E)} \leq \sqrt{\frac{1}{\nu} J(u)} \\ |C\tilde{y}_T|_{L^2(0,\infty;F)} \leq \sqrt{J(u)} \end{cases}$

Montrons que $\forall T,T'$ tels que $T > T' > 0$, on a

(2.17) $\quad \int_0^{T'} \|y_T\|^2 dt \leq c(T')$

(2.18) $\quad \int_0^{T'} \|p_T\|^2 dt \leq c(T')$

où C(T') ne dépend que de T'. On a:

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_T = \left(\frac{d}{dt}y_T\right)^{\sim} - y_T(T)\delta(T-t)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_T = \left(\frac{d}{dt}p_T\right)^{\sim} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,\infty[;H),$$

d'où, avec (2.8):

$$(2.19)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{y}_T + A\tilde{y}_T = B\tilde{u}_T - y_T(T)\delta(T-t) \\ -\frac{d}{dt}\tilde{p}_T + A^*\tilde{p}_T = D_2\tilde{y}_T \\ \tilde{y}_T(0) = h,\ \tilde{y}_T,\ \tilde{p}_T \in L^2(0,\infty;V) \end{cases}$$

Alors, utilisant (2.16), on déduit de (2.19), pour $T > T'$

(2.17) et $\int_0^{T'} \|\tilde{p}_T\|^2 dt \leq c(T')(1+|\tilde{p}_T(T')|^2)$ et comme

$|\tilde{p}_T(T')|^2 = |p_T(T')|^2 = |P_T(T')y_T(T')|^2 \leq |P_T(T')^{\frac{1}{2}}|^2 |P_T(T')^{\frac{1}{2}}y_T(T')|^2$,

il vient avec (2.13), (2.14):

$$|\tilde{p}_T(T')|^2 \leq M(P_T(T')y_T(T'),y_T(T')) = M(p_T(T'),y_T(T')).$$

Mais, comme on le vérifie à l'aide de (2.8):

$$\frac{d}{dt}(p_T(t),y_T(t)) = -(D_2 y_T(t),y_T(t)) - (D_1 p_T(t),p_T(t)) \leq 0,$$

d'où $(p_T(T'),y_T(T')) \leq (p_T(0),y_T(0)) = J_T(u_T) \leq J(u)$, d'où (2.18).

On peut alors trouver une suite $T_n \to +\infty$ telle que

(2.20) $\quad \tilde{u}_{T_n} \to w$ dans $L^2(0,\infty;E)$ faible,

et en particulier, en utilisant la première équation (2.19):

(2.21) $\quad \forall T' > 0,\ \tilde{y}_{T_n} \to y(w)$ dans $L^2(0,T';V)$ faible,

d'où l'on déduit:

$$J_{T'}(w) \leq \liminf_{T_n\to\infty} J_{T'}(\tilde{u}_{T_n}) \leq \liminf_{T_n\to\infty} J_{T_n}(\tilde{u}_{T_n}) \leq \liminf_{T_n\to\infty} J_{T_n}(u) = J(u)$$

puis $J(w) \leq J(u)$, d'où $w=u$.

En particulier $J(\tilde{u}_{T_n}) \to J(u)$, mais comme, d'après (2.16), (2.21), $C\tilde{y}_{T_n} \to Cy(u)$ dans $L^2(0,\infty;F)$ faible, on a, par l'absurde (en utilisant la faible semi continuité inférieure de chacun des termes de $J(v)$):

(2.22) $\quad \tilde{u}_{T_n} \to u$ dans $L^2(0,\infty;E)$ fort.

D'autre part, d'après (2.18), on peut extraire une sous-suite encore notée T_n, telle que, T' étant fixé:

(2.23) $\quad \tilde{p}_{T_n} \to p_{T'}$ dans $L^2(0,T';V)$ faible.

Comme $\tilde{p}_{T_n}$ vérifie:

$$\begin{cases} -\tilde{p}'_{T_n} + A^*\tilde{p}_{T_n} = D_2\tilde{y}_{T_n} \\ \tilde{p}_{T_n}(t) = P_{T_n}(t)\tilde{y}_{T_n}(t), \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

on a, en passant à la limite (sachant qu'avec (2.22) la limite dans (2.21) est forte) grâce à (2.12), (2.21), (2.23):

$$\begin{cases} -p'_{T'} + A^*p_{T'} = D_2 y(u) \\ p_{T'}(t) = Py(u'\ t), \ \forall t \in [0,T'] \end{cases}$$

ce qui montre que $p_{T'}$ est indépendant de la sous-suite T_n et de T', on le note p. On a $p \in L^2_{loc}(0,\infty;V)$ et

$$\text{(2.24a)} \quad \begin{cases} y'(u)+Ay(u)+D_1 p = 0, & y(u) \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \\ -p'+A^*p-D_2 y(u) = 0, & p \in L^2_{loc}(0,\infty;V) \end{cases}$$

(2.24b) $\quad y(u;0) = h, \ p(t) = Py(t), \ \forall t \geq 0$

ainsi que (2.4) et (2.5).

Remarquons que P étant défini par (2.12), $\forall T > 0$, le système sur $[0,T]$ constitué de (2.24a) et

(2.24b') $\quad y(u;0) = h, \ p(T) = Py(T)$

a une solution unique en tant que système d'optimalité associé à (1.3) et au coût

$$j_T(v) = J_T(v) + (Py(v;T),y(v;T)).$$

Ainsi (2.24a), (2.24b) et (2.4) caractérisent-ils u et on a:

$$(2.25) \qquad \inf_{v\in L^2(0,T;E)} j_T(v) = (Ph,h) = J_T(u)+(p(T),y(u;T)), \quad \forall T > 0.$$

Comme d'autre part

$$(Ph,h) = \lim_{T_n\to+\infty} (P_{T_n}(0)h,h) = \lim_{T_n\to+\infty} J(\tilde{u}_{T_n}) = J(u)$$

on a (2.6) et, avec (2.25):

$$(2.26) \qquad \lim_{T\to+\infty} (p(T),y(u;T)) = 0.$$

Il reste à montrer que (2.3) caractérise u.

Il est classique (cf. [6]) que u est caracterisé par l'inéquation suivante:

$$(2.27) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \{(Cy(u),Cy(v)-Cy(u))_F+(Nu,v-u)_E\}dt \geq 0, & \forall v \in U^h_{ad}(c), \\ u \in \mathcal{U}^h_{ad}(c). \end{cases}$$

Posons

$$X_T = \int_0^T(-p'+A^*p,y(v)-y(u))dt.$$

Utilisant (2.24), (2.27) s'écrit:

$$(2.28) \quad \begin{cases} \lim_{T\to+\infty} X_T + \int_0^\infty(Nu,v-u)_E dt \geq 0, & \forall v \in U^h_{ad}(c) \\ u = -N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*p \in \mathcal{U}^h_{ad}(c). \end{cases}$$

Mais

$$X_T = -(p(T),y(v;T))+(p(T),y(u;T)) + \int_0^T(\Lambda_E^{-1}B^*p,v-u)_E dt,$$

d'où, avec (2.26), (2.28):

$$(2.29)\qquad -\lim_{T\to+\infty}(p(T),y(v;T)) + \int_0^\infty (\Lambda_E^{-1}B^*p+Nu,v-u)_E dt \geq 0,\quad \forall v\in \mathcal{U}_{ad}^h(c),$$

d'où (2.3).

Réciproquement si (y,p) est solution de (2.3) on vérifie facilement que $\int_0^\infty\{(D_2y,y)+(D_1p,p)\}dt< +\infty$, d'où u, donné par (2.4), $\in \mathcal{U}_{ad}^h(c)$ Remontant les calculs précédents on retrouve alors (2.27) et u est donc le contrôle optimal. □

Remarque 2.1. Il résulte du Théorème 2.1 que si la paire (A,B) est C-stabilisable, elle est C-stabilisable par feedback.

Remarque 2.2. Ces résultats complètent ceux de LIONS [6] où le système est supposé stable en boucle ouverte $(y(0)\in L^2(0,\infty;V))$.

La C-stabilisabilité est utilisée de façon analogue dans BENSOUSSAN-DELFOUR-MITTER [1] mais avec l'hypothèse $B\in\mathcal{L}(E;H)$, $C\in\mathcal{L}(H;F)$, restrictive dans les applications.

Remarque 2.3. De la démonstration du Théorème 2.1 il résulte que si (2.3), (2.4) a encore une solution, u, lorsqu'on remplace $\mathcal{U}_{ad}^h(C)$ par $\mathcal{U}_{ad}^h(C)\cap\mathcal{U}_{ad}^h$ et si $u\in\mathcal{U}_{ad}^h$, $\mathcal{U}_{ad}^h$ étant un convexe de $\mathcal{U}$, alors u est solution du problème:

$$u\in\mathcal{U}_{ad}^h(c)\cap\mathcal{U}_{ad}^h,\quad J(u)\leq J(v)\quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad}^h(c)\cap\mathcal{U}_{ad}^h.$$

Cette remarque est utilisée dans [9] avec $\mathcal{U}_{ad}^h = \mathcal{U}_{ad}^h(C_2)$.

3. EQUATION DE RICCATI STATIONNAIRE: EXISTENCE ET REGULARITE DE LA SOLUTION

Commençons par le Lemme suivant qui précise quelques notations:

Lemme 3.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soit

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & D_1 \\ -D_2 & A^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V\times V;\ V'\times V'). \tag{3.1}$$

Muni de la norme du graphe, le domaine $\mathcal{D}$ de la restriction de $\mathcal{A}$ à $H\times H$ est un espace de Hilbert. $pr_i \in \mathcal{L}(H\times H;H)$ étant défini par $pr_i(\varphi_1,\varphi_2) = \varphi_i$, $i=1,2$, $\mathcal{D}_i = pr_i(\mathcal{D})$ est un espace de Hilbert pour la structure d'espace quotient $\mathcal{D}/\mathcal{D}\cap \mathrm{Ker}\, pr_i$ et $\mathcal{D}_i \subset V \subset H$, $i=1,2$, chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue. □

Les résultats principaux de ce paragraphe sont rassemblés dans les deux théorèmes qui suivent.

Theoreme 3.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), lorsque (A,B) est C-stabilisable, P, défini au théorème 2.1, a les propriétés suivantes:

(i) $-(A+D_1P)$ a une restriction de domaine $\mathcal{D}_P$ qui génère un semi-groupe analytique sur H. $y(t) = e^{-(A+D_1P)t}h$ est l'unique solution du système d'optimalité (2.3).

(ii) Muni de la norme du graphe, $\mathcal{D}_P \subset \mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_P$ est dense dans V avec injection continue et

$$P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_P;\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{L}(V;V) \cap \mathcal{L}(H;H) \cap \mathcal{L}(V';V').$$

(iii) P est solution de l'équation de Riccati stationnaire:

$$PA+A^*P+PD_1P = D_2,\quad \text{égalité dans } \mathcal{L}(V;V'). \tag{3.2}$$

Notons $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des opérateurs P vérifiant:

(j) $-(A+D_1P)$ a une restriction de domaine $\mathcal{D}_P$ qui génère un semi-groupe

(3.3) (jj) Muni de la norme du graphe, $\mathcal{D}_P \subset \mathcal{D}_1$,

$P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_P;\mathcal{D}_2) \cap \mathcal{L}(H;H)$, $P = P^* \geq 0$.

(jjj) l'égalité (3.2) a lieu dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_P;\mathcal{D}'_P)$. □

<u>Théorème 3.2.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) (A,B) est C-stabilisable

(ii) $\mathcal{S}_+ \neq \phi$

(iii) Le problème de contrôle (1.3), (1.4), (1.5) a une solution. □

Démontrons ces résultats et en premier lieu vérifions le lemme suivant, utile dans l'étude directe des systèmes paraboliques-paraboliques rétrogrades du type (2.8) (cf. [11]):

<u>Lemme 3.2.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soient

$$M_\mu = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in R \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_\mu = M_\mu \mathcal{A}$$

Alors pour μ suffisamment grand:

$$(\mathcal{A}_\mu u,u)_\bullet + \lambda|u|_\bullet^2 \geq \frac{\alpha}{2}\|u\|_\bullet^2 \qquad \forall u \in V\times V$$

où $\mu = \{u_1,u_2\}$, $(.,.)_\bullet$ est le produit de dualité $V\times V$-$V'\times V'$ et $|\ |_\bullet$, $\|\ \|_\bullet$ les normes dans $H\times H$ et $V\times V$ respectivement.

<u>Démonstration</u>. On a $\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A+\mu D_2 & D_1-\mu A^* \\ \mu A-D_2 & \mu D_1+A^* \end{pmatrix}$ et pour $u = \{u_1,u_2\} \in V\times V$:

$$(\mathcal{A}_\mu u,u)_\bullet = (Au_1,u_1)+(A^*u_2,u_2)+\mu(D_2u_1,u_1)+\mu(D_1u_2,u_2)$$
$$+(D_1u_2,u_1)-(D_2u_1,u_2).$$

Comme

$$|(D_1u_2,u_1)| \le |D_1u_2|_{V'}\|u_1\| \le \frac{\alpha}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2\alpha}|D_1u_2|^2_{V'}$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\|u_1\|^2 + \frac{|B|^2}{2\alpha}|N^{-1}A_E^{-1}B^*u_2|^2_E \le \frac{\alpha}{2}\|u_1\|^2 + \frac{|B|^2}{2\alpha\nu}(D_1u_2,u_2)$$

et

$$|(D_2u_1,u_2)| \le |D_2u_1|_{V'}\|u_2\| \le \frac{\alpha}{2}\|u_2\|^2 + \frac{1}{2\alpha}|D_2u_1|^2_{V'}$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\|u_2\|^2 + \frac{|C|^2}{2\alpha}(D_2u_1,u_1),$$

($|B|$ et $|C|$ étant les normes de B et C dans $\mathcal{L}(E;V')$ et $\mathcal{L}(V;F)$ respectivement) il vient:

$$(\mathcal{A}_\mu u,u)_\bullet +\lambda|u|^2_\bullet \ge \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_\bullet + \left(\mu-\frac{|B|^2}{2\alpha\nu}\right)(D_1u_2,u_2)+\left(\mu-\frac{|C|^2}{2\alpha}\right)(D_2u_1,u_1).$$

Alors pour

$$\mu \ge \operatorname{Max}\left(\frac{|B|^2}{2\alpha\nu},\frac{|C|^2}{2\alpha}\right) ,$$

le lemme suit. □

<u>Démonstration du lemme 3.1.</u> D'après le lemme 3.2, $\mathcal{A}_\mu$ est un opérateur fermé dans $H\times H$. Comme M_μ est un isomorphisme $(1+\mu^2 \ne 0)$ $\mathcal{A}$ est aussi fermé et $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, muni de la norme du graphe, est un espace de Hilbert. De plus $\mathcal{A}_\mu+\lambda$ est un isomorphisme de $V\times V$ sur $V'\times V'$ et de $\mathcal{D}$ sur $H\times H$ (toujours d'après le lemme 3.2) donc, remarquant que $\mathcal{D} = D(\mathcal{A}_\mu)$:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \mathcal{D} \subset V\times V \subset H\times H & \text{chaque espace étant dense dans le suivant} \\ \text{avec injection continue.} \end{cases}$$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ étant définis comme dans l'énoncé du lemme, munissons les d'une topologie: $pr_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D};H)$ et donc $\mathcal{D} \cap \mathrm{Ker}pr_i$ est fermé dans $\mathcal{D}$, i=1,2. $\mathcal{D}_i$ est donc un espace de Hilbert si on le munit de la structure d'espace quotient $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cap \mathrm{Ker}pr_i$, i=1,2 et avec (3.4) le lemme suit. □

Lemma 3.3. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.6), y et P définis au théorème 2.1, vérifient

(i) $h \to y(t)$ est un semi-groupe continu d'opérateurs de $\mathcal{L}(H;H)$. On note $-A_p$ le générateur infinitésimal et $\mathcal{D}_p = D(A_p)$.

(ii) Notons $\mathcal{P} = \binom{I}{P}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors:

$$(3.5)\qquad \mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_p,\mathcal{D})$$

$$(3.6)\qquad \mathcal{P}A_p h = J\mathcal{A}\mathcal{P}h \qquad \forall h \in \mathcal{D}_p.$$

Démonstration. (i) Notons G(t) l'application $h \to y(t)$. On a $t \to G(t)h \in C^0([0,\infty[\,;H)$ car $y \in W_{loc}(0,\infty)$. La restriction de y à $[t,+\infty[$ est encore solution d'un système analogue à (2.3) mais posé sur $[t,+\infty[$ et avec comme condition itiale y(t). On a donc $G(t+s) = G(s)G(t)$, $\forall s,t \geq 0$.

Enfin montrons que $G(t) \in \mathcal{L}(H;H)$ pour $t \geq 0$.

Soit $T > t$. Les restrictions de y et p à [0,T] vérifient (cf. (2.24)):

$$\begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0 \\ -p'+A^*p-D_2y = 0 \\ y(0) = h, \quad p(T) = Py(t) \end{cases}$$

système qui a une solution $(y,p) \in W(0,T)\times W(0,T)$ dépendant continûment de h, comme on le voit par exemple en considérant le problème de contrôle dont le coût est

$$J(v) = \int_0^T\{(D_2y(v),y(v)) + (Nv,v)_E\}dt + (Py(v,T),y(v,T)),$$

où $y(v)$ est la solution de (1.3) (cf. [6]), donc $h \to y(t)$ est continue dans H et (i) est demontré.

(ii) y et $p = Py$ vérifient, en réécrivant (2.2):

$$\begin{cases} (\mathcal{P}y)'+J\mathcal{A}\mathcal{P}y = 0 \\ (\mathcal{P}y)(0) = \mathcal{P}h \end{cases}$$

Soit alors ω_0 le type de e^{-Apt} et $\omega > \omega_0$. On a

$$e^{-\omega t}e^{-Apt}h \to 0 \text{ dans } H, \quad \forall h \in H \text{ quand } t \to +\infty$$

et

$$\frac{d}{dt}(e^{-\omega t}\ y) + (J\mathcal{A}+\omega)e^{-\omega t}\quad \mathcal{P}y = 0$$

d'où:

$$\mathcal{P}h = \mathcal{P}e^{-\omega T}e^{-ApT}h + \int_0^T(J\mathcal{A}+\omega)e^{-\omega t}\mathcal{P}e^{-Apt}hdt, \quad \forall h \in H$$

mais $J\mathcal{A}+\omega \in \mathcal{L}(V\times V;V'\times V')$ et $e^{-\omega t}\mathcal{P}e^{-A_pt}h = e^{-\omega t}\binom{y}{p} \in L^2_{loc}(0,\infty;V)\times L^2_{loc}(0,\infty;V)$, d'où:

$$\mathcal{P}h = \mathcal{P}e^{-\omega T}e^{-A_pT}h + (J\mathcal{A}+\omega)\int_0^T e^{-\omega t}\mathcal{P}e^{-A_pt}hdt, \quad \forall h \in H$$

mais $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(H;H\times H)$ et $t \to e^{-A_pt}h \in C^0([0,T];H)$, d'où:

$$\mathcal{P}h = \mathcal{P}e^{-\omega T}e^{-A_pT}h + (J\mathcal{A}+\omega)\mathcal{P}\int_0^T e^{-\omega t}e^{-A_pt}hdt, \quad \forall h \in H.$$

Sachant que (cf. [12]):

$$\forall h \in H \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-\omega t} e^{-A_p t} h dt = (A_p+\omega)^{-1}h, \quad \text{dans } H,$$

il vient:

$$\begin{cases} \lim\limits_{T\to+\infty} (\mathcal{A}+\omega)\mathcal{P}\int_0^T e^{-\omega t} e^{-A_p t} h dt = \mathcal{P}h & \text{dans } H\times H,\ \forall h \in H. \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \mathcal{P}\int_0^T e^{-\omega t} e^{-A_p t} h dt = \mathcal{P}(A_p+\omega)^{-1}h & \text{dans } H\times H,\ \forall h \in H. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{A}+\omega$ est un opérateur fermé dans $H\times H$ ($\mathcal{A}$ l'est), on en déduit:

$\forall h \in H, \quad \mathcal{P}(A_p+\omega)^{-1}h \in \mathcal{D} = D(\mathcal{A})$, d'où résulte (3.5), et:

$\forall h \in H, \quad (\mathcal{A}+\omega)\mathcal{P}(A_p+\omega)^{-1}h = \mathcal{P}h$, soit encore:

$\forall h \in \mathcal{D}_p, \quad (\mathcal{A}+\omega)\mathcal{P}h = \mathcal{P}(A_p+\omega)h$, d'où résulte (3.6).

<u>Démonstration du théorème 3.1.</u> De (3.5) il résulte que

$$\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_1 \quad \text{et} \quad P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_p;\mathcal{D}_2).$$

De (3.6) il résulte, en remarquant que $(P,I)J\binom{I}{P} = 0$:

(3.7) $\qquad \forall h \in \mathcal{D}_p, \quad (P,I)\mathcal{A}\binom{I}{P}h = 0.$

Comme, en particulier, $P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_p;V) \cap \mathcal{L}(V';\mathcal{D}_p')$ (d'après 3.5 et la symétrie de P), on peut développer (3.7) et il vient:

(3.8) $\qquad PA+A^*P+PD_1P = D_2$, égalité dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_p,\mathcal{D}_p')$.

Le théorème sera démontré si on montre l'analyticité de $e^{-A_p t}$ et $P \in \mathcal{L}(V,V)$. En effet on déduit alors (par symétrie) $P \in \mathcal{L}(V',V')$ et on peut étendre (3.8) à (3.2) par densité de $\mathcal{D}_p$ dans V que nous allons aussi vérifier.

Reprenons (3.6). Il vient, avec le lemme 3.2:

$$(\mathcal{A}_\mu \mathcal{P}h,\mathcal{P}h)_\bullet+\lambda|\mathcal{P}h|_\bullet^2 = (M_\mu J\mathcal{P}A_p h,\mathcal{P}h)_\bullet+\lambda|\mathcal{P}h|_\bullet^2 \geq \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}h\|_\bullet^2\ ,\ \forall h \in \mathcal{D}_p.$$

Posons $T_\mu = \mathcal{P}^* M_\mu J\mathcal{P} = I+2\mu P-P^2$, il vient:

(3.9) $\quad \forall h \in \mathcal{D}_p,\ (T_\mu A_p h,h)+\lambda(|h|^2+|Ph|^2) \geq \frac{\alpha}{2}(\|h\|^2+\|Ph\|^2)$

et pour $\mu > |P|_{\mathcal{L}(H;H)}$, T_μ est un isomorphisme de H et $\mathcal{D}_p = D(T_\mu A_p)$.
Soit $\widetilde{V}$ le complété de $\mathcal{D}_p$ pour la norme:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{N}}^2 = (T_\mu A_p\varphi,\varphi)+\lambda(|\varphi|^2+|P\varphi|^2).$$

Montrons que:

$$(3.10)\quad \begin{cases} \widetilde{V} \subset \{\varphi|\varphi \in V,\ P\varphi \in V\},\ \widetilde{V} \text{ est un espace de Hilbert,} \\ \text{dans } \widetilde{V} \text{ une norme équivalente est } \|\varphi\|_{\mathcal{N}}^2 = \|\varphi\|^2+\|P\varphi\|^2. \end{cases}$$

De (3.9) il résulte que $h \in \widetilde{V} \Rightarrow h, Ph \in V$ (passer à la limite dans (3.9) pour $h_n \in \mathcal{D}_p$, $h_n \to h$ dans $\widetilde{V}$: h_n et $Ph_n \in$ borné de V), d'où $\widetilde{V} \subset V$ avec injection continue et $P \in \mathcal{L}(\widetilde{V},V) \cap \mathcal{L}(V',\widetilde{V}')$ (la deuxième inclusion s'obtenant par transposition), ce qui permet d'étendre (3.8) en une égalite dans $\mathcal{L}(\widetilde{V},\widetilde{V}')$.

D'autre part pour $h \in \mathcal{D}_p$, $y'(t)+A_p y(t) = 0$, $\forall t \geq 0$ d'où $y'(0) = A_p h$ mais alors $y \in C^1([0,\infty[;H) \cap C^0([0,\infty[;\mathcal{D}_p)$ et comme $P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_p;V)$, $p(t) = Py(t)$, $\forall t \geq 0$ et $p \in C^0([0,\infty[;V)$, d'où: $-y'(0) = Ay(0)+D_1p(0) = (A+D_1P)h$ dans V', d'où:

(3.11) $\quad \forall h \in \mathcal{D}_p,\ A_p h = (A+D_1P)h$ et $|A_p h|_{V'} \leq c_1(\|h\| +\|Ph\|)$.

On déduit de là que $\forall\varphi \in \mathcal{D}_p$:

$$|(T_\mu A_p\varphi,\varphi)| = |(A_p\varphi,\varphi)+2\mu(A_p\varphi,P\varphi)-(PA_p\varphi,P\varphi)| \leq c_1(\|\varphi\|+\|P\varphi\|)\|\varphi\| +$$
$$+2\mu c_1(\|\varphi\|+\|Ph\|)\|P\varphi\|+|(PA_p\varphi,P\varphi)|$$

mais avec (3.8) et (3.11) il vient:

$$|(PA_p\varphi,P\varphi)| = |((D_2-A^*P)\varphi,P\varphi)| \le c_2(\|\varphi\|+\|P\varphi\|)\|P\varphi\|,$$

d'où enfin: il existe une constante c, $\forall\varphi \in \mathcal{D}_p$, $|(T_\mu A_p\varphi,\varphi)| \le c(\|\varphi\|^2+\|P\varphi\|^2)$ et donc $\|\varphi\|^2_{\mathcal{N}} \le c'(\|\varphi\|^2+\|P\varphi\|^2)$ (en utilisant (3.9) et la continuité de l'injection de V dans H). (3.10) en résulte. Ainsi $T_\mu A_p$ admet une extension à $\tilde{V}$ qui est continue et $\tilde{V}$-H coercive, donc:

Pour λ assez grand $T_\mu A_p+\lambda$ est un isomorphisme de $\tilde{V}$ sur $\tilde{V}'$.

En particulier $T_\mu(A_p+\lambda) = T_\mu A_p+\lambda+\lambda(2\mu P-P^2)$ est aussi $\tilde{V}$ coercif et donc aussi un isomorphisme de $\tilde{V}$ en $\tilde{V}'$. Comme $A_p+\lambda \in \mathcal{L}(\tilde{V},V')$ car $\tilde{V} \subset V$ et $P \in \mathcal{L}(\tilde{V},V)$ d'après (3.10), il vient: $\forall\psi \in \tilde{V}'$ $\exists\varphi \in \tilde{V}$, $\psi = T\mu(A_p+\lambda)\varphi$, d'où T_μ est un isomorphisme de V' sur $\tilde{V}'$ et de $\tilde{V}$ sur V par transposition. On déduit de là que $A_p+\lambda$ est un isomorphisme de $\tilde{V}$ sur V'. En particulier, $\forall\psi \in V'$, $\exists\varphi \in \tilde{V}$, $\psi = (A_p+\lambda)\varphi$, et, (3.8) étant vraie pour les $\varphi \in \tilde{V}$:$P\psi = PA_p\varphi+\lambda P\varphi = D_2\varphi-A^*P\varphi+\lambda P\varphi \in V'$, donc $P \in \mathcal{L}(V',V')$ et par transposition $P \in \mathcal{L}(V,V)$. De plus $T_\mu \in \mathcal{L}(V',V')$ et comme $V' \subset \tilde{V}'$ il en résulte que $V' = \tilde{V}'$ et donc $\tilde{V} = V$.

Remarquons qu'en conséquence T_μ est aussi un isomorphisme sur V et sur V' et que, au sens des opérateurs de $\mathcal{L}(H,H)$, $T_\mu = T^*_\mu > 0$. Soit alors H_μ l'espace obtenu en renormant H avec le produit scalaire: $(h,\bar{h})_{H_\mu} = (T_\mu h,\bar{h})$. A_p est maintenant V-H_μ coercive et l'analyticité du semigroupe e^{-A_pt} en résulte. □

Proposition 3.1. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soit $P \in \mathcal{S}_+$. On a: $e^{-(A+D_1P)t}$ est un semigroupe analytique, $\binom{I}{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_P;\mathcal{D})$ et dans la définition de $\mathcal{S}_+$ (cf. (3.3)) on peut remplacer (jj) et (jjj) par (ii) et (iii) du théorème 3.1, respectivement.

Démonstration. $\forall h \in \mathcal{D}_P$, Ah, $D_1Ph \in V'$ car $\mathcal{D}_P \subset \mathcal{D}_1 \subset V$ et $Ph \in \mathcal{D}_2 \subset V$ et $Ah+D_1Ph \in H$. De même A^*Ph, $D_2h \in V'$ et (d'apres (jjj)) $A^*Ph-D_2h = -P(A+D_1P)h \in H$, d'où $\binom{h}{Ph} \in \mathcal{D}$ et donc $\binom{I}{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_P,\mathcal{D})$. En particulier on a l'analogue de (3.6) et par un calcul déjà fait, on a l'analogue de (3.9) duquel on déduit, comme au théorème 3.1 (ii) et (iii). □

Démonstration du theoreme 3.2. Des théorèmes 2.1 et 3.1 résulte que (i) ⇒ (iii) ⇒ (ii). Montrons donc (ii) ⇒ (i).

Soit $h \in H$ et $y(t) = e^{-(A+D_1P)t}h$. D'après la proposition 3.1 $\forall t > 0$, $y(t) \in \mathcal{D}_P = D(A+D_1P)$, on a donc: $((PA+A^*P+PD_1P)y(t), y(t)) = (D_2y(t),y(t))$, soit encore: $(P(A+D_1P)y(t),y(t))+(Py(t),(A+D_1P)y(t)) = ((D_2+PD_1P)y(t),y(t))$ d'où $-\frac{d}{dt}(Py(t),y(t)) = ((D_2+PD_1P)y(1),y(t))$, $\forall t > 0$ d'où: $(Py(s),y(s)) = (Py(t),y(t))+\int_s^t\{|cy(\tau)|_F^2+(Nv_P,v_P)_E\}d\tau$, $\forall t \geq s > 0$, où on a posé $v_P = -N^{-1}\Lambda_E^{-1}B^*Py$.

Quand $s \to 0$ et $t \to +\infty$, $(Py(s),y(s)) \to (Ph,h)$ et chacun des termes du membre de droite, étant positif, est borné. Les intégrandes formant une suite monotone (restrictions à $]s,t[$), la convergence de l'intégrale montre que $\int_0^\infty\{|Cy(v_P)|_F^2+(Nv_P,v_P)_E\}dt$ existe au sens de Lebesgue et donc (A,B) est C-stabilisable.

La méthode de découplage des systèmes aux deux bouts du type (2.8) revient à triangulariser $\mathcal{A}$. C'est ce que précise le résultat qui suit. On verra plus loin des conditions sous lesquelles on peut diagonaliser $\mathcal{A}$. □

<u>Corollaire 3.1.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soit $P \in \mathcal{S}_+$. On a:

$$(3.10)\quad \begin{cases} J\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A+D_1P & D_1 \\ 0 & (A+D_1P)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}^{-1} \\ \text{égalité dans } \mathcal{L}(V\times V; V'\times V'). \end{cases}$$

<u>Démonstration.</u> (3.2) est vérifiée, d'où:

$$J\mathcal{A}\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} A+D_1P & D_1 \\ 0 & (A+D_1P)^* \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement que $\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}$ est un isomorphisme sur $V\times V$ et $V'\times V'$ car $P \in \mathcal{L}(V,V)$. □

4. TRANSFORMATION DES CONDITIONS D'OPTIMALITE. UN RESULTAT D'UNICITE POUR L'EQUATION DE RICCATI STATIONNAIRE.

Nous allons considérer ici le problème de contrôle obtenu en changeant dans (1.3), (1.4), (1.5), A en A^*, B en C^*, C en $N^{-1/2}B^*$ et N en I, ou plus simplement, le problème amenant à permuter dans (2.3) A et A^* ainsi que D_1 et D_2.

Lorsque (A^*,C^*) est B^*-stabilisable, ce problème a une solution unique, quelle que soit la donnée initiale et:

$$(4.1)\quad \begin{cases} \text{l'analogue de } P, \text{ noté } Q, \text{ vérifie} \\ QA^*+AQ+QD_2Q = D_1 \quad \text{dans } \mathcal{L}(V,V') \\ Q \in \mathcal{L}(V,V) \cap \mathcal{L}(H,H), \quad Q = Q^* \geq 0 \end{cases}$$

Soit enfin $\tilde{\mathcal{S}}_+$ l'analogue de $\mathcal{S}_+$.

Le résultat principal de ce paragraphe vaudra sous l'hypothèse

$$(4.2)\qquad \forall\theta \in R,\ \mathcal{A}+\theta i \text{ est inversible et } (\mathcal{A}+\theta i)^{-1} \in \mathcal{L}(H\times H;H\times H).$$

Il s'énonce:

<u>Théorème 4.1.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.2), lorsque $\tilde{\mathcal{S}}_+$ est non vide, $\mathcal{S}_+$ a au plus un élément. Ainsi lorsque (A,B) est C-stabilisable et (A^*,C^*) B^*-stabilisable, l'équation de Riccati stationnaire (3.2) a une solution unique. Il en est alors de même de (4.1). □

Pour démontrer ce théorème nous allons utiliser des résultats de diagonalisation de $\mathcal{A}$ qui permettent de transformer les conditions d'optimalité (2.3).

<u>Théorème 4.2.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), lorsque

$$(4.3)\qquad \begin{cases} (A,B) \text{ est } C\text{-stabilisable,} \\ (A^*,C^*) \text{ est } B^*\text{-stabilisable,} \end{cases}$$

Soient $P \in \mathcal{L}_+$ et $Q \in \mathcal{X}_+$. On a:

(4.4) $\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}$ est un isomorphisme sur $V\times V$, $H\times H$ et $V'\times V'$.

$$(4.5)\qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} A & D_1 \\ D_2 & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+D_1P & 0 \\ 0 & -(A^*+D_2Q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}^{-1} \\ \text{dans } \mathcal{L}(V\times V;V'\times V') \end{cases}$$

(4.6) $I+PQ$ et $I+QP$ sont des isomorphismes sur V,H et V' et

(4.7) $A^*+D_2Q = (I+PQ)^{-1}(A+D_1P)^*(I+PQ)$ dans $\mathcal{L}(V;V')$

en particulier:

$$(4.8)\qquad J\mathcal{A} = \begin{pmatrix} (I+QP)^{-1} & Q(I+PQ)^{-1} \\ -P & I \end{pmatrix}^{-1} J \begin{pmatrix} A+D_1P & 0 \\ 0 & (A+D_1P)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I+QP)^{-1} & Q(I+PQ)^{-1} \\ -P & I \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration.</u> Montrons (4.4). Notons $M = \begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}$ et $N_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}$. Nous procédons comme au lemme 3.2: $(N_\mu Mu,u) = |u|_\bullet^2+\mu(Pu_1,u_1)+\mu(Qu_2,u_2)+(Pu_1,u_2)-(Qu_2,u_1)$ et $|(Pu_1,u_2)| \le |Pu_1|\,|u_2| \le |P^{1/2}|\,|P^{1/2}u_1|\,|u_2| \le \frac{1}{2}|u_2|^2+\frac{|P^{1/2}|^2}{2}|P^{1/2}u_1|^2$ de même $|(Qu_2,u_1)| \le \frac{1}{2}|u_1|^2+\frac{|Q^{1/2}|^2}{2}|Q^{1/2}u_2|^2$, d'où: $(N_\mu Mu,u)_\bullet \ge \frac{1}{2}|u|_\bullet^2+(\mu-\frac{|P^{1/2}|^2}{2})(Pu_1,u_1)+(\mu-\frac{|Q^{1/2}|^2}{2})(Qu_2,u_2)$. Pour μ assez grand $N_\mu M$ est donc un isomorphisme sur $H\times H$. Comme N_μ^{-1} existe $(1+\mu^2 \ne 0)$ M est aussi un isomorphisme sur $H\times H$ et par restriction sur $V\times V$ (en utilisant le théorème du graphe fermé). De la même façon $\begin{pmatrix} I & P \\ -Q & I \end{pmatrix}$ est un isomorphisme sur $V\times V$, d'où en transposant: M est un isomorphisme sur $V'\times V'$.

Montrons (4.5). Comme au lemme 3.3, $J\mathcal{A}\binom{I}{P} = \binom{I}{P}A_P$ dans V (car $\mathcal{D}_P$ est dense dans V et les opérateurs $\in \mathcal{L}(V;V'\times V')$) de même:
$J\begin{pmatrix} A^* & D_2 \\ -D_1 & A \end{pmatrix}\binom{I}{Q} = \binom{I}{Q}A_Q$ dans V, en posant $A_Q = A^*+D_2Q$, ce qui s'écrit encore $J\mathcal{A}\binom{-Q}{I} = -\binom{-Q}{I}A_Q$, d'où: $J\mathcal{A}\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}J\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & A_Q \end{pmatrix}$ et (4.5) suit.

Montrons (4.6). D'après (4.4), $\forall f,g \in H$ (resp. $\in V'$) le système suivant a une solution $(\varphi,\psi) \in H\times H$ (resp. $V\times V$): $\varphi-Q\psi = f$, $P\varphi+\psi = g$ et donc $P(Q\psi+f)+\psi = g$ a une solution $\forall g \in H$ (resp. V) et $f = 0$, d'où $I+PQ$ est un isomorphisme sur V et H (les solutions dépendent continûment des données d'après (4.4)), de même pour $I+QP$. On complète (4.6) par transposition.

Montrons (4.7). $(A^*P+PA+PD_1P)Q = D_2Q$, d'où: $A^*+D_2Q = A^*(I+PQ)+P(D_1-QA^*-QD_2Q)+PD_1PQ = (A+D_1P)^*(I+PQ)-PQ(A^*+D_2Q)$, d'où (4.7). En portant (4.7) dans (4.5) on obtient enfin (4.8), la seule chose à vérifier étant que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I+PQ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (I+QP)^{-1} & Q(I+PQ)^{-1} \\ -P & I \end{pmatrix},$$

soit encore,

$$\begin{pmatrix} (I+QP)^{-1} & Q(I+PQ)^{-1} \\ -P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Q \\ P & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I+PQ \end{pmatrix}$$

ce qui est immédiat, sachant que $Q(I+PQ)^{-1} = (I+QP)^{-1}Q$. □

<u>Lemme 4.1.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.2), (4.3), Soit $P \in \mathcal{S}_+$ et $A_P = A+D_1P$. Il existe une décomposition de A_P associée à une décomposition de H telle que:

$$H = H_- \oplus H_+$$

la restriction de e^{-A_pt} a H_- est un semigroupe de type négatif, la restriction de e^{-A_pt} a H_+ est un groupe de type négatif pour $t \leq 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que

$$(4.9)\quad \begin{cases} \exists\rho > 0,\ \beta > 0, \text{ le spectre de } -A_p \text{ est contenu dans le} \\ \text{secteur du plan complexe} \\ \sigma = \{z \mid \mathrm{Re}(z-\rho) \leq 0,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq \beta|\mathrm{Re}(z-\rho)|\}. \end{cases}$$

Les espaces V et H sont supposés complexifiés. Le calcul qui a conduit à (3.9) est encore valable et on a ici:

$$(4.10)\quad \forall h \in \mathcal{D}_p = D(A_p),\ \mathrm{Re}(T_\mu A_p h,h)+\lambda(|h|^2+|Ph|^2) \geq \frac{\alpha}{2}(\|h\|^2+\|Ph\|^2),$$

comme $P \in \mathcal{L}(H;H)$ et $T_\mu^{-1/2}$ existe: $\exists c_1 > 0,\ c_2 = \frac{\alpha}{2},\ \forall h \in \mathcal{D}_p$: $\mathrm{Re}(T_\mu A_p h,h)+c_1|T^{1/2}h|^2 \geq c_2\|h\|^2$. $\mathcal{D}_p$ étant dense dans V on peut étendre cette inégalité à V et posant $\bar{h} = T^{1/2}h$, il vient: $\mathrm{Re}(T_\mu^{1/2}A_pT_\mu^{-1/2}\bar{h},\bar{h})+c_1|\bar{h}|^2 \geq c_2\|T^{-1/2}\bar{h}\|^2 \geq c_3\|h\|^2$, $\forall h \in V$. On déduit de là (cf. par exemple [3]) que $T_\mu^{1/2}A_pT_\mu^{-1/2}+z$ a un inverse continu pour les z extérieurs à un secteur du type (4.9). La même propriété vaut donc pour A_p+z, d'où la localisation du spectre annoncée en (4.9).

Montrons maintenant que le spectre $\sigma(-A_p)$ de $-A_p$ vérifie:

$$(4.11)\quad \begin{cases} \sigma(-A_p) = \sigma_- \cup \sigma_+ \quad \text{ou} \quad \sigma_- = \{z \mid z \in \sigma(-A_p),\ \mathrm{Re}\, z < 0\} \\ \sigma_+ = \{z \mid z \in \sigma(-A_p),\ \mathrm{Re}\, z > 0\} \quad \text{et} \quad \sigma_+ \text{ est borné.} \end{cases}$$

De (4.2) et (4.8) il résulte immédiatement:

$$\forall\theta \in R,\ A_p+\theta i \text{ est inversible et } (A_p+\theta i)^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

L'axe imaginaire est dans l'ensemble résolvant de A_p ce qui prouve que $\sigma(-A_p) = \sigma_- \cup \sigma_+$ et σ_+ étant contenu dans le triangle délimité par le secteur σ et l'axe imaginaire ou étant vide est borné. Enfin l'ensemble résolvant étant ouvert on peut trouver un voisinage de chacun des points du segment S de l'axe imaginaire contenu dans σ. S étant compact on peut le recouvrir avec un nombre fini d'ouverts contenus dans l'ensemble résolvant et donc:

$$(4.12)\quad \begin{cases} \text{Il existe } \Gamma, \text{ fermée régulière, dans l'ensemble résolvant} \\ \text{et entourant } \sigma_+.\ \sigma_- \text{ est à l'extérieur de } \Gamma \text{ et } \exists \omega > 0 \\ \text{tel que } \forall z \in \sigma(-A_p),\ |\mathrm{Re}\, z| \geq \omega. \end{cases}$$

On peut alors appliquer les résultats sur la décomposition des opérateurs fermés associés à une propriété de séparation du spectre du type (4.11), (4.12) (cf. [3], p.178).

A_p étant réel, en ce sens que $\overline{A_p \varphi} = A_p \bar{\varphi}$, $\forall \varphi \in$ complexifié du domaine, on vérifie facilement que les projecteurs associés à cette décomposition sont aussi réels. Par exemple soit

$$\Pi_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (A_p + \xi)^{-1} d\xi, \quad \text{on a,} \quad \forall \varphi, \psi \in H:$$

$$\overline{(\Pi_+ \varphi, \psi)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\Gamma}} \overline{((A_p+\xi)^{-1}\varphi, \psi)}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\Gamma}} ((A_p+\xi)^{-1}\bar{\varphi}, \bar{\psi}) d\xi$$

mais A_p étant réel $\sigma(-A_p)$ est symétrique par rapport à l'axe réel et on peut choisir Γ de même. Donc $\int_{\bar{\Gamma}} = -\int_\Gamma$ (le sens de parcours change sur $\bar{\Gamma}$), d'où:

$$\overline{(\Pi_+ \varphi, \psi)} = (\Pi_+ \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \quad \text{et donc} \quad \overline{\Pi_+ \varphi} = \Pi_+ \bar{\varphi}.$$

On a donc la décomposition de H annoncée dans le lemme. De plus, la restriction de A_p à $H_+ = \mathrm{Im}\,\Pi_+$ étant bornée (cf. KATO, loc.cit.), la restriction de e^{-A_pt} à H_+ est un groupe. Il reste à vérifier l'assertion sur le type des semigroupes restrictions. A_p^+, restriction de A_p à H_+ étant bornée, on a, avec (4.12):

$$(4.13) \qquad |e^{-A_p^+t}|_{\mathcal{L}(H_+;H_+)} \le M_+e^{\omega t}, \qquad \forall t \le 0$$

car $\inf\limits_{z\in\sigma_+} \mathrm{Re}\,z > \omega$.

$-A_p^-$ génère un semigroupe analytique sur H_- comme on le voit avec la formule $e^{-A_p^-t}h = e^{-A_pt}h$, $\forall t \ge 0$, $\forall h \in H_-$ et $\sup\limits_{z\in\sigma_-} \mathrm{Re}\,z < \omega$, alors (cf [13]):

$$(4.14) \qquad |e^{-A_p^-t}|_{\mathcal{L}(H_-;H_-)} \le M_-e^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0,$$

le lemme est démontré. □

<u>Lemme 4.2</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.2), (4.3), $\forall P \in \mathcal{S}_+$, $\forall h \in H$, $P^{1/2}e^{-(A+D_1P)t}h \to 0$ dans H quand $t \to +\infty$.

<u>Démonstration</u>. On a vu au cours de la démonstration du théorème 3.2 que $\forall h \in H$ (on pose $A_p = A+D_1P$):

$$(Ph,h)-(Pe^{-A_pt}h,e^{-A_pt}h) = \int_0^t\{|C\gamma(v_p)|_F^2+(Nv_p,v_p)_E\}d\tau$$

est positif croissant majoré. Il existe donc $D \in \mathcal{L}(H;H)$, $D = D^* \ge 0$, $(D\bar{h},\bar{h}) = \lim\limits_{t\to\infty} [Pe^{-A_pt}\bar{h},e^{-A_pt}\bar{h})$, $\forall \bar{h} \in H$ (limite d'une suite décroissante d'opérateurs positifs). Pour $\bar{h} = e^{-A_ps}h$, il vient:

$$(4.15) \qquad (Dh,h) = (De^{-A_ps}h,e^{-A_ps}h), \qquad \forall h \in H, \quad \forall s \ge 0,$$

grâce à (4.14), on déduit de là: $(Dh,h) = 0$, $\forall\, h \in H_-$, d'où $D^{1/2}h = 0$ et $Dh = 0$ $\forall h \in H_-$.

Prenant $h = e^{A_p^+ s}\bar{h}$, $\bar{h} \in H_+$ dans (4.15), il vient:

$$(De^{A_p^+ s}\bar{h}, e^{A_p^+ s}\bar{h}) = (D\bar{h},\bar{h}),\ \forall\bar{h} \in H_+,\ \forall s \geq 0$$

d'où, en passant à la limite quand $s \to +\infty$, il vient avec le lemme 4.1: $(D\bar{h},\bar{h}) = 0$ $\forall\bar{h} \in H_+$, d'où $D\bar{h} = 0$, $\forall\bar{h} \in H_+$ et donc puisque $H = H_- \oplus H_+$: $D = 0$. Ainsi $\lim\limits_{t\to\infty}|P^{1/2}e^{-A_p t}h|^2 = 0$ dans H $\forall h \in H$, d'où le lemme. □

Démonstration du théorème 4.1. Soit $P \in \mathcal{S}_+$. (A,B) est donc C-stabilisable et il existe P_o comme dans le théorème 2.1. On a $PA+A^*P+PD_1P = P_oA+A^*P_o+P_oD_1P_o = D_2$ dans $\mathcal{L}(V;V')$ notons $\Delta = P-P_o$ il vient: $\Delta(A+D_1P_o)+(A+D_1P_o)^*\Delta+\Delta D_1\Delta = 0$ soit encore $\frac{d}{dt}(\Delta e^{-A_{P_o}t}h,e^{-A_{P_o}t}h) = -(D_1\Delta e^{-A_{P_o}t}h,e^{-A_{P_o}t}h)$, d'où:

$$(4.16)\quad (\Delta h,h) = (\Delta e^{-A_{P_o}t}h,e^{-A_{P_o}t}h) - \int_0^t(D_1\Delta e^{-A_{P_o}t}h,e^{-A_{P_o}t}h)dt,\quad \forall h \in H.$$

Nous allons montrer:

$$(4.17)\quad \forall h \in H,\ \lim_{t\to\infty}(\Delta e^{-A_{P_o}t}h,\ e^{-A_{P_o}t}h) = 0 \quad \text{dans } H.$$

D'après le théorème 2.1 (ou le lemme 4.2) on sait que $P_o^{1/2}e^{-A_{P_o}t}h \to 0$, il faut donc étudier la limite de $P^{1/2}e^{-A_{P_o}t}h$. Soit $Q \in \mathcal{T}_+$. D'après (4.7) du théorème 4.2, on a:

$$A^*+D_2Q = (I+P_oQ)^{-1}A^*_{P_0}(I+P_oQ) = (I+PQ)^{-1}A^*_p(I+PQ)$$

d'où $A^*_p = (I+PQ)(I+P_oQ)^{-1}A^*_{P_o}(I+P_oQ)(I+PQ)^{-1}$ et donc

$$e^{-A_p t}h = (I+QP)^{-1}(I+QP_o)e^{-A_{P_o}t}(I+QP_o)^{-1}(I+QP)h,\quad \forall h \in H$$

comme $P_oe^{-A_{P_o}t}h$ et $Pe^{-A_p t}h \to 0$ $\forall h \in H$, on a:

$P^{1/2}(I+QP)^{-1}e^{-A_{P_o}t}h \to 0$ (car $(I+QP_o)^{-1}(I+QP)$ est un isomorphisme sur H).

Comme $P(I+QP)^{-1} = (I+PQ)^{-1}P$, il vient: $(I+PQ)^{-1}Pe^{-A_{P_o}t}h \to 0$ dans H quand $t \to +\infty$; d'où:

$$(4.18)\qquad Pe^{-A_{P_o}t}h \to 0 \quad \text{dans H quand} \quad t \to +\infty.$$

Mais $(I+QP)^{-1} = I-Q(I+PQ)^{-1}P$ et on a donc:

$(P^{1/2}-P^{1/2}Q(I+PQ)^{-1}P)e^{-A_{P_o}t}h \to 0$, d'où, avec (4.18):

$P^{1/2}e^{-A_{P_o}t}h \to 0$ dans H quand $t \to +\infty$ et donc (4.17) est démontré.

On déduit de là et de (4.16) que

$$(\Delta h,h) \leq 0 \quad \forall h \in H.$$

Mais, d'après le lemme 4.2 et le théorème 2.1: $(\Delta h,h) = J(v_P)-J(v_{P_o}) \geq 0$, d'où $(\Delta h,h) = 0$ et donc $P = P_o$. Le théorème est démontré. □

Considérons les conditions d'optimalité du problème sur [0,T] analogue à (1.3), (1.4), (1.5) (système (2.8)).

$$(4.19)\quad \begin{cases} y'+Ay+D_1p = 0 & y,p \in L^2(0,T;V) \\ -p'+A^*p-D_2y = 0 & \\ y(0)=h,\ p(T)=0, & h \in H. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $P_+ \in \mathcal{S}$ et $Q \in \tilde{\mathcal{S}}_+$. Une conséquence immédiate du théorème 4.2 est alors le

<u>Corollaire 4.1</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.3), la solution de (4.19) est caractérisée par le système suivant:

$$(4.20)\quad \begin{cases} \varphi'+A_P\varphi = 0 \\ -\psi'+A_Q\psi = 0 \\ \varphi(0)-Q\psi(0)=h,\ P\varphi(T)+\psi(T) = 0 \end{cases}$$

où on a noté $A_p = A+D_1P$ et $A_Q = A^*+D_2Q$ et y,p sont donnés par:

$$(4.21)\quad \begin{cases} y(t) = \varphi(t)-Q\psi(t) \\ p(t) = P\varphi(t)+\psi(t) \qquad \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

L'opérateur de découplage $P_T(t)$ défini par $P_T(0)h = p(0)$ est alors donné par:

$$(4.22)\quad \begin{cases} P_T(t) = (P-e^{-A_Q(T-t)}Pe^{-A_P(T-t)})(I+Qe^{-A_Q(T-t)}Pe^{-A_P(T-t)})^{-1} \\ \text{égalité dans } \mathcal{L}(H;H), \quad \forall t \le T. \end{cases}$$

Démonstration. (4.20), (4.21) est une conséquence immédiate de (4.4) et (4.5). On a alors:

$$\psi(T) = -Pe^{-A_PT}\varphi(0) \quad \text{et} \quad (I+Qe^{-A_QT}Pe^{-A_PT})\varphi(0) = h$$

ce qui montre l'inversibilité de $I+Qe^{-A_QT}Pe^{-A_PT}$ sur H car (4.20) a une solution unique dépendant continûment de h. Ainsi $\varphi(0) = (I+Qe^{-A_QT}Pe^{-A_PT})^{-1}h$ et $P_T(0)h = P\varphi(0)+\psi(0) = (P-e^{-A_QT}Pe^{-A_PT})\varphi(0)$, d'où (4.22) sachant que (invariance du problème de contrôle par translation dans le temps): $P_T(t) = P_{T-t}(0)$. □

Remarque 4.1. Les théorèmes 3.1 (existence et regularité de la solution de l'équation de Riccati) et 4.1 (unicité de cette solution lorsque (A^*,C^*) est B^*-stabilisable) complètent ceux connus à ce jour pour les systèmes éventuellement instables en boucle ouverte ($\lambda\neq 0$) et contrôlés par le bord (B éventuellement non borné dans H).

De plus le résultat d'unicité du théorème 4.1 semble nouveau même pour les systèmes de dimension finie pour lesquels on supposait, pour avoir l'unicité que (A,C) est détectable ce qui équivaut à (A^*,C^*) I-stabilisable, hypothèse plus forte que celle du théorème. En particulier cela améliore dans ce cadre le résultat de [13]. Nous donnerons d'ailleurs par la suite, pour des systèmes moins généraux que ceux définis par (1.1), (1.2), (4.2), (4.3), la condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution de l'équation de Riccati ([9]). □

<u>Remarque 4.2.</u> Les transformations du type (4.20), (4.21) de (4.19) permettent d'étudier la régularité de $P_T(t)$. Nous allons en voir un exemple qui sera utile par la suite.

Remarquons aussi que les autres opérateurs intervenant dans le problème sur $[0,T]$ (opérateur d'évolution de l'état par exemple) s'expriment à l'aide de $P,Q,e^{-A_P t},e^{-A_Q t}$. □

<u>Corollaire 4.2.</u> Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (4.3), P défini au théorème 2.1 vérifie: $\forall h \in H$, $\forall t > 0$, $\lim_{T\to+\infty} (P_T(t)-P)h = 0$ dans $D(A_P^*)$ faible.

<u>Démonstration.</u> Reprenons le système (4.20) en changeant ψ en $(I+PQ)^{-1}\psi$ et en utilisant (4.7), il vient:

La solution de (4.19) est caractérisée par le système suivant:

$$(4.23) \quad \begin{cases} \varphi'+A_P\varphi = 0 \\ -\psi'+A_P^*\psi = 0 \\ \varphi(0)-Q(I+PQ)^{-1}\psi(0) = h, \quad P\varphi(T)+(I+PQ)^{-1}\psi(T) = 0 \end{cases}$$

et y,p sont donnés par:

$$(4.24)\quad \begin{cases} y(t) = \varphi(t)-Q(I+PQ)^{-1}\psi(t) \\ P(t) = P\varphi(t)+(I+PQ)^{-1}\psi(t) \end{cases}$$

On a donc:

$$P_T(0)h = P\varphi(0)+(I+PQ)^{-1}\psi(0) = Ph+PQ(I+PQ)^{-1}\psi(0) + (I+PQ)^{-1}\psi(0)$$

d'où: $P_T(0)h = Ph + \psi(0)$

mais $\psi(0) = e^{-A_p^*T}\psi(T) = -e^{-A_p^*T}(I+PQ)Pe^{-A_pT}\varphi(0)$ et $\varphi(0) =$

$(I+Q(I+PQ)^{-1}(P_T(0)-P))h = (I+QP)^{-1}(I+QP_T(0))h$ d'où $\forall h \in H$:

$$(4.25)\quad (P-P_T(0))h = e^{-A_p^*T}(I+PQ)Pe^{-A_pT}(I+QP)^{-1}(I+QP_T(0))h$$

d'où $(P-P_T(0))h = e^{-A_p^*T}P^{1/2}(I+P^{1/2}QP^{1/2})P^{1/2}e^{-A_pT}u(T)$ et $u(T) \to h$ dans H quand $T \to +\infty$ car d'après la démonstration du théorème 2.1, $P_T(0)h \to Ph$. D'autre part on sait (sans faire appel au lemme 4.2, mais en utilisant (2.26) que: $P^{1/2}e^{-A_pT}h \to 0$ dans H et donc $e^{-A_p^*(T-\tau)}P^{1/2}h \to 0$ dans H faible quand $T \to +\infty$ avec $\tau > 0$, d'où, $e^{-A_p^*t}$ étant analytique, $e^{-A_p^*\tau} \in \mathcal{L}(H;D(A_p^*))$ et il vient:

$\forall h \in H$, $(P-P_T(0))h \to 0$ dans $D(A_p^*)$ faible quand $T \to +\infty$.

Le corollaire est démontré. □

5. APPLICATIONS (I): ALGORITHMES DE CALCUL DE P ET DE Q

Nous démontrons ici des relations conduisant à des algorithmes de calcul de P et Q. Pour les systèmes de dimension finie ces algorithmes (ou des variantes) sont connus sous le nom de "Integration free algorithms" cf. [2], [5] et leurs bibliographies.

Introduisons quelques notations liées à l'invariance de la solution du système d'optimalité (4.19) par translation dans le temps: Il est clair que $P_T(t)$ ne dépend que de T-t et nous noterons:

(5.1) $\quad P(t) = P_T(T-t)$

(5.2) $\quad \Phi(t)h = y_t(t)$

où y_t est solution du système analogue à (4.19) posé sur l'intervalle $[0,t]$ avec $y_t(0) = h$.

Par analogie on définit aussi

(5.3) $\quad Q(t) = Q_o(t)$

(5.4) $\quad \Psi(t)k = p_t(0)$

où p_t et $Q_o(t)$ sont ainsi définis: on résout

$$\begin{cases} y_t'+Ay_t+D_1p_t = 0 \\ -p_t'+A^*p_t-D_2y_t = 0 \\ y_t(0) = 0, \quad p_t(t) = k \end{cases}$$

système analogue à (4.19) par permutation de A et A* d'une part, de D_1 et D_2 d'autre part et changement de τ (le temps courant) en $t-\tau$. On pose alors $Q_o(t)k = -y_t(t)$ et on vérifie facilement, qu'en particulier, sous les hypothèses (1.1), (1.2)

$$Q(t) \in \mathcal{L}(H;H) \quad \text{et} \quad Q(t) = Q(t)^* \geq 0.$$

<u>Théorème 5.1</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), $P(.)$, $Q(.)$ $\Phi(.)$ et $\Psi(.)$ définis en (5.1),...,(5.4) vérifient:

$$P(t) = P(t-s)+\psi(t-s)(I+P(s)Q(t-s))^{-1}P(s)\phi(t-s) \tag{5.5}$$

$$Q(t) = Q(t-s)+\phi(t-s)(I+Q(s)P(t-s))^{-1}Q(s)\psi(t-s) \tag{5.6}$$

$$\Phi(t) = \phi(t-s)(I+Q(s)P(t-s))^{-1}\phi(s) \tag{5.7}$$

$$\Psi(t) = \psi(t-s)(I+P(s)Q(t-s))^{-1}\psi(s) \tag{5.8}$$

$\forall t \geq s \geq 0$, égalités dans $\mathcal{L}(H;H)$.

<u>Démonstration</u>. Soient (y_t,p_t) et (y_{t-s},p_{t-s}) les solutions de (4.19) écrit respectivement sur $[0,t]$ et $[0,t-s]$. Posons

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = y_t(\tau)-y_{t-s}(\tau) \\ \psi(\tau) = p_t(\tau) - p_{t-s}(\tau) \qquad \forall\tau \in [0,t-s] \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \varphi'+A\varphi+D_1\psi = 0, \ -\psi'+A^*\psi-D_2\varphi=0, \quad \varphi,\psi \in L^2(0,t-s;V) \\ \varphi(0) = 0, \ \psi(t-s) = p_t(t-s) = P_t(t-s)y_t(t-s) = P(s)y_t(t-s) \end{cases}$$

et $(P(t)-P(t-s))h = \psi(0)$, d'où:

$$(P(t)-P(t-s))h = \Psi(t-s)P(s)y_t(t-s). \tag{5.9}$$

Calculons maintenant $y_t(t-s)$.

La restriction de (y_t,p_t) à $[0,t-s]$, encore notée (y_t,p_t) peut s'écrire $y_t = y_1+y_2$, $p_t = p_1+p_2$ avec:

$$\begin{cases} y_i'+Ay_i+D_1p_i = 0, \ -p_i'+A^*p_i-D_2y_i = 0, \quad y_i,p_i \in L^2(0,t-s;V) \\ i = 1,2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = h, \ p_1(t-s) = 0, \ y_2(0) = 0, \ p_2(t-s) = P(s)y_t(t-s).$$

On a alors $y_1(t-s) = \phi(t-s)h$ et $y_2(t-s) = -Q(t-s)P(s)y_t(t-s)$ d'où $(I+Q(t-s)P(s))y_t(t-s) = \phi(t-s)h$ mais on montrera le lemme suivant: si $R,S \in \mathcal{L}(H;H)$, $R = R^* \geq 0$, $S = S^* \geq 0$ alors $(I+RS)^{-1} \in \mathcal{L}(H;H)$, d'où:

(5.10) $\quad y_t(t-s) = (I+Q(t-s)P(s))^{-1}\phi(t-s)h$

et avec (5.9) il vient $\forall h \in H$, $\forall t \geq s \geq 0$

(5.11) $\quad (P(t)-P(t-s))h = \Psi(t-s)P(s)(I+Q(t-s)P(s))^{-1}\phi(t-s)h$

ce qui peut encore s'écrire comme en (5.5). De la même manière on montre (5.6).

Il est clair que $\phi(t)h = y_t(t) = \phi(s)y_t(t-s) = \phi(s)(I+Q(t-s)P(s))^{-1}\phi(t-s)h$, d'où (5.7) en changeant s en t-s et (5.8) s'obtient de la même façon.

Le théorème est démontré sous réserve de la vérification du lemme. □

<u>Lemme 5.1.</u> Soient $R,S \in \mathcal{L}(H;H)$, $R = R^* \geq 0$, $S = S^* \geq 0$ alors $I+RS$ est un isomorphisme sur H.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de montrer que pour $\mu > 0$ assez grand, $T_\mu = (I+\mu S)(I+RS)$ est un isomorphisme sur H. Or $(T_\mu\varphi,\varphi) = |\varphi|^2 + \mu|R^{1/2}S\varphi|^2 + \mu(S\varphi,\varphi) + (S\varphi,R\varphi)$ et $|(S\varphi,R\varphi)| \leq c|\varphi||S^{1/2}\varphi| \leq \frac{1}{2}|\varphi|^2 + \frac{c^2}{2}|S^{1/2}\varphi|^2$ avec $c = |R||S^{1/2}|$ et $\varphi \in H$, d'où: $(T_\mu\varphi,\varphi) \geq \frac{1}{2}|\varphi|^2 + \mu|R^{1/2}S\varphi|^2 + (\mu-\frac{c^2}{2})(S\varphi,\varphi) \geq \frac{1}{2}|\varphi|^2$ pour $\mu \geq \frac{c^2}{2}$, d'où le lemme. □

<u>Algorithme 5.1</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2) soit $\delta > 0$ et supposons connus $P(\delta)$, $Q(\delta)$, $\phi(\delta)$, $\Psi(\delta)$ alors, $\forall k \in N$

(5.12) $$P((k+1)\delta) = P(\delta)+\psi(\delta)(I+P(k\delta)Q(\delta))^{-1}P(k\delta)\phi(\delta).$$

<u>Démonstration</u>. On pose $t = (k+1)\delta$ et $s = k\delta$ dans (5.5). □

On peut donner à cet algorithme une forme plus symétrique qui va résulter du

<u>Théorème 5.2</u>. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), on a:

(5.13) $$\Psi(t) = \phi(t)^*, \quad \forall t \geq 0$$

(5.14) $$P(t) = P(t-s)+\phi^*(t-s)(I+P(s)Q(t-s))^{-1}(P(s)+P(s)Q(t-s)P(s)) \times(I+P(s)Q(t-s))^{-1*}\phi(t-s)$$

(5.15) $$Q(t) = Q(t-s)+\phi(t-s)(I+Q(s)P(t-s))^{-1}(Q(s)+Q(s)P(t-s)Q(s)) \times(I+Q(s)P(t-s))^{-1}*\phi^*(t-s).$$

<u>Démonstration</u>. Montrons (5.13). Soient (y_i,p_i), $i=1,2$ solutions de y_i, $p_i \in L^2(0,t;V)$, $i=1,2$

$$\begin{cases} y_i'+Ay_i+D_1p_i = 0, & -p_i'+A^*p_i-D_2y_i = 0, \quad i=1,2 \\ y_1(0) = h,\ p_1(t) = 0, & y_2(0) = 0,\ p_2(t) = k \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
(\phi(t)h,k) &= (y_1(t),p_2(t)) = (y_1(0),p_2(0))+\int_0^t \frac{d}{d\tau}(y_1,p_2)d\tau \\
&= (h,\Psi(t)k)+\int_0^t(-Ay_1-D_1p_1,p_2)+\int_0^t(y_1,A^*p_2-D_2y_2) \\
&= (h,\Psi(t)k)-\int_0^t(D_1p_1,p_2)-\int_0^t(D_2y_2,y_1) \\
&= (h,\Psi(t)k)+\int_0^t(p_1,y_2'+Ay_2)-\int_0^t(y_2,-p_1'+A^*p_1) \\
&= (h,\Psi(t)k)+(p_1,y_2)]_0^t = (h,\Psi(t)k), \text{ d'où (5.13).}
\end{aligned}$$

(5.14) résulte alors de (5.5), (5.13) et du fait que

$(I+P(s)Q(t-s))^{-1}P(s) = (I+P(s)Q(t-s))^{-1}P(s)(I+Q(t-s)P(s))(I+Q(t-s)P(s))^{-1}$.

(5.15) est l'analogue de (5.14) pour $Q(t)$, d'où:

Algorithme 5.2. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soit $\delta > 0$ et supposons connus $P(\delta)$, $Q(\delta)$, $\phi(\delta)$, alors, $\forall k \in N$:

$$P((k+1)\delta) = P(\delta)+\phi^*(\delta)R_k^*(P(k\delta)+P(k\delta)Q(\delta)P(k\delta))R_k\phi(\delta)$$

avec $R_k = (I+Q(\delta)P(k\delta))^{-1}$.

Algorithme 5.3. ("Integration-free interval doubling algorithm): Sous les hypothèses (1.1), (1.2), soit $\delta > 0$ et supposons connus $P(\delta)$, $Q(\delta)$, $\phi(\delta)$, alors, $\forall k \in N$:

$$P(2^{k+1}\delta) = P(2^k\delta)+\phi^*(2^k\delta)R_k^*(P(2^k\delta)+P(2^k\delta)Q(2^k\delta)P(2^k\delta))Rk\phi(2^k\delta)$$

$$Q(2^{k+1}\delta) = Q(2^k\delta)+\phi(2^k\delta)R_k(Q(2^k\delta)+Q(2^k\delta)P(2^k\delta)Q(2^k\delta))R_k^*\phi^*(2^k\delta)$$

$$\phi(2^{k+1}\delta) = \phi(2^k\delta)R_k\phi(2^k\delta)$$

avec $R_k = (I+Q(2^k\delta)P(2^k\delta))^{-1}$.

Théorème 5.3. Sous les hypothèses (1.1), (1.2), lorsque (A,B) est C-stabilisable, $P(k\delta)$ donné par l'algorithme 5.2 converge vers P introduit au théorème 2.1 au sens suivant:

$$\forall h \in H \lim_{k\to\infty} P(k\delta) = Ph \quad \text{dans } H.$$

Lorsque, de plus, (A^*, C^*) est B^*-stabilisable, $P(2^k\delta)$ et $Q(2^k\delta)$ donnés par l'algorithme 5.3 vérifient (Q étant l'analogue de P dans $\tilde{\mathcal{X}}_+$):

$$\forall h \in H \lim_{k\to\infty} P(2^k\delta)h = Ph, \lim_{k\to\infty} Q(2^k\delta)h = Qh \quad \text{dans } H.$$

6. APPLICATIONS (II): UN EXEMPLE AVEC CONTROLE ET OBSERVATION FRONTIERE

Donnons un exemple de la situation précédente. Soit Ω un ouvert de R^n, Γ sa frontière et:

$$Q = \Omega \times]0,\infty[$$

$$\Sigma = \Gamma \times]0,\infty[$$

Nous supposerons:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \text{La frontière } \Gamma \text{ de } \Omega \text{ est une variété indéfiniment différentiable} \\ \text{de dimension } (n-1),\ \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma. \\ \text{De plus } \Omega \text{ est borné.} \end{cases}$$

Soient a_{ij} des fonctions sur Ω avec:

$$(6.2)\quad \begin{cases} a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha > 0,\ \forall \xi_i \in R, \text{ p.p. dans } \Omega . \end{cases}$$

On prend

$$(6.3)\qquad V = H^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega).$$

Définissons maintenant une forme bilinéaire continue sur V:

$$(6.4)\qquad a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\ \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx,\quad \forall\varphi,\psi \in H^1(\Omega).$$

On prend

$$(6.5)\qquad E = F = L^2(\Gamma).$$

L'état $y(v)$ est la solution dans $L^2_{loc}(0,\infty;H^1(\Omega))$ de:

$$(6.6)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(y(v),\varphi)+a(y(v),\varphi) = (v(t),\varphi_{\Gamma})_{L^2(\Gamma)}, & \forall\varphi \in H^1(\Omega), \text{ p.p. sur }]0,\infty[\\ y(v)\big|_{t=0} = y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $v \in L^2(\Gamma)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$.

(5.6) s'interprète ainsi (cf. par exemple [6]):

$$(6.7)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}y(v) + Ay(v) = 0, \text{ dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v) = v, \text{ dans } \Sigma \\ y(v)\big|_{t=0} = y_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec

$$(6.8)\quad \begin{cases} A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A} = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\cos(\vec{n},x_i) \\ \cos(\vec{n},x_i) = i^{\text{ieme}} \text{ cosinus directeur de la normale } \vec{n} \text{ à } \Gamma \text{ extérieure à } \Omega . \end{cases}$$

Le critère à minimiser est

$$(6.9)\quad J(v) = \int_0^\infty |y(v)_{|\Gamma}|^2_{L^2(\ )}\,dt + \nu\int_0^\infty |v|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt, \qquad \nu > 0.$$

On a pris ici:

$C\varphi = \varphi_{|\Gamma}$, $\forall\varphi \in H^1(\Omega)$

$(Bv,\varphi) = \int_\Gamma v\varphi_{|\Gamma}d\Gamma$, $\forall v \in L^2(\Gamma)$, $\forall\varphi \in H^1(\Omega)$

$N = \nu$ (identité)

B est le transposé de l'operateur trace, d'où:

$$(6.10)\quad B \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma), H^r(\Omega)') \quad \text{pour tout} \quad r > 1/2.$$

Les hypothèses (1.1), (1.2) sont vérifiées. Montrons le:

Lemme 6.1. Sous les hypothèses (6.1), (6.2) la paire (A,B) est stabilisable.

Démonstration. Considérons le système suivant:

$$(6.11)\quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}+Ay = 0, \text{ dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + y = 0, \text{ sur } \Sigma \\ y\big|_{t=0} = y_0, \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

ou plus précisément, l'équation

$$(6.12)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(y,\varphi)+a(y,\varphi)+(y\big|_\Gamma,\varphi)_{L^2(\Gamma)} = 0, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega) \\ y\big|_{t=0} = y_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On a:

$$a(\varphi,\varphi)+|\varphi_{|\Gamma}|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \mathrm{Min}(\alpha,1)\,[\int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 dx + \int_\Gamma |\varphi_{|\Gamma}|^2 d\Gamma], \ \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

Alors si nous montrons que:

$$(6.13)\quad \begin{cases} \exists c > 0, \ \forall\varphi \in H^1(\Omega) \\ c\int_\Omega |\varphi|^2 dx \leq \int_\Gamma |\varphi_{|\Gamma}|^2 d\Gamma + \int_\Omega \sum_{i=1}^2 |\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|^2 dx, \end{cases}$$

on aura:

$$a(\varphi,\varphi)+|\varphi_{|\Gamma}|^2_{L^2(\Gamma)} \geq m\|\varphi\|^2, \ \forall\varphi \in H^1(\Omega), \text{ pour un } m > 0,$$

de sorte que (6.12) aura une solution y vérifiant: $y \in L^2(0,\infty;H^1(\Omega))$, $y' \in L^2(0,\infty;(H^1(\Omega))')$, alors: $v = -y_{|\Sigma}$ (y, solution de (6.12) $\in L^2(\Sigma)$ (en particulier) et v stabilisera y_0.

Il suffit donc de vérifier (6.13) qui est du type inégalité de Poincaré. Ω étant très régulier, on se ramène, par cartes locales à vérifier (6.13) pour les fonctions de $H^1(Q^+)$ où

$$Q^+ = \{y \in]-1,+1[^n,\ y_n > 0\}$$

Notant $y = (y',y_n)$, il vient:

$$|\varphi(y',y_n)|^2 = |\varphi(y',0)|^2 + \int_0^{y_n} \frac{\partial}{\partial\xi}|\varphi(y',\xi)|^2 d\xi \le |\varphi(y',0)|^2 + 2\varepsilon\int_0^1 |\varphi(y',\xi)|^2 d\xi$$
$$+ \frac{2}{\varepsilon}\int_0^1 \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(y',\xi)\right|^2 d\xi \qquad (\varepsilon > 0)$$

d'où:

$$(1-2\varepsilon)\int_{Q^+} |\varphi(y)|^2 dy \le c \int_{]-1,+1[^{n-1}} |\varphi(y',0)|^2 dy' + \frac{2}{\varepsilon}\int_{Q^+} \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(y',\xi)\right|^2 d\xi dy'$$

qui est de la forme (6.13) pour $\varepsilon < 1/2$. □

Nous allons appliquer les résultats précédents, on a le:

<u>Théorème 6.1</u>. Sous les hypothèses (6.1), (6.2), le problème de contrôle associé à (6.7), (6.9) a une solution unique

$$u(t) = -\frac{1}{\nu}(Py(u,t))|_\Gamma, \qquad \forall t > 0$$

où $P \in (L^2(\Omega);L^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega))$ est l'unique solution symétrique semi définie positive (au sens des opérateurs de $\mathcal{L}(L^2(\Omega);L^2(\Omega))$ de l'équation de Riccati stationnaire:

$$(6.1\ )\ \begin{cases} PA+A^*P+PD_1P = D_2 \\ \text{égalité dans } \mathcal{L}(H^1(\Omega);\ (H^1(\Omega))'). \end{cases}$$

Démonstration. Les propriétés d'existence (de u et de P) résultent immédiatement du lemme 6.1 et du théorème 3.1.

Remarquant que l'on a ici $D_1 = D_2$, on montre, comme au lemme 6.1 que (A^*,C^*) est stabilisable et donc $\mathcal{X}_+ \neq \phi$. L'unicité de la solution de (6.14) sera demontrée si on vérifie l'hypothèse (4.2). On a vu, au cours de la démonstration du lemme 6.1 que $\exists m > 0$

(6.15) $(A\varphi,\varphi) + (D_2\varphi,\varphi) \geq m\|\varphi\|^2, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega)$.

Reprenant la démonstration du lemme 3.2, on a donc ici, $\forall u \in V\times V$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_\mu u,u)_\bullet &= (Au_1,u_1)+(D_2u_1,u_1)+(A^*u_2,u_2)+(D_1u_2,u_2)+(\mu-1)(D_2u_1,u_1)\\&\quad+(\mu-1)(D_1u_2,u_2)+(D_1u_2,u_1)-(D_2u_1,u_2)\\&\geq \frac{m}{2}\|u\|_\bullet^2 + (\mu-1-\frac{|B|^2}{2m\nu})(D_1u_2,u_2) + (\mu-1-\frac{|C|^2}{2m})(D_2u_1,u_1) \geq \frac{m}{2}\|u\|_\bullet^2\ ,\end{aligned}$$

pour μ assez grand.

Les espaces V et H étant supposés complexifiés, on déduit de là pour $\theta \in R$:

$$\mathrm{Re}(M_\mu(\mathcal{A}+\theta i)u,u)_\bullet = \mathrm{Re}(\mathcal{A}_\mu u,u)_\bullet+\mathrm{Re}[\theta i(M_\mu u,u)_\bullet]$$

mais $(M_\mu u,u)_\bullet = |u|_\bullet^2+2\mu\mathrm{Re}(u_1,u_2)$, d'où $\mathrm{Re}(M_\mu(\mathcal{A}+\theta i)u,u)_\bullet \geq m\|u\|_\bullet^2$. (4.2) est donc vérifiée. Le théorème est démontré. □

Remarque 6.1. Si les a_{ij} et Γ sont plus réguliers, par exemple

(6.16) $a_{ij} \in C^2(\bar{\Omega})$, Γ deux fois continûment différentiable

P est alors dans ce cas "régularisant", on a:

(6.17) $P \in \mathcal{L}(L^2(\Omega);H^1(\Omega))$.

En effet, le système d'optimalité restreint à $[0,T]$, $T > 0$ s'interprète ainsi:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = 0 \quad \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + \frac{1}{\nu}p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} = y \quad \text{dans } \Sigma \\ y(0) = h, \quad p(T) = Py(T) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

et on a $y,p \in W(0,T)$ et $y(T) \in \mathcal{D}_P$ (propriété des semigroupes analytiques) et donc $p(T) \in \mathcal{D}_2$, d'où en particulier $y \in H^{1,1/2}(\Omega\times]0,T[)$ et $p(T) \in H^1(\Omega)$, d'où encore $\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} \in H^{1/2,1/4}(\Gamma\times]0,T[)$, d'où enfin $p \in H^{2,1}(\Omega\times]0,T[)$ et $P(0) \in H^1(\Omega)$, d'où (6.17). (Pour ces propriétés de régularité, cf. [7]).

Pour terminer nous donnons un résultat sur le comportement asymptotique de la solution des équations de Chandrasehkar associées à cet exemple et étudiées dans [8],[9]. Cela fournit un moyen de calculer P ou directement K, le gain optimal associé.

<u>Théorème 6.2.</u> Sous les hypothèses (6.1), (6.2), (6.16), P solution de (6.14) est déterminé de façon unique par le système suivant:

$$(6.18) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dt}(t) = L^*(t)\Lambda_{L^2(\Gamma)} L(t) \\ \frac{d}{dt}L(t) + L(t)(A+D_1P(t)) = 0 \\ P(0) = 0, \quad L(0) = C. \end{cases}$$

(6.19) $\quad P = \lim_{t\to+\infty} P(t)\varphi \quad \text{dans } H^1(\Omega), \quad \forall\varphi \in L^2(\Omega)$

les deux premières égalités ayant lieu dans $C^o([0,\infty[;\mathcal{L}(H^r(\Omega),H^r(\Omega)'))$ et $C^o(]0,\infty[;\mathcal{L}(H^1(\Omega);H^{3/2}(\Gamma)))$ respectivement, $\forall r > 1/2$. Le gain du feedback optimal, $K = \frac{1}{\nu}\Lambda^{-1}_{L^2(\Gamma)} B^*P$, est determiné de façon unique par le système suivant:

$$(6.20)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}K(t) = \frac{1}{\nu}\Lambda^{-1}_{L^2(\Gamma)} B^*L^*(t)\Lambda_{L^2(\Gamma)} L(t) \\ \frac{d}{dt}L(t)+L(t)(A+BK(t)) = 0 \\ K(0) = 0,\ L(0) = C \end{cases}$$

(6.21) $\quad K\varphi = \lim_{t\to+\infty} K(t)\varphi \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma),\ \forall\varphi \in L^2(\Omega),$

les deux premières égalités de (6.20) ayant lieu dans $C^o(]0,\infty[;\mathcal{L}(H^1(\Omega)';H^{3/2}(\Gamma)))$ et $C^o(]0,\infty[;\mathcal{L}(H^1(\Omega),H^{3/2}(\Gamma)))$ respectivement.

Démonstration. Avec les hypothèses faites, l'injection de V dans H est compacte et A_p^{-1} est donc un opérateur compact dans H. Il en est de même de A_p^{*-1} et donc l'injection de $D(A_p^*)$ dans V est compacte. On déduit de là et du corollaire 4.2 que (6.19) a lieu (utiliser aussi (6.17)). Mais on peut montrer (cf. [8]) que "$t \to P(t)=P_t(0)$" est l'unique solution de (6.18), les équations étant interprétées comme dans l'énoncé, la première partie des théorèmes en résulte.

(6.21) se déduit de (6.19) et du fait que $K(t) = \frac{1}{\nu}\Lambda^{-1}_{L^2(\Gamma)} B^*P(t)$ vérifie (6.20), (cf. encore [8]). Le théorème est démontré. □

On peut remarquer la conséquence suivante de la démonstration du théorème 6.1 (propriété de stabilité de l'état optimal)

<u>Proposition 6.1.</u> Sous les hypothèses (6.1), (6.2), $-(A+D_1P)$ génère un semigroupe analytique de type négatif, i.e. $\exists\omega > 0$, $M > 0$, $\forall h \in H$, $|y(t)| \leq Me^{-\omega t}|h|$, $\forall t \geq 0$.

<u>Démonstration.</u> On a vu au cours de la démonstration du théorème 6.1 que $\mathcal{A}\mu$ est $V\times V$ coercif pour μ assez grand. On peut alors prendre dans (3.9) (démonstration du théorème 3.1) $\lambda = 0$ et $T_\mu(A+D_1P)$ est donc V-coercif. La propriété est vraie pour la norme de H_μ et donc pour celle de H. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.BENSOUSSAN, M.C.DELFOUR, S.K.MITTER: livre à paraître.

[2] G.J.BIERMAN, G.S.SIDHU: Integration-free interval doubling for Riccati equation solutions, IEEE AC-22, no.5, october 1977.

[3] T. KATO: Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[4] H.J.KUIPER, S.M.SHEW: Strong solutions for infinite dimensional Riccati equations arising in transport theory. SIAM J.Math.Anal.Vol.11,no.2, 1980.

[5] D.G.LAINIOTIS: Partioned Riccati solutions and integration-free doubling algorithms, IEEE AC-21, no.5, october 1976.

[6] J.L.LIONS: Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, 1968.

[7] J.L.LIONS, E.MAGENES: Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[8] M. SORINE: Sur les équations de Chandrasekhar associées à des opérateurs non bornés. IRIA, Rapport no.267, 1977.

[9] M.SORINE: notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, CRAS t 285, Serie A-911, 1977 et CRAS t 287, Serie A-445, 1978.

[10] L. TARTAR: Sur l'étude directe d'équations non linéaires intervenant en théorie du contrôle optimal. J.of Func.Anal. 6, 1-47, 1977.

[11] J.L.A.YEBRA: Ciertos Sistemas de Tipo "Parabolico-Parabolico Retrogrado", These, Madrid, 1975.

[12] K.YOSIDA: Functional analysis, Springer-Verlag, New York, 1965.

[13] J.ZABCZYK: Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space. Applied Math. and Optim. Vol.2, No.3, 1975/1976.